

Géom II:

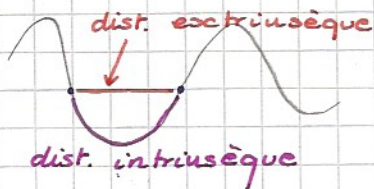
le 20.02.19

Géométrie Différentielle:

Intro:

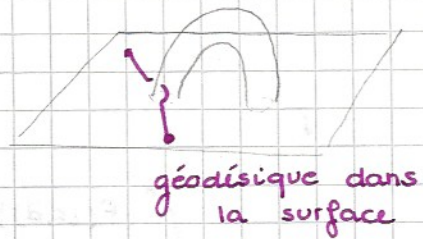
On va étudier les courbes et surfaces dans les espaces de dimension $n \geq 1$

Courbe en $\mathbb{R}^2$



$$d \geq d$$

Surface en $\mathbb{R}^2$



Points de vue:

Intrinsèque: dans l'espace lui-même

Extrinsèque: tangente, courbure, ... dans l'espace ambiant

Invariants extrinsèque: la droite tangente, les points d'inflexion, ...

Courbes et Paramétrisation:

Comment définir une courbe dans l'espace?

Déf: Un ensemble $C \subset \mathbb{R}^n$ est une courbe élémentaire si $\exists F: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application continue et injective tq $C = F(I)$ où $I = [a, b]$

$[a, b] \subset \mathbb{R}$ est compact, $F|_I: I \rightarrow C$ est bijective et continue et $C \subset \mathbb{R}^n$ est séparé, C compact + séparé $\Rightarrow C$ fermé

On a donc $C \cong I$

Ex:



Interval



ligne polygonale simple

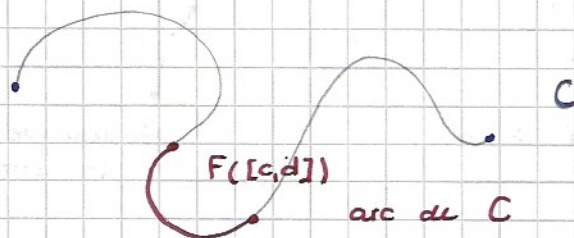


arc de $D(0,1)$ p. 1

Déf. • $F: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ application injective et continue est appelée une paramétrisation de C . (pas unique)

- $I = [a, b]$, alors $F(a)$ et $F(b)$ sont les extrémités
- si $[c, d] \subset [a, b]$ alors $F|_{[c, d]}: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$ est injective et continue $\Rightarrow F([c, d])$ est une courbe qu'on nomme un arc de C .

Ex :



Prop. Par injectivité de F , $\forall P \in F([a, b]) = C \quad \exists ! t \in [a, b] \text{ tq } P = F(t)$

Il existe une infinité de paramétrisation de C :

$$F([a, b]) = C = G([c, d])$$

Prop. $\exists \phi: [a, b] \rightarrow [c, d]$ homéomorphisme tq $F = G \circ \phi$
(si $F([a, b]) = C = G([c, d])$), on a alors $\phi = G^{-1} \circ F$

Déf. Une courbe paramétrisée est tq on a fixé F et $[a, b] \subset \mathbb{R}$

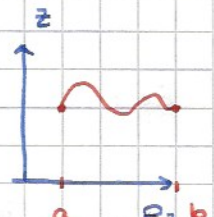
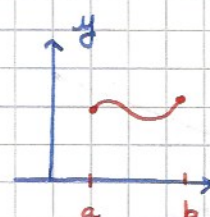
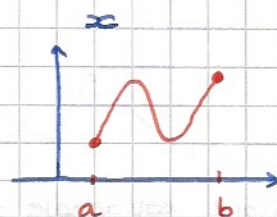
tq $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ est continue + injective

On a que F est donnée par $F = (f_1, \dots, f_n)$

où $f_i: I \rightarrow \mathbb{R}$ est continue

Ex : $n = 3$

$$\begin{cases} x = f_1(t) \\ y = f_2(t) \\ z = f_3(t) \end{cases}$$



 $F([a, b])$

Déf: Si pour une courbe $C \subset \mathbb{R}^3$ $\exists$ une paramétrisation avec $x = t$
 ie, $f_1(t) = t \quad \forall t \in I$, alors on dit que C admet une
paramétrisation explicite.

Déf: F est une param. régulière si f_i lisse (dérivable ∞) $\forall i = 1, \dots, n$
 $(f_i: I \rightarrow \mathbb{R})$ et $\forall t \in I \quad f_1'(t)^2 + f_2'(t)^2 + \dots + f_n'(t)^2 \neq 0$
 $(\forall t \in I \quad \exists j = 1, \dots, n \text{ tq } f_j'(t) \neq 0)$

Déf: C est lisse si elle admet F une param régulière.

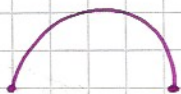
Ex:



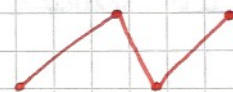
$$f_1(t) = \alpha t + \beta \quad f_1'(t) = \alpha$$

$$f_2(t) = t$$

$\Rightarrow$ régulière



Lisse

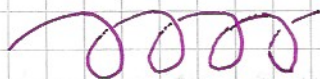


Non - lisse

Ex:

$$F: t \mapsto (t, \cos t, \sin t)$$

$F([0, 1])$ est une hélice



elle est lisse

Ex:

$$C \subset \mathbb{R}^2$$

$$F: t \mapsto (t^2, t^3)$$

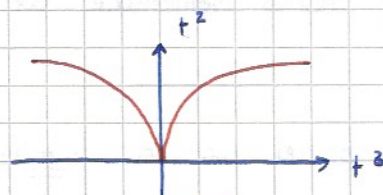
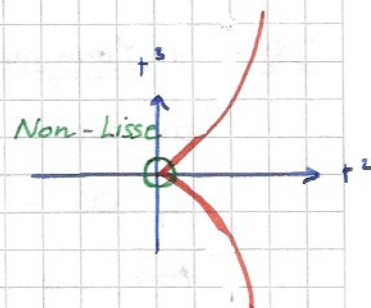
$$F([-1, 1]) = C$$

$\Rightarrow$ Non - lisse

$$G: t \mapsto (t^3, t^2)$$

paramétrisation explicite $s \mapsto (s, \sqrt[3]{s^2})$

mais pas régulière.



Prop: Deux param $F([a,b]) = G([c,d]) = C$ sont reliés par un homéom

$\phi: [a,b] \rightarrow [c,d]$ monotone si F et G sont régulières et

ϕ est lisse et $\phi'(t) \neq 0 \quad \forall t \in I$

Le choix de paramétrisation à ϕ croissante près donne un ordre sur les points de C ou l'orientation de C .

Vecteurs:

On a $F(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t))$, on peut utiliser le langage vectoriel.

Rap: vecteur dans $\mathbb{R}^3$ est un intervalle orienté à translation près.

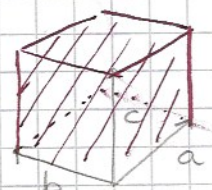
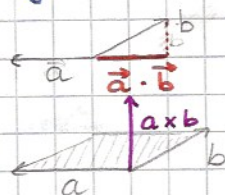
Prop: L'ensemble des vecteurs admet la somme, le produit par un scalaire, mais sur $\mathbb{R}^3$, il y a plusieurs produits:

- produit scalaire $a \cdot b$

- produit vectoriel $a \times b$

- produit mixte $(a, b, c) = a \cdot (b \times c)$

- la norme de a est $|a|$



Déf: L'hodographe d'une fonction vectorielle $v(t) = (\dots)$

par rapport à un point fixe O est le lieu H de points P

tg $\vec{OP} = v(t)$ ou $H = \{P \mid \exists t \in I \text{ tg } P = F(t)\}$

Alors, une courbe élémentaire est le hodographe d'une fonction vectorielle.

Prop: On peut parler de la limite d'une fonction vectorielle

$v: I \rightarrow \mathbb{R}^3, t_0 \in I, \lambda = \lim_{t \rightarrow t_0} v(t)$ si $\lim_{t \rightarrow t_0} |v(t) - \lambda| = 0$

Déf. Soit $F: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction vectorielle, sa dérivée

$F': I \rightarrow \mathbb{R}^n$ est définie par $F'(t) = \lim_{s \rightarrow t} \frac{F(s) - F(t)}{s - t}$

Prop p 6.

(Il faut prendre la limite à droite si $t = a$ et à gauche si $t = b$, si $I = [a, b]$)

Rem: $F'(I) \subset \mathbb{R}^3$ est l'photographie de la vitesse $F'(t)$

Déf: $L = \lim_{s \rightarrow t} \frac{F(s) - F(t)}{s - t} \in \mathbb{R}^n$, L est la limite si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$
tq si $|s - t| < \delta \Rightarrow \left| L - \frac{F(s) - F(t)}{s - t} \right| < \varepsilon$.

$\downarrow$ à noter

Rem: Si F est lisse, alors $L = F'(t)$

Déf. Soit $I = [a, b]$, $v: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ une fonction vectorielle

considérons $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$

et $G_n = \sum_{j=1}^n v(\tau_j) (t_j - t_{j-1})$ $\tau_j \in [t_{j-1}, t_j]$

notons $\delta = \max_j |t_j - t_{j-1}|$, alors

$\int_a^b v(t) dt = \lim_{\delta \rightarrow 0} G_n$ (si la limite existe)

Prop: Inégalité triangulaire sur l'intégral

$$\left| \int_a^b v(t) dt \right| \leq \int_a^b |v(t)| dt$$

Déf: Une équation vectorielle d'une courbe dans $\mathbb{R}^3$, $f(t) = r$,

$f: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ fonct. vectorielle, (paramétrisation vectorielle),

la paramétrisation est régulière si $f'(t) \neq 0 \forall t \in I$

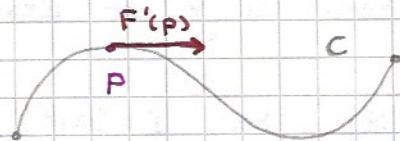
Lemme: Soit $v: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ fonction vectorielle. Alors $|v(t)| = \text{const} \Leftrightarrow$

$$v(t) \perp v'(t) \quad [v(t) \cdot v'(t) = 0]$$

Preuve: $|v(t)|^2 = (v(t) \cdot v(t)) \Rightarrow (|v(t)|^2)' = (v'(t) \cdot v(t)) + (v(t) \cdot v'(t))$
 $= 2 v'(t) \cdot v(t) = 0$ ■

Prop: $(f \circ g)' = f' \circ g + f \cdot g'$
 $(f \times g)' = f' \times g + f \times g'$

Déf: Soit $C \subset \mathbb{R}^3$ courbe élémentaire lisse, $F: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ une param de C . La valeur $F'(t_0) \in \mathbb{R}^3$, $t_0 \in I$ est le vecteur vitesse en $F(t_0) \in C$.
 F régulière $\Rightarrow F'(t_0) \neq 0 \quad \forall t_0 \in I$



Prop: Soient $F: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ et $G: J \rightarrow \mathbb{R}^3$ deux param. régulières de C ,
 $p \in C$, $p = F(t_0) = G(s_0)$, alors $F'(t_0)$ et $G'(s_0)$ sont proportionnels
[ie: $\exists \alpha \in \mathbb{R}^*, G'(s_0) = \alpha F'(t_0)$]

Preuve: Soit $\varphi: J \rightarrow I$ une application tq $G = F \circ \varphi$. Alors

$$G'(s_0) = F'(t_0) \cdot \varphi'(s_0). \quad (\text{avec } \varphi(s_0) = t_0) \quad \text{Mq } \varphi'(s_0) \text{ existe}$$

Mais $\varphi: J \rightarrow I$ est lisse. (il faut le montrer)

$F: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ est lisse et $F'(t_0) \neq 0$, $F = (F_1, F_2, F_3)$

on peut supposer que $F'(t_0) \neq 0 \Rightarrow F_i: I \rightarrow \mathbb{R}$ est localement inversible autour de t_0 .

De même, $G: J \rightarrow \mathbb{R}^3$ est lisse et $G'(s_0) \neq 0$.

Alors $\varphi = F_i^{-1} \circ G$ est lisse et de même $\varphi' = G'_i \circ F$ est lisse
autour de s_0

$$\Rightarrow \varphi'(s_0) \neq 0$$

Déf. Un vecteurs tangent en $P \in C$ est $\alpha F'(t_0)$ où $\alpha \in \mathbb{R}$, $F: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ qui est une param. régulière avec $F(t_0) = P$.

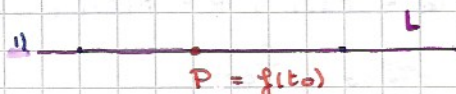
Rem. Par la proposition, le vecteur tangent ne dépend pas de la param.

Déf. Une droite $L \subset \mathbb{R}^3$ passant par $P \in C$ et parallèle aux vecteurs tangents en P est la tangente de C en P .

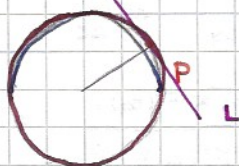
(Par C lisse, F param régulière)

On peut paramétriser L par $r(t) = P + t \cdot v$ où $v \neq 0$ est un vecteur tangent.

Ex:



2)



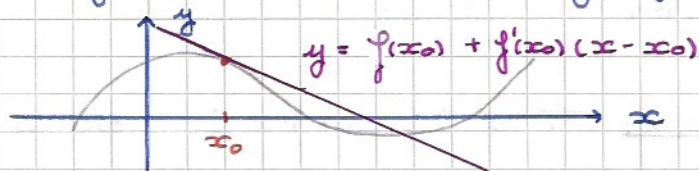
$$|F(t)| = R \text{ rayon}$$

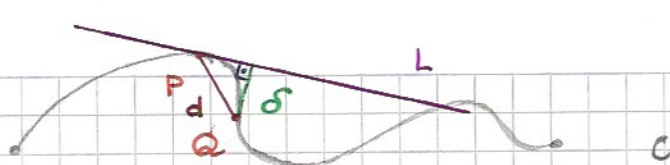
$$\Rightarrow F(t) \perp F'(t)$$

3) $F: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ param. régulière et explicite,
 $t \mapsto (t, f(t))$

$$f \text{ lisse. } F'(t) = (1, f'(t))$$

La tangente en $F(x_0)$ est: $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$





Thm: Soient $P, Q \in C$, avec Q assez proche de P , L la tangente à C en P , $d = |PQ|$ et σ la distance entre Q et L .

Notons $\sigma = \frac{|\vec{PQ} \times F'(t_0)|}{|F'(t_0)|}$ si $P = F(t_0)$ et $F'(t_0) \neq 0$

$$= \left| \vec{PQ} \times \frac{F'(t_0)}{|F'(t_0)|} \right|$$

Alors $\lim_{Q \rightarrow P} \frac{\sigma}{d} = 0$ si L est la tangente.

Donc L est la droite unique passant par P tq la limite ^{du rapport} entre la distance de Q à L et PQ est nulle.

Preuve: Choisissons F param. régulière, $Q = F(t)$, $P = F(t_0)$, $\Delta t = t - t_0$

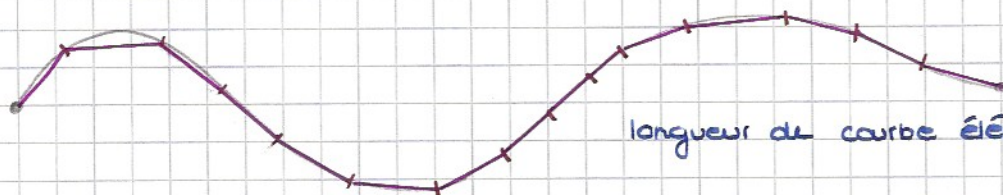
$$\begin{aligned} \lim_{Q \rightarrow P} \frac{\sigma}{d} &= \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\sigma/\Delta t}{d/\Delta t} = \frac{\lim_{t \rightarrow t_0} \sigma/\Delta t}{\lim_{t \rightarrow t_0} d/\Delta t} \\ &= \frac{\lim_{t \rightarrow t_0} \left| \frac{\vec{PQ}}{\Delta t} \times F'(t_0) \right|}{\lim_{t \rightarrow t_0} \left| \frac{\Delta F}{\Delta t} \right| |F'(t_0)|} = \frac{|F'(t_0) \times F'(t_0)|}{|F'(t_0)|^2} = 0 \end{aligned}$$

Supposons que $P \in L$ est une droite parallèle à $\vec{b} \in \mathbb{R}^3$

$$\lim_{Q \rightarrow P} \frac{\sigma_L}{d} = \frac{|F'(t_0) \times \vec{b}|}{|F'(t_0)| |\vec{b}|} \neq 0 \text{ si } \vec{b} \nparallel F'(t_0)$$

$$\sigma_L = \frac{|\vec{PQ} \times \vec{b}|}{|\vec{b}|}$$

Déf: Le plan normal Π à C en $P \in C$, est le plan tq $P \in \Pi$ et orthogonal à la tangente à L en P ($\Pi \perp L$)



longueur de courbe élémentaire.

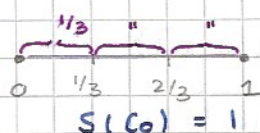
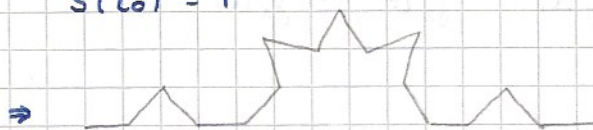
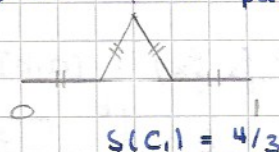
Déf: Soit $C = F(I)$, $I = [a, b]$, $F: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ continue

Choisissons n et $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$, la longueur de C

$$S(C) = \sup_{a=t_0 < \dots < t_n=b} \sum_{j=1}^n |F_j(t) - F_{j-1}(t)|$$

si $S(C) < +\infty \Rightarrow C$ est rectifiable

Ex: Le Flocon de Koch

une courbe pas rectifiable, $F: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ par itérations $\Rightarrow$ 

La limite existe mais la longueur est infinie.

 $y' \neq 0$

le 06.03.19

Thm: Toute courbe lisse élémentaire C est rectifiable (de longueur finie)En plus, $S(C) = \int_a^b |f'(t)| dt$ (finie car f continue)Ici C est paramétrisée par $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ Preuve: les notations: $\Delta_j f = f(t_j) - f(t_{j-1})$ et $\Delta t_j = t_j - t_{j-1}$ pour

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b.$$

$$\text{On a } \left| \sum_{j=1}^n |\Delta_j f| - \int_a^b |f'(t)| dt \right| \leq \left| \sum_{j=1}^n |\Delta_j f| - \sum_{j=1}^n |f'(t_j)| \Delta t_j \right| + \left| \sum_{j=1}^n |f'(t_j)| \Delta t_j - \int_a^b |f'(t)| dt \right|$$

def int Riemann

$$\text{Mais } |\Delta_j f - f'_j \Delta t_j| = \left| \int_{t_{j-1}}^{t_j} f'(t) dt - \int_{t_{j-1}}^{t_j} f'(t_j) dt \right| = \left| \int_{t_{j-1}}^{t_j} (f'(t) - f'(t_j)) dt \right| \leq \int_{t_{j-1}}^{t_j} |f'(t) - f'(t_j)| dt$$

fonction cot

Notons que $f': [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ est uniformément continue

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : |x - y| < \delta \Rightarrow |f'(x) - f'(y)| < \varepsilon$$

Supposons $|t_j - t_{j-1}| < \delta \Rightarrow |f'(t_j) - f'(t_{j-1})| < \varepsilon$

$$\Rightarrow \int_{t_{j-1}}^{t_j} |f'(t) - f'(t_j)| dt < \varepsilon \Delta t_j$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^n |\Delta_j f - f'_j \Delta t_j| \leq \sum_{j=1}^n \varepsilon \Delta t_j = \varepsilon (b-a) \longrightarrow 0$$

si $|t_j - t_{j-1}| \geq \delta$ on peut toujours subdiviser plus finement

$$t_{j-1} = s_0 < s_1 < \dots < s_{n_j} = t_j \text{ tq } \max_k |s_k - s_{k-1}| < \delta$$

Preuve: (Suite)

$$\text{On a } \sum_{t_j} |\Delta_j f| \leq \sum_{s_k} |\Delta_k f| = S(C)$$

Ex: Si $f = (f_1, f_2, f_3) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $C = f([a, b])$

$$\text{on a } S = \int_a^b \sqrt{f_1'(t)^2 + f_2'(t)^2 + f_3'(t)^2} dt$$

Ex: Si $f(t) = (t, \varphi(t))$, $t \in [a, b] = I$, $C = f(I)$

ie: C est le graphe de $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$

$$S = \int_a^b \sqrt{1 + \varphi'(t)^2} dt$$

Rem: La longueur peut être utilisée comme un paramétrage naturel.

Soit $\varphi(t) = \int_a^t |f'(z)| dz$ la longueur de $f([a, t])$ pour

un paramétrage lisse $f \Rightarrow \varphi : [a, b] \rightarrow [0, S(C)]$ une fct lisse

$\varphi'(t) = |f'(t)| \neq 0 \Rightarrow \exists$ inverse $\varphi^{-1} : [0, S(C)] \rightarrow [a, b]$

Déf: Le paramétrage $g = f \circ \varphi^{-1} : [0, S(C)] \rightarrow C$ est appelé le paramétrage normal.

Il est naturel, ne dépend pas de f , dépend seulement de l'orientation de C .

Déf: Le paramètre par $p \in C$ est la longueur de l'arc de C entre sa source et p .

$S(p) = \text{longueur} = \text{param. normal}$.



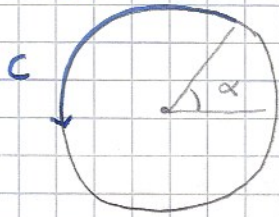
Prop: Soit g le paramétrage normal. Alors $|g'(s)| = 1 \quad \forall s \in [0, S(C)]$

Preuve: $g = f \circ \varphi^{-1} \Rightarrow g'(s) = f'(\varphi(s)) \varphi^{-1}'(s) = \frac{f'(\varphi(s))}{|f'(\varphi(s))|}$

Cela revient à changer $g : [0, L] \rightarrow C$ en $f : [a, b] \rightarrow C$ qui est défini sur $\tilde{a} \in S(C) = L$

Rem: Inversément, si $g: [0, L] \rightarrow C$ est un param régulier tq $|g'(t)| = 1 \quad \forall t \in [0, L] \Rightarrow g$ est le param. normal

Ex: $g: t \mapsto (\cos t, \sin t)$ est le par. normal de $g([0, L])$ où $L < 2\pi$
 $g_\alpha: t \mapsto (\cos(t+\alpha), \sin(t+\alpha))$ celui de $g_\alpha([0, L])$



$$C = g_\alpha([0, L])$$

Déf: Soit C une courbe lisse et $g: [0, L] \rightarrow C$ par. normal



Soit $P = g(s_0) \in C$

$\vec{K} = g''(s_0) \in \mathbb{R}^3$ est le vecteur de courbure.

Déf: $K = |\vec{K}| \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ est la courbure de C en P

Déf: le vecteur normal unitaire est $\vec{N} = \frac{\vec{K}}{K}$ si $K \neq 0$

Prop: le vecteur - vitesse $g'(s)$ et le vecteur de courbure $\vec{K}$ sont orthogonaux.

Preuve: $|g'(s)| = 1 \Rightarrow g'(s) \cdot g'(s) = 1 \Rightarrow 0 = \frac{d}{ds} (g'(s) \cdot g'(s)) = 2g''(s) \cdot g'(s)$ ■

Déf: le vecteur tangent unitaire est $\vec{T}(s) = g'(s)$ pour param. normal

Déf: le vecteur - binormal est $\vec{b} = \vec{T} \times \vec{N}$ (si $K \neq 0$)

$|\vec{b}| = 1$ et $\vec{b}$ orthog à $\vec{T}$ et $\vec{N}$.



Déf: $(\vec{t}, \vec{n}, \vec{b})$ est le repère de Frenet.

Déf: Le plan Π passant par P et parallèle à $\vec{t}$ et $\vec{n}$ est le plan osculateur.

Prop: [1. Form. de Frenet pour $\partial/\partial s (\vec{f}(s))$]

$$\frac{d\vec{t}(s)}{ds} = \kappa \cdot \vec{n}$$

Preuve: $\kappa \cdot \vec{n} = \vec{\kappa} = \frac{d\vec{t}(s)}{ds} = \frac{d\vec{g}(s)}{ds}$ ■

Ex: Soit C un arc de cercle de rayon R .

Param. normal: $g: t \mapsto (R \cos \frac{t}{R}; R \sin \frac{t}{R})$

$$g'(t) = (-\sin \frac{t}{R}, \cos \frac{t}{R}) \text{ unitaire}$$

$$g''(t) = (-\frac{1}{R} \cos \frac{t}{R}, -\frac{1}{R} \sin \frac{t}{R}) \text{ et } |g''(t)| = |\vec{\kappa}| = \kappa = \frac{1}{R}$$

p. 14 slide 3

Déf: Le cercle osculateur en $P \in C$ est le cercle $Z \subset \Pi$ (plan oscul.) passant par P et tq $\vec{PQ} = \frac{\vec{\kappa}}{\kappa^2}$ pour $Q \in \Pi$ le centre de Z .

le 13.03.19

Curvature d'un param. quelconque:

$$f(t) = g \circ \psi(t)$$

Soit $f: I \rightarrow C \subset \mathbb{R}^3$ param. quelconque, alors $s = \psi(t) = \int_a^t |f'(\gamma)| d\gamma$

$s_0 = \psi(t_0)$, $f'(t_0) = |f'(t_0)| g'(s_0) = v \cdot \vec{E}$, mais $f''(t_0)$ et

$g''(s_0) = \vec{\kappa} = \kappa \vec{n}$ ne sont pas forcément parallèles.

$$\psi'(t) = |f'(t)|$$

$$f(t_0) = g(\psi(t_0)) \Rightarrow f'(t_0) = g'(s_0) \cdot \psi'(t_0)$$

$$f''(t_0) = g''(s_0) \cdot \psi'(t_0)^2 + g'(s_0) \psi''(t_0) = \vec{\kappa} \psi'(t_0)^2 + \vec{E} \psi''(t_0)$$

$$\Rightarrow (f''(t_0))^\perp = \frac{a \vec{n}}{\kappa \cdot \psi'(t_0)^2} + b \vec{E}$$

Cela veut dire que l'accélération normale en une trajectoire C

est proportionnelle à la vitesse au carré, le coeff de proportionnalité

est la courbure, Mais,

Géom II:

le 13.03.19

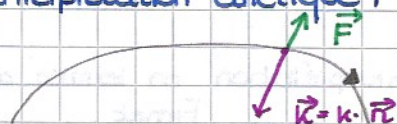
$$|f''(t_0)|^\perp = \frac{|f''(t_0) \times f'(t_0)|}{|f'(t_0)|} \Rightarrow \kappa = \frac{|f''(t_0) \times f'(t_0)|}{|f'(t_0)|^3}$$

Déf: la courbure d'une paramétrisation $f: I \rightarrow \mathbb{C} \subset \mathbb{R}^3$ quelconque

est $\kappa = \frac{|f''(t_0) \times f'(t_0)|}{|f'(t_0)|^3}$ en $t_0 \in I$ point de la courbe.

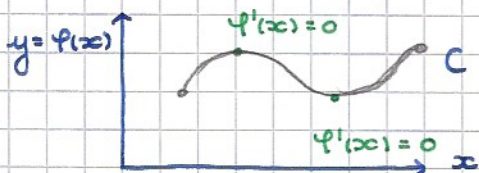
ala fonction aussi avec $f \equiv g$ param normale.

Rem: Interprétation cinétique / mécanique



$$(f'')^\perp = \kappa |f'|^2 = \kappa \cdot \text{vitesse}$$

Ex: Par un paramétrage explicite $t \mapsto (t, \varphi(t))$ $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$



$$\kappa = \frac{|f''(t) \times f'(t)|}{|f'(t)|^3}$$

$$f(t) = (t, \varphi(t)) \quad f'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ \varphi'(t) \end{pmatrix} \quad f''(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi''(t) \end{pmatrix}$$

$$\left| \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi''(t) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ \varphi'(t) \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \varphi''(t) \end{pmatrix} \right| = |\varphi''(t)|$$

$$|f'(t)| = \sqrt{1 + \varphi'(t)^2} \Rightarrow \kappa = \frac{|\varphi''(t)|}{(\sqrt{1 + \varphi'(t)^2})^3}$$

Rem: Si $\varphi'(x) = 0 \Rightarrow \kappa = |\varphi''(x)|$ • sur la courbe.

et $\forall x \in C \quad \kappa_x \leq |\varphi''(x)|$

Torsion:

$$\begin{aligned} f: I &\rightarrow \mathbb{C} \subset \mathbb{R}^3 \\ g: [0, L] &\rightarrow \mathbb{C} \\ f &= g \circ \gamma \end{aligned}$$

Soit $C \subset \mathbb{R}^3$, une courbe élémentaire lisse tq la courbure

n'est pas zéro en tout $P \in C \Rightarrow$ le repère de Frenet

est bien défini. On considère $\vec{b}'(s) = \frac{d}{ds} (\vec{t}(s) \times \vec{n}(s))$ repère orthonormal.

$$= \vec{t}'(s) \times \vec{n}(s) + \vec{t}(s) \times \vec{n}'(s) = \vec{t}(s) \times \vec{n}'(s) \quad n'(s) \perp n(s)$$

$$\Rightarrow \vec{b}'(s) \perp \vec{t}(s) \quad \text{et} \quad \vec{b}'(s) \perp \vec{b}(s) \quad \text{car} \quad |\vec{b}(s)| = 1.$$

$$\Rightarrow \vec{b}'(s) = -\alpha \vec{n}(s) \quad \text{pour} \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

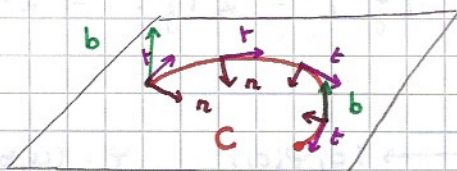
Déf: $\mathcal{X}$ est la torsion de C en $P = g(s)$ et $\mathcal{X}(s)$ (dépend de s)
 ($\vec{b}'(s) = -\mathcal{X} \vec{n}(s)$ et $\mathcal{X} \in \mathbb{R}$)



Une hélice droite a la torsion positive. (raison du signe de $\mathcal{X}$)
 positive négative $t \mapsto (\cos t, \sin t, t)$

Rap: $K(s) \neq 0$ sinon on ne peut pas définir le repère de Frenet.

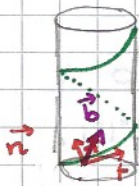
Ex:



Interprétation en termes du repère de Frenet.

$$b(s) = (1, 0, 0) \Rightarrow b'(s) = (0, 0, 0)$$

Ex: Hélice $t \mapsto (\cos t, \sin t, t)$

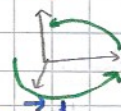


La rotation infinitésimale du repère de Frenet est dans un sens négatif pour l'hélice positive.

Prop: le mouvement infinitésimal de $\vec{n} \nearrow \vec{b} \rightarrow_t$ se décompose en 3:

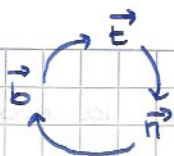
- translation (vitesse) $v \vec{t}$
 - rotation dans Π (courbure) $\vec{k} = k \cdot \vec{n}$
 - rotation de Π autour de la tangente (torsion) $\vec{b}' = -\mathcal{X} \vec{n}$
- où Π est le plan osculateur.

$$g(s) \rightarrow g(s + \varepsilon)$$



Thm: Les Formules de Frenet

- 1) $\vec{t}'(s) = k(s) \vec{n}(s)$ (déf)
- 2) $\vec{n}'(s) = -k(s) \vec{t}(s) + \mathcal{X}(s) \vec{b}(s)$
- 3) $\vec{b}'(s) = -\mathcal{X}(s) \vec{n}(s)$ (déf)

pour les produits
vectoriels

le 13.03.19

Pv: de $\vec{n}'(s) = -k(s)\vec{t}(s) + \tau(s)\vec{b}(s)$

$$\text{on a } \vec{n} = \vec{b} \times \vec{t}, \quad \frac{d}{ds} \vec{n} = \frac{d}{ds} (\vec{b} \times \vec{t}) = \frac{d}{ds} \vec{b} \times \vec{t} + \vec{b} \times \frac{d}{ds} \vec{t} \\ = -\tau(s) \vec{n}(s) \times \vec{t}(s) + k(s) \vec{b}(s) \times \vec{n}(s) = \tau \vec{b}(s) - k(s) \vec{t}(s)$$

□

le 20.03.19

Calcul de la torsion:

1) Soit $g: I \rightarrow \mathbb{C}$, $\mathbb{C} \subset \mathbb{R}^3$, un paramétrage normal.

Alors, $g'(s) = \vec{t}$, $g''(s) = \vec{k} = k \cdot \vec{n}$, $g'''(s) = (k \cdot \vec{n})' = k' \cdot \vec{n} + k \cdot \vec{n}'$

$$(\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}) = 1 \quad (\vec{t}, \vec{n}, \vec{n}) = 0 \\ (\vec{t}, \vec{n}, \vec{t}) = 0$$

Formule de
Frenet

$$= k' \vec{n} + k(-k \vec{t} + \tau \vec{b}) \\ = -k^2 \vec{t} + k' \vec{n} + k \tau \vec{b}$$

$$\Rightarrow (g'(s), g''(s), g'''(s)) = k^2 \tau$$

$$\Rightarrow \tau = \frac{(g', g'', g''')}{k^2}$$

Produit mixte: $(g' \times g'') \cdot g'''$

si $k = 0 \Rightarrow$ torsion et repère de Frenet ne sont pas définis

2) Soit $f: I \rightarrow \mathbb{C}$, $\mathbb{C} \subset \mathbb{R}^3$ un paramétrage lisse quelconque

Alors, $f = g \circ \psi$ pour $s = \psi(t) = \int_a^t |f'(\xi)| d\xi$.

$$f'(t) = g'(s) \cdot \psi'(t)$$

$$f''(t) = g''(s) \cdot (\psi'(t))^2 + g'(s) \cdot \psi''(t)$$

$$f'''(t) = g'''(s) (\psi'(t))^3 + g''(s) (3\psi'(t)\psi''(t)) + g'(s) \cdot \psi'''(t)$$

$$\Rightarrow (f'(t), f''(t), f'''(t)) = \dots = (g'(s), g''(s), g'''(s)) (\psi'(t))^6$$

$$\text{et } (g', g'', g''') = k^2 \tau \quad \text{et } k = \frac{|g' \times g''|}{|g'|^3}$$

$$\Rightarrow \tau = \frac{(f', f'', f''')}{k^2 (\psi')^6} = \frac{(f', f'', f''')}{|f' \times f''|^2} \cdot \frac{|f'|^6}{(\psi')^6} \quad \text{et } \psi' = |f'|$$

$$\Rightarrow \tau = \frac{(f', f'', f''')}{|f' \times f''|^2}$$

Courbure et torsion déterminent la courbe à isométrie près:

Déf: $\phi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ est une isométrie, si elle conserve les distances.

Supposons $\phi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ est une isométrie, $C_1 \subset \mathbb{R}^3$ une courbe lisse.

Alors $C_2 = \phi(C_1)$ est aussi une courbe lisse. Le param. normal

pour C_2 est donné par $g_2 = \phi \circ g_1$, où g_1 est le param. normal de C_1 .

$\Rightarrow \phi$ envoie le repère de Frenet en $P \in C_1$ sur le repère de Frenet en $\phi(P) \in C_2$ et les courbures et torsions de C_1 en P coïncident

avec celles de C_2 en $\phi(P)$

$$K_1(g_1(s)) = K_2(\phi \circ g_1(s))$$

$$\mathcal{X}_1(g_1(s)) = \mathcal{X}_2(\phi \circ g_1(s))$$

$\Rightarrow K(s)$ et $\mathcal{X}(s)$ caractérisent la courbe à isométrie près, se $[0, L]$

$K, \mathcal{X}: [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ Δ $K(s) \neq 0$ pour que $\mathcal{X}(s)$ soit défini Δ

$\hookrightarrow$ si on a $K(s)$ et $\mathcal{X}(s)$, il existe $t, g(s)$ tq $K(g) = K(s)$ et $\mathcal{X}(g) = \mathcal{X}(s)$

Thm: Soient $C_1, C_2 \subset \mathbb{R}^3$ deux courbes lisses de la même longueur tq $K_1(s) = K_2(s) \neq 0 \forall s \in [0, L]$ et $\mathcal{X}_1(s) = \mathcal{X}_2(s)$. Alors $\exists \phi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ une isométrie tq. $C_2 = \phi(C_1)$.

P.v: Définissons $\phi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ comme l'isométrie envoyant le repère de F en $g_1(0)$ sur celui en $g_2(0)$.

(Une telle isom. est unique) On suppose que $g_1(0) = g_2(0)$.

$$\vec{t}_1(0) = \vec{t}_2(0), \vec{n}_1(0) = \vec{n}_2(0), \vec{b}_1(0) = \vec{b}_2(0).$$

On considère $\xi(s) = \vec{t}_1 \cdot \vec{t}_2 + \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 + \vec{b}_1 \cdot \vec{b}_2$ (clairement $\xi(0) = 1 + 1 + 1 = 3$)

$$\xi'(s) = \vec{t}_1' \cdot \vec{t}_2 + \vec{t}_1 \cdot \vec{t}_2' + \vec{n}_1' \cdot \vec{n}_2 + \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2' + \vec{b}_1' \cdot \vec{b}_2 + \vec{b}_1 \cdot \vec{b}_2'$$

$$= K_1 \vec{n}_1 \cdot \vec{t}_2 + K_2 \vec{t}_1 \cdot \vec{n}_1 - (K_1 \vec{t}_1 - \mathcal{X}_1 \vec{b}_1) \cdot \vec{n}_2 - (K_2 \vec{t}_2 - \mathcal{X}_2 \vec{b}_2) \cdot \vec{n}_1 - \mathcal{X}_1 \vec{n}_1 \cdot \vec{b}_2 - \mathcal{X}_2 \vec{n}_2 \cdot \vec{b}_1$$

$$= 0$$

$$\Rightarrow \vec{t}_1 = \vec{t}_2, \vec{n}_1 = \vec{n}_2, \vec{b}_1 = \vec{b}_2 \quad \forall s \in [0, L]$$

$$\Rightarrow g_1'(s) = g_2'(s) \quad \forall s \in [0, L]$$

$$\text{Comme } g_1(0) = g_2(0) \Rightarrow g_1(s) = g_2(s) \quad \forall s \in [0, L]$$



Thm: Soient $\kappa, \tau : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions lisses tq $\kappa(s) \neq 0$ $\forall s \in [0, L]$. Alors $\exists C \subset \mathbb{R}^3$ lisse de longueur L avec le param normal $g : [0, L] \rightarrow C \subset \mathbb{R}^3$ tq $\kappa(s)$ et $\tau(s)$ sont la courbure et la torsion de C en $g(s)$, $s \in [0, L]$

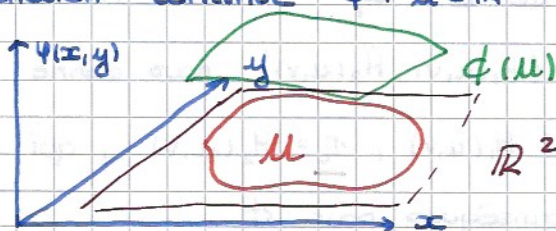
P.V: par théorie des EDO.

Déf: Les équations $\kappa = \kappa(s)$ et $\tau = \tau(s)$ sont les équations naturelles de C .

La courbe peut être donnée naturellement par κ et τ .

Surfaces dans $\mathbb{R}^3$:

Déf: • Une surface élémentaire Φ est donnée par le graphe d'une fonction continue $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ où U -ouvert.



• Φ est lisse si φ est lisse (dérivées partielles existent)

~~Plus généralement, on considère $f_1, f_2, f_3 : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$~~

~~avec $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ et $F : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'application vectorielle~~

~~$$F(u, v) = (f_1(u, v), f_2(u, v), f_3(u, v))$$~~

le 27.03.19

Plus généralement, on considère trois fonctions f_1, f_2, f_3

: $U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ avec u et v comme coordonnées et l'applic.
vectorielle $F: U \rightarrow \mathbb{R}^3$, $F(u,v) = (f_1(u,v), f_2(u,v), f_3(u,v))$

Déf: F est une nappe paramétrée si F est injective

Déf: Si F est lisse et au moins un des $\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial u} \\ \frac{\partial f_1}{\partial v} & \frac{\partial f_2}{\partial v} \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} \frac{\partial f_2}{\partial u} & \frac{\partial f_3}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial v} & \frac{\partial f_3}{\partial v} \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} \frac{\partial f_3}{\partial u} & \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_3}{\partial v} & \frac{\partial f_1}{\partial v} \end{vmatrix}$ est non-nul pour tout point de U , on dit que $\Phi = F(U)$ est une surface lisse ou une surface $(dF)_p = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_1}{\partial v} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial v} \\ \frac{\partial f_3}{\partial u} & \frac{\partial f_3}{\partial v} \end{pmatrix}$ $[(dF)_p \text{ injective } \forall p \in U]$

Rang = 2
" "
dim Im = 2
dim $(dF)_p(\mathbb{R}^2)$ = 2

Déf: Dans ce cas F est un paramétrage régulier (F lisse et 1 déterminant + injective est non-nul)
↓ F injective

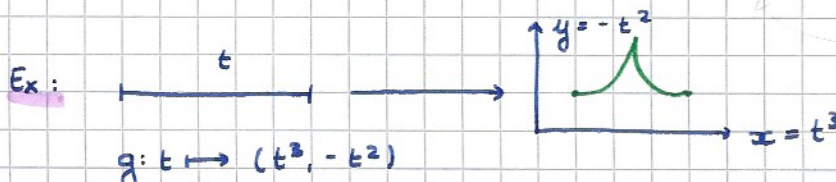
Prop: La même surface Φ peut être paramétrée par $G: V \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ avec ξ, η comme coordonnées. $(dH)_p = \begin{pmatrix} \frac{\partial H_1}{\partial u} & \frac{\partial H_2}{\partial u} \\ \frac{\partial H_1}{\partial v} & \frac{\partial H_2}{\partial v} \end{pmatrix} \neq 0$ isomorphisme.

Dans ce cas, il existe $H: U \rightarrow V$ lisse et tq $F = G \circ H$
en tout point de U tq $F = G \circ H$

Déf: Donc $H(u,v) = (H_1(u,v), H_2(u,v))$ nous donne un changement de coordonnées $\xi = H_1(u,v)$, $\eta = H_2(u,v)$, qui sont des nouvelles coordonnées intrinsèques pour Φ .

Déf: Soient $U, V \subset \mathbb{R}^2$ ensembles ouverts. Un difféomorphisme $\psi: U \rightarrow V$ est une applic. lisse tq $\psi^{-1}: V \rightarrow U$ existe et est lisse aussi.

Par le thm d'inversion locale: $\psi: U \rightarrow V$ lisse ψ est un difféomorphisme et bijective
si et seulement si $\begin{vmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial u} & \frac{\partial \psi_1}{\partial v} \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial u} & \frac{\partial \psi_2}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0$ en tout point de U .



$(u,v) \xrightarrow{F} (u^3, -u^2, v)$

$dF = \begin{pmatrix} 3u^2 & 0 \\ -2u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ si $u=0$ $(dF)_{(u,v)}$ pas injective

Comme pour le cas des courbes, on utilise le langage vectoriel pour les fonctions.

$F: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$ ($\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$), F a deux dérivées partielles

$F_u, F_v: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$ ($\partial F / \partial u = F_u$, $\partial F / \partial v = F_v$)

On peut donc réécrire la condition:

Prop: F est régulière si injective, lisse et $F_u \times F_v \neq 0$

Thm: Soit Φ une surface lisse paramétrée régulièrement par $F: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$ et $\hat{C} \subset \mathcal{U}$ une courbe. Alors si $\hat{C} \subset \mathcal{U}$ est lisse, alors $C = F(\hat{C})$ est lisse aussi.

Preuve:

Soit $u = \varphi_1(t)$, $v = \varphi_2(t)$ un param. régulier $\varphi := (\varphi_1, \varphi_2): I \rightarrow \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$

Considérons $\gamma = F \circ \varphi: I \rightarrow \mathbb{R}^3$, on a (on montre l'injectivité en sup $\varphi'(t) \neq 0$)

$$\gamma'(t) = f_u(\varphi_1(t), \varphi_2(t)) \cdot \varphi_1'(t) + f_v(\varphi_1(t), \varphi_2(t)) \cdot \varphi_2'(t)$$

f_u et $f_v \in \mathbb{R}^3$ sont linéairement indépendantes. (régularité de Φ)

un de $\varphi_1'(t)$ et $\varphi_2'(t)$ n'est pas nulle

□

Déf: Les équations $u = \varphi_1(t)$, $v = \varphi_2(t)$ sont les équations intrinsèques de C .

Ex:

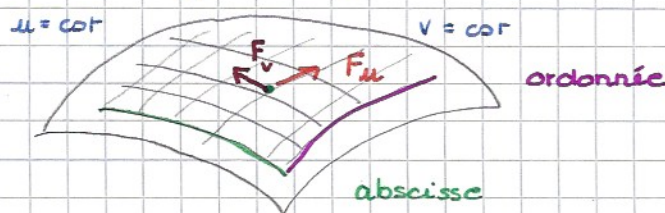
$u = t$, $v = \text{const}$

Lignes de coordonnées

$u = \text{const}$, $v = t$

abscisses et ordonnées

Interprétation géométrique de F_u et F_v :



Réseau de coordonnées

(Param. régulier si F_v et F_u indép.)

Déf: Une droite $L \subset \mathbb{R}^3$ est tangente à une surface $\Phi \subset \mathbb{R}^3$ en $p \in \Phi$ si L est une tangente pour une courbe lisse $C \subset \Phi$ en $p \in C$.

Thm: Toutes tangentes à Φ en $p \in \Phi$ sont contenues dans un plan $T_p \Phi \subset \mathbb{R}^3$

Déf: $T_p \Phi$ est le plan tangent à Φ en p .

Pr: Si $C \subset \Phi$ est une courbe lisse, $p \in \Phi$, $p \in C$, param par la composition $\psi: I \rightarrow \mathcal{U}$ et $F: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$ (param. régulier) $(F \circ \psi)'(t)$ est une comp. linéaire de $F_u(\psi(t))$ et $F_v(\psi(t)) \in \mathbb{R}^3$
 $\Rightarrow$ une tangente à $\Phi = F(\mathcal{U})$ en $\psi(t)$ est contenue dans le plan passant par $\psi(t)$ et parallèle à F_u, F_v . $\square$

Déf: Le vecteur normal unitaire à Φ en $p \in \Phi$ est $\vec{n}(p) = \frac{F_u \times F_v}{|F_u \times F_v|}$ évalué en $p = F(u_p, v_p)$, $(u_p, v_p) \in \mathcal{U}$

Prop: Le plan tangent est donné par $(r = F(u_p, v_p), F_u(u_p, v_p), F_v(u_p, v_p))$ sur $r \in \mathbb{R}^3$

Il est pratique de choisir localement un param. simple.

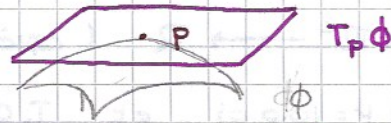
Considérons un système de coordonnées tq $p=0$ et $\vec{n}(p) = (0,0,1)$

Thm: $\exists$ un voisinage $W \subset \Phi$, $p \in W$ et une fonction lisse f tq W est donnée

Il est pratique de choisir localement un param. simple.

Considérons un système de coordonnées tq $p = 0$

$$\text{et } \vec{n}(p) = (0, 0, 1)$$



$$W = F(x, y, f(x, y))$$

Thm: $\exists$ un voisinage $W \subset \phi$, $p \in W$ et une fonction lisse f tq W est donné par $z = f(x, y)$, $(x, y) \in U$ où $(0, 0) \in U \subset \mathbb{R}^2$ est ouvert, $f(0, 0) = 0$, $f_x(0, 0) = 0$, $f_y(0, 0) = 0$

Pr: Soit $F = (F_1, F_2, F_3)$ un paramétrage de ϕ avec $F_1(u_p, v_p) = F_2(u_p, v_p) = F_3(u_p, v_p) = 0$ (Choix de p) $P = (0, 0, 0)$
On a $\frac{\partial}{\partial u} F_3(u_p, v_p) = \frac{\partial}{\partial v} F_3(u_p, v_p) = 0$ (Choix de $\vec{n}(p)$)
 $\vec{n}(p) = (0, 0, 1)$
 $\Rightarrow \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial u} F_1(u_p, v_p) & \frac{\partial}{\partial u} F_2(u_p, v_p) \\ \frac{\partial}{\partial v} F_1(u_p, v_p) & \frac{\partial}{\partial v} F_2(u_p, v_p) \end{vmatrix} \neq 0$ par l'indépendance linéaire

$$\Rightarrow x = F_1(u, v), y = F_2(u, v)$$

admet une inversion locale autour de (u_p, v_p)

$$u = \varphi_1(x, y), v = \varphi_2(x, y)$$

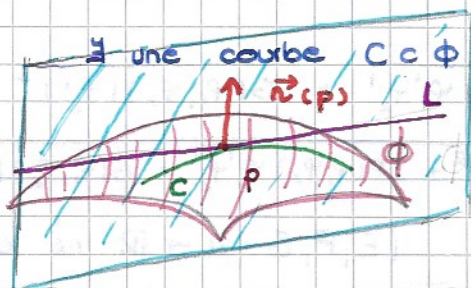
$$\text{On définit } f(x, y) = F_3(\varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y))$$

Soit $L \subset \mathbb{R}^3$ une droite tangente à $\phi \subset \mathbb{R}^3$ en $p \in \phi$

(Contenue dans $T_p \phi$: $L \subset T_p \phi$)

Déf: Une Courbe $C \subset \phi$ est dite passant par p en direction de L si L est la tangente à C en p .

Prop: Soit L une droite tangente à ϕ en $p \in \phi$. Alors



$\exists$ une courbe $C \subset \phi$ passant par p en direction de L

Δ de la démo / Δ contient L et $\parallel$ à $\vec{n}(p)$ p21

Rv: Soit $\Delta \subset \mathbb{R}^3$ le plan contenant L et parallèle à $\vec{r}(p)$
 On définit $C = \Delta \cap \Phi$.
 On peut présenter Φ par le graphe d'une fonction
 $f: W \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ (après changement des coord. dans $\mathbb{R}^3$)
 Alors $P = (0,0,0)$ et $T_p \Phi = \{z=0\}$, après rotation autour
 de l'axe z , on peut supposer $L = \{y=z=0\}$
 $\Rightarrow C$ est donné par $z = f(x)$ avec $f'(0) = 0$ $\square$

Déf: La section normale $\Delta \subset \mathbb{R}^3$ est le plan contenant L
 (tangente à Φ en p) et parallèle à $\vec{n}(p)$

Prop: $\rightarrow$ Si la courbure n'est pas nulle
 Soit $C \subset \Phi$ une courbe passant par $p \in \Phi$ en direction
 de $L \subset \mathbb{R}^3$. Soit $\Pi \subset \mathbb{R}^3$ le plan osculateur de C en P .
 Alors $L \subset T_p \Phi \cap \Pi$, (soit $L = T_p \Phi \cap \Pi$ ou $T_p \Phi = \Pi$)

Rv: $L \subset \Pi$ par la déf du plan osculateur, $L \subset T_p \Phi$ par déf
 du plan normal. $\square$

Comment calculer la longueur S de $C \subset \Phi$?

Rap: $S(C) = \int_a^b |\varphi'(t)| dt$ où C est param par $\varphi: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^3$

Supposons Φ donnée par $\mathbb{R}^3 \ni \vec{r} = f(u,v)$, $f: U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$
 $C \subset \mathbb{R}^3$ est donnée par $\vec{r} = \varphi(t) = f(\varphi_1(t), \varphi_2(t))$

$$\Rightarrow \varphi' = f_u(\varphi_1, \varphi_2) \cdot \varphi_1' + f_v(\varphi_1, \varphi_2) \cdot \varphi_2'$$

$$\text{Notons } E(u,v) := f_u^2(u,v) \quad F(u,v) := f_u(u,v) f_v(u,v)$$

$$G(u,v) := f_v^2(u,v)$$

$$|\varphi'|^2 = E(\varphi_1, \varphi_2) (\varphi_1')^2 + 2F(\varphi_1, \varphi_2) \varphi_1' \varphi_2' + G(\varphi_1, \varphi_2) (\varphi_2')^2$$

$$S = \int_a^b |\varphi'| dt = \int_a^b \sqrt{E(\varphi_1, \varphi_2) (\varphi_1')^2 + 2F(\varphi_1, \varphi_2) \varphi_1' \varphi_2' + G(\varphi_1, \varphi_2) (\varphi_2')^2} dt$$

$$= \int_a^b \sqrt{E u_t^2 + 2F u_t v_t + G v_t^2} dt \quad (E, F, G: U \rightarrow \mathbb{R} \text{ ne dépendent que de } \Phi)$$

Géom II :

Déf: Les fonctions E, F, G sont les coefficients de la première forme fondamentale $I(\varphi'_1, \varphi'_2) = E(\varphi'_1)^2 + 2F\varphi'_1\varphi'_2 + G(\varphi'_2)^2$

La matrice $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$ est la matrice du produit scalaire de ϕ à f_u, f_v sont la base.

Ex:

Soit ϕ donnée par $z = f(x, y)$ et $f: \mathbb{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$E(x, y) = 1 + f_x^2(x, y)$$

$$F(x, y) = f_x(x, y) f_y(x, y)$$

$$G(x, y) = 1 + f_y^2(x, y)$$

$$F: (x, y) \mapsto (x, y, f(x, y))$$

$$E(x, y) = \begin{pmatrix} f_x \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_x \\ 1 \end{pmatrix} = (f_x)^2 + 1$$

La géom intrinsèque:

Si u, v sont fixés, E, F, G nous donnent une forme quadratique en $\mathbb{R}^3$ $I(a, b) = E a^2 + 2F a b + G b^2$

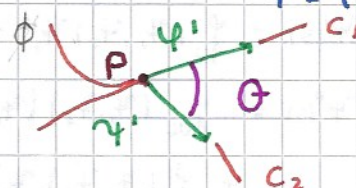
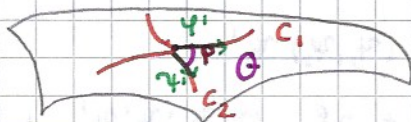
Rap: Le produit scalaire détermine l'angle

Soit C_1 déf par $u = \varphi_1(t)$, $v = \varphi_2(t)$ et

C_2 déf par $u = \psi_1(t)$, $v = \psi_2(t)$

Supposons que $P \in C_1, C_2$, $P = f(u_0, v_0)$ $f: \mathbb{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$u_0 = \varphi_1(t_0) = \psi_1(\tau_0)$ et $v_0 = \varphi_2(t_0) = \psi_2(\tau_0)$ $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$
 $\psi = (\psi_1, \psi_2)$

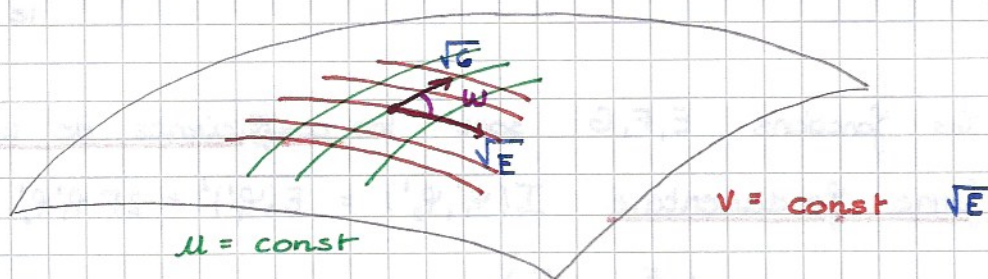


$$\cos \theta = \frac{\varphi'(t_0) \cdot \psi'(\tau_0)}{|\varphi'(t_0)| \cdot |\psi'(\tau_0)|}$$

$$\varphi' \cdot \psi' = E \varphi'_1 \psi'_1 + F(\varphi'_1 \psi'_2 + \varphi'_2 \psi'_1) + G \varphi'_2 \psi'_2$$

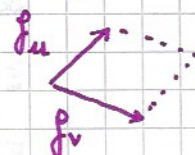
$$|\varphi'| = \sqrt{I(\varphi'_1, \varphi'_2)} \quad |\psi'| = \sqrt{I(\psi'_1, \psi'_2)}$$

Déf:



E.g: $F = 0$ si les lignes de coord. sont orthogonales.

$\sqrt{EG - F^2}$ = aire du parallélogramme



Conclusion: la première forme fond. détermine la géom. intrinsèque de la surface: longueur, angle, aire.

But: calculer $\vec{K}$ en fct de φ_1 et φ_2

le 10.04.19

Soient Φ une surface paramétrée par $f(u, v)$ et C une courbe sur Φ donnée par les équations intrinsèques $u = \varphi_1(t)$, $v = \varphi_2(t)$

Soit $\gamma(u, v) = f(\varphi_1(t), \varphi_2(t)) \in \Phi \subset \mathbb{R}^3$ et soit $P \in C$.

Considérons le paramétrage normal γ de C ($P = \gamma(s_0)$)

Schéma p. 25

Déf: $K = |\gamma''(s_0)| = \left| \frac{\gamma''(s_0) \cdot \vec{n}}{\cos \theta} \right|$ si $\theta \neq \pi/2$ où θ est l'angle entre $\vec{n}$ vect. normal à Φ et $\vec{K}$ vecteur courbure.

$$\gamma'(s) = f_u(\gamma_1, \gamma_2) \gamma_1' + f_v(\gamma_1, \gamma_2) \gamma_2'$$

$$\gamma''(s) = f_{uu}(\gamma_1, \gamma_2) (\gamma_1')^2 + 2f_{uv}(\gamma_1, \gamma_2) \gamma_1' \gamma_2' + f_{vv}(\gamma_1, \gamma_2) (\gamma_2')^2 + f_u(\gamma_1, \gamma_2) \gamma_1'' + f_v(\gamma_1, \gamma_2) \gamma_2''$$

Notons que $\vec{n}$ est orthogonal à f_u et $f_v \in \mathbb{R}^3$

→ les 2 derniers termes disparaissent après multiplication scalaire par $\vec{n}$.

Pas de dépendance de γ_1'' et γ_2'' après la multiplication.

Géom II :

Déf: Notons:

$$L(u,v) = \int_{uu} (u,v) \vec{n}(u,v)$$

$$M(u,v) = \int_{uv} (u,v) \vec{n}(u,v)$$

$$N(u,v) = \int_{vv} (u,v) \vec{n}(u,v)$$

L, M, N sont des fonctions scalaires telles que :

$$\pm K \cos \Theta = L(\gamma_1')^2 + 2M\gamma_1'\gamma_2' + N(\gamma_2')^2$$

Comment calculer K par Φ quelconque et régulier.

→ Pour un paramétrage quelconque $\varphi(t) = \varphi_1(t), \varphi_2(t)$, on a

$$\gamma_1'(s) = \frac{\varphi_1'(t)}{|\varphi'(t)|} \quad \text{où le dénominateur est déterminé par la première}$$

$$\text{forme fondamentale : } |\varphi'(t)|^2 = I(\varphi_1'(t), \varphi_2'(t)) = E(\varphi_1'(t))^2 + 2F\varphi_1'\varphi_2' + G\varphi_2'^2$$

Déf: Notons

Trouver long
Trouver K

L, M, N dépendent de (u, v)

coord d'un vect tan à u

$$II(\varphi_1', \varphi_2') = L(\varphi_1')^2 + 2M\varphi_1'\varphi_2' + N(\varphi_2')^2$$

$$II(\alpha, \beta) = L\alpha^2 + 2M\alpha\beta + N\beta^2$$

la courbure en fonction de φ_1 et φ_2

On a alors $K \cdot \cos \Theta = \pm \frac{II(\varphi_1', \varphi_2')}{I(\varphi_1', \varphi_2')}$ où K est la courbure de C .

Si $\cos \Theta = \pm 1 \Rightarrow K_n = \left| \frac{II(\varphi_1', \varphi_2')}{I(\varphi_1', \varphi_2')} \right|$

Déf: $K_n = \left| \frac{II(\varphi_1', \varphi_2')}{I(\varphi_1', \varphi_2')} \right|$ est la courbure normale de Φ en P en direction de la tangente L de C en P .

Thm: Meusnier

Soit $C \subset \Phi$ une courbe lisse, $P \in C$ un point, L la tangente de C en P , K_n la courbure normale pour L .

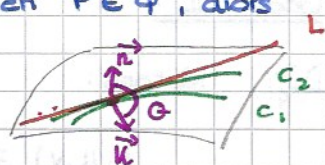
La courbure de K de C en P ne dépend que de K_n et Θ :

$$K = \frac{K_n}{|\cos \Theta|}$$

Rv: Soit $\gamma(x_1(t), x_2(t))$ un paramétrage d'une section normale de Φ en P et L $K|\cos \Theta| = \frac{II(\varphi_1', \varphi_2')}{I(\varphi_1', \varphi_2')} = \frac{II(x_1', x_2')}{I(x_1', x_2')} = K_n$

ici $\varphi_1' = Cx_1$

Cor: Si $C_1, C_2 \subset \Phi$ ont le même plan osculateur en $P \in \Phi$, alors les courbures de C_1 et C_2 coïncident.



Cor: La courbure de C en P est égale à la courbure en P de la section de Φ par le plan osculateur de C en P .

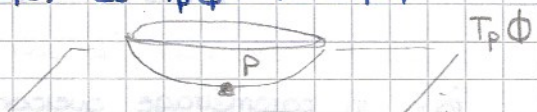
Intersection ?

[si le plan osculateur est différent du Plan tangent]

Soit $P \in \Phi \subset \mathbb{R}^3$ un point d'une surface lisse.

Choisissons les coordonnées tq $P = (0,0,0)$ et $T_P \Phi = \mathbb{R}^2 \times \{0\}$

le plan de (x,y) -coordonnées.



fonction scalaire

Par le paramétrage $(x,y, f(x,y))$, la première forme fond. est

! le cours s'arrête là !

$$I(\alpha, \beta) = \alpha^2 + \beta^2 \quad (\text{ic: } E = G = 1 \quad F = 0)$$

et la seconde forme fond. est quelconque

$$II(\alpha, \beta) = L\alpha^2 + 2M\alpha\beta + N\beta^2$$

Déf: Le paraboloid $z = Lx^2 + 2Mxy + Ny^2$ est le paraboloid osculateur.

On a $f(x,y) = Lx^2 + 2Mxy + Ny^2 + o(x^2 + y^2)$ (Taylor)

$\Rightarrow$ c'est le paraboloid le plus proche à Φ en P .

Rappelons que par une rotation en $T_P \Phi$ on peut assurer $M = 0$

en coordonnées correspondant aux directions propres de $\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ On peut distinguer les points de Φ par les signes de

L et N en coordonnées tq $I(\alpha, \beta) = \alpha^2 + \beta^2$ et $II(\alpha, \beta) = L\alpha^2 + N\beta^2$

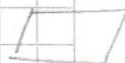
Attention: de telles coordonnées sont différentes $\forall$ pt différents.

$P \in \Phi$ avec $I(\alpha, \beta) = \alpha^2 + \beta^2$ et $M = 0$ est:

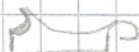
• elliptique si $LN > 0$



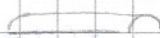
• méplat si $L = N = 0$



• hyperbolique si $LN < 0$



• parabolique si $LN = 0$

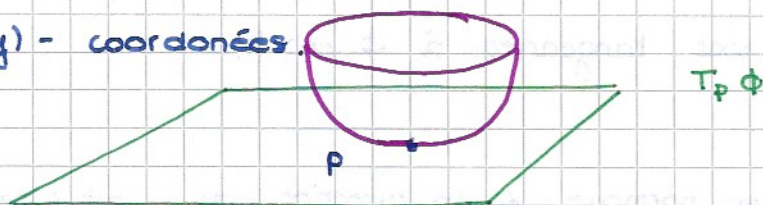


• ombilic si $L = N$



Géom II:

Soit $P \in \Phi \subset \mathbb{R}^3$ un point d'une surface lisse. Choisissons les coordonnées tq $P = (0,0,0)$ et $T_P \Phi = \mathbb{R}^2 \times \{0\}$, le plan des (x,y) -coordonnées.



Par le paramétrage $(x, y, f(x, y))$ ($y = x \in \mathbb{R}$ fonction scalaire)

la première forme fond. est $I(\alpha, \beta) = \alpha^2 + \beta^2$

ie: $E = G = 1, F = 0$

la seconde forme fond. est quelconque $II(\alpha, \beta) = L\alpha^2 + 2M\alpha\beta + N\beta^2$

Déf: Le parabolioïde $z = Lx^2 + 2Mxy + Ny^2$ est le parabolioïde osculateur.

On a $f(x, y) = Lx^2 + 2Mxy + Ny^2 + o(x^2 + y^2)$ (Dév. de Taylor)

$\Rightarrow$ C'est le parabolioïde le plus proche de Φ en P .

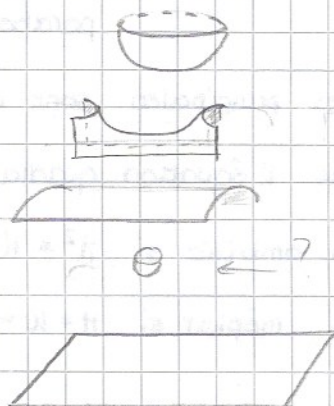
Rappelons que par une rotation en $T_P \Phi$, on peut assurer $M = 0$
(dans les coordonnées qui correspondent aux directions propres de $\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$)

$\Rightarrow$ On peut distinguer les points de Φ par les signes de L et N
en coordonnées tq $I(\alpha, \beta) = \alpha^2 + \beta^2$ et $II(\alpha, \beta) = L\alpha^2 + N\beta^2$

Δ de telles coordonnées sont différentes pour tous les points.

$P \in \Phi$ avec $I(\alpha, \beta) = \alpha^2 + \beta^2$ et $M = 0$ est:

- Elliptique si $LN > 0$
- Hyperbolique si $LN < 0$
- Parabolique si $LN = 0$
- Omphile si $L = N$
- Méplat si $L = N = 0$



Thm: Euler

Soit $\phi \subset \mathbb{R}^3$, une surface et $P \in \phi$. Alors, $\exists$ deux droites $L_1, L_2 \in \mathbb{R}^3$

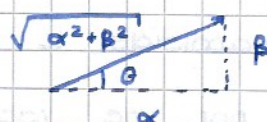
tg :

- L_1 et L_2 sont tangentes à ϕ en P .
- $L_1 \perp L_2$
- La courbure normale K_1 en direction de L_1 est maximale.
- La courbure normale K_2 en direction de L_2 est minimale.
- Pour une droite tangente L , on a la courbure normale K_n en direction de L , $K_n = K_1 \cos^2 \theta + K_2 \sin^2 \theta$ où θ est l'angle entre L_1 et L .

Pr: Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ un vecteur tangent à ϕ en P en le système de coordonnées tq $I(\alpha, \beta) = \alpha^2 + \beta^2$ et $II(\alpha, \beta) = K_1 \alpha^2 + K_2 \beta^2$

$$\text{On a } K_n = \frac{II(\alpha, \beta)}{I(\alpha, \beta)} = \frac{K_1 \alpha^2 + K_2 \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2} = \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + \beta^2} K_1 + \frac{\beta^2}{\alpha^2 + \beta^2} K_2$$

$$= \cos^2 \theta K_1 + \sin^2 \theta K_2$$



$$\cos \theta = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$$

$$\sin \theta = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$$

Déf: • K_1 et K_2 sont les courbures principales.

• $H := \frac{K_1 + K_2}{2}$ est la courbure moyenne.

• $K = K_1 \cdot K_2$ est la courbure de Gauss.

Rem: P est un point elliptique si $K > 0$

hyperbolique si $K < 0$

parabolique si $K = 0$

Les courbures principales sont déterminées par H et K . Elles sont

solutions de l'équation quadratique : $X^2 - 2HX + K = 0$ (Thm Viète)

P est un ombilic si $H^2 = K$

P est un méplat si $H = K = 0$

Soit $\gamma: U \rightarrow \Phi \subset \mathbb{R}^3$ un paramétrage régulier. Le vecteur normal $\vec{n}$ définit une fonction vectorielle $\vec{n}: U \rightarrow \mathbb{R}^3$. On peut comparer les dérivées partielles de γ et $\vec{n}$ en $(u_0, v_0) \in U$.

Thm:

Si les directions des lignes coordonnées sont les directions des courbures principales K_1 et K_2 , alors $\vec{n}_u = -K_1 \gamma_u(u_0, v_0)$ et $\vec{n}_v = -K_2 \gamma_v(u_0, v_0)$

Pv: On peut supposer que $\gamma(u, v) = (u, v, \varphi(u, v))$ et $\varphi(0, 0) = \varphi_u(0, 0) = \varphi_v(0, 0) = \varphi_{uv}(0, 0) = 0$

$$\text{Soit } \vec{N}(u, v) = \gamma_u(u, v) \times \gamma_v(u, v), \text{ alors } \vec{n}(u, v) = \frac{\vec{N}(u, v)}{|\vec{N}(u, v)|}$$

$$\vec{n}_u = \frac{\vec{N}_u(u, v) |\vec{N}(u, v)| - \vec{N}(u, v) \partial_u |\vec{N}(u, v)|}{|\vec{N}(u, v)|^2}$$

$$\gamma(u, v) = (u, v, \varphi(u, v)), \gamma_u = (1, 0, \varphi_u(u, v)), \gamma_v = (0, 1, \varphi_v(u, v))$$

$$\vec{N} = \gamma_u \times \gamma_v = (-\varphi_u, -\varphi_v, 1) \Rightarrow (0, 0, 1) \text{ en } (0, 0)$$

$$\vec{N}_u = (-\varphi_{uu}, -\varphi_{uv}, 0) \Rightarrow (-K_1, 0, 0) \text{ en } (0, 0)$$

$$|\vec{N}| = \sqrt{1 + \varphi_u^2 + \varphi_v^2} \Rightarrow 1 \text{ en } (0, 0)$$

$$\partial_u |\vec{N}| = \frac{\varphi_u \cdot \varphi_{uu} + \varphi_v \cdot \varphi_{uv}}{\sqrt{1 + \varphi_u^2 + \varphi_v^2}} \Rightarrow 0 \text{ en } (0, 0)$$

$$\Rightarrow \vec{n}_u = (-K_1, 0, 0) = -K_1 \cdot (1, 0, 0) = -K_1 \gamma_u$$

Etant données deux formes fondamentales

$$I(\alpha, \beta) = E\alpha^2 + 2F\alpha\beta + G\beta^2$$

$$II(\alpha, \beta) = L\alpha^2 + 2M\alpha\beta + N\beta^2$$

Comment trouver les directions principales et les courbures principales?

Rappelons: $K(\alpha, \beta) = \frac{II(\alpha, \beta)}{I(\alpha, \beta)}$ courbure normale en direction de (α, β)

Soit $t = \alpha/\beta$, alors

$$K(\alpha, \beta) = \frac{L\alpha^2 + 2M\alpha\beta + N\beta^2}{E\alpha^2 + 2F\alpha\beta + G\beta^2} = \frac{L\alpha^2/\beta^2 + 2M\alpha/\beta + N}{E\alpha^2/\beta^2 + 2F\alpha/\beta + G} = \frac{\varphi_2(t)}{\varphi_1(t)}$$

$$\varphi_1(t) = Et^2 + 2Ft + G \quad \text{et} \quad \varphi_2(t) = Lt^2 + 2Mt + N$$

Pour trouver les extrémums de $\varphi_2(t)/\varphi_1(t)$, on considère la dérivée $\left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right)' = \frac{\varphi_2' \varphi_1 - \varphi_2 \varphi_1'}{\varphi_1^2}$

$$0 = \varphi_2' \varphi_1 - \varphi_2 \varphi_1' = (2Lt + 2M)(Et^2 + 2Ft + G) - (2Et + 2F)(Lt^2 + 2Mt + N)$$

$$\text{ou} \quad 0 = t^2(LF - ME) + t(LG - NE) + (MG - NF) \quad \text{ou}$$

$$0 = \alpha^2(LF - ME) + \alpha\beta(LG - NE) + \beta^2(MG - NF) \quad \text{ou}$$

$$\begin{vmatrix} \beta^2 & -\alpha\beta & \alpha^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0$$

Pour trouver les courbures principales, on peut considérer l'équation

$$II(\alpha, \beta) = I(\alpha, \beta) \cdot K \quad \text{ou} \quad (L - KE)\alpha^2 + 2(M - KF)\alpha\beta + (N - KG)\beta^2 = 0$$

On peut la traiter comme une équation quadratique, $(L - KE)\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 + 2(M - KF)\frac{\alpha}{\beta} + (N - KG) = 0$

$$\frac{1}{4} \text{ du discriminant est } (M - KF)^2 - (L - KE)(N - KG) = \frac{b^2 - 4ac}{4} = 0$$

discriminant = 0 $\Rightarrow K$ est une courbure principale

$$(EG - F^2)K^2 + (2MF - EN - LG)K + (LN - M^2) = 0$$

$\quad \quad \quad -b/a \quad \quad \quad c/a$

L'équation quadratique pour les courbures principales (Thm Viète)

$$\Rightarrow 2H = K_1 + K_2 = \frac{EN - 2MF + LG}{EG - F^2}$$

courb. moyenne

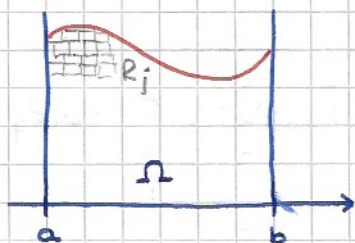
$$K = K_1 \cdot K_2 = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}$$

courb. de Gauss

Géom II :

Comment on arrive à la déf de la le 08.05.19
formule de l'aire !

Supposons que $\Omega = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$ pour une fonction lisse $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$

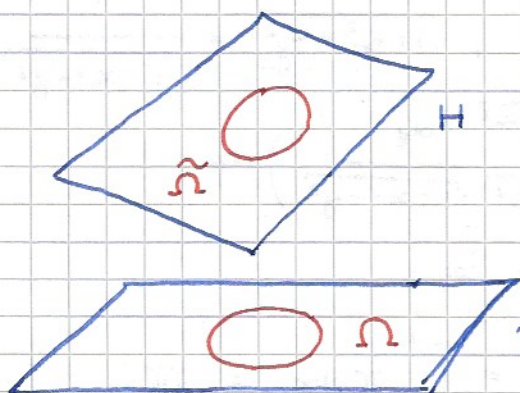


$$S(\Omega) = \sum_j S(R_j)$$

Rap: $S(\Omega) = \int_a^b f(x) dx$ l'aire de Ω , ou aussi

$$S(\Omega) = \int_{\Omega} 1 \, dx dy = \int_a^b f(x) dx \text{ par thm de Fubini}$$

Supposons que $\tilde{\Omega} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = ax + by = \lambda(x, y), (x, y) \in \mathbb{R}^2\} \subset \mathbb{R}^3$
 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un domaine (ensemble ouvert et connexe)



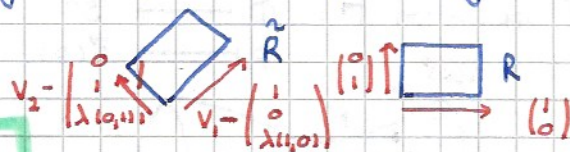
Soit $(u, v) \in H$ des coordonnées Euclidiennes.

Alors $S(\tilde{\Omega}) = \int_{\tilde{\Omega}} du dv$

Par un petit rectangle $R \subset \Omega$ (sur $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$) son image

$\tilde{R} = \{(x, y, z) \mid z = \lambda(x, y), (x, y) \in R\}$ est un parallélogramme sur $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \lambda(1,0) \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \lambda(0,1) \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow S(\tilde{R}) = S(R) \cdot |v_1 \times v_2|$$



$$|v_1 \times v_2| = |v_1| \cdot |v_2| \cdot \sin \theta$$

$$1 - \cos^2 \theta$$

$$\Rightarrow |v_1 \times v_2|^2 = |v_1|^2 |v_2|^2 \cdot \sin^2 \theta = |v_1|^2 |v_2|^2 - |v_1|^2 |v_2|^2 \cos^2 \theta$$

$$= |v_1|^2 |v_2|^2 - (v_1 \cdot v_2)^2$$

Mais $|v_1|^2 = E$, $|v_2|^2 = G$, $v_1 \cdot v_2 = F$

$$\Rightarrow S(\tilde{R}) = S(R) \sqrt{EG - F^2} = \int_R \sqrt{EG - F^2} \, dx dy$$

Def: Soit $\Phi \subset \mathbb{R}^3$ une surface lisse paramétrée par $\gamma: U \rightarrow \mathbb{R}^3, U \subset \mathbb{R}^2$

$$S(\Phi) = \int_{(u,v) \in U} \sqrt{EG - F^2} \, du \, dv$$

Ex: Soit $\gamma(x, y) = (x, y, \varphi(x, y))$, alors

$$\gamma_u = (1, 0, \varphi_x), \quad \gamma_v = (0, 1, \varphi_y) \quad \text{et} \quad E = 1 + \varphi_x^2, \quad F = \varphi_x \varphi_y$$

$$\text{et} \quad G = 1 + \varphi_y^2, \quad EG - F^2 = 1 + \varphi_x^2 + \varphi_y^2$$

$$\Rightarrow S(\Phi) = \int_{(x,y) \in U} \sqrt{1 + \varphi_x^2 + \varphi_y^2} \, dx \, dy$$

Ex: La sphère unitaire se décompose en deux demi-sphères données par $\varphi(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, $U = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$ le disque unitaire.

$$\varphi_x = \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}, \quad \varphi_y = \frac{-y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}, \quad \sqrt{1 + \varphi_x^2 + \varphi_y^2} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$$

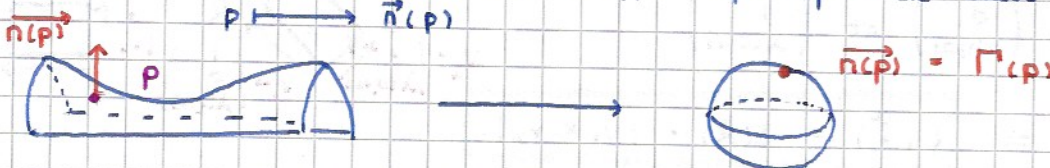
$$\int_U \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} \, dx \, dy = \int_{-1}^1 \left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{dy}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} \right) dx$$

$$\int \frac{dy}{\sqrt{c - y^2}} = \arcsin \frac{y}{\sqrt{c}} + \text{cte}$$

$$= \int_{-1}^1 \left[\arcsin \frac{y}{\sqrt{1-x^2}} \right]_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_{-1}^1 \pi \, dx = 2\pi$$

$\Rightarrow$ aire de la sphère unitaire 4π .

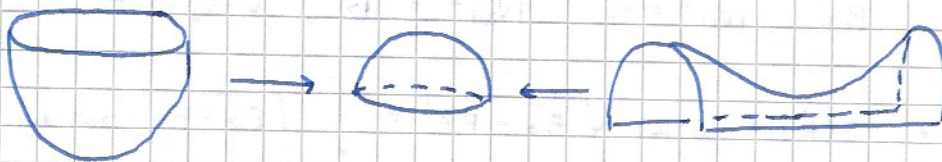
Def: L'application $\Gamma: \Phi \longrightarrow S^2$ est l'appl. sphérique / de Gauss

$$p \longmapsto \vec{n}(p)$$


$\vec{n}(p) = \Gamma(p)$

Ex:

- Pour la sphère unitaire (S^2), Γ est l'identité ($\Gamma(p) = p$)
- Pour un paraboloïde elliptique ou hyperbolique Φ , l'image $\Gamma(\Phi) \subset S^2$ est une demi-sphère ouverte.



Géom I:

On peut utiliser la formule pour l'aire de l'image avec $\sqrt{EG-F^2}$ pour Γ !

Thm: Soit $U \subset \Phi$, un voisinage de $p \in \Phi$, $p \in U$. Notons par $d(U)$ le diamètre de U . On a $\lim_{d(U) \rightarrow 0} \frac{S(\Gamma(U))}{S(U)} = |K(p)|$ où $K(p)$ est la courbure de Gauss de Φ en p .

Pv: Soient u, v les coordonnées qui correspondent aux directions principales. Alors $\vec{n}_u = -K_1 \gamma_u$ et $\vec{n}_v = -K_2 \gamma_v$.
Calculons l'expression $\sqrt{EG-F^2}$ responsable pour l'aire $S(U) = \int_U \sqrt{EG-F^2}$.
En coordonnées u, v , on a $E(p) = G(p) = 1$, $F(p) = 0$.
 $S(\Gamma(U)) = \int_U \sqrt{E_\Gamma G_\Gamma - F_\Gamma^2}$, où $E_\Gamma, F_\Gamma, G_\Gamma$ correspondent à la première forme fond. de $\Gamma(\Phi)$.

$$\text{ie: } E_\Gamma = |\vec{n}_u|^2, F_\Gamma = \vec{n}_u \cdot \vec{n}_v, G_\Gamma = |\vec{n}_v|^2$$

En p , on a $\sqrt{E_\Gamma G_\Gamma - F_\Gamma^2} = |K_1 \cdot K_2|$ et

$$\sqrt{EG-F^2} = 1 \Rightarrow \lim_{d(U) \rightarrow 0} \frac{S(\Gamma(U))}{S(U)} = |K_1 \cdot K_2| = |K(p)| \quad \square$$

Déf: Une isométrie $\overset{\text{iota}}{i}: \Phi \longrightarrow \tilde{\Phi}$ est un homéomorphisme (bijective, continue, inverse continue) tq la longueur des courbes est conservée
ie: $\forall c \subset \Phi$ les longueurs de c et $i(c)$ coïncident.
 $\Rightarrow$ les distances entre les points sont aussi conservées par i .
 $\Rightarrow i$ conserve la première forme fondamentale.

ie: pour un param. régulier $\gamma: U \longrightarrow \Phi \subset \mathbb{R}^3$, la composition

$i \circ \gamma: U \longrightarrow \tilde{\Phi} \subset \mathbb{R}^3$ est aussi régulière et les coefficients

$E, F, G: U \longrightarrow \mathbb{R}$ coïncident.

La géom. intrinsèque étudie les propriétés invariantes sous les isométries.

Ex: la première forme fond. est invariante (intrinsèque), la seconde forme fond. n'est pas invariante (extrinsèque).



Inversement, si la première forme est conservée, alors les longueurs sont conservées.

Ex: l'aire et les angles sont intrinsèques, la courbure moyenne n'est pas intrinsèque.

Thm: Gauss: théorème egregium
la courbure de Gauss K est intrinsèque.

Cor:



Cor: l'aire de l'application sphérique est conservée par une isométrie.

Pour la démonstration du thm, on va exprimer K en termes de E, F, G et leur dérivées.

On commence avec: $K_{u,v} = \frac{L \cdot N - M^2}{E \cdot G - F^2}$

$$L = \frac{(f_{uw}, f_u, f_v)}{\sqrt{EG - F^2}}, \quad M = \frac{(f_{uv}, f_u, f_v)}{\sqrt{EG - F^2}}, \quad N = \frac{(f_{vw}, f_u, f_v)}{\sqrt{EG - F^2}}$$

$\Rightarrow$ le numérateur de K est $(f_{uw}, f_u, f_v)(f_{vw}, f_u, f_v) - (f_{uv}, f_u, f_v)^2$

$\stackrel{a \cdot (b \times c)}{=}$

Lemme: $(a, b, c)(a', b', c') = \begin{vmatrix} a \cdot a' & ab' & a \cdot c' \\ b \cdot a' & b \cdot b' & b \cdot c' \\ c \cdot a' & c \cdot b' & c \cdot c' \end{vmatrix} \quad \forall a, b, c, a', b', c' \in \mathbb{R}^3$

$\stackrel{a' \cdot (b' \times c')}{=}$

Pv: (Lemme)

$$(a, b, c)(a', b', c') = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a'_1 & b'_1 & c'_1 \\ a'_2 & b'_2 & c'_2 \\ a'_3 & b'_3 & c'_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a \cdot a' & ab' & a \cdot c' \\ b \cdot a' & b \cdot b' & b \cdot c' \\ c \cdot a' & c \cdot b' & c \cdot c' \end{vmatrix}$$

Géom II:

Pv: du thm de Gauss

$$(f_u f_v = F, f_v^2 = G)$$

$$y_u^2 = E \Rightarrow f_{uu} \cdot f_u = \frac{1}{2} E_u$$

Pareillement, $f_u \cdot f_{uv}, f_{uv} \cdot f_v, f_v \cdot f_{vv}, f_{uu} f_v + f_u f_{uv},$

$f_u f_{vv} + f_{uv} f_v$ sont exprimables en termes de $E_u, E_v, G_u, G_v,$

$F_u, F_v.$

$\Rightarrow f_{uu} f_v$ et $f_u f_{vv}$ sont exprimables.

Considérons : $L \cdot N = (f_{uu}, f_u, f_v) \cdot (f_{vv}, f_u, f_v) =$

$$\begin{vmatrix} f_{uu} f_{vv} & f_{uu} f_u & f_{uu} f_v \\ f_u f_{vv} & f_u f_u & f_u f_v \\ f_v f_{vv} & f_v f_u & f_v f_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_{uu} f_{vv}^* & f_{uu} f_u & f_{uu} f_v \\ f_u f_{vv} & E & F \\ f_v f_{vv} & F & G \end{vmatrix}$$

Pareillement, $M^2 = \begin{vmatrix} f_{uv}^2 & f_{uv} f_u & f_{uv} f_v \\ f_u f_{uv} & E & F \\ f_v f_{uv} & F & G \end{vmatrix}$

tout est intrinsèque
sauf $\odot$

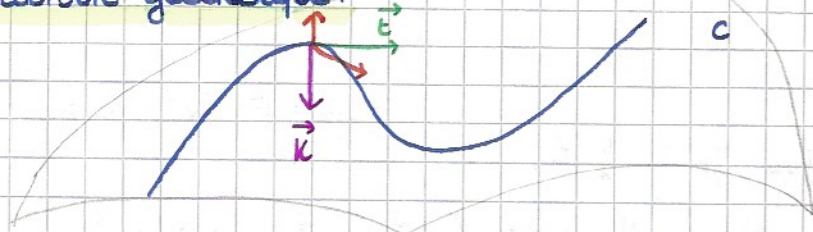
$\Rightarrow$ il suffit de mq $f_{uu} f_{vv} - f_{uv}^2$ est exprimable.

$$\begin{aligned} \text{Mais } (f_{uu} f_v)_v &= f_{uuv} f_v + f_{uu} f_{vv} = (f_{uv} f_v)_v - (f_{uv} f_v)_u \\ (f_{uv} f_v)_u &= f_{uvu} f_v - f_{uv}^2 \end{aligned}$$

intrinsèque. ■

La courbure géodésique:

le 22.05.19



Considérons une courbe lisse $C \subset \Phi \subset \mathbb{R}^3$ sur une surface lisse $\Phi \subset \mathbb{R}^3$ et son point $P \in C$.

Le vecteur de courbure $\vec{K}$ de C en P est orthogonal à C , (et à $\vec{E}$)

On a $\vec{n} \perp \vec{E}$ pour $\vec{E}$ le vecteur tangent à C et $\vec{n}$ le vecteur normal à Φ .

$$\Rightarrow \vec{K} = \vec{K}_n + \vec{K}_g, \quad \vec{K}_n \parallel \vec{n}, \quad \vec{K}_g \perp \vec{n}, \vec{E} \quad (\vec{K}_n \perp \vec{E}, \vec{K}_g \perp \vec{E})$$

Notons que par le thm de Meusnier, $|\vec{K}_n|$ est la courbure normale de Φ en direction de C .

Déf: La longueur $K_g = |\vec{K}_g|$ est la courbure géodésique.

C'est une notion intrinsèque (par la projection de $\vec{K}$ sur $T_P\Phi$)

Soient $t \mapsto \varphi(t) \in C \subset \Phi$ un paramétrage régulier, $P = \varphi(t_0)$ et $\vec{n}$ le vecteur normal à Φ en P . Alors on peut calculer la courbure

$$\text{de } C \text{ par } |\vec{K}| = \left(\frac{|\varphi''(t_0)|}{|\varphi'(t_0)|^2} \right)^\perp = \frac{|\varphi''(t_0) \times \varphi'(t_0)|}{|\varphi'(t_0)|^3} \quad \left(= \frac{K_n}{\cos \theta} \right)$$

$$\Rightarrow K_g = \left| \frac{(\varphi''(t_0), \varphi'(t_0), \vec{n})}{|\varphi'(t_0)|^3} \right|$$

Déf: $C \subset \Phi$ est une géodésique si la courbure géodésique est nulle $\forall P \in C$.

Propriétés:

1) le vecteur normal à C coïncide avec $\pm$ le vecteur normal $\vec{n}$ à Φ $\forall P \in C$

2) le plan osculateur à C contient $\vec{n}$ $\forall P \in C$

3) le plan rectifiant à C coïncide avec $T_P\Phi$ $\forall P \in C$

4) $\forall P \in C$, la courbe C minimise la courbure entre toutes les courbes tangentes à $\vec{E}(P)$.

$$5) (\varphi''(t), \varphi'(t), \vec{n}(\varphi(t))) = 0$$

Thm: $\forall p \in \Phi, 0 \neq \vec{v} \in T_p \Phi, \exists!$ géodésique $t \mapsto \varphi(t), \varphi(t_0) = p$
et $\varphi'(t_0) = \vec{v}$

Pv: Considérons un paramétrage $f(u, v)$.

Cherchons $\varphi(t) = f(t, \psi(t))$

$$\text{Alors } \varphi'(t) = f_u(t, \psi(t)) + f_v(t, \psi(t)) \cdot \psi'(t)$$

$$\varphi''(t) = f_{uu}(t, \psi(t)) + 2f_{uv}(t, \psi(t))\psi'(t) + f_{vv}(t, \psi(t))(\psi'(t))^2 + f_v(t, \psi(t)) \cdot \psi''(t)$$

$$(\varphi'', \varphi', \vec{n}) = (f_{uu} + 2f_{uv}\psi' + f_{vv}(\psi')^2, f_u + f_v\psi', \vec{n}) +$$

$$(f_v\psi'', f_u + f_v\psi', \vec{n}) = 0 \text{ pour une géodésique.}$$

$$\Rightarrow \psi'' = \frac{(f_{uu} + 2f_{uv}\psi' + f_{vv}(\psi')^2, f_u + f_v\psi', \vec{n})}{(f_u, f_v, \vec{n})}$$

une solution unique étant données $\psi'(t_0), \psi''(t_0)$

Cylindre: 

cône: 

sphère: 

□

Déf: Un paramétrage régulier $f(u, v)$ est semigéodésique

si toutes les lignes de u -coordonnée sont géodésiques
et elles sont orthogonales aux lignes de v -coordonnée
en tout point.



$$F = 0$$

(*)

Ex: $\Phi = \mathbb{R}^2 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$

$$\Rightarrow \vec{\kappa}_n = 0 \text{ pour toute courbe } C \subset \mathbb{R}^2$$

$$\kappa_g = 0 \Leftrightarrow \kappa = 0 \Leftrightarrow \text{c'est une droite}$$

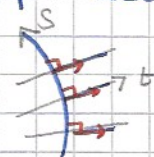
Une géodésique dans le plan $\Leftrightarrow$ une droite.

Pv: Pour construire un paramétrage semi-géodésique local, choisissons

une courbe lisse $C \subset \Phi$ pour $\{t=0\}$

des vecteurs unitaires orthogonaux à C

déterminent une géodésique $s \mapsto g(s, t)$



la courbe C est
paramétrisée par la longueur
de l'arc s

$$|g_s(s, t)| = 1$$

↑ p 37

* Paramétrée par la longueur $\Rightarrow |g_s(s, t)| = 1$

Pv: (Suite)

Pour vérifier que $g(s,t)$ est une semigéodésique, il suffit de vérifier

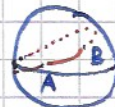
$$F=0, \text{ i.e.: } g_s \cdot g_t = 0.$$

Notons que $g_{ss}(s,t) \parallel \vec{n} \Rightarrow g_{ss} \cdot g_t = 0$, $\|g_t\|^2 = 1$

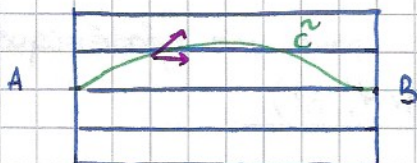
$$\text{mais } g_{ss} \cdot g_t = F_s - \frac{E_t}{2} = F_s \quad (\text{Car } E=1) \quad E_s = 0$$

On a $E=1, F=0, G$ quelconque

Thm: Un arc $[A,B] \subset C$ suffisamment petit d'une géodésique C minimise la longueur pour toutes courbes lisses entre A et B .



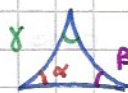
Pv: Utilisons un paramétrage semigéodésique tq $A = g(0,0), B = g(L,0)$



$$\begin{aligned} S(\tilde{C}) &= \int_0^L \sqrt{|\varphi'_1(y)|^2 + G|\varphi'_2(y)|^2} dy \\ &\geq \int_0^L |\varphi'_1(y)| dy \geq \int_0^L \varphi'_1(y) dy = L \end{aligned}$$

Thm: Gauss - Bonnet

Pour un triangle géodésique



, on a :

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + \int_{\Delta} K \, d\sigma$$

Courbure de Gauss de $\phi = \Delta$

(*) Thm:

Un paramétrage semigéodésique existe localement en voisinage de $P \in \phi$.

Séance de Réponses aux Questions :

Thm: Spectral

Toute matrice symétrique réelle M_V est diagonalisable en base orthonormée

Rem: • Le théorème et sa preuve mélangent algèbre linéaire et bilinéaire.

- Une matrice symétrique A peut être vue comme un endomorphisme ou une forme bilinéaire symétrique.

Déf: Forme bilinéaire symétrique :

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : (\mathbb{R}^n)^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto \langle x, y \rangle \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \text{linéaire en } x \text{ et en } y \text{ et} \\ \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle \end{array}$$

- Si $(b_1, \dots, b_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$ [$B = (b_1, \dots, b_n)$]

On note $a_{ij} = \langle b_i, b_j \rangle$ et on peut donc représenter

$$\langle \cdot, \cdot \rangle \text{ par } A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$$

- Si $B' = (b'_1, \dots, b'_n)$ est une autre base et P est une matrice de changement de base, alors la matrice de $\langle \cdot, \cdot \rangle$ dans B' est donnée $P^T A P$.

C'est à dire, $\exists O$ matrice orthogonale ($O^T = O^{-1}$) tq OMO^{-1} est diagonale (OMO^T)

Cor: [Si $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire (forme bi-lin. sym. ... déf positive)]
 Si A est sym. déf. positive et B est sym., alors $\exists P \in GL_n(\mathbb{R})$
 tq $\begin{cases} P^T A P = I_n \\ P^T B P \text{ est diagonal} \end{cases}$

Pv: (idée) Interpréter A comme la matrice du produit scalaire standard dans une base exotique puis appliquer le thm.

Retour Géom. diff.

Si Φ est une surface avec un paramétrage $\leadsto I, II$ deux formes bilinéaires symétriques.

↑
déf. positive

Le corollaire dit qu'on peut s'arranger (Changer le paramétrage)

pour que $I = I_2$ et $II = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$

Dans ce cas :

λ_1 et λ_2 sont les courbures principales et $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont les directions principales (Il faut les pousser).

$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = \text{Courbure de Gauss}$
 $\frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2) = \text{Courbure moyenne}$ } donne accès à $\{\lambda_1, \lambda_2\}$

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$$

Soit P tq $P^T I P = I_2$ et $P^T II P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = \det(P^T II P) = \det(II) \cdot \det(P^T) \det(P) = \frac{\det(II)}{\det(I)} \left(= \frac{LN - M^2}{EG - F^2} \right)$$
$$\det(P) \det(I) \det(P) = 1 \Rightarrow \det(P^T P) = \frac{1}{\det(I)}$$

Calcul de P :

$I = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$, soit Q tq $\underbrace{Q I Q^T}_D = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix}$ (on trouve les val. propres et vect. prop.)

On note $\sqrt{D} = \begin{pmatrix} \sqrt{\mu_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{\mu_2} \end{pmatrix}$ et $R = (\sqrt{D})^{-1} Q$

$$R I R^T = (\sqrt{D})^{-1} Q I Q (\sqrt{D})^{-1} = (\sqrt{D})^{-1} D (\sqrt{D})^{-1} = I_2$$

On regarde $M = R II R^T$ si elle est diagonale, on a gagné.

On diagonalise M en base orthonormale et on trouve O tq $O^{-1} = O^T$

et tq $O M O^T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$. On pose $P = OR$

$$P I P^T = O R I R^T O^T = O M O^T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

$$P I P^T = O R I R^T O^T = O I_2 O^T = O O^T = I_2$$

Donc $P = OR = O (\sqrt{D})^{-1} Q$ et P encode les directions principales

Dans le cours, pour trouver les directions principales, on regarde $s\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) = \frac{\mathbb{I}(\alpha, \beta)}{I(\alpha, \beta)}$ et on cherche $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)$ extrémaux de la fonction.

(en regardant $\mathbb{I}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) / I\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)$ et en dérivant.) [la méthode utilisée dans le cours]

Q: Pourquoi ça marche ?

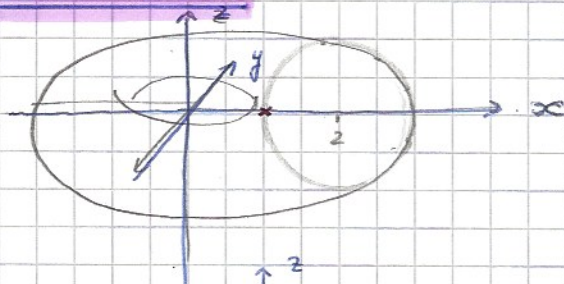
Si $I = I_d$ et $\mathbb{I} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ avec $\lambda_1 < \lambda_2$

$$\text{alors } s\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) = \frac{\lambda_1 \alpha^2 + \lambda_2 \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2} \in [\lambda_1, \lambda_2]$$

$$= \frac{\lambda_1 \alpha^2}{\alpha^2 + \beta^2} + \frac{\lambda_2 \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2}$$

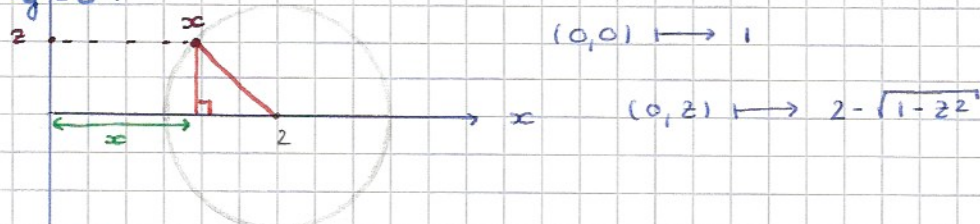
est extrémale pour $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Série 9 Ex 1b

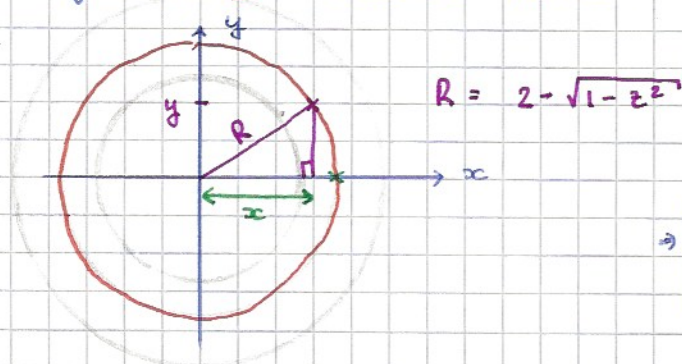


On cherche $(y, z) \mapsto \dots$ pour $(1, 0, 0)$

on fixe $y = 0$:



on fixe un $\vec{z}$: (vue de haut)



$$\Rightarrow (y, z) \mapsto \sqrt{(2 - \sqrt{1 - z^2})^2 - y^2}$$

Même chose pour le pt $(3, 0, 0)$

Si I et II sont diagonales alors les directions principales sont $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ déplacés par la jacobienne ie :

$J \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $J \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ où J est la jacobienne.