

Proba et stat :

Examen : 2 écrits à la fin de chaque semestre

Ch. 0 Introduction.Objets bases : $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 0.1 L'univers :Déf : $\Omega = \{\text{résultats possibles}\}$ Ex : 1) lancer P/F une pièce $\Omega = \{P, F\}$ 2) 2 lancer P/F $\Omega = \{PP, PF, FP, FF\}$ 3) Lancer P/F jusqu'au 1^{er} pile $\Omega = \{P, FP, FFP, \dots\}$ 4) lancer d'un dé (suite infinie) $\Omega = \{(a_k)_{k \geq 1} : a_k \in \{1, \dots, 6\}, k \geq 1\}$ 5) Taille d'un individu $\Omega = [0, 3] \text{ [m]}$ ou $\Omega = \{0, \dots, 3000\} \text{ [mm]}$ 6) Trajectoire d'un grain de pollen $\Omega = \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$
dans un fluide.0.2 Les événements :Déf : $\mathcal{F} = \{\text{événements}\}$, un événement est une propriété dont on peut vérifier si elle est vérifiée une fois le résultat connu.

$$A \in \mathcal{F} \iff \{w \in \Omega : w \text{ possède la propriété } A\}$$

Ex : 2 lancers d'un dé $\Omega = \{(m, n) : m, n \in \{1, \dots, 6\}\}$

1) "second lancer = 6"

$$\mathcal{F} = \{(m, 6) : m \in \{1, \dots, 6\}\}$$

2) "somme est paire"

$$\mathcal{F} = \{(m, n) \in \Omega : \frac{m+n}{2} \in \mathbb{N}\}$$

Terminologie: • Événement élémentaire : singleton $\{\omega\} \in \mathcal{F}$

• Événement composé : év. non élémentaire

• " — " certain : Ω

• " — " impossible : $\emptyset$

• $A, B \in \mathcal{F}$: $A \cup B$ "A ou B"

$A \cap B$ "A et B"

• A et B incompatibles ou disjoints : $A \cap B = \emptyset$

0.3 Mesure de Probabilité

Déf:

$$\mathbb{P}: \begin{array}{ccc} \mathcal{F} & \longrightarrow & [0, 1] \\ A & \longmapsto & \mathbb{P}(A) \end{array}$$



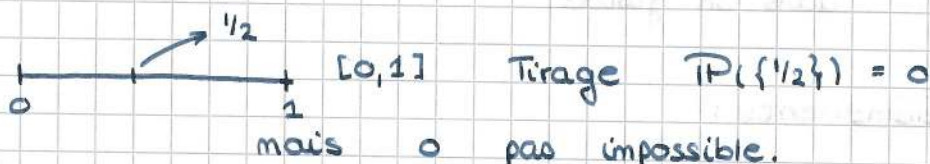
$\mathbb{P}(A) = 1 \Rightarrow$ événement presque certain

Rem:

$\mathbb{P}(A) = 1 \not\Leftrightarrow$ A est certain

$\mathbb{P}(A) = 0 \not\Leftrightarrow$ A est impossible.

Ex:



Quelles propriétés pour $\mathbb{P}$?

Parentèse: Interprétation fréquentiste

On a $\Omega, \mathcal{F}$ et on répète N fois l'expérience

N_A = nbr de fois où A (évènement) est réalisé

$$" \mathbb{P}(A) := \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N_A}{N} " \quad \frac{N_A}{N} = f_N(A)$$

On vérifie facilement :

1) $0 \leq f_N(A) \leq 1 \quad \forall A \in \mathcal{F}$

2) $f_N(\Omega) = 1$

3) $A, B \in \mathcal{F}, A \cap B = \emptyset$, alors $f_N(A \cup B) = f_N(A) + f_N(B)$ p 2

Proba et Stat :

On veut exiger que $\mathbb{P}$ satisfasse :

$$1) \quad 0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1 \quad \forall A \in \mathcal{F}$$

$$2) \quad \mathbb{P}(\Omega) = 1$$

$$3) \quad A, B \in \mathcal{F} \text{ disjoints} \Rightarrow \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$$

Rem: 3') si $A_i \in \mathcal{F} \quad i = \{1, \dots, n\}$ disjoints 2 à 2 alors $\mathbb{P}(\bigcup_{i \in \mathbb{Z}} A_i) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i)$

On aura besoin de :

$$3') \quad \text{Si } (A_i)_{i=1}^n \in \mathcal{F} \quad \forall i \text{ tq } A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall i \neq j \text{ alors}$$

$$\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i)$$

$\mathbb{P}$ est définie par 1), 2), 3'.

1 Espace de proba discrets.

(Ω fini/dénombrable)

Ch 1 : Proba, Proba conditionnelle et indépendance

1.1 Mesures de Probabilité:

Déf: Une fonction de Masse est une application $f: \Omega \rightarrow [0, 1]$

$$\text{tq } \sum_{\omega \in \Omega} f(\omega) = 1$$

Rem: Que signifie $\sum_{\omega \in A} f(\omega)$?

• Si A est fini et $A \neq \emptyset$ ✓

• Si A dénombrable (mais ∞), et $f \geq 0$:

on fixe un ordre dans $A = \{a_1, a_2, \dots\}$, on pose

$$\sum_{\omega \in A} f(\omega) := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(a_i)$$

• Si $A = \emptyset$, $\sum_{\omega \in A} f(\omega) = 0$

Ex:

1) Dé non-pipé : $\Omega = \{1, \dots, 6\}$

$$f(w) = 1/6 \quad \forall w \in \Omega$$

2) Dé pipé : $\Omega = \{1, \dots, 6\}$

$$f(1) = 1/6 \quad f(2) = f(3) = f(4) = f(5) = 1/9 \quad f(6) = 1/3$$

Déf:

Ω fini et dénombrable, f fonction de masse,

Prob de $A \subset \Omega$ est définie par $\mathbb{P}(A) = \sum_{a \in A} f(a)$

* $\mathbb{P}: \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1]$ est la mesure de proba de Ω associé à f .

Ex:

Dé non-pipé, A : "le résultat est pair"

$$A = \{2, 4, 6\} \subset \Omega = \{1, \dots, 6\}$$

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{w \in A} f(w) = 1/6 + 1/6 + 1/6 = 1/2$$

Thm 1.1:

$\mathbb{P}$ satisfait: *

i) $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$

ii) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

iii) Si $(A_k)_{k \geq 1}$ sont disjoints 2 à 2 alors $\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$

Preuve:

1) $\checkmark$

2) $\mathbb{P}(\Omega) = \sum_{w \in \Omega} f(w) = 1 \quad \checkmark$

3) $\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{w \in \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i} f(w) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{w \in A_i} f(w) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$

car w appartient à 1 seul A_i

Cor:

Toute application $\mathbb{P}: \Omega \rightarrow [0, 1]$ satisfaisant 1), 2), 3)

satisfait :

1) $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$

2) $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A) \quad \forall A \subset \Omega$

3) $\forall A \subset B \subset \Omega \quad \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$

4) Soit $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ 2 à 2 disjoints
alors $\mathbb{P}(\bigcup A_i) = \sum \mathbb{P}(A_i)$

5) I finis dénomb. Soit $(A_i)_{i \in I}$ collection d'événement

$$\text{alors } \mathbb{P}(\bigcup_{i \in I} A_i) \leq \sum_{i \in I} \mathbb{P}(A_i)$$

Proba et Stat:

Cor: 6) $\forall A, B \subset \Omega, \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Preuve:

1) $A_1 = A_2 = \dots = \emptyset$ 2 à 2 disjointes

$$\Rightarrow P(\emptyset) = P\left(\bigcup_{i \in \mathbb{I}} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(\emptyset)$$

$$\Rightarrow P(\emptyset) = 0$$

4) $B_1 = A_1, B_2 = A_2, \dots, B_n = A_n, B_{n+1} = B_{n+2} = \dots = \emptyset$

$(B_i)_{i \geq 1}$ 2 à 2 disjointes

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) &= P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i) = \sum_{i=1}^n P(B_i) + \sum_{j=n+1}^{\infty} P(B_j) \\ &= \sum_{i=1}^n P(A_i) + 0 = \sum_{i=1}^n P(A_i). \end{aligned}$$

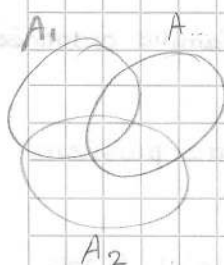
2) $A \cup A^c = \Omega, \quad A \cap A^c = \emptyset$

$$\Rightarrow P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c)$$

$$P(\Omega) = 1 = P(A) + P(A^c)$$

3) $B = A \cup (B \setminus A)$

$$\Rightarrow P(B) = P(A \cup (B \setminus A)) = P(A) + P(B \setminus A) \geq P(A)$$



5) $A_1, A_2, \dots \subset \Omega$

$$B_1 = A_1, \quad B_2 = A_2 \setminus A_1, \quad B_3 = A_3 \setminus (A_1 \cup A_2)$$

$$B_k = A_k \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_{k-1})$$

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \quad \text{mais } (B_i)_{i \geq 1} \text{ 2 à 2 disjointes.}$$

$$B_k \subset A_k \quad \forall k \geq 1$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \underbrace{P(B_i)}_{\leq P(A_i)} \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

6) $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$ disjointes

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B \setminus A) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(B) = P(B \setminus A) + P(A \cap B)$$

Déf: La mesure de proba uniforme sur Ω fini, est la mesure de proba associée à la fonct de masse $f(\omega) = \frac{1}{|\Omega|} \forall \omega \in \Omega$

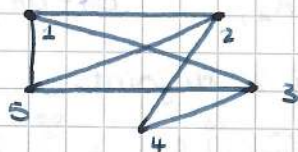
Cor: Soit P uniforme et $A \subset \Omega$, alors $P(A) = \sum_{\omega \in A} f(\omega) = \sum_{\omega \in A} \frac{1}{|\Omega|} = \frac{|A|}{|\Omega|}$

Ex 1.3: Graphe aléatoire d' Erdős - Rengi

$m \geq 0$ et $n \geq 1$ 2 entiers

$\Omega = \{ \text{des graphes à } n \text{ sommets et } m \text{ arêtes} \}$

$n = 5, m = 7$



avec la proba uniforme.

le 26.09.18

1.2 Quelques résultats combinatoires:

Notation: $n, r \in \mathbb{N}^*$ $(n)_r = n(n-1) \dots (n-r+1)$ symbole de Pochhammer
 $(n)_0 = 1$ $\binom{n}{r} = \frac{(n)_r}{r!}$ $(n)_0 = 1$

1.2.1 Echantillons ordonnés:

Déf: Soit $A = \{a_1, \dots, a_n\}$, un échantillon ordonné de taille r est une famille ordonnée de r éléments de A .

- Tirage avec remise: Les éléments de A peuvent apparaître plusieurs fois dans l'échantillon.
- Tirage sans remise: Les éléments de A apparaissent au plus 1 fois. ($r \leq n$)

Ex: 1) On lance 1 dé à 6 faces 10 fois en notant les résultats obtenus

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ $r = 10$ tirage avec remise.

2) Tirage du Loto en Suisse, extraction d'un échantillon de taille 6 sans remise, $A = \{1, \dots, 42\}$

Lemme: $A = \{a_1, \dots, a_n\} \quad r \in \mathbb{N}^*$

- 1) Le nbr d'échantillon de taille r distinct que l'on peut obtenir dans un tirage avec remise est n^r .
- 2) $r \leq n$, la même chose sans remise $(n)_r$
- 3) Le nbr de façon d'ordonner les éléments de A est $n!$

Preuve: 1) $n \cdot n \cdot \dots \cdot n = n^r$
 $\uparrow$ 1^{er} tirage $\uparrow$ r ième

2) $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-r+1) = (n)_r$
 $\uparrow$ 1^{er}

3) $(n)_n = n!$ □

Déf: Un échantillon aléatoire est une mesure uniforme sur l'ensemble des tirages possibles.

On procède à 1 tirage avec remise:

$E = \text{"chaque élément apparaît au + une fois"}$ $P(E) = \frac{(n)_r}{n^r}$ # cas favorable
cas tot.

Ex: 1) Dans une ville, il y a 7 accidents / semaine exactement.

Q: "Avec quelle fréquence on a 1 accident / jour (1 semaine)?"

$A = \{\text{lundi}, \dots, \text{dimanche}\} \quad n = 7 \text{ et } r = 7$

$P(1 \text{ accident / jour}) = \frac{(7)_7}{7^7} = 0,00612 \sim 1 \text{ fois tous les } 3 \text{ ans.}$

2) 23 personnes $B = \{2 \text{ personnes au moins en la m\u00eame date d'anniv}\}$

$A = \{1, \dots, 365\} \quad n = 365 \quad r = 23$

$P(B) = 1 - P(B^c) = 1 - \frac{(365)_{23}}{365^{23}} = 0,507 \approx \frac{1}{2}$

1.2.2 Echantillon non-ordonné:

Extraction d'un ss-pop de r individu à partir d'une pop de n individu.

Lemme 1.2: Une pop de taille n possède $\binom{n}{r}$ ss-pop de taille r , ($r \leq n$)

Preuve: ($\#$ ss-pop de taille r) $\cdot$ ($\#$ manière d'ordonner r individus)
 $\downarrow r!$
 $= (\# \text{ échantillon ordonné de taille } r \text{ sans remise}) = (n)_r$
 $(\# \text{ ss-pop taille } r) = \frac{(n)_r}{r!} = \binom{n}{r}$ $\square$

Ex: 1) 52 cartes, 5 cartes / joueur.
 $P(5 \text{ cartes de valeur différentes}) = \frac{\binom{13}{5} \cdot 4^5}{\binom{52}{5}} = 0,507 \approx \frac{1}{2}$
 Annotations: $\binom{13}{5}$ ← # cas fav, 4^5 ← choix couleurs, $\binom{52}{5}$ ← # cas tot

2) r boules et n urnes
 $P(k \text{ boules dans urne 1}) = \frac{\binom{r}{k} \cdot (n-1)^{r-k}}{n^r} = \binom{r}{k} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{r-k} \left(\frac{1}{n}\right)^k$
 Annotations: $\binom{r}{k}$ ← choix des k , $(n-1)^{r-k}$ ← distrib des $r-k$

3) Graphes d'Erdős-Rény: $n, m \in \mathbb{N}^*$

n sommets et m arêtes

$\# \text{ arête pour } n \text{ som} = \{ (i,j) \in \{1, \dots, n\} \mid i < j \} = \binom{n}{2} = \# \text{ choix 1 arête} = N$

$\# \text{ graphe possible} = \binom{N}{m}$

$P(1 \text{ graphe à } n \text{ sommet et } m \text{ arête}) = \frac{1}{\binom{N}{m}}$

1.2.3 Partitionnement:

Déf: Partition d'une pop de n individus en k ss-pop de taille r_1 à r_k

Lemme 1.3: Soient $r_1, \dots, r_k \in \mathbb{N}$ tq $r_1 + \dots + r_k = n$, alors $\#$ manière de partitionner la pop de n en k ss-grp de taille $r_1, \dots, r_k := \frac{n!}{r_1! \dots r_k!}$

Preuve: $\binom{n}{r_1} \cdot \binom{n-r_1}{r_2} \dots \binom{n-r_1-\dots-r_{k-1}}{r_k}$
 $= \frac{n!}{r_1!(n-r_1)!} \cdot \frac{(n-r_1)!}{r_2!(n-r_1-r_2)!} \dots = \frac{n!}{r_1! \dots r_k!}$ $\square$

Ex: 52 cartes, 4 joueurs et 13 cartes / joueur

$P(\text{chacun 1 as}) = \frac{4! \cdot \frac{48!}{(12!)^4}}{\frac{52!}{(13!)^4}} = 0,105 \approx 10\%$
 Annotations: $4!$ ← 4 as, $\frac{48!}{(12!)^4}$ ← 4 pop de 12 parmi 48, $\frac{52!}{(13!)^4}$ ← 4 pop de 13 parmi 52

Proba et Stat:1.2.4 formule du binôme généralisée:

Déf: $\alpha \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N} \quad \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}$

Lemme 1.4: $x, y, \alpha \in \mathbb{R}$ alors $(x+y)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^{\alpha-k} y^k$
si l'une des conditions suivantes est vraie:

1) $|y/x| < 1$ et $\alpha \in \mathbb{R}$

2) $|y/x| = 1$ et $\alpha \geq 0$

3) $y/x = 1$ et $\alpha > -1$

Preuve: Il suffit de traiter le cas $x=1$.

Taylor en $x=0$: $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha(1+x)^{\alpha-1} \Big|_{x=0} x + \frac{1}{2!} \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2} \Big|_{x=0} x^2 + \dots$
 $= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k \quad \square$

1.2.5 Formules de Stirling:

lemme 1.5: $\forall n \geq 1 \quad e^{1/12n} \cdot n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} \geq n! \geq e^{1/12n+1} n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$

1.2.6 Bornes sur coeff binomiaux:

lemme 1.6: $1 \leq k \leq n$ alors: $\left(\frac{n}{k}\right)^k \leq \binom{n}{k} \leq \frac{n^k}{k!} \leq \left(\frac{e \cdot n}{k}\right)^k$

Preuve: $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k(k-1)\dots(k-k+1)} = \prod_{i=0}^{k-1} \frac{n-i}{k-i} \geq \left(\frac{n}{k}\right)^k$
 $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots}{k!} \leq \frac{n^k}{k!}$
 $\left(\frac{en}{k}\right)^k = \frac{n^k}{k^k} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{k^l}{l!} \geq \frac{n^k}{k!}$
 $\geq \frac{k^k}{k!}$

1.3 Probabilité conditionnelle et formule de Bayes.

Problème : $P(A \text{ sachant que } B \text{ est réalisé})$?

Parentaise : Approche fréquentiste

N répétitions de l'expérience, On conserve les N_B expériences où B est réalisé. La fréq. d'observation de A quand B a lieu :

$$\frac{N_{A \cap B}}{N_B} = \frac{N}{N_B} \cdot \frac{N_{A \cap B}}{N} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Déf 1.4 : Soit $B \subset \Omega$ tq $P(B) > 0$, $\forall A \subset \Omega$ la proba de A sachant B $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

Lemme 1.7 : Soit $B \subset \Omega$ tq $P(B) > 0$, alors $P(\cdot|B) : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ est une mesure de proba sur Ω et sur B .

Preuve : Soit $f_B(w) = \begin{cases} P(\{w\}) / P(B) & \text{si } w \in B \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad w \in \Omega$

Alors f_B est fonction de masse.

$$\sum_{w \in \Omega} f_B(w) = \frac{1}{P(B)} \sum_{w \in \Omega} P(\{w\}) = \frac{1}{P(B)} \cdot P(B) = 1$$

$$\text{De plus : } \sum_{w \in A} f_B(w) = \frac{1}{P(B)} \sum_{w \in A \cap B} P(\{w\}) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \square$$

Ex : Lancer 2 dés équilibrés

sachant que le 1^{er} donne 3 $P(\text{somme} > 6)$?

$$\Omega = \{(m,n) \mid m,n \in \{1, \dots, 6\}\} \quad B = \{(3,m) \mid m \in \{1, \dots, 6\}\}$$

$$A = \{(m,n) \mid m+n > 6\}$$

$$\checkmark (3,4), (3,5), (3,6)$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Ex 1.13:

$$\Omega = \{ (G, G); (G, F); (F, G); (F, F) \}$$

$\frac{1}{4} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{4}$

On a une mesure uniforme

$$A = \{ (G, G) \}$$

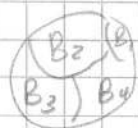
a) $B = \{ (G, G); (F, G); (G, F) \}$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1/4}{3/4} = \frac{1}{3}$$

b) $B' = \{ (G, G); (G, F) \}$

$$P(A|B) = \frac{1/4}{2/4} = \frac{1}{2}$$

Déf 1.5: Une famille $(B_i)_{i \in I}$, I fini ou dénombrable, est une partition de Ω si :



1) $\bigcup_{i \in I} B_i = \Omega$

2) $B_i \cap B_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$

Thm 1.2: $(B_i)_{i \in I}$ partition de Ω tq $P(B_i) > 0 \quad \forall i$, $A \subset \Omega$

i) Loi de probabilité totale:

$$P(A) = \sum_{i \in I} P(A|B_i) \cdot P(B_i)$$

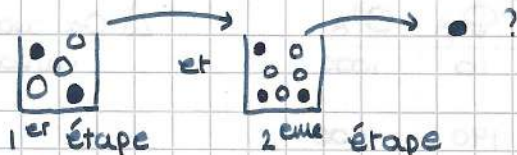
ii) Formules de Bayes

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{P(A)}$$

Preuve: i) $P(A) = P(A \cap \Omega) = P(A \cap (\bigcup B_i)) = P(\bigcup A \cap B_i)$
 $= \sum_{i \in I} \frac{P(A \cap B_i)}{P(B_i)} P(B_i) = \sum P(A|B_i) \cdot P(B_i)$

ii) $P(B_i|A) = \frac{P(B_i \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A \cap B_i)}{P(A)} = \frac{P(A|B_i) \cdot P(B_i)}{P(A)} \quad \square$

Ex 1.14:



$A = \{ \text{la boule tirée dans 2 est noire} \}$

$B = \{ \text{Boule déplacée blanche} \}$

$$P(A) = P(A|B) \cdot P(B) + P(A|B^c) \cdot P(B^c)$$

$$= \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} = \frac{23}{40}$$

Ex 1.15:

$P_G = \{G \text{ ouvre la porte}\}$

$p = \text{IP(gargon ouvre la porte s'il y a 1 enfant de chaque?)}$

$$IP((G, G) | P_G) = \overset{\text{Bayes}}{IP(P_G | (G, G))} \cdot \frac{IP(G, G)}{IP(P_G)} = 1 \cdot \frac{1/4}{1/4(1+2p)} = \frac{1}{1+2p}$$

$$IP(P_G) = IP(P_G | (G, G)) \cdot IP(G, G) + IP(P_G | (G, F)) \cdot IP(G, F) + IP(P_G | (F, G)) \cdot IP(F, G) + IP(P_G | (F, F)) \cdot IP(F, F) = 1 \cdot 1/4 + 1/4 \cdot p + 1/4 \cdot p + 1/4 \cdot p$$

Ex 1.16:

Test de dépistage:

+ : test positif - : test négatif c : contaminé ϕ : non-contaminé

$$IP(+ | \phi) = \frac{1}{100} \quad IP(- | c) = \frac{2}{100} \quad IP(c) = \frac{1}{1000}$$

Q: $IP(c | +) = ?$ et $IP(c | -) = ?$

$$\cdot IP(\phi | +) = IP(+ | \phi) \cdot \frac{IP(\phi)}{IP(+)} = \frac{1}{100} \cdot \frac{999/1000}{IP(+)} \approx 0,91 \rightarrow 91\%$$

$$IP(+) = IP(+ | c) \cdot IP(c) + IP(+ | \phi) \cdot IP(\phi)$$

$$= \frac{98}{100} \cdot \frac{1}{1000} + \frac{1}{100} \cdot \frac{999}{1000} = *$$

$$\cdot IP(c | -) = \dots = 0,00002$$

Ex 1.17:



1 x chèque, 2 x papier journal.

Ex 1.18:

Paradoxe du prisonier

Ex 1.19:

Paradoxe de Simpson:

Comparer 2 traitements:

	Tr A	Tr B
Succès	219	1010
Echec	1801	1190
	10%	50%

→ Tr B semble + efficace que Tr A

	ϕ_A	ϕ_A^+	ϕ_B	ϕ_B^+
Succès	200	19	10	1000
Echec	1800	1	190	1000
	10%	95%	5%	50%

⚠ On avait négligé des variables (sexe) ⚠

Tr A + efficace que Tr B.

ϕ : Tr B - eff Tr A

ϕ^+ : Tr B - eff Tr A

1.4 Indépendance.

En général, on cherche à calculer $P(A)$ et on nous dit que B a eu lieu, de telle manière que B influence A, alors on doit voir $P(A|B)$.

Mais si $P(A|B) = P(A)$, alors A et B sont indépendants.

⚠ pas définition ⚠

Déf: • Deux événements A et B sont indépendants sous P si

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

• Plus généralement, une famille $(A_i)_{i \in I}$ est indépendante sous P si

$$P\left(\bigcap_{i \in J} A_i\right) = \prod_{i \in J} P(A_i) \quad \forall J \subset I \text{ fini}$$

Ex 1.20: Il ne suffit pas de vérifier $P\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} P(A_i)$ (*)

Ex: $\Omega = \{(i, j) : 1 \leq i, j \leq 6\}$

$A = \{1^{\text{er}} \text{ dé montre } 1, 2 \text{ ou } 3\}$ $B = \{1^{\text{er}} \text{ dé } - " - 3, 4, 5\}$ $C = \{2^{\text{nd}} \text{ dé } = 9\}$

$P(A) = P(B) = 1/2$ $P(C) = 4/36 = 1/9$

$P(A \cap B \cap C) = 1/36$ $1/36 = 1/2 \cdot 1/2 \cdot 1/9 \Rightarrow (*) \text{ satisfait}$

$P(A \cap B) = 1/6$ $1/6 \neq 1/2 \cdot 1/2 \Rightarrow A, B, C \text{ pas indépendants.}$

Prop 1.1: Soient A et B indépendants, alors A et B^c , A^c et B^c , A et B^c sont indépendants. Plus généralement, si $A_1, \dots, A_n$ sont indépendants alors $B_1, \dots, B_n$ où $B_i \in \{A_i, A_i^c\}$ sont aussi indépendants.

Rem 1.4: Une famille $(A_i)_{i \in I}$ est indépendante 2 à 2 si

$$P(A_i \cap A_j) = P(A_i) \cdot P(A_j) \quad \forall i \neq j \in I$$

Ex : 4 billets : $\Omega = \{ \boxed{112}, \boxed{121}, \boxed{211}, \boxed{222} \}$ mesure unif
 $A_1 = \{ 1^{\text{er}} \text{ chiffre } 1 \}$ $A_2 = \{ 2^{\text{ème}} \text{ chiffre } 1 \}$ $A_3 = \{ 3^{\text{ème}} \text{ " " } \}$
 $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = 1/2$
 $P(A_1 \cap A_2) = 1/4 = 1/2 \cdot 1/2 = P(A_1) \cdot P(A_2)$
 $P(A_1 \cap A_3) = 1/4 = 1/2 \cdot 1/2 = P(A_1) \cdot P(A_3)$
 $P(A_2 \cap A_3) = 1/4 = 1/2 \cdot 1/2 = P(A_2) \cdot P(A_3)$
 (A_1, A_2, A_3) est 2 à 2 indépendante
 $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = 0 \neq (1/2)^3$ pas indépendant.

Ex 1.22 : Erdős - Rényi.

$n \geq 3, m \geq 2$

i, j 2 sommets distincts : $i \sim j = \{ \text{une arête relie } i \text{ et } j \}$

$$P(i \sim j) = \frac{\binom{n-1}{m-1}}{\binom{n}{m}} = \frac{n}{N}$$

$$\{i, j\} \neq \{k, l\} \quad P(i \sim j \text{ et } k \sim l) = \frac{\binom{n-2}{m-2}}{\binom{n}{m}} = \frac{m(m-1)}{N(N-1)} \neq \left(\frac{n}{N}\right)^2$$

$\Rightarrow i \sim j$ et $k \sim l$ ne sont pas indépendants.

Ex 1.23 : Un événement peut être indép. de lui-même :

$$P(A) = P(A \cap A) = P(A) \cdot P(A) = P(A)^2 \Leftrightarrow P(A) \in \{0, 1\}$$

Ex 1.24 : • famille de 3 enfants 8 possibilités de proba $1/8$

$A = \{ \text{enfant des 2 sexes} \}$ $P(A) = 6/8$

$B = \{ \text{au + 1 fille} \}$ $P(B) = 1/2$

$$P(A \cap B) = 3/8 = 1/2 \cdot 3/4 \Rightarrow A \text{ et } B \text{ indépendants.}$$

• Même chose 4 enfants :

$$P(A) = 14/16 \quad P(B) = 5/16$$

$$P(A \cap B) = 4/16 = 1/4 \neq 14/16 \cdot 5/16 \Rightarrow A \text{ et } B \text{ pas indép.}$$



Pas d'intuition pour l'indépendance

1.5 Expériences répétées:

- Exp aléatoire: $\Omega_1, f_1 (P_1)$

Ex: P/F $\Omega_1 = \{P, F\}$ $f_1(P) = p$ $f_1(F) = 1-p$

2 x expériences (Indépendamment l'une de l'autre):

$$\Omega_2 = \Omega_1 \times \Omega_1 = \{(w_1, w_2) \mid w_1, w_2 \in \Omega_1\}$$

soient $w_1, w_2 \in \Omega_1$ $f_2(w_1, w_2) = P_2(\text{"résultat 1er } w_1 \text{ et 2ème } w_2")$

$$= P_1(\text{"résultat 1er } w_1") \cdot P_1(\text{"résultat 2ème } w_2") = f_1(w_1) \cdot f_1(w_2)$$

$$\Omega_2 = \{PP, FF, PF, FP\} \quad f_2(PP) = p^2 \quad f_2(FP) = p(1-p) \dots$$

- N x expériences: $\Omega_N = \underbrace{\Omega_1 \times \Omega_1 \times \dots \times \Omega_1}_N = \{(w_1, \dots, w_N) \mid w_i \in \Omega_1, i \in [1, N]\}$

$$f_N(w_1, \dots, w_N) = f_1(w_1) \cdot \dots \cdot f_1(w_N)$$

- On a $A, B \subset \Omega_1$ "A a lieu en 1er" = $A \times \Omega$ "B a lieu en 2ème" = $\Omega \times B$

$$P_2(A \times B) = \dots = P_1(A) P_1(B)$$

Ch. 2. Variables aléatoires discrètes

2.1 Var. aléat. disc. et leurs lois:

Déf: Variable aléatoire, $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ sur (Ω, P)
 $\omega \mapsto X(\omega)$

Elle est discrète si Ω est fini ou dénombrable.

Rem 2.1: Une var. alé. défective est une fct $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

$$\text{tq } P(X = +\infty) > 0$$

Sauf mention, on pensera au v.al. non-défective.

On sera intéressé à :

Notation: $\mathbb{P}(\{\omega \mid X(\omega) \in A\}) = \mathbb{P}(X \in A) = \mathbb{P}(X \in A)$ où $A \subset \mathbb{R}$

- En particulier, $\mathbb{P}, \Omega, X$ engendrent une ^{mesure} proba $\mathbb{P}_X$ sur $\mathbb{R}$, $\forall A \subset \mathbb{R}$

$$\mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(X \in A)$$

Déf: La mesure de prob sur $\mathbb{R}$ déf par $\mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(X \in A)$ $\forall A \subset \mathbb{R}$ est appelée la loi de X.

Déf: La fonction de masse de X est la fct $f_X: \mathbb{R} \rightarrow [0,1]$ donnée par

$$f_X(x) = \mathbb{P}(X=x)$$

$$\Delta A \subset \mathbb{R} \quad \sum_{x \in A \cap \mathbb{R}(\Omega)} f_X(x) = \mathbb{P}_X(A)$$

- $(\mathbb{R}, \mathbb{P}_X)$ esp prob discret, $\mathbb{P}_X(X \in \Omega) = \mathbb{P}(\{X(\omega) : \omega \in \Omega\})$

Ex: 2x Lancer de dé, $X =$ somme des val. abs.

$$\mathbb{P}_X([\sqrt{5}, \pi+1]) = \mathbb{P}(X \in \{3,4\}) = \mathbb{P}(\{(1,2), (2,1), (2,2), (1,3), (3,1)\}) = \frac{5}{36}$$

2.1.1 Ex importants de loi de val. :

Déf: • Variable aléat. constante : $\exists c \in \mathbb{R}$ tq $\mathbb{P}(X=c) = 1$

• Variable aléat de Bernoulli : $X: \Omega \rightarrow \{0,1\}$ 0 = "échec" 1 = "succès"

suit une loi de Bern. de paramètre $p \in [0,1]$, $X \sim \text{Ber}(p)$ si

$$f_X(1) = p \text{ et } f_X(0) = 1-p \quad (\text{Épreuve de Bernoulli})$$

Ex: (2.3.2) $A \subset \Omega$, Alors la fct indicatrice de A est

$$1_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et } 1_A \sim \text{Bern}(\mathbb{P}(A))$$

Proba et Stat:

Déf: • Loi Binomiale: $X \sim \text{binom}(n, p)$ $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in [0, 1]$

$$f_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad \text{pour } k \in \{0, \dots, n\}$$

• Loi de Poisson: $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, $X \sim \text{poisson}(\lambda)$ si

$$f_X(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad k \in \mathbb{N}$$

Ex:

Fichier à n bits, $n \gg 1$, $p = \text{prob de modifier 1 bit}$ $p \leq 1$

$$X \sim \text{binom}(n, p) \quad \begin{matrix} n \gg 1 \\ p \leq 1 \\ np \sim \lambda \in \mathbb{R}_+^* \end{matrix} \quad k \text{ fixé} \quad \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ p \rightarrow 0 \\ np \rightarrow \lambda}} f_X(k) = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ p \rightarrow 0 \\ np \rightarrow \lambda}} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ p \rightarrow 0 \\ np \rightarrow \lambda}} \frac{1}{k!} \frac{n}{n} \frac{n-1}{n} \dots \frac{n-k+1}{n} (np)^k (1-p)^{n-k}$$

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ p \rightarrow 0 \\ np \rightarrow \lambda}} (1-p)^{n-k} = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ p \rightarrow 0 \\ np \rightarrow \lambda}} \exp(n \log(1-p)) = e^{n(-p + O(p^2))} = e^{-np} = e^{-\lambda}$$

Déf: • Loi géométrique: $0 \leq p \leq 1$, suite d'épreuve de Bernoulli (p)

$$X \sim \text{geom}(p) \quad \text{si} \quad f_X(k) = p(1-p)^{k-1} \quad k \in \mathbb{N}^*$$

• Perte de mémoire de la loi géométrique:

Lemme 2.1: $X \sim \text{geom}(p)$, Alors $\forall k \geq 1$ $\mathbb{P}(X = n+k | X > n) = \mathbb{P}(X = k) \quad \forall n \geq 1$

Dém: $\mathbb{P}(X = n+k | X > n) = \frac{\mathbb{P}(X = n+k, X > n)}{\mathbb{P}(X > n)} = \frac{(1-p)^{n+k-1} p}{\sum_{m=n+1}^{\infty} (1-p)^{m-1} p}$

$$\Rightarrow \sum_{m=n+1}^{\infty} p(1-p)^{m-1} = p \sum_{m=n+1}^{\infty} (1-p)^{m-1} = p \sum_{m=n}^{\infty} (1-p)^m$$

$$= p \cdot (1-p)^n \sum_{m=0}^{\infty} (1-p)^m = p(1-p)^n \frac{1}{p} = (1-p)^n$$

$$\text{Donc} \quad \mathbb{P}(X = n+k | X > n) = (1-p)^{k-1} p$$

□

• Loi hypergéométrique: $B \sim \text{hypergeom}(N, b, n)$

$$f_B(k) = \frac{\binom{b}{k} \binom{N-b}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

$$b \geq k \geq 0, r \geq n-k \geq 0$$

$$k \in \{(n-r) \vee 0, \dots, b \wedge n\}$$

Lemme 2.2: $\forall 0 \leq k \leq n$

$$\lim_{\substack{N, b \rightarrow \infty \\ b/N \rightarrow p}} f_B(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Une urne
avec N boules
ou veut savoir
combien il y a
de b dans un échantillon
de taille n .

Déf :

Loi de Pascal : suite d'épreuve de Bernoulli (p),

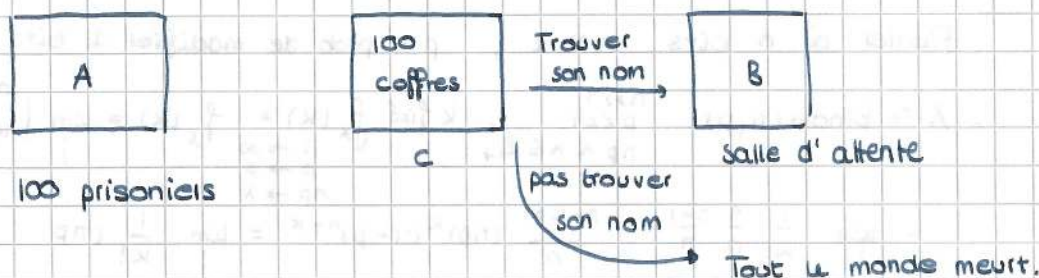
$r \in \mathbb{N}^*$, $X = \#$ échec avant le $r^{\text{ème}}$ succès.

$X \sim \text{pascal}(p, r)$ si

$$f_X(k) = \binom{k+r-1}{k} p^r (1-p)^k \quad k=0,1,\dots$$

Retour :

Problème des prisonniers

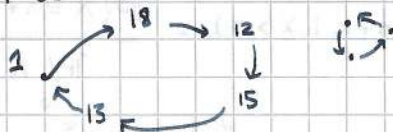


Stratégie :

- 1) On numérote unif au hasard de 1 à 100 les prisonniers
- 2) $i \rightarrow$ salle C il ouvre le $i^{\text{ème}}$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{son nom} \rightarrow \text{salle B} \\ \text{j}^{\text{ème}} \text{ nom} \rightarrow \text{ouvre j}^{\text{ème}} \text{ coffre} \end{array} \right.$

Pourquoi ça marche ?

coffres 1 2 ... 100 permutation de $\{1, \dots, 100\}$
noms 18 3 27 ... 32



Survie $\Leftrightarrow$ toutes les permutations sont de longueur ≤ 50

$\leftarrow \text{perm } \{1, \dots, 2n\}$ $\mathbb{P}(\text{les cycles sont de taille } < n)$

$$= 1 - \mathbb{P}(\text{cycles} > n \exists !)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\exists! \text{ cycle } > n) &= \frac{1}{(2n)!} \sum_{L=n+1}^{2n} \binom{2n}{L} L! \cdot \frac{1}{L} \cdot (2n-L)! \\ &= \frac{1}{(2n)!} \sum_{L=n+1}^{2n} \frac{(2n)!}{L! (2n-L)!} L! \cdot \frac{1}{L} \cdot (2n-L)! = \sum_{L=n+1}^{2n} \frac{1}{L} \\ &\leq \int_n^{2n} \frac{1}{x} dx = \log 2 \end{aligned}$$

choix des élém du grd cycle
ordonner les élém
enlever les "départs" de cycle

$$\mathbb{P}(\text{cycles} < n) \leq 1 - \log 2 = 30\%$$

2.2 Indépendance de v.a.:

DEF: 2. v.a. X, Y sur $(\Omega, \mathcal{P})$ sont indépendantes ssi les événements $\{X \in A\}$ et $\{Y \in B\}$ sont indépendants $\forall A, B \subset \mathbb{R}$.
 La collection $(X_i)_{i \in I}$ est indép. ssi les $\{X_i \in A_i\}_{i \in J}$ sont indépendantes $\forall A_i \subset \mathbb{R} \ i \in J$ et $J \subset I$ fini

lemme: La famille $\{X_i\}_{i \in I}$ est indép ssi les événements $\{X_i = x_i\}_{i \in J}$ sont indép. $\forall x_i \in \mathbb{R} \ i \in J$ et $J \subset I$ fini

Démo: $\mathbb{P}(X_1 \in A_1, X_2 \in A_2) \quad A_1 \subset X_1(\Omega) \text{ et } A_2 \subset X_2(\Omega)$

$$= \mathbb{P}\left(\bigcup_{\substack{X_1 \in A_1 \\ X_2 \in A_2}} \{X_1 = x_1, X_2 = x_2\}\right) = \sum_{\substack{X_1 \in A_1 \\ X_2 \in A_2}} \mathbb{P}(\{X_1 = x_1, X_2 = x_2\})$$

$$= \sum_{X_1 \in A_1} \mathbb{P}(X_1 = x_1) \sum_{X_2 \in A_2} \mathbb{P}(X_2 = x_2) = \mathbb{P}(X_1 \in A_1) \mathbb{P}(X_2 \in A_2)$$

lemme: Soit $(X_i)_{i \in I}$ v.a. indép., soit $(f_i)_{i \in I}$ famille de fct de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 Alors la famille $(f_i(X_i))_{i \in I}$ est indépendante.

Preuve: $J \subset I$ fini

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(f_i(X_i) \in A_i, i \in J) &= \mathbb{P}(X_i \in f_i^{-1}(A_i) \ \forall i \in J) \\ &= \prod_{i \in J} \mathbb{P}(X_i \in f_i^{-1}(A_i)) = \prod_{i \in J} \mathbb{P}(f_i(X_i) \in A_i) \quad \square \end{aligned}$$

DEF: Une famille de v.a. $(X_i)_{i \in I}$ est iid (indépendantes et identiquement distribuées) si elle est indép. et tous les X_i ont la même loi.

2.3 Vecteurs aléatoires discrets:

Motivation: X v.a. $\rightarrow f_X$ contient toute l'info nécessaire pour faire des prédictions sur X ie calculer $\mathbb{P}(X \in A) \quad A \subset \mathbb{R}$

Ex: 2 élèves font 2 lancer à pile ou face

• élève appliqué: $X_1, X_2 \sim \text{Bern}(1/2)$ indép

• cancre: $Y_1, Y_2 \sim \text{Bern}(1/2) \quad Y_1 = Y_2$

$\rightarrow$ toutes les m loi

$$\mathbb{P}(X_1 = x_1, X_2 = x_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$\mathbb{P}(Y_1 = x_1, Y_2 = x_2) = \begin{cases} 0 & \text{si } x_1 \neq x_2 \\ 1/2 & \text{si } x_1 = x_2 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Solution: on va considérer le vecteur $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$

$$\mathbb{P}((X_1, X_2) = (x_1, x_2)) = \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}((Y_1, Y_2) = (y_1, y_2)) = \begin{cases} 1/2 & x_1 = x_2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Déf: On appelle loi conjointe du vecteur aléatoire $\underline{X} = (X_1, \dots, X_n)$

la mesure de proba sur $\mathbb{R}^n$ définie par:

$$\mathbb{P}_{\underline{X}}(A) = \mathbb{P}(\underline{X} \in A) = \mathbb{P}(\underline{X}^{-1}(A)) \quad \forall A \subset \mathbb{R}^n$$

Déf: La fct de masse conjointe associée au vect a. $\underline{X}$ est

la fct $f_{\underline{X}}: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$ déf par $f_{\underline{X}}(x) = \mathbb{P}(\underline{X} = x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

Déf: si $f_{\underline{X}}$ est la fct de masse de $\underline{X} = (X_1, \dots, X_n)$ on appelle fct masse marginale les f_{X_i} :

Lemme: $f_{X_i}(x_i) = \sum_{x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n} f_{(X_1, \dots, X_n)}(x_1, \dots, x_n)$

Lemme: La famille $X_1, \dots, X_n$ est indép. ssi $f_{(X_1, \dots, X_n)}(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n f_{X_i}(x_i)$
 $\forall x \in \mathbb{R}^n$

Preuve: $f_{(X_1, \dots, X_n)}(x_1, \dots, x_n) = P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n)$
 $\parallel$ ssi indép.
 $f_{X_1}(x_1) \dots f_{X_n}(x_n) = P(X_1 = x_1) \dots P(X_n = x_n)$

2.4 Espérance, Variance, covariance et moments

2.4.1 Espérance:

Motivation: X v.a., N répétitions de l'expérience $\leadsto x_1, \dots, x_N$

Moyenne empirique des résultats obtenus: $m = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$

$$= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sum_{x \in X(\Omega)} x \cdot \delta_{x_i, x} = \frac{1}{N} \sum_{x \in X(\Omega)} x \underbrace{\sum_{i=1}^N \delta_{x_i, x}}_{N(x) = \# \text{ fois où } x \text{ est obtenu.}}$$

$$= \sum_{x \in X(\Omega)} x \cdot \frac{N(x)}{N} \stackrel{x_i}{=} \sum_{x \in X(\Omega)} x \cdot \frac{N(x)}{N} \stackrel{P(X=x)}{=} \sum_{x \in X(\Omega)} x \cdot f_X(x)$$

Déf: Soit X var. alé. de fct de masse f_X , on dit que X admet une espérance si $\sum_{x \in X(\Omega)} |x| \cdot f_X(x) < \infty$

Donc on définit $E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x \cdot f_X(x)$

Rem: un jeu est $\begin{cases} \text{équitable si } E(\text{gain}) = 0 \\ \text{favorable si } E(\text{gain}) > 0 \\ \text{défavorable si } E(\text{gain}) < 0 \end{cases}$

Ex: lancer d'un dé équilibré

$X =$ "récompense" n CHF si on fait n

$E(X) = \frac{1}{6} (1 + 2 + \dots + 6) = 3,5$ CHF

Mise équitable : 3.5 CHF

Ex: Paradoxe de St.-Petersbourg

P/F lancer 1 pièce équilibré

Récompense: 2^k CHF si P apparaît la 1^{ère} fois au k^{ème} lancer

$$\mathbb{E}(\text{récompense}) = \frac{1}{2} \cdot 2^1 + \frac{1}{2^2} \cdot 2^2 + \dots = 1 + 1 + \dots = +\infty$$

Lemme: Soit $A, B \subset \Omega$, alors $\mathbb{E}(1_A) = \mathbb{P}(A)$ et $\mathbb{E}(1_A 1_B) = \mathbb{P}(A \cap B)$

Lemme: Soit $\underline{X} = (x_1, \dots, x_n)$ et $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, alors

$$\mathbb{E}(\varphi(\underline{X})) = \sum_{\underline{x} \in \underline{X}(\Omega)} \varphi(\underline{x}) \varphi_{\underline{X}}(\underline{x})$$

Preuve: $E := \underline{X}(\Omega)$ $F = \varphi(E)$

$$\mathbb{E}(\varphi(\underline{X})) = \sum_{y \in F} y \mathbb{P}(\varphi(\underline{X}) = y) = \sum_{y \in F} y \mathbb{P}(\underline{X} = \varphi^{-1}(y))$$

$$= \sum_{y \in F} y \sum_{\substack{\underline{x} \in E \\ \varphi(\underline{x}) = y}} \mathbb{P}(\underline{X} = \underline{x}) = \sum_{\underline{x} \in E} \mathbb{P}(\underline{X} = \underline{x}) \sum_{y \in F} 1_{\{\varphi(\underline{x}) = y\}} y$$

$$= \sum_{\underline{x} \in E} \varphi(\underline{x}) \varphi_{\underline{X}}(\underline{x})$$

Lemme: Soient $X, Y, (X_n)_{n \geq 1}$ v. alé possédant une espérance

1) $X \geq 0 \Rightarrow \mathbb{E}(X) \geq 0$

2) Si $\mathbb{P}(X = c) = 1 \Rightarrow \mathbb{E}(X) = c$

3) $\mathbb{E}(|X|) \geq |\mathbb{E}(X)|$

4) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha X + \beta Y$ possède une espérance tq

$$\mathbb{E}(\alpha X + \beta Y) = \alpha \mathbb{E}(X) + \beta \mathbb{E}(Y)$$

5) Supposons $(X_n)_{n \geq 1}$ positives et $X = \sum_{n \geq 1} X_n$

$$\mathbb{E}\left(\sum_{n \geq 1} X_n\right) = \sum_{n \geq 1} \mathbb{E}(X_n)$$

6) $(X_n)_{n \geq 1}$ satisfont $X_n \nearrow X$ ponctuellement croissant, alors

$$\mathbb{E}\left(\lim_{n \rightarrow \infty} X_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(X_n)$$

Proba et Stat :

Preuve: 3). $|\mathbb{E}(X)| = \left| \sum_{x \in X(\Omega)} x f_X(x) \right| = \sum_{x \in X(\Omega)} |x| f_X(x) = \mathbb{E}(|X|)$

4). $\mathbb{E}(\alpha X + \beta Y) = \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ y \in Y(\Omega) \\ (x,y) \mapsto \alpha x + \beta y}} |\alpha x + \beta y| f_{(X,Y)}(x,y) \leq \sum$

$$\leq |\alpha| \sum_{x \in X(\Omega)} |x| \sum_{y \in Y(\Omega)} f_{(X,Y)}(x,y) + |\beta| \sum_{y \in Y(\Omega)} |y| \sum_{x \in X(\Omega)} f_{(X,Y)}(x,y)$$
$$= |\alpha| \sum_x |x| f_X(x) + |\beta| \sum_y |y| f_Y(y) < \infty$$

$$\mathbb{E}(\alpha X + \beta Y) = \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ y \in Y(\Omega)}} (\alpha x + \beta y) f_{(X,Y)}(x,y) = \dots = \alpha \mathbb{E}(X) + \beta \mathbb{E}(Y)$$

Ex: 1) On cherche $a \in \mathbb{R}$ qui approxime le mieux la v.a. X , dans le sens $\mathbb{E}(|X - a|^2)$ est minimale.

$$\mathbb{E}(|X - a|^2) = \mathbb{E}(X^2 - 2aX + a^2) = \mathbb{E}(X^2) - 2a \mathbb{E}(X) + a^2$$

$$\frac{d}{da} \mathbb{E}(|X - a|^2) = 0 \Leftrightarrow -2\mathbb{E}(X) + 2a = 0 \Leftrightarrow a = \mathbb{E}(X)$$

2) Erdős - Rényi

Triangle = triplet de point $\{x, y, z\}$ tq $x \neq y \neq z$
tq $x-y, y-z, z-x$

K_Δ = # triangle dans la réalisation du graphes.

$$\mathbb{E}(K_\Delta) = \sum_{k \geq 0} k f_{K_\Delta}(k)$$

$$\mathbb{E}(K_\Delta) = \mathbb{E}\left(\sum_{\substack{x,y,z \\ \text{distincts}}} 1_{\{x-y, y-z, z-x\}}\right) = \sum_{\substack{x,y,z \\ \text{dist.}}} \mathbb{E}(1_{\{x-y, y-z, z-x\}})$$

$$= \sum_{\substack{x,y,z \\ \text{dist}}} \mathbb{P}(x-y, y-z, z-x)$$

$$\mathbb{P}(x-y, y-z, z-x) =$$

$$N = \binom{n}{3}$$

$$\frac{\binom{n-3}{n-3}}{\binom{n}{3}}$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}(K_\Delta) = \frac{n(n-1)(n-3)}{N(N-1)(N-2)} \# \{x,y,z \text{ distincts}\}$$
$$\quad \quad \quad \parallel$$
$$\quad \quad \quad \binom{n}{3}$$

Lemme 2.10 : espérance des lois habituelles (p 41)

Preuve : 1) $X \sim \text{Bern}(p)$

$$E(X) = 0(1-p) + 1 \cdot p = p$$

2) $X \sim \text{Binom}(n, p)$

$$E(X) = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$X \stackrel{\text{loi}}{=} Y_1 + \dots + Y_n$ où $Y_i, i=1, \dots, n$ sont iid et $\text{Bern}(p)$

$$Y_k = \begin{cases} 1 & \text{si succès au } k\text{-ème} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\Rightarrow E(X) = E(Y_1 + \dots + Y_n) = E(Y_1) + \dots + E(Y_n) = n \cdot p$$

Ex 2.8 :

$X = -k$ montant k + grand dans mon enveloppe

$$E(\text{gain si on change}) = \frac{1}{2} \cdot 2X + \frac{1}{2} \cdot \frac{X}{2} = \frac{5}{4} X$$

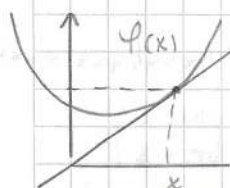
Aucun sens !

Lemme 2.11 : Soit X à valeurs dans $\mathbb{N}$, alors $E(X) = \sum_{n \geq 0} P(X > n)$

Preuve :

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{n \geq 1} n \cdot P(X = n) = \sum_{n \geq 0} \sum_{m=0}^{n-1} P(X = n) = \sum_{n \geq 0} \sum_{m \geq 0} P(X = n) \mathbb{1}_{\{m < n\}} \\ &= \sum_{m \geq 0} \sum_{n=m+1}^{\infty} P(X = n) = \sum_{m \geq 0} P(X > m) \end{aligned}$$

Déf 2.9 : Soient $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, une fct $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe



si $\forall x \in (a, b), \exists a \in \mathbb{R}$ tq $\forall y \in (a, b)$, on a $f(y) \geq f(x) + a(y-x)$

Rem :

$$\begin{aligned} \text{Si } \exists f'' \text{ et } f''(x) \geq 0 \quad \forall x \text{ alors pour } y \geq x \quad f(y) &= f(x) + \underbrace{f(y) - f(x)}_{\int_x^y f'(x) dx} \\ &\geq f(x) + f'(x)(y-x) \quad \text{ok } a = f'(x) \end{aligned}$$

Proba et Stat :Thm 2.1 : Inégalité de Jensen

Soit X var. aléatoire admettant une espérance, φ fct convexe

Alors $E(\varphi(X)) \geq \varphi(E(X))$

Preuve : On prend $x = E(X)$. φ conv $\Rightarrow \exists a \in \mathbb{R}$ tq $\forall y \in \mathbb{R}$

$$\varphi(y) \geq \varphi(E(X)) + a(y - E(X))$$

$$\text{or } E(\varphi(X)) = \sum_y \varphi(y) \cdot f_X(y) \geq \varphi(E(X)) \sum_y f_X(y) + a \sum_y y f_X(y) - a \cdot E(X) \sum_y y f_X(y) = \varphi(E(X)) + a E(X) - a E(X)$$

□

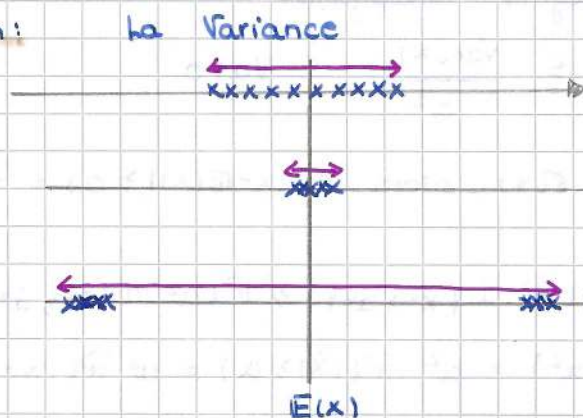
2.4.2 Variance, moments d'ordres supérieurs.

Déf 2.10 : On appelle $E(X^n)$ le moment d'ordre n de la v.alé. de X (si elle existe)

Rem 2.5 : Si X possède un moment d'ordre n ($E(X^n)$ existe et est finie) alors elle possède tous les moments inférieurs. ($k \leq n$)

Preuve : $\infty > E(|X|^n) = E(|X|^k)^{\frac{n}{k}} \geq [E(|X|^k)]^{\frac{n}{k}}$
 $\Rightarrow E(|X|^k) < \infty$ car $x \rightarrow x^{\frac{n}{k}}$ convexe.

Motivation :



On veut une mesure de la dispersion des valeurs.

Déf : Soit X , v.a. avec espérance, On appelle variance de X la quantité

$$\text{Var}(X) = E((X - E(X))^2)$$

On appelle écart-type de X la quantité $\sigma(X) = \sqrt{\text{Var}(X)}$

Lemme 2.12 : 1) $\text{Var}(X) \geq 0$ et $\text{Var}(X) = 0 \Leftrightarrow \mathbb{P}(X = \mathbb{E}(X)) = 1$

2) $\text{Var}(X) < \infty \Leftrightarrow \mathbb{E}(X^2) < \infty$

3) $\text{Var}(X) < \infty$, $\text{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$

4) $\forall a, b \in \mathbb{R} \quad \text{Var}(a + bX) = b^2 \text{Var}(X)$

5) $\text{Var}(X) < \infty$ et $\text{Var}(Y) < \infty \Rightarrow \text{Var}(X + Y) < \infty$

Preuve : 2) Soit z.v.a. tq $\mathbb{E}(Z^2) < \infty$ et soit $a \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}((Z-a)^2) &= \mathbb{E}((Z-a)^2 \mathbf{1}_{\{|Z| \leq |a|\}}) + \mathbb{E}((Z-a)^2 \mathbf{1}_{\{|Z| > |a|\}}) \\ &\leq 4a^2 \cdot \mathbb{P}(|Z| \leq |a|) + 4 \mathbb{E}(Z^2 \mathbf{1}_{\{|Z| > |a|\}}) \\ &\leq 4a^2 + 4 \mathbb{E}(Z^2) < \infty\end{aligned}$$

• $z = X$, $a = \mathbb{E}(X)$ Supp $\mathbb{E}(X^2) < \infty$

$$\Rightarrow \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) = \text{Var}(X) < \infty$$

• $z = X - \mathbb{E}(X)$ $a = -\mathbb{E}(X)$ Supp $\text{Var}(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) < \infty$

$$\Rightarrow \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(X))^2) < \infty$$

5) $\tilde{X} = X - \mathbb{E}(X)$ et $\tilde{Y} = Y - \mathbb{E}(Y)$

$$\begin{aligned}\text{Var}(X + Y) &= \mathbb{E}((\tilde{X} + \tilde{Y})^2) \leq 2 \mathbb{E}(\tilde{X}^2) + 2 \mathbb{E}(\tilde{Y}^2) \\ &= 2 \text{Var}(X) + 2 \text{Var}(Y) < \infty\end{aligned}$$

□

Lemme 2.13 : Inégalité de Bienaymé - Tchebychev

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq a) \leq \frac{\text{Var}(X)}{a^2} \quad \forall a > 0$$

En particulier, si $a \gg \sigma(X)$, alors $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq a) \leq \frac{\sigma(X)^2}{a^2} \ll 1$

Preuve : $\text{Var}(X) = \mathbb{E}(\tilde{X}^2) \geq \mathbb{E}(\tilde{X}^2 \mathbf{1}_{\{\tilde{X}^2 \geq a^2\}}) \geq \mathbb{E}(a^2 \mathbf{1}_{\{\tilde{X}^2 \geq a^2\}})$

$$= a^2 \mathbb{P}(\tilde{X}^2 \geq a^2) = a^2 \mathbb{P}(|\tilde{X}| \geq a) = a^2 \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq a)$$

Lemme 2.14 : Calcul des variances des lois p. 45 $\rightarrow$ p. 41

Proba et Stat:2.4.3 Covariance et corrélation:

$$\begin{aligned}\text{Var}(X+Y) &= \mathbb{E}((X+Y)^2) = \mathbb{E}(X^2) + \mathbb{E}(Y^2) + 2\mathbb{E}(XY) \\ &= \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))]\end{aligned}$$

Déf. 2.12: On appelle covariance de X et Y la quantité

$$\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

Déf: Deux var. alé. tq $\text{Cov}(X, Y) = 0$ sont dites non-corrélées

$$\text{et alors } \text{Var}(X+Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y)$$

⚠ ça ne veut pas dire que la variance est linéaire.

Lemme 2.15: 1) La covariance est une forme bilinéaire symétrique:

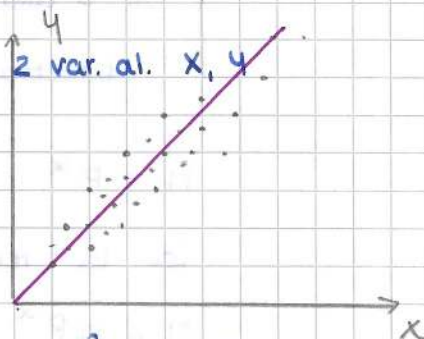
- $\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(Y, X)$
- $\text{Cov}(aX, bY) = ab \text{Cov}(X, Y)$
- $\text{Cov}(X_1 + X_2, Y) = \text{Cov}(X_1, Y) + \text{Cov}(X_2, Y)$

2) pour $X_1, \dots, X_n$ on a :

$$\text{Var}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i) + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n \text{Cov}(X_i, X_j)$$

Déf. 2.13: On appelle coefficient de corrélation de 2 var. al. X, Y de variances non-nulles la quantité :

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(Y)}}$$



Qualité du fit:

$$\mathbb{E}((Y - aX - b)^2) \text{ "moindres carrés"}$$

On se demande si $\exists$
une relation linéaire
entre Y et X .

Lemme 2.16 : X, Y v.a.

$$\min_{a, b \in \mathbb{R}} \mathbb{E}((Y - aX - b)^2) = (1 - \rho(X, Y)^2) \text{Var}(Y)$$

et les a et b réalisant le min sont $a = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\text{Var}(X)}$ et $b = \mathbb{E}(Y - aX)$

Conséquences :

- $|\rho(X, Y)| \leq 1$
- $|\rho(X, Y)| = 1 \iff \mathbb{P}(Y = aX + b) = 1$

Preuve : $\mathbb{E}((Y - aX - b)^2) = \mathbb{E}((\check{Y} - a\check{X} - \check{b})^2) = *$

$$\text{où } \check{b} = b - \mathbb{E}(Y) + a\mathbb{E}(X)$$

$$\begin{aligned} * &= \mathbb{E}(\check{Y}^2) + a^2 \mathbb{E}(\check{X}^2) - 2a \mathbb{E}(\check{X}\check{Y}) + \check{b}^2 + 2a\check{b} \mathbb{E}(\check{X}) - \check{b} \mathbb{E}(\check{Y}) \\ &= \text{Var}(Y) + a^2 \text{Var}(X) + \check{b}^2 - 2a \text{Cov}(X, Y) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \min \text{ si } \check{b} = 0 \text{ i.e. } b = \mathbb{E}(Y - aX)$$

$$\text{On dérive en } a : 2a \text{Var}(X) - 2 \text{Cov}(X, Y) = 0$$

$$\Rightarrow \min a = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\text{Var}(X)}$$

Ex 2.9 : La loi de Kùiber

Elle regarde P le poids et M le métabolisme

On s'attend à $P \propto H^2$ où H est la hauteur dans 1 direction et $M \propto H^2 \Rightarrow M \propto P^{2/3}$ Non!

$$M \propto P^\alpha \text{ avec } \alpha = \frac{3}{4} \text{ alors } M = a \cdot P^{3/4} + b$$

ici la relation n'est pas linéaire.

$$M = aP^\alpha \iff \log M = \log a + \alpha \log P \text{ (régression linéaire)}$$

2.4.4 Extension aux vecteurs aléatoires:

Déf 2.14: L'espérance du vecteur aléat. $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)$ est le vecteur $E(\underline{x}) = (E(x_1), \dots, E(x_n))$

Déf 2.15: Soit $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)$ vect. aléat. Sa matrice de covariance est la matrice $n \times n$ $Cov(\underline{x})$ dont l'élément i, j est donné par $Cov(x_i, x_j)$

2.4.5 Absence de corrélation et indépendance:

Lemme 2.17: 2 v. al sont non-corrélées. En particulier si $x_1, \dots, x_n$ sont indép 2 à 2, alors $var(\sum_{i=1}^n x_i) = \sum_{i=1}^n var(x_i)$

Dém:
$$E(xy) = \sum_{x,y} xy \cdot f_{(x,y)}(x,y) = \sum_x x f_x(x) \sum_y y f_y(y) = E(x)E(y)$$

Ex: 2.10 Polycop

Ex 2.11: $\Omega = \{-1, 0, 1\}$ avec mesure prob uniforme
 $x(\omega) = \omega, y(\omega) = |\omega|$ Pas indépendante.
 $E(x) = 0 \quad E(y) = \frac{2}{3} \quad E(xy) = E(x) = 0$
 $Cov(xy) = E(xy) - E(x)E(y) = 0$



$E(xy) = E(x)E(y) \not\Rightarrow x$ et y indépendante.

Lemme 2.18: $(x_i)_{i \in I}$ v. al. discrètes, alors les prop suivantes sont équivalentes

- 1) $(x_i)_{i \in I}$ indépendant
- 2) $\forall f_i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tq $f_i(x_i)$ admet une espérance

$$E\left(\prod_{j \in J} f_j(x_j)\right) = \prod_{j \in J} E(f_j(x_j))$$

Preuve: 1) $\Rightarrow$ 2)

x_1, x_2 indép, p_1, p_2 comme dans l'énoncé

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(p_1(x_1) \cdot p_2(x_2)) &= \sum_{x_1, x_2} p_1(x_1) p_2(x_2) \cdot p_{(x_1, x_2)}(x_1, x_2) \\ &= \mathbb{E}(p_1(V_1)) \cdot \mathbb{E}(p_2(V_2)) \end{aligned}$$

2) $\Rightarrow$ 1)

$J \subset I$ fini, $(A_j)_{j \in J}$, $A_j \in \mathcal{R} \forall j$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_j \in A_j \forall j \in J) &= \mathbb{E}(1_{\{X_j \in A_j \forall j \in J\}}) = \mathbb{E}\left(\prod_{j \in J} 1_{\{X_j \in A_j\}}\right) \\ &= \prod_{j \in J} \mathbb{E}(1_{\{X_j \in A_j\}}) = \prod_{j \in J} \mathbb{P}(X_j \in A_j) \end{aligned}$$

2.4.6 Une première version de la loi des grands nombres

Déf 2.16: $X_1, \dots, X_n$ var. alé, leur moyenne empirique est la var. alé
 $\bar{X}_n = \frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n)$

Thm 2.3: (Loi faible des grd nombres)

Soient $X_1, \dots, X_n$ des v. alé non-corréées, de $\hat{m}$ espérance μ et $\hat{m}$ variance $\sigma^2 < \infty$, Alors

$$\mathbb{P}(|\bar{X}_n - \mu| > \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} \quad \forall \varepsilon > 0$$

$$\text{En particulier } \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|\bar{X}_n - \mu| > \varepsilon) = 0 \quad \forall \varepsilon > 0$$

Preuve: $\mathbb{E}(\bar{X}_n) = \mathbb{E}\left(\frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n)\right) = \frac{1}{n} \cdot n \cdot \mu = \mu$

$$\mathbb{P}(|\bar{X}_n - \mu| > \varepsilon) \leq \frac{\text{Var}(\bar{X}_n)}{\varepsilon^2}$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(\bar{X}_n) &= \text{Var}\left(\frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n)\right) = \frac{1}{n^2} \text{Var}(X_1 + \dots + X_n) \\ &= \frac{1}{n^2} \cdot n \cdot \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n} \end{aligned}$$

Rem 2.7: (Justification approche fréquentiste)

$\Omega_N = \Omega_1 \times \dots \times \Omega_1 = (\omega_1, \dots, \omega_N)$ où ω_k = résultat k -ème expérience

$\chi_1, \dots, \chi_N$ v. alé. $A \subset \Omega$, $\chi_k(\omega_1, \dots, \omega_N) = 1_{\{\omega_k \in A\}}$

iid, $\sim \text{Bern}(\mathbb{P}(A))$ $N(A) = \#$ réalisation de A lors des N exp.
p. 30

Ex 2.13 :

$N = \#$ clients par jour (v. a.) $\swarrow$ indép. de N

$X_1, X_2, \dots$ iid $E(X_1) = \mu$ $\swarrow$ $X_k =$ montant dépensé par le k ème client.

$S = X_1 + \dots + X_N$ {somme moyenne dépensée}

$$E(S|N=n) = \sum_s s \cdot P(S=s|N=n) = \sum_s s \cdot \frac{P(X_1+\dots+X_N=s, N=n)}{P(N=n)}$$

$$= \sum_s s \cdot \frac{P(X_1+\dots+X_n=s) \cdot P(N=n)}{P(N=n)} = \sum_s s \cdot P(X_1+\dots+X_n=s)$$

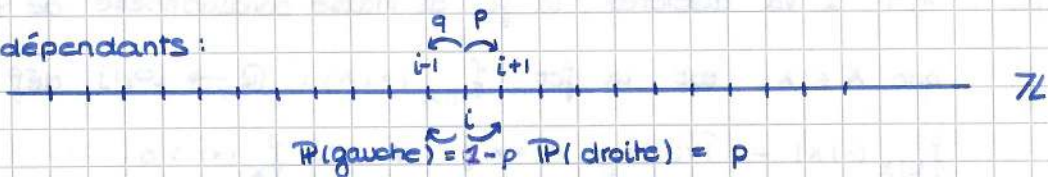
$$= E(X_1 + \dots + X_n) = n \cdot \mu$$

$$\Rightarrow E(S|N=n) = n \cdot \mu \Rightarrow E(S|N) = N \cdot \mu$$

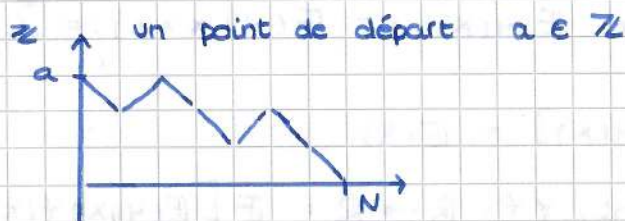
$$\Rightarrow E(S) = E(E(S|N)) = E(\mu N) = \mu E(N)$$

Ch. 3 Marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}$:

Sauts indépendants :



On fixe : un temps d'observation $N \in \mathbb{N}^*$



$$\text{Univers : } \Omega_{N,a} = \left\{ (s_0, s_1, \dots, s_N) \in \mathbb{Z}^{N+1}, s_0 = a, |s_k - s_{k-1}| = 1 \right. \\ \left. \forall k = 1 \dots N \right\}$$

$$0 \leq p \leq 1 \quad P_{N,a,p}((s_0, s_1, \dots, s_N)) = \sigma_{s_0,a} p^{n_+} q^{n_-}$$

$$n_+ = n_+(s_0, \dots, s_N) = \# \{ 1 \leq k \leq N : s_k - s_{k-1} = 1 \}$$

$$n_- = n_-(s_0, \dots, s_N) = \# \{ 1 \leq k \leq N : s_k - s_{k-1} = -1 \}$$

Variablu aléatoire : $0 \leq k \leq N$

$$S_k : \Omega_{N,a} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{"position au temps k"}$$

$$(s_0, \dots, s_N) \longmapsto s_k$$

Variable aléatoire: $X_k = S_k - S_{k-1} : \Omega_{Na} \rightarrow \{\pm 1\}$ "k-ème saut"

$$\text{Alors } \forall 0 \leq n \leq N: S_n = S_0 + \sum_{k=1}^n (S_k - S_{k-1}) \\ = S_0 + \sum_{k=1}^n X_k$$

Et les $X_1, X_2, \dots$ sont iid, $\mathbb{P}(X_1 = +1) = p$ $\mathbb{P}(X_1 = -1) = q$

$$\mathbb{P}_{N,p}(\text{trajectoire}) = \mathbb{P}_{Nap}(S_0 = s_0, S_1 = s_1, \dots, S_N = s_N) = \delta_{s_0,0} \prod_{k=1}^N \mathbb{1}_{\{X_k = s_k - s_{k-1}\}}$$

Commentaire:

Notation: $\mathcal{F}_n = \{ \text{élem ne dépendant que des } n \text{ premiers pas de la trajectoire} \}$

$\forall A \in \Omega_{N,a}$ tq $A \in \mathcal{F}_n$, $\exists \hat{A} \in \Omega_{n,a}$ tq $A = \{ (s_0, \dots, s_N) \in \Omega_{Na} : (s_0, \dots, s_n) \in \hat{A} \}$

Ex: $\forall A \in \mathcal{F}_n \quad \mathbb{P}_{Nap}(A) = \mathbb{P}_{nap}(\hat{A})$

$N = 100, A = \{ S_3 = 1, S_8 = 2 \} \in \mathcal{F}_8$

$\forall N \geq 8$ la proba est la même

Notation: $\mathbb{P}_a \equiv \mathbb{P}_{Nap}$

3.2 Quelques propriétés importantes:

Lemme 3.1: 1. Homogénéité Spatiale

$$\forall a \in \mathbb{Z} \quad \mathbb{P}_a(S_0 = s_0, \dots, S_n = s_n) = \mathbb{P}_0(S_0 = s_0 - a, \dots, S_n = s_n - a)$$

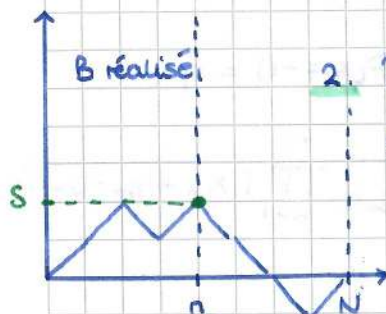


2. Propriété de Markov:

Soit $B \in \mathcal{F}_n$, alors $\forall s \in \mathbb{Z}$, tq $\mathbb{P}_a(S_n = s, B) > 0$, on a:

$$\mathbb{P}_a((S_n, \dots, S_N) \in A \mid S_n = s, B) = \mathbb{P}_s((S_0, \dots, S_{N-n}) \in A)$$

$$\forall A \subset \Omega_{N-n, s}$$



Preuve:

1. $\mathbb{P}_a(S_0 = s_0, \dots, S_n = s_n) = \sigma_{s_0, a} \prod_{k=1}^n \mathbb{P}(X_k = s_k - s_{k-1})$

$$\mathbb{P}_0(S_0 = s_0 - a, \dots, S_n = s_n - a) = \underset{\sigma_{s_0, a}}{\sigma_{s_0 - a, 0}} \prod_{k=1}^n \mathbb{P}(X_k = s_k - a - (s_{k-1} - a))$$

dépend de $X_{n+1}, \dots, X_N$

2. $\mathbb{P}_a((S_n, \dots, S_N) \in A \mid S_n = s, B) = \mathbb{P}_a((s, s + X_{n+1}, s + X_{n+1} + X_{n+2}, \dots, s + X_{n+1} + \dots + X_N) \in A \mid S_n = s, B)$

dépend que de $X_1, \dots, X_n$

Par l'indépendance des X_i on a:

$$= \mathbb{P}((s, s + X_{n+1}, \dots, s + X_{n+1} + \dots + X_N) \in A)$$

X_i iid $\rightarrow = \mathbb{P}((s, s + X_1, \dots, s + X_1 + X_2 + \dots + X_{N-n}) \in A)$

$$= \mathbb{P}_s((S_0, \dots, S_{N-n}) \in A)$$

Lemme 3.2: $\forall n \geq 1, \mathbb{P}_a(S_n = s) = \binom{n}{\frac{n+s-a}{2}} p^{\frac{(n+s-a)/2}{2}} q^{\frac{(n-s+a)/2}{2}}$

si $|s-a| \leq n$ et $n+s-a$ paire sinon $\mathbb{P}_a(S_n = s) = 0$

Preuve:



$$\mathbb{P}_a(S_n = s) = \mathbb{P}_0(S_n = s - a = s') = \binom{n}{n_+} p^{n_+} q^{n_-}$$

$$\begin{aligned} n_+ &= \# \text{ pas vers le haut} \\ n_- &= \# \text{ " " " le bas} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} n_+ + n_- = n \\ n_+ - n_- = s' \end{cases}$$

$$n_+ = \frac{n + s'}{2} \quad \text{et} \quad n_- = \frac{n - s'}{2} \quad \text{où} \quad s' = s - a$$

Rem: En particulier, dans le cas symétrique ($p = q = 1/2$), on a:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_0(S_{2n} = 0) &= \binom{2n}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} = \binom{2n}{n} 2^{-2n} = \frac{2n!}{n!(2n-n)!} \cdot 2^{-2n} \\ &\stackrel{\text{Stirling}}{=} \frac{(2n)^{2n} e^{-2n} \sqrt{2\pi n}}{n^{2n} e^{-2n} \sqrt{2\pi n}} 2^{-2n} (1 + o(1)) \\ &= \frac{1 + o(1)}{\sqrt{\pi n}} \end{aligned}$$

3.3 Le Premier Retour Au Point de départ:

Notation: $\{\tau_0 > n\} = \{S_1 \neq 0, S_2 \neq 0, \dots, S_n \neq 0\} \in \mathcal{F}_n$

$\{\tau_0 = n\} = \{S_1 \neq 0, \dots, S_n = 0\} \in \mathcal{F}_n$

Rem 3.1: $\tau_0 = \min\{n \geq 1 : S_n = 0\}$

Thm 3.1: $\forall n \geq 1 \quad \mathbb{P}_0(\tau_0 > n, S_n = b) = \frac{|b|}{n} \mathbb{P}_0(S_n = b)$
donc $\mathbb{P}_0(\tau_0 > n) = \frac{1}{n} \mathbb{E}_0(|S_n|) \quad \forall b \in \mathbb{Z}$

Preuve: Spdg: $n+b$ paire, $|b| \leq n$, $|b| < n$ [si $b = n$] de plus $b > 0$ suffisant.

Rem: toute trajectoire tq $S_0 = 0$ et $S_n = b$ a la même proba
 $p^{n+} q^{n-} = p^{\frac{n+b}{2}} \cdot q^{\frac{n-b}{2}}$

$$\Rightarrow \mathbb{P}_0(\tau_0 > n, S_n = b) = \# \left\{ \text{traj tq } \tau_0 > n \text{ et } S_n = b \right\} p^{n+} q^{n-}$$

$$\mathcal{C}[(1,1), (n,b)] = \{S_1 = 1 \text{ et } S_n = b\}$$

$$\mathcal{C}_+[(1,1), (n,b)] = \{S_1 = 1, S_n = b, S_k \neq 0 \forall k = 1 \dots n\}$$

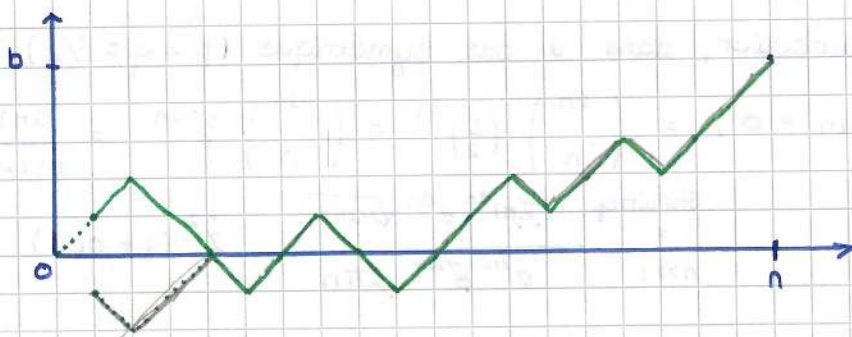
$$\mathcal{C}_\pm[(1,1), (n,b)] = \{S_1 = 1, S_n = b, \exists k \text{ tq } S_k = 0\}$$

$$\# \mathcal{C}[(1,1), (n,b)] = \# \mathcal{C}_+[(1,1), (n,b)] + \# \mathcal{C}_\pm[(1,1), (n,b)]$$

$$\Rightarrow \# \mathcal{C}_+[(1,1), (n,b)] = \# \mathcal{C}[(1,1), (n,b)] - \# \mathcal{C}_\pm[(1,1), (n,b)]$$

$$\binom{n-1}{\frac{n-1+b-1}{2}} = \binom{n-1}{\frac{n+b}{2} - 1}$$

Preuve: (Suite)



bijection entre $\mathcal{C}_\pm[(1,1),(n,b)]$ et $\mathcal{C}[(1,-1),(n,b)] = \{s_1 = -1, s_n = b\}$

$$\Rightarrow \# \mathcal{C}_\pm[(1,1),(n,b)] = \# \mathcal{C}[(1,-1),(n,b)] = \binom{n-1}{\frac{n-1+b+1}{2}} = \binom{n-1}{\frac{n+b}{2}}$$

$$\text{Donc } \# \mathcal{C}_+ = \binom{n-1}{\frac{n+b}{2} - 1} - \binom{n-1}{\frac{n+b}{2}}$$

$$\begin{aligned} \text{Alors } \# \mathcal{C}_+[(1,1),(n,b)] &= \binom{n-1}{\frac{n+b}{2} - 1} - \binom{n-1}{\frac{n+b}{2}} \\ &= \binom{n}{\frac{n+b}{2}} \left(\frac{\frac{n+b}{2}}{n} - \frac{\frac{n-b}{2}}{n} \right) \stackrel{(*)}{=} \binom{n}{\frac{n+b}{2}} \frac{b}{n} \end{aligned}$$

$$\mathbb{P}_0(\tau_0 > n, S_n = b) = \frac{b}{n} \binom{n}{\frac{n+b}{2}} p^{n_+} q^{n_-}$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}_0(\tau_0 > n, S_n = b) = \frac{|b|}{n} \mathbb{P}_0(S_n = b)$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}_0(\tau_0 > n) = \sum_{b \in \mathbb{Z}} \mathbb{P}_0(\tau_0 > n, S_n = b)$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{b \in \mathbb{Z}} |b| \mathbb{P}_0(S_n = b) = \frac{1}{n} \mathbb{E}(|S_n|).$$

Cor 3.1: Dans le cas symétrique ($p = q = 1/2$)

$$\mathbb{P}_0(\tau_0 > 2n) = \mathbb{P}_0(S_{2n} = 0)$$

$$\begin{aligned} \text{Preuve: } \mathbb{P}_0(\tau_0 > 2n) &= \frac{1}{2n} \mathbb{E}(|S_{2n}|) = \sum_{k=1}^n \frac{2k}{2n} (\mathbb{P}_0(S_{2k} = 2k) + \mathbb{P}_0(S_{2k} = -2k)) \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{2k}{2n} \cdot 2 \mathbb{P}_0(S_{2k} = 2k) \end{aligned}$$

$$= 2 \sum_{k=1}^n \frac{2k}{2n} \mathbb{P}_0(S_{2k} = 2k) = 2 \sum_{k=1}^n \frac{2k}{2n} \binom{2k}{n+k} 2^{-2k}$$

$$= 2^{1-2n} \sum_{k=1}^n \frac{2k}{2n} \binom{2k}{n+k}$$

$$= 2^{1-2n} \left(\sum_{k=1}^{n-1} \left\{ \binom{2n-1}{n+k-1} - \binom{2n-1}{n+k} \right\} + 1 \right)$$

$$= 2^{1-2n} \left(\binom{2n-1}{n} - \binom{2n-1}{2n-1} + 1 \right) = 2^{1-2n} \binom{2n-1}{n}$$

$$= 2^{-2n} \cdot 2 \binom{2n}{n} \cdot \frac{n}{2n} = 2^{-2n} \binom{2n}{n}$$

$$= \mathbb{P}_0(S_{2n} = 0)$$

on a vu (*)

$$\frac{2k}{2n} \binom{2k}{n+k} = \binom{2n-1}{n+k-1} - \binom{2n-1}{n+k}$$

Rem 3.2: • ($p = q = 1/2$)

$$\mathbb{P}_0(\tau_0 > 2n) = \mathbb{P}_0(S_{2n} = 0) = \frac{1 + o(1)}{\sqrt{\pi n}}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_0(\tau_0 > 2n) = 0 = \mathbb{P}_0(\tau_0 = +\infty)$$

↑ on verra plus tard.

• La MASS (marche aléatoire simple symétrique) revient sûrement presque à son point de départ.

• Mais $\mathbb{E}_0(\tau_0) = \sum_{n \geq 0} \mathbb{P}_0(\tau_0 > n) \gg c \cdot \sum_{n \geq 0} \frac{1}{\sqrt{n}} = +\infty$

• $R_n = \# \{k \in \{1, \dots, n\} : S_k = 0\}$ on pourrait penser que ($n \gg 1$)

$$R_{2n} \approx 2R_n \quad \text{NON!}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_0(R_n) &= \mathbb{E}_0\left(\sum_{k=1}^n 1_{\{S_k=0\}}\right) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}_0(S_k=0) \\ &\approx \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} = O(\sqrt{n}) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow R_{2n} \approx 2R_n$$

le 14.11.18

Cor 3.2: $\forall n$ pair ($n > 0$)

$$\mathbb{P}_0(\tau_0 = n) = \frac{q}{n-1} \mathbb{P}_0(S_{n-1} = 1) + \frac{p}{n-1} \mathbb{P}_0(S_{n-1} = -1)$$

et $\mathbb{P}_0(\tau_0 = n) = 0$ pour n impaire.

Preuve:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_0(\tau_0 = n) &= \mathbb{P}_0(\tau_0 = n, S_{n-1} = 1) + \mathbb{P}_0(\tau_0 = n, S_{n-1} = -1) \\ &= \mathbb{P}_0(S_n = 0, \tau_0 > n-1, S_{n-1} = 1) + \mathbb{P}_0(S_n = 0, \tau_0 > n-1, S_{n-1} = -1) \\ &= \underbrace{\mathbb{P}_0(S_n = 0 | S_{n-1} = 1, \tau_0 > n-1)}_{\substack{\mathbb{P}_1(S_1=0) \\ \mathbb{P}_1(S_1=0)}} \cdot \mathbb{P}_0(S_{n-1} = 1, \tau_0 > n-1) \\ &\quad + \underbrace{\mathbb{P}_0(S_n = 0 | S_{n-1} = -1, \tau_0 > n-1)}_{\substack{\mathbb{P}_{-1}(S_1=0) \\ \mathbb{P}_{-1}(S_1=0)}} \cdot \mathbb{P}_0(S_{n-1} = -1, \tau_0 > n-1) \\ &= q \cdot \mathbb{P}_0(S_{n-1} = 1, \tau_0 > n-1) + p \cdot \mathbb{P}_0(S_{n-1} = -1, \tau_0 > n-1) \\ &= q \cdot \frac{1}{n-1} \mathbb{P}_0(S_{n-1} = 1) + p \cdot \frac{1}{n-1} \mathbb{P}_0(S_{n-1} = -1) \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} &\mathbb{P}_0(S_n = 0 | S_{n-1} = 1) \\ &\mathbb{P}_0(S_n = 0 | S_{n-1} = -1) \end{aligned} \right\} \frac{1}{2}$$

Cas symétrique: $p = q = 1/2$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_0(\tau_0 = n) &= \frac{1}{2n-2} \{ \mathbb{P}_0(S_{n-1} = 1) + \mathbb{P}_0(S_{n-1} = -1) \} \\ &= \frac{1}{2n-2} \mathbb{P}(S_{n-1} = 1) = \boxed{\frac{1}{n-1} \mathbb{P}_0(S_n = 0)} \end{aligned}$$

Rappel: $\mathbb{P}_0(S_{2n} = 0) = \frac{1 + o(1)}{\sqrt{\pi n}}$

$$\Rightarrow \mathbb{P}_0(\tau_0 = 2n) = \frac{1 + o(1)}{(2n-1)\sqrt{\pi n}} = \frac{1 + o(1)}{2\sqrt{\pi}} n^{-3/2}$$

3.4 Loi de l'arc sinus pour la dernière visite en 0 :



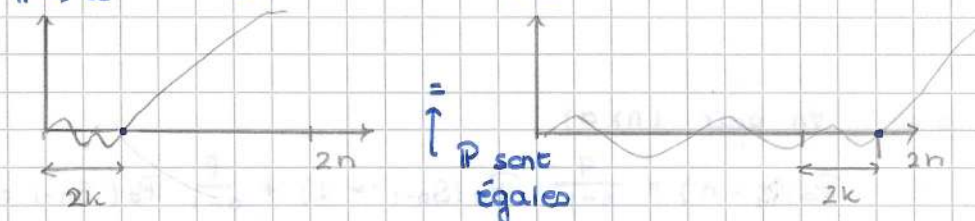
On définit $V_0(2n) = \max \{ 0 \leq k \leq 2n : S_k = 0 \}$

Thm 3.2 pour $p = q = 1/2$

$$\forall 0 \leq k \leq n \quad \mathbb{P}_0(V_0(2n) = 2k) = \mathbb{P}_0(S_{2k} = 0) \cdot \mathbb{P}_0(S_{2n-2k} = 0)$$

En particulier: $\forall 0 < \alpha < \beta < 1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_0\left(\frac{V_0(2n)}{2n} \in [\alpha, \beta]\right) = \frac{2}{\pi} [\arcsin(\sqrt{\beta}) - \arcsin(\sqrt{\alpha})]$$



$$\mathbb{P}_0(V_0(10'000) \leq 100) \approx \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{0,01} = 6,4\%$$

$$\mathbb{P}_0(V_0(10'000) \geq 9'900) \approx \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{0,01} = 6,4\%$$

$$\mathbb{P}_0(V_0(10'000) \leq 1000) \approx \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{0,1} = 20,5\%$$

Preuve:

$$\mathbb{P}_0(V_0(2n) = 2k) = \mathbb{P}_0(S_{2k} = 0, S_{2k+1} \neq 0, \dots, S_{2n} \neq 0)$$

$$= \mathbb{P}_0(S_{2k+1} \neq 0, \dots, S_{2n} \neq 0 \mid S_{2k} = 0) \mathbb{P}_0(S_{2k} = 0)$$

$$= \mathbb{P}_0(S_1 \neq 0, \dots, S_{2n-2k} \neq 0) \cdot \mathbb{P}_0(S_{2k} = 0)$$

$$= \mathbb{P}_0(\tau_0 > 2n - 2k) \mathbb{P}_0(S_{2k} = 0)$$

$$= \mathbb{P}_0(S_{2n-2k} = 0) \mathbb{P}_0(S_{2k} = 0)$$

Preuve: (Suite)

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_0(S_{2k}=0) \mathbb{P}_0(S_{2n-2k}=0) &= \frac{1+o(1)}{\sqrt{\pi n}} \cdot \frac{1+o(1)}{\sqrt{\pi(n-k)}} = \frac{1+o(1)}{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}} \\ &= \frac{1+o(1)}{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{k}{n}(1-\frac{k}{n})}} \cdot \frac{1}{n} \end{aligned}$$

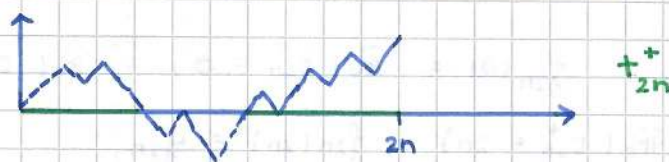
$$\mathbb{P}_0\left(\frac{V_0(2n)}{2n} \in [\alpha, \beta]\right) = \sum_{k: 2k/2n \in [\alpha, \beta]} \mathbb{P}_0(V_0(2n)=2k) = \sum_{k: \frac{k}{n} \in [\alpha, \beta]} \mathbb{P}_0(S_{2k}=0) \cdot \mathbb{P}_0(S_{2n-2k}=0)$$

$$= \frac{1+o(1)}{\pi} \sum_k \frac{1}{\sqrt{\frac{k}{n}(1-\frac{k}{n})}} \cdot \frac{1}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{x = \frac{k}{n}, dx = \frac{1}{n}} \frac{1+o(1)}{\pi} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} dx$$

$$\begin{aligned} x &= \sin^2 t \\ dx &= 2 \sin t \cos t dt \\ t &= \arcsin \sqrt{x} \end{aligned} \quad = \frac{1+o(1)}{\pi} \int_{\arcsin \sqrt{\alpha}}^{\arcsin \sqrt{\beta}} \frac{2 \sin t \cos t dt}{\sqrt{\sin^2 t \cos^2 t}} = \frac{2+o(1)}{\pi} (\arcsin \sqrt{\beta} - \arcsin \sqrt{\alpha})$$

$$= \frac{2}{\pi} (\arcsin \sqrt{\beta} - \arcsin \sqrt{\alpha})$$

3.5 Loi de l'arcsinus pour les temps de séjour:



On note $t_{2n}^+ = \# \{ 0 \leq i \leq 2i \mid \max\{S_i, S_{i+1}\} > 0 \}$
 ↑
 est toujours paire

Thm 3.3: pour $q = p = 1/2$

Alors $\mathbb{P}_0(t_{2n}^+ = 2k) = \mathbb{P}_0(S_{2k}=0) \mathbb{P}_0(S_{2n-2k}=0)$

En particulier: $\forall 0 < \alpha, \beta < 1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\frac{t_{2n}^+}{2n} \in [\alpha, \beta]\right) = \frac{2}{\pi} (\arcsin \sqrt{\beta} - \arcsin \sqrt{\alpha})$$

Preuve:

On note $f_{2n}(2k) = P_0(t_{2n}^+ = 2k)$

$$g_{2k} = P_0(S_{2k} = 0)$$

$$h_{2r} = P_0(\tau_0 = 2r)$$

$$a) t_{2n}^+ + t_{2n}^- = 2n$$

$$b) t_{2n}^+ \stackrel{\text{loi}}{=} t_{2n}^-$$

On veut mq: $\forall n \geq 1 \quad \forall 0 \leq k \leq n$

$$(*) f_{2n}(2k) = g_{2k} g_{2n-2k}$$

$$1) k=n: f_{2n}(2n) = g_{2n} g_0 = g_{2n}$$

$$g_{2n} = P_0(S_{2n} = 0) = P_0(\tau_0 > 2n) = P_0(S_1 = -1, S_2 \geq 1, S_3 \geq 1, \dots, S_{2n} \geq 1)$$

$$+ P(S_1 = 1, S_2 \leq -1, \dots, S_{2n} \leq -1) = 2P_0(S_1 = 1, S_2 \geq 1, \dots, S_{2n} \geq 1)$$

$$= 2P_0(S_2 \geq 1, \dots, S_{2n} \geq 1 \mid S_1 = 1) \cdot P(S_1 = 1)$$

$$= P_1(S_1 \geq 1, S_{2n-1} \geq 1) = P_0(S_1 \geq 0, \dots, S_{2n-1} \geq 0)$$

$$= P_0(S_1 \geq 0, \dots, S_{2n} \geq 0)$$

$$= P_0(t_{2n}^+ = 2n) = f_{2n}(2n)$$

impair $\Rightarrow S_{2n-1} \geq 0$
 $\Leftrightarrow S_{2n-1} \geq 1 \Rightarrow S_{2n} \geq 0$

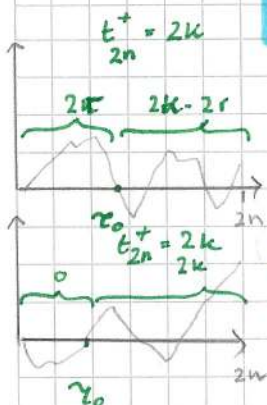
$$2) k=0: f_{2n}(0) = P_0(t_{2n}^+ = 0) \stackrel{a)}{=} P_0(t_{2n}^- = 2n)$$

$$\stackrel{b)}{=} P_0(t_{2n}^+ = 2n) = f_{2n}(2n) = g_{2n}$$

On a vu: $n=1$ $(*)$ est vrai $\forall 0 \leq k \leq n$

Hyp d'induction: $\forall n < m$ $(*)$ est vrai $\forall 0 \leq k \leq n$

A montrer: Lorsque $n=m$ $(*)$ est vrai $\forall 0 \leq k \leq n$



1) et 2) $\Rightarrow$ ok pour $k=0$ et $k=m$, on peut supposer que $0 < k < m$.

$$f_{2m}(2k) = P_0(t_{2m}^+ = 2k) = \sum_{r=1}^m \left\{ P_0(t_{2m}^+ = 2k \mid \tau_0 = 2r, S_1 = 1) \cdot P_0(\tau_0 = 2r, S_1 = 1) \right. \\ \left. + P_0(t_{2m}^+ = 2k \mid \tau_0 = 2r, S_1 = -1) \cdot P_0(\tau_0 = 2r, S_1 = -1) \right\}$$

$$= \sum_{r=1}^m \left\{ \underbrace{P_0(t_{2m-2r}^+ = 2k-2r)}_{f_{2m-2r}(2k-2r)} \underbrace{P_0(\tau_0 = 2r, S_1 = 1)}_{\frac{1}{2} h_{2r}} + \underbrace{P_0(t_{2m-2r}^+ = 2k)}_{f_{2m-2r}(2k)} \underbrace{P_0(\tau_0 = 2r, S_1 = -1)}_{\frac{1}{2} h_{2r}} \right\}$$

$$\Rightarrow f_{2m}(2k) = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^k f_{2m-2r}(2k-2r) h_{2r} + \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{m-k} f_{2m-2r}(2k) h_{2r}$$

$$\Rightarrow f_{2m}(2k) = \frac{1}{2} g_{2m-2k} \sum_{r=1}^k g_{2k-2r} h_{2r} + \frac{1}{2} g_{2k} \sum_{r=1}^{m-k} g_{2m-2k-2r} h_{2r}$$

Preuve: (Suite)

$$\begin{aligned} \text{On a } \forall h \geq 1 \quad g_{2L} &= P_0(S_{2L} = 0) = \sum_{r=1}^L \underbrace{P_0(S_{2L} = 0 \mid Z_0 = 2r)}_{P_0(S_{2L-2r} = 0)} \cdot P(Z_0 = 2r) \\ &= \sum_{r=1}^L g_{2L-2r} h_{2r} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f_{2m}(2k) &= \frac{1}{2} g_{2m-2k} g_{2k} + \frac{1}{2} g_{2k} g_{2m-2k} \\ &= g_{2m-2k} g_{2k} \end{aligned}$$

Ch 4. Fonctions Génératrices.

4.1 Définitions, propriétés :

$a = (a_i)_{i=0}^{\infty}$ suite de nbr réel

on appelle fct génératrice de la suite a la fct définie par

$$G_a(s) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i s^i \quad \text{pour } s \in \mathbb{C} \text{ tq la série converge.}$$

Rappel:

- $\exists$ un rayon de convergence $0 \leq R \leq +\infty$ tq
 - la série converge si $|s| < R$ (absolument)
 - la série diverge si $|s| > R$

De plus la série est uniformément convergente sur

$$\{s \in \mathbb{C} \text{ tq } |s| \leq R', \forall R' < R\}$$

• Différentiation et intégration:

$G_a(s)$ peut être dérivée ou intégrée terme à terme un nbr arbitraire de fois tant que $|s| < R$.

• Unicité:

$$\text{Si } \exists 0 < R' \leq R \text{ tq } G_a(s) = G_b(s) \quad \forall |s| < R'$$

$$\text{alors } a_i = b_i \quad \forall i$$

$$\text{De plus } a_n = \frac{1}{n!} G_a^{(n)}(0)$$

Continuité: Thm Abel

Si $a_i \geq 0 \forall i$ et si G_a est finie $\forall |s| < 1$ alors

$$\lim_{s \uparrow 1} G_a(s) = G_a(1) \quad (\text{possible } +\infty)$$

$s \uparrow 1 : s \rightarrow 1$ le long des réels

le 21.11.18

Lien avec la proba:

X v.a à valeurs dans $\mathbb{N} \rightsquigarrow f_X(k) = \mathbb{P}(X=k), k \geq 0$

$\rightsquigarrow (f_X(k))_{k \geq 0}$

Def 4.1: Soit X v.a à valeurs dans $\mathbb{N}$, on appelle fct génératrice de X la fct $G_X: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ tq $G_X(s) = \mathbb{E}(s^X) = \sum_{k \geq 0} f_X(k) s^k$

Rem 4.1: $G_X(1) = \sum_{k=0}^{\infty} f_X(k) = 1 < \infty$

$\Rightarrow$ rayon de conv ≥ 1

Ex 4.1: 2. $X \sim \text{Bern}(p)$

$$G_X(s) = (1-p) \cdot s^0 + p \cdot s^1 = 1-p+ps$$

3. $X \sim \text{Bino}(n, p)$

$$G_X(s) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (sp)^k (1-p)^{n-k} = (1-p+ps)^n$$

4. $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$

$$G_X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} s^k = e^{-\lambda} e^{s\lambda} = e^{\lambda(s-1)}$$

5. $X \sim \text{Géom}(p)$

$$G_X(s) = \sum_{k \geq 1} p(1-p)^{k-1} s^k = ps \sum_{k \geq 1} ((1-p) \cdot s)^{k-1} = \frac{ps}{1-(1-p)s}$$

Petit calcul:

$$G'_X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} (f_X(k) s^k)' = \sum_{k=0}^{\infty} k s^{k-1} f_X(k) = \mathbb{E}(X s^{X-1})$$

$s \in [0,1]$

$$G'_X(1) = \lim_{s \uparrow 1} G'_X(s) = \mathbb{E}(X)$$

$$G''_X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) s^{k-2} f_X(k) \xrightarrow{s \uparrow 1} \mathbb{E}(X(X-1))$$

$$G^{(n)}_X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} k \dots (k-n+1) s^{k-n} f_X(k) \xrightarrow{s \uparrow 1} \mathbb{E}(X \dots (X-n+1))$$

Prop 4.1: $E(X) = G'_X(1)$

$$\text{Var}(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - G'_X(1)^2$$

Rem 4.2: La fonction génératrice des moments de X est: $M_X(t) = G_X(e^t)$

$$\begin{aligned} (\forall t \text{ tq } e^t < R) \quad M_X(t) &= G_X(e^t) = \sum_{k \geq 0} p_X(k) e^{tk} = \sum_{k \geq 0} \sum_{n \geq 0} \frac{(tk)^n}{n!} p_X(k) \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{t^n}{n!} \sum_{k \geq 0} k^n p_X(k) = \sum_{n \geq 0} \frac{t^n}{n!} E(X^n) \end{aligned}$$

$$M_X(t) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} M_X^{(n)}(0) t^n \Rightarrow \boxed{E(X^n) = M_X^{(n)}(0) \quad \forall n \geq 1}$$

Prop 4.2: $X_1, \dots, X_n$ v.a. indép. à valeurs dans $\mathbb{N}$. Alors:

$$G_{X_1+X_2+\dots+X_n}(s) = G_{X_1}(s) \dots G_{X_n}(s)$$

Preuve:

$$\begin{aligned} G_{X_1+\dots+X_n}(s) &= E(s^{X_1+\dots+X_n}) = E(s^{X_1} \dots s^{X_n}) \stackrel{\text{lemme 2.18}}{=} E(s^{X_1}) \dots E(s^{X_n}) \\ &= G_{X_1}(s) \dots G_{X_n}(s) \end{aligned}$$

Ex 4.3: $X \sim \text{Pascal}(\dots)$

$Y_1, \dots, Y_r$ indép, $Y_k \sim \text{géom}(p)$

$$X+r \stackrel{\text{loi}}{=} Y_1 + \dots + Y_r$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow G_X(s) &= E(s^X) = E(s^{X+r}) s^{-r} = E(s^{Y_1+\dots+Y_r}) s^{-r} = (G_{Y_1}(s))^{-r} s^{-r} \\ &= \left(\frac{p}{1-(1-p)s} \right)^r \end{aligned}$$

Ex 4.4: $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$

$Y \sim \text{Poisson}(\lambda')$

} indép.

$$G_{X+Y}(s) = G_X(s) G_Y(s) = e^{\lambda(s-1)} e^{\lambda'(s-1)} = e^{(\lambda+\lambda')(s-1)}$$

fct gén d'une poisson $(\lambda+\lambda')$

Prop 4.3: Soient $X_1, \dots, X_n, \dots$ v.a. i.i.d à valeurs dans $\mathbb{N}$, N v.a à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ indép des $(X_k)_{k \geq 1}$, G_X = fct génér. de X , $G_N = \text{fct gén. de } N$
 $S = X_1 + \dots + X_N$. Alors $G_S(s) = G_N(G_X(s))$

Preuve: $G_S(s) = E(s^S) = E(E(s^S | N)) = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{E(s^{x_1 + \dots + x_n} | N=n)}_{E(s^{x_1 + \dots + x_n})} f_N(n)$
 $= \sum_{n=1}^{\infty} (G_X(s))^n f_N(n)$
 $= G_N(G_X(s))$

Rem 4.3: $E(S) = G'_S(1) = (G_N \circ G_X)'(1) = \underbrace{G'_N(G_X(1))}_{E(N)} \cdot \underbrace{G'_X(1)}_{E(X)}$
 $= E(N) E(X)$

Ex 4.5: N œuf, $N \sim \text{Poisson}(\lambda)$

Chaque œuf éclot indép avec proba p

Q: Combien de poussin

$$K = \# \text{ poussin} = X_1 + X_2 + \dots + X_N$$

$$(X_k)_{k \geq 1} \text{ iid, } X_k \sim \text{Bern}(p) \quad X_k = \begin{cases} 1 & \text{si } k \text{ ème œuf éclot} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

loi de K ?

$$G_K(s) = G_N(G_X(s)) = G_X(s) = 1 - p + ps \quad \text{et} \quad G_N(s) = e^{\lambda(s-1)}$$

$$\Rightarrow G_K(s) = e^{\lambda(1-p+ps-1)} = e^{\lambda p(s-1)} \rightarrow \text{Poisson}(\lambda p)$$

$$\Rightarrow K \sim \text{Poisson}(\lambda p)$$

Rem 4.5: On a comme d'habitude, supp. que les v.a. étaient non-défective:

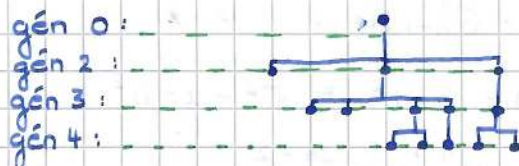
$$\mathbb{P}(X = +\infty) = 0.$$

Soit X défective: $\mathbb{P}(X = +\infty) > 0$, G_X a un RdC = 1

$$\lim_{s \uparrow 1} G_X(s) = \lim_{s \uparrow 1} \sum_{k=0}^{\infty} s^k f_X(k) = \sum_{k=0}^{\infty} f_X(k) = 1 - \mathbb{P}(X = +\infty)$$

4.2 Application aux processus de branchement:

Intro: Informelle



On prend $(Z_n)_{n \geq 0}$ $Z_n = \#$ individus à la génération n

Formelle:

$(X_k^n)_{\substack{n \geq 0 \\ k \geq 1}}$ v.a. iid à valeurs dans $\mathbb{N}$, fct gén: $G(s) = \mathbb{E}(s^{X_1^0})$

$X_k^n = \#$ fils du k -ème individu de la n -ème génération (si il existe)

Déf:

$$Z_0 = 1$$

$$\forall n \geq 1, Z_n = X_1^{n-1} + X_2^{n-1} + \dots + X_{Z_{n-1}}^{n-1}$$

$G_{Z_n} = G_n =$ fct génératrice à la n -ème génération.

$$Z_1 = X_1^0 \Rightarrow G_1 = G$$

Thm 4.2: $\forall n \geq 1, G_n = G^{o n} = \underbrace{G \circ G \circ \dots \circ G}_{n \text{ fois}}$

Dém:

$$\begin{aligned} G_n &= G_{X_1^{n-1} + \dots + X_{Z_{n-1}}^{n-1}} \stackrel{\text{Prop 4.3}}{=} G_{n-1} \circ G = G_{n-2} \circ G \circ G = \\ &= \underbrace{G \circ \dots \circ G}_{n \text{ fois}} \end{aligned}$$

Lemme 4.1:

$$\mu = \mathbb{E}(X_1^0) = \# \text{ fils d'un individu "moyen"} \quad \sigma^2 = \text{Var}(X_1^0)$$

$$\text{Alors: } \mathbb{E}(Z_n) = \mu^n$$

$$\text{Var}(Z_n) = \begin{cases} \sigma^2(\mu^2 - 1)\mu^{n-1} & \text{si } \mu \neq 1 \\ n \cdot \sigma^2 & \text{si } \mu = 1 \end{cases}$$

Dém:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Z_n) &= G'_n(1) = (G \circ G_{n-1})'(1) = G'(\underbrace{G_{n-1}(1)}_1) G'_{n-1}(1) \\ &= \mu \mathbb{E}(Z_{n-1}) = \mu \mu \mathbb{E}(Z_{n-2}) = \underbrace{\mu^n}_{1} \mathbb{E}(Z_0) = \mu^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G''_n(1) &= (G \circ G_{n-1})''(1) = G''(G_{n-1}(1))(G'_{n-1}(1))^2 + G'(G_{n-1}(1))G''_{n-1}(1) \\ &= G''(1)\mu^{2n-2} + G''_{n-1}(1)\mu = * \end{aligned}$$

$$G''(1) = \text{Var}(X_1) - G'(1) + G'(1)^2 = \sigma^2 - \mu + \mu^2$$

$$G''_{n-1}(1) = \text{Var}(Z_{n-1}) - \mu^{n-1} + \mu^{2n-2}$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(Z_n) &= G''_n(1) + G'_n(1) - G'_n(1)^2 = G''(1)\mu^{2n-2} + G''_{n-1}(1)\mu + \mu^n - \mu^{2n} \\ &= \sigma^2\mu^{2n-2} - \mu^{2n-1} + \mu^{2n} + \text{Var}(Z_{n-1})\mu - \mu^n + \mu^{2n-1} \\ &\quad + \mu^n - \mu^{2n} = \mu \text{Var}(Z_{n-1}) + \sigma^2\mu^{2n-2} \end{aligned}$$

On injecte les valeurs dans * et tout va bien.

Extinction:

Proba d'extinction

$$Q: \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(Z_n = 0) = 1 ? \quad \text{sinon} = ?$$

Rem: On verra $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(Z_n = 0) = \mathbb{P}(\lim_{n \rightarrow \infty} Z_n = 0)$

Thm 4.3: $\mu = \mathbb{E}(X_1)$, $\sigma^2 = \text{Var}(X_1)$

Alors la proba d'extinction $\eta = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(Z_n = 0)$ est donnée par la plus petite solution positive de $s = G(s)$

En particulier :

1) $\eta = 1$ si $\mu < 1$

2) $\eta < 1$ si $\mu > 1$

3) $\eta = 1$ si $\mu = 1$ et $\sigma^2 > 0$

4) $\eta = 0$ si $\mu = 1$ et $\sigma^2 = 0$

Dém: $Z_n = \mathbb{P}(Z_n = 0) = G_n(0)$ ($G_n(0) = \mathbb{P}(Z_n = 0) + \sum_{k \geq 1} \mathbb{P}(Z_n = k) s^k$)
 $\{Z_n = 0\} \subset \{Z_{n+1} = 0\} \subset \dots \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \eta_n \leq \eta_{n+1} \quad \forall n \\ \eta_n \leq 1 \quad \forall n \end{array} \right\} \mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \eta_n \text{ existe}$

(Suite de Dém semaine pro)

Preuve: du Thm 4.3

$$\forall n \geq 1: \eta_n = \mathbb{P}(Z_n = 0)$$

• $\eta = \lim_{n \rightarrow \infty} \eta_n$ existe

$$\eta_n \leq 1 \quad \forall n$$

$$\{\{Z_n = 0\} \subset \{Z_{n+1} = 0\}\} \quad \eta_n \leq \eta_{n+1} \quad \forall n \geq 1 \quad \left. \vphantom{\eta_n \leq \eta_{n+1}} \right\} \eta_n \uparrow \text{ et est bornée}$$

• η est sol de $G(s) = s$

$$\begin{aligned} \forall n \geq 1 \quad \eta_n &= \mathbb{P}(Z_n = 0) = G_n(0) = G^{(n)}(0) = G(G^{(n-1)}(0)) \\ &= G(G_{n-1}(0)) = G(\eta_{n-1}) \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \eta_n = \eta$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G(\eta_{n-1}) = G(\lim_{n \rightarrow \infty} \eta_{n-1}) = G(\eta) \Rightarrow \eta = G(\eta)$$

En effet, sur $[0,1]$, $s \mapsto G(s)$ est continue

• η est la + petite sol positive de $G(s) = s$

Soit $a \geq 0$ tq $a = G(a)$

à uq $\eta \leq a$:

observation: sur $[0,1]$ $s \mapsto G(s)$

est croissante, $G'(s) = \sum_{k \geq 1} k s^{k-1} f_X(k) \geq 0$

$$\eta_1 = \mathbb{P}(Z_1 = 0) = G(0) \leq G(a) = a$$

$$\eta_2 = G(\eta_1) \leq G(a) = a$$

$$\eta_n = G(\eta_{n-1}) \leq G(a) = a \Rightarrow \eta_n \leq a \quad \forall n \geq 1 \Rightarrow \eta \leq a$$

$$G(1) = 1, \quad G'(1) = \mathbb{E}(X) = \mu$$

$$G \text{ cont, } \nearrow \text{ sur } [0,1], \quad G(0) = \mathbb{P}(X=0)$$

$s \mapsto G(s)$ est convexe sur $[0,1]$:

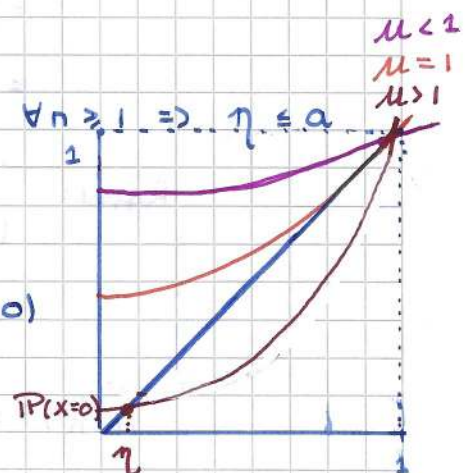
$$G''(s) = \sum_{k \geq 2} k(k-1) s^{k-2} f_X(k) \geq 0$$

$$\bullet \mu < 1, \quad \eta = 1 \quad \bullet \mu > 1, \quad \eta < 1$$

$$\bullet \mu = 1 \text{ et } \sigma^2 = \text{Var}(X) = 0 : \mathbb{P}(X=1) = 1 \Rightarrow G(s) = s \quad \forall s \Rightarrow \eta = 0$$

$$\bullet \mu = 1 \text{ et } \sigma^2 > 0 : \mathbb{P}(X \neq 1) > 0 \Rightarrow \mathbb{P}(X \geq 2) > 0$$

$$\Rightarrow G(s) = s \text{ est convexe stricte } G''(s) > 0 \Rightarrow \eta = 1$$



4.3 Application à la marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}$:

Notation: $\forall n \geq 0 \quad g_{2n} = \mathbb{P}_0(S_{2n} = 0)$

$\forall r \geq 1 \quad h_{2r} = \mathbb{P}_0(X_0 = 2r)$

$G(s) = \sum_{n \geq 0} g_{2n} s^{2n}$

$H(s) = \sum_{r \geq 1} h_{2r} s^{2r}$

Lemme 4.2: 1) $G(s) = 1 + G(s)H(s)$

2) $G(s) = (1 - 4pqs^2)^{-1/2}$

3) $H(s) = 1 - (1 - 4pqs^2)^{1/2}$

Démon: 1) $\forall n \geq 1 \quad g_{2n} = \mathbb{P}_0(S_{2n} = 0) = \sum_{r=1}^n \mathbb{P}_0(S_{2n} = 0 | X_0 = 2r) \cdot \mathbb{P}_0(X_0 = 2r)$
 $= \sum_{r=1}^n g_{2n-2r} h_{2r}$

$G(s) = 1 + \sum_{n \geq 1} g_{2n} s^{2n} = 1 + \sum_{n \geq 1} \sum_{r=1}^n h_{2r} g_{2n-2r} s^{2r} s^{2n-2r}$
 $= 1 + \sum_{r \geq 1} h_{2r} s^{2r} \sum_{n \geq r} g_{2(n-r)} s^{2(n-r)} =$
 $= 1 + G(s) \sum_{r \geq 1} h_{2r} s^{2r} = 1 + G(s) H(s)$

2) $G(s) = \sum_{n \geq 0} \binom{2n}{n} (pqs^2)^n$
 $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n! \cdot n!} = \frac{1}{n!} \frac{2n(2n-2)\dots 4 \cdot 2}{n!} \quad 2^n(n(n-1)(n-2)\dots 2 \cdot 1) = 2^n \cdot n!$
 $= 2^n \frac{(2n-1)(2n-3)\dots 3 \cdot 1}{n!} = 2^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{n!}$
 $= (-4)^n \frac{(-1/2)(-3/2)(-5/2)\dots(-(2n-1)/2)}{n!}$
 $= (-4)^n \frac{(-1/2)(-1/2-1)\dots(-1/2-(n-1))}{n!}$

Rappel: $\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}$

$\forall \alpha \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$

$(1+x)^\alpha = \sum_{n \geq 0} \binom{\alpha}{n} x^n$

$\binom{2n}{n} = (-4)^n \binom{-1/2}{n}$

$\Rightarrow G(s) = \sum_{n \geq 0} \binom{-1/2}{n} (-4pqs^2)^n$
 $= (1 - 4pqs^2)^{-1/2}$

Cor 4.1 : La proba que la marche retourne à son pt de départ est

$$P_0(\tau_0 < \infty) = 1 - |p - q|$$

Dans le cas où le retour est certain (ie : $p = q = 1/2$)

$$\text{on a } E(\tau_0) = +\infty$$

Preuve : Δ τ_0 peut être déféctive

$$P_0(\tau_0 = \infty) = 1 - H(1) = (1 - 4pq)^{1/2} = |q - p|$$

$$1 - 4pq = 1 - 4p(1-p) = 1 - 4p + 4p^2 = (1 - 2p)^2 = (1 - p - p)^2 = (q - p)^2$$

$$p = q = 1/2 \quad \tau_0 \text{ pas déféctive} \quad H(s) = (1 - s^2)^{1/2}$$

$$E(\tau_0) = \lim_{s \uparrow 1} H'(s) = \lim_{s \uparrow 1} \frac{1}{2} \frac{-2s}{(1 - s^2)^{1/2}} = +\infty \quad \square$$

Déf 4.2 : • La M.A. est dite récurrente si $P_0(\tau_0 < \infty) = 1$, elle est transiente

• Une M.A. récurrente est dite récurrente - nulle si $E_0(\tau_0) = +\infty$, sinon elle est dite récurrente positive.

On a donc montré :

- si $p \neq q$: MAS sur $\mathbb{Z}$ est transiente
- si $p = q$: MAS sur $\mathbb{Z}$ est récurrente nulle

Partie II

Espaces de proba généraux:

CH 5. Approche Axiomatique:

5.1 Construction d'espace de proba:

On ne peut plus procéder comme quand Ω fini et dénombrable

On va construire $\mathbb{P}$ directement sur les événements généraux.

On pose les conditions suivantes:

1. $\mathbb{P}(A) \in [0, 1] \quad \forall A$ événements

2. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

3. $\forall (A_k)_{k \geq 1}$, évén. 2 à 2 disjoints, $\mathbb{P}(\bigcup_{k \geq 1} A_k) = \sum_{k \geq 1} \mathbb{P}(A_k)$

$\Rightarrow$ toutes les propriétés du Cor 1.1 restent vraies.

Lemme 5.1: Sous la hypothèse 1., 2., 3. on a :

i) $\forall$ suite d'événements $A_1 \subset A_2 \subset \dots$, $\mathbb{P}(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n) = \mathbb{P}(\bigcup_{n \geq 1} A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_n)$

ii) $\forall$ suite d'évén. $B_1 \supset B_2 \supset \dots$, $\mathbb{P}(\lim_{n \rightarrow \infty} B_n) = \mathbb{P}(\bigcap_{n \geq 1} B_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(B_n)$

Ex: $\bullet \{T_0 = +\infty\} = \bigcap_{n \geq 1} \{T_0 > n\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \{T_0 > n\}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_0(T_0 > n) = \mathbb{P}_0(T_0 = +\infty)$$

$$\bullet \{\text{Extinction}\} = \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0 \right\} = \{z_n = 0 \quad \forall n \text{ grand}\} = \bigcup_{n \geq 1} \{z_n = 0\}$$
$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \{z_n = 0\}$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}_0(\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(z_n = 0)$$

Preuve: i) $\mathbb{P}(\bigcup_{k \geq 1} A_k) = \mathbb{P}(A_1 \cup (A_2 \setminus A_1) \cup (A_3 \setminus A_2) \cup \dots) = \mathbb{P}(A_1) + \sum \mathbb{P}(A_k \setminus A_{k-1})$

$$= \mathbb{P}(A_1) + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2}^n (\mathbb{P}(A_k) - \mathbb{P}(A_{k-1}))$$
$$= \mathbb{P}(A_1) + \lim_{n \rightarrow \infty} (\mathbb{P}(A_n) - \mathbb{P}(A_1)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_n)$$

ii) $\mathbb{P}(\bigcap_{k \geq 1} B_k) = 1 - \mathbb{P}((\bigcap_{k \geq 1} B_k)^c) = 1 - \mathbb{P}(\bigcup_{k \geq 1} B_k^c)$ croissante

$$= 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(B_n^c) = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \mathbb{P}(B_n))$$
$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(B_n)$$

Rem: 1, 2, additivité finie et la continuité $\Rightarrow \sigma$ -additivité

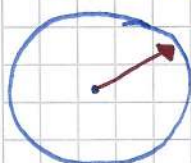
Démo: $(A_k)_{k \geq 1}$ év 2 à 2 disjoints

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k \geq 1} A_k\right) &= \mathbb{P}\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \bigcup_{k=1}^n A_k\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(A_k) \\ &= \sum_{k \geq 1} \mathbb{P}(A_k) \end{aligned}$$

Q: $\exists ? \mathbb{P}: \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ satisfait 1, 2 et 3 ?

R: En général, Non !

Ex: Vitali $\Omega = S^1 = \{e^{i\alpha}; \alpha \in \mathbb{R}\}$



$\mathbb{P}: S^1 \rightarrow [0, 1]$ tq

$\mathbb{P}(S^1) = 1$, σ -add

$\forall A \subset S^1, \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(e^{i\beta} A) \quad \forall \beta \in \mathbb{R}$ où $e^{i\beta} A = \{e^{i\beta} \cdot x, \forall x \in A\}$

Relation q d'équivalence sur S^1 : $x \sim y \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{Z}$ tq $y = e^{in} x$

$[x]$ = classe d'équivalence $\ni x$

$A_0 = \{ \text{exactement 1 représentant de chaque classe} \}$

$\forall n \in \mathbb{Z}: A_n = e^{in} A_0$

App 1: $A_n \cap A_m = \emptyset \quad \forall n \neq m$

$y \in A_n \cap A_m \Rightarrow y = e^{in} x = e^{im} \tilde{x} \quad x, \tilde{x} \in A_0$

$\Rightarrow y \sim x$ et $y \sim \tilde{x} \Rightarrow x \sim \tilde{x} \Rightarrow x = \tilde{x} \Rightarrow e^{i(n-m)} = 1 \Rightarrow n = m$

App 2: $S^1 = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} A_n$

$y \in S^1 \quad \{x\} = [y] \cap A_0 \Rightarrow y = e^{in} x, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow y \in A_n$

$$1 = \mathbb{P}(S^1) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} A_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathbb{P}(A_n) = \begin{cases} 0 & \mathbb{P}(A_0) = 0 \\ \infty & \mathbb{P}(A_0) > 0 \end{cases} \quad \nabla$$

Le 05.12.18

On va restreindre la notion d'évènements à une collection

$$\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\Omega), \quad \mathbb{P}: \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$$

Déf 5.1: Un ensemble $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ est une tribu sur Ω (ou σ -algèbre) si

- $\Omega \in \mathcal{F}$
- $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$
- $\forall A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{i \geq 1} A_i \in \mathcal{F}$

Lemme 5.3: $\forall$ tribu $\mathcal{F}$ sur Ω

- $\emptyset \in \mathcal{F}$
- $\forall A, B \in \mathcal{F}, A \cup B, A \cap B, A \setminus B \in \mathcal{F}$
- $\forall A_1, \dots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcap_{i \geq 1} A_i \in \mathcal{F}$

Comment construire $\mathcal{F}$?

On part d'une famille d'évènements "naturels", puis on l'étend à une tribu.

Lemme 5.4: Soit $(\mathcal{F}_i)_{i \in I}$ une collection de tribu sur Ω . Alors $\bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_i$ est une tribu sur Ω .

Déf 5.2: Soit $\mathcal{G} \subset \mathcal{P}(\Omega)$, la tribu engendrée par $\mathcal{G}$ est la + petite tribu sur Ω qui contient $\mathcal{G}$: $\sigma(\mathcal{G}) = \bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_i$ où $\{\mathcal{F}_i : i \in I\}$ est l'ens. de toutes les tribu $\supset \mathcal{G}$ (contenant $\mathcal{G}$)

Ex: 1) Ω dénombrable ou fini

$$\mathcal{G} = \{\{w\} : w \in \Omega\}$$

$$\text{Aff: } \sigma(\mathcal{G}) = \mathcal{P}(\Omega)$$

En effet: $\forall A \subset \Omega, A = \bigcup_{w \in A} \{w\} \in \sigma(\mathcal{G})$

2) $\Omega = \mathbb{R}^n$

$$\mathcal{G} = \{[a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n] \mid a_i, b_i \in \mathbb{R}\} \quad \sigma(\mathcal{G}) = \mathcal{B}^n \text{ boréliens de } \mathbb{R}^n$$

5.5 Variables aléatoires à densité:

Déf 5.13: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$, $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$, alors

$\mathbb{P}(A) = \int_A f(x) dx$ définit une mesure de proba sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}^1)$

$\mathbb{P}$ est alors dite absolument continue et f est la densité de proba associée à $\mathbb{P}$

Rem: • Intégrale de Lebesgue

• la densité de proba n'est pas unique

• $\Delta f(x)$ n'est pas une proba: $f(x) \geq 1$

" $\int f(x) dx$ " = proba d'être dans dx "

Déf 5.14: Une var. alé. X est à densité si $\mathbb{P}_X$ est absolument continue:

$$\mathbb{P}_X(A) = \int_A f_X(s) ds, \quad f_X: \text{densité de proba de } X.$$

$$(\mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(X^{-1}(A)) = \mathbb{P}(X \in A))$$

Déf: Soit X une var. alé. à densité f_X . Alors X possède une espérance ($X \in L^1(\mathbb{P})$)

$\Leftrightarrow \int_{\mathbb{R}} |x| f_X(x) dx < \infty$, dans ce cas l'espérance de X est

$$\mathbb{E}(X) = \int_{\mathbb{R}} x f_X(x) dx$$

Cor 5.1: X à densité f_X : $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tq $\varphi(x) \in L^1(\mathbb{P})$, alors

$$\mathbb{E}(\varphi(X)) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) f_X(x) dx$$

Rien ne change par les autres.

5.5.3 Exemples importants:

Loi uniforme: $a < b$, $X \sim \mathcal{U}[a, b]$ si $f_X(s) = \frac{1_{[a, b]}(s)}{b - a}$

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{b-a} \int_{-\infty}^{\infty} x 1_{[a, b]}(x) dx = \frac{b+a}{2}$$

$$\text{Var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

X est uniforme sur $A \in \mathcal{B}^1$ si $f_X(s) = \frac{1_A(s)}{\lambda(A)}$ ← mesure de Lebesgue

Loi Exponentielle: $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$

$$X \sim \exp(\lambda) \text{ si } f_X(s) = \mathbb{1}_{[0, \infty)}(s) \lambda e^{-\lambda s}$$

$$\mathbb{E}(X) = \lambda^{-1} \text{ et } \text{Var}(X) = \lambda^{-2}$$

- Elle peut être vue comme une limite de la loi géométrique :

N = le temps 1^{er} succès où on suit des épreuves Bernoulli(p)

$$\mathbb{P}(N > k) = (1-p)^k$$

$$t > 0: \mathbb{P}(N > t) = \mathbb{P}(N > \lfloor \frac{t}{\delta} \rfloor \cdot \delta) = (1-p)^{\lfloor \frac{t}{\delta} \rfloor} \xrightarrow[p/\delta \rightarrow \lambda > 0]{\delta \rightarrow 0} e^{-\lambda t}$$

$$X \text{ var. alé. à densité } \mathbb{P}(X \leq t) = \int_{-\infty}^t f_X(s) ds$$

$$\frac{d}{dt} \mathbb{P}(X \leq t) = f_X(t)$$

$$\begin{aligned} f_W(t) &= d/dt \mathbb{P}(W \leq t) = d/dt [1 - \mathbb{P}(W > t)] \\ &= d/dt [1 - e^{-\lambda t}] = \lambda e^{-\lambda t} \Rightarrow W \sim \exp(\lambda) \end{aligned}$$

- Perte de mémoire :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X > t+s | X > t) &= \frac{\mathbb{P}(X > t+s)}{\mathbb{P}(X > t)} = \frac{\int_{t+s}^{\infty} f_X(u) du}{\int_t^{\infty} f_X(u) du} \\ &= \frac{\lambda \int_{t+s}^{\infty} e^{-\lambda u} du}{\lambda \int_t^{\infty} e^{-\lambda u} du} = e^{-\lambda s} = \int_s^{\infty} e^{-\lambda u} du = \mathbb{P}(X > s) \end{aligned}$$

Loi normale: $\mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 \in \mathbb{R}_+^*$

$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \text{ si } f_X(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(s-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\mathbb{E}(X) = \mu \text{ et } \text{Var}(X) = \sigma^2$$

- Si $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ alors on dit que c'est une loi normale standard

$$f_X(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-s^2/2}$$

5.5.4 Vecteurs aléatoires à densités:

Déf 5.16: $\underline{X} = (X_1, \dots, X_n)$ a densité si $\exists f_{\underline{X}} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ tq $\int_{\mathbb{R}} f_{\underline{X}}(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = 1$ tq $TP(\underline{X} \in A) = \int_A f_{\underline{X}}(x) dx \quad \forall A \in \mathcal{B}^n$
 $f_{\underline{X}}$ densité de proba conjointe

Lemme 5.12: $f_{X_k}(x_k) = \int_{\mathbb{R}} dx_1 \dots \int_{\mathbb{R}} dx_{k-1} \int_{\mathbb{R}} dx_{k+1} \dots \int_{\mathbb{R}} dx_{n-1} \int_{\mathbb{R}} dx_n f_{\underline{X}}(x_1, \dots, x_n)$

Preuve: $TP(X_k \in A) = TP(\underline{X} \in \overbrace{\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}^{k-1} \times A \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R})$
 $= \int_{\mathbb{R}} dx_1 \int_{\mathbb{R}} dx_2 \dots \int_{\mathbb{R}} dx_{k-1} \int_A dx_k \int_{\mathbb{R}} dx_{k+1} \dots \int_{\mathbb{R}} dx_n f_{\underline{X}}(x_1, \dots, x_n)$
 $= \int_A dx_k \left(\int_{\mathbb{R}} dx_1 \dots \int_{\mathbb{R}} dx_{k-1} \int_{\mathbb{R}} dx_{k+1} \dots \int_{\mathbb{R}} dx_n f_{\underline{X}}(x_1, \dots, x_n) \right)$
 $= \int_A dx_k f_{X_k}(x_k) \quad \square$

Lemme 5.13: $\underline{X} = (X_1, \dots, X_n)$ a densité, alors: $X_1, \dots, X_n$ sont indép

le 12.12.18

$$\Leftrightarrow f_{\underline{X}}(x_1, \dots, x_n) = f_{X_1}(x_1) \dots f_{X_n}(x_n)$$

Preuve: $TP(X_1 \in A_1, \dots, X_n \in A_n) = TP(\underline{X} \in A_1 \times \dots \times A_n) = \int_{A_1} dx_1 \dots \int_{A_n} dx_n f_{\underline{X}}(x_1, \dots, x_n)$
 $TP(X_1 \in A_1) \dots TP(X_n \in A_n) = \int_{A_1} dx_1 f_{X_1}(x_1) \dots \int_{A_n} dx_n f_{X_n}(x_n)$
 $= \int_{A_1} dx_1 \dots \int_{A_n} dx_n f_{X_1}(x_1) \dots f_{X_n}(x_n)$ ■

Ex: $\Omega = \mathcal{D}_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ avec la mesure de proba unif, c-à-d celle associée à la densité de probabilité $f(x, y) \equiv 1/\pi$

$$X(x, y) = x, \quad Y(x, y) = y, \quad R(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \Theta(x, y) \in [0, 2\pi] \text{ tq}$$

$$x = R(x, y) \cos(\Theta(x, y)) \text{ et } y = R(x, y) \sin(\Theta(x, y))$$

$$(X, Y): \quad \forall A \subset \mathcal{D}_1, \quad TP((X, Y) \in A) = TP(\{(x, y) \in \mathcal{D}_1 : (x, y) \in A\})$$

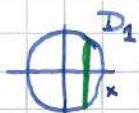
$$= \int_A dx dy \cdot 1/\pi = \int_A dx dy \cdot 1/\pi \Rightarrow f(x, y) = 1/\pi \quad \forall (x, y) \in \mathcal{D}_1$$

$$\forall x \in (-1, 1): f_X(x) = \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy f_{(X,Y)}(x, y) = \frac{2}{\pi} \sqrt{1-x^2}$$

$$\forall y \in (-1, 1): f_Y(y) = \frac{2}{\pi} \sqrt{1-y^2}$$

$$f_{X,Y}(x, y) = 1/\pi \neq f_X(x) \cdot f_Y(y) = \frac{4}{\pi^2} \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}$$

$\Rightarrow X$ et Y pas indép.



Ex: (Suite)

$$(R, \Theta) : \forall B \subset [0, 1) \times [0, 2\pi)$$

$$\mathbb{P}((R, \Theta) \in B) = \mathbb{P}(\{(x, y) \in D_1 : (R(x, y), \Theta(x, y)) \in B\})$$

$$= \int_{D_1} dx dy \mathbb{1}_{\{(R(x, y), \Theta(x, y)) \in B\}} \frac{1}{\pi} = \int r dr d\theta \mathbb{1}_{\{(r, \theta) \in B\}} \frac{1}{\pi}$$

$$= \int_B \int dr d\theta = \frac{r}{\pi} \Rightarrow f_{(R, \Theta)}(r, \theta) = \frac{r}{\pi} \quad \forall (r, \theta) \in [0, 1) \times [0, 2\pi)$$

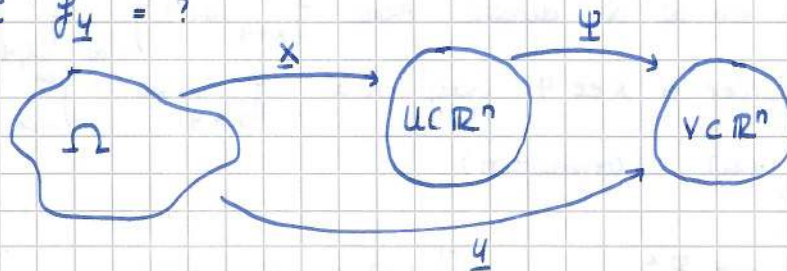
$$\Rightarrow \forall r \in [0, 1) \quad f_R(r) = \int_0^{2\pi} d\theta \frac{r}{\pi} = 2r$$

$$\Rightarrow \forall \theta \in [0, 2\pi) \quad f_\Theta(\theta) = \int_0^1 dr \frac{r}{\pi} = \frac{1}{2\pi}$$

$$f_{(R, \Theta)}(r, \theta) = \frac{r}{\pi} = f_R(r) f_\Theta(\theta) = 2r \cdot \frac{1}{2\pi} = \frac{r}{\pi}$$

$\Rightarrow R$ et Θ sont indépendantes.

$\underline{X}$ vect. alé. à densité $f_{\underline{X}}$, $(x_1, \dots, x_n) = \underline{X}$, $\Psi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\underline{Y} := \Psi(\underline{X})$ vecteur à densité $f_{\underline{Y}} = ?$



$$\Psi: U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n, \quad \Psi(\underline{y}) = (\psi_1(\underline{y}), \dots, \psi_n(\underline{y}))$$

Ψ est continuellement différentiable si $\frac{\partial \psi_i}{\partial y_j}$ existent et sont continus sur U

$$\forall 1 \leq i, j \leq n$$

$$D_\Psi(\underline{y}) = \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial y_j} \right)_{1 \leq i, j \leq n} \text{ la jacobienne}$$

$$J_\Psi(\underline{y}) = \det(D_\Psi(\underline{y})) \text{ Jacobien.}$$

Thm 5.8: Soient $U \subset \mathbb{R}^n$, $\Psi: U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$, une appl. continum. différ. bijective et tq $J_\Psi(\underline{y}) \neq 0 \quad \forall \underline{y} \in U$. Alors $\forall f: V \rightarrow \mathbb{R}, f \in \mathcal{L}^1$

$$\int_U f(\Psi(\underline{y})) |J_\Psi(\underline{y})| dy_1 \dots dy_n = \int_V f(\underline{x}) dx_1 \dots dx_n$$

Cor 5.2: $\underline{X} = (X_1, \dots, X_n)$ vecteur aléatoire à densité $f_{\underline{X}}$, à valeurs dans un ouvert

$U \subset \mathbb{R}^n$. $\Psi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ comme dans thm 5.8, $\underline{Y} = \Psi(\underline{X})$, alors

$$f_{\underline{Y}}(\underline{y}) = f_{\underline{X}}(\Psi^{-1}(\underline{y})) |J_{\Psi^{-1}}(\underline{y})|$$

Preuve: $A \subset \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\underline{Y} \in A) &= \mathbb{P}(\Psi(\underline{X}) \in A) = \mathbb{P}(\underline{X} \in \Psi^{-1}(A)) = \int_{\Psi^{-1}(A)} dx_1 \dots dx_n f_{\underline{X}}(x_1, \dots, x_n) \\ &= \int_A dy_1 \dots dy_n f_{\underline{X}}(\Psi^{-1}(\underline{y})) \cdot |J_{\Psi^{-1}}(\underline{y})| = \int_A dy_1 \dots dy_n f_{\underline{Y}}(\underline{y}) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Lemme 5.15: X v.a. à densité, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$

$$\text{Alors } f_{ax+b}(\underline{y}) = \frac{1}{|a|} f_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

Preuve:

$$\Psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto ax+b$$

$$\text{immédiatement } \Psi^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ y \mapsto \frac{y-b}{a}$$

$$(\Psi^{-1})'(y) = 1/a$$

$$f_{ax+b}(\underline{y}) = \frac{1}{|a|} f_X\left(\frac{y-b}{a}\right) \quad \blacksquare$$

Lemme 5.14: X, Y var al à densité. Alors $f_{X+Y}(\underline{u}) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{(X,Y)}(x, u-x) dx$

en particulier si X et Y indép on a : $f_{X+Y}(\underline{u}) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(u-x) dx$
 $= f_X * f_Y(\underline{u})$ (convolution)

Preuve:

$$\Psi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \mapsto (x, x+y)$$

$$\Psi^{-1}(u, v) = (u, v-u)$$

$$D_{\Psi^{-1}}(u, v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad J_{\Psi^{-1}}(u, v) = 1$$

$$\text{Cor} \Rightarrow f_{(X, X+Y)}(u, v) = f_{(X, Y)}(u, v-u) \cdot 1$$

$$\Rightarrow f_{(X+Y)}(v) = \int_{-\infty}^{\infty} dx f_{(X, X+Y)}(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} dx f_{(X, Y)}(u, v-u)$$

Lem 5.16: $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ et $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ indép, alors

$$X_1 + X_2 \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$

Preuve: $Y_1 = X_1 - \mu_1$ et $Y_2 = X_2 - \mu_2$ (Lemme 5.15)

$$\begin{aligned} f_{Y_1+Y_2}(\mu) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{Y_1}(x) f_{Y_2}(\mu-x) dx = \frac{1}{2\pi\sqrt{\sigma_1^2\sigma_2^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_1^2} - \frac{(\mu-x)^2}{2\sigma_2^2}} dx \\ &= \dots = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}} du \end{aligned}$$

$$\Rightarrow Y_1 + Y_2 \sim N(0, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$

$$\Rightarrow X_1 + X_2 \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$

(la Gaussienne est stable sous convolution) □

5.5.5 Loi conditionnelle et espérance conditionnelle.

X, Y v. al. à densité, $\mathbb{P}(Y \in A | X = x) = ?$

$$\varepsilon > 0 \quad \mathbb{P}(Y \in y | x \leq X \leq x + \varepsilon) = \frac{\mathbb{P}(Y \in y, x \leq X \leq x + \varepsilon)}{\mathbb{P}(x \leq X \leq x + \varepsilon)} \quad \text{avec } f_X(x) > 0$$

$$\mathbb{P}(x \leq X \leq x + \varepsilon) = \int_x^{x+\varepsilon} f_X(u) du = \varepsilon \cdot f_X(x) + o(\varepsilon)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y \in y, x \leq X \leq x + \varepsilon) &= \int_{-\infty}^y dv \int_x^{x+\varepsilon} f_{(X,Y)}(u, v) du \\ &= \varepsilon \int_{-\infty}^y dv f_{(X,Y)}(x, v) + o(\varepsilon) \end{aligned}$$

$$\mathbb{P}(Y \in y | x \leq X \leq x + \varepsilon) = \frac{\varepsilon \int_{-\infty}^y dv f_{(X,Y)}(x, v) + o(\varepsilon)}{\varepsilon f_X(x) + o(\varepsilon)} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\int_{-\infty}^y f_{(X,Y)}(x, v) dv}{f_X(x)}$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbb{P}(Y \in y | x \leq X \leq x + \varepsilon) = \int_{-\infty}^y dv \frac{f_{(X,Y)}(x, v)}{f_X(x)}$$

Déf 5.19: Soient X, Y à densités. La densité de proba. conditionnelle de

$$Y \text{ sachant } X = x \text{ est } f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{(X,Y)}(x, y)}{f_X(x)} \quad \forall x \text{ tq } f_X(x) \neq 0$$

La proba correspondante est appelée loi conditionnelle de Y sachant $X = x$.

Rem: 5.17: $X_1, X_2 \sim \exp(\lambda)$ indép

Q: densité de proba cond de $X_1 + X_2$ sachant $X_1 = X_2$?

Rem: (Suite)

1^{ère} Solution: $Y_1 = X_1 + X_2 \quad Y_2 = \frac{X_1}{X_2}$

$$X_1 = X_2 \Leftrightarrow Y_2 = 1$$

$$f_{Y_1, Y_2}(y_1, 1) = \lambda^2 y_1 e^{-\lambda y_1} \quad \forall y_1 > 0$$

2^{ème} Solution: $Y_1 = X_1 + X_2 \quad Y_3 = X_1 - X_2 \quad Y_3 = 0 \Leftrightarrow X_1 = X_2$

$$f_{Y_1, Y_3}(y_1, 0) = \lambda e^{-\lambda y_1} \quad \forall y_1 > 0$$

Exemple de calcul

$$\Psi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x_1, x_2) \mapsto (x_1 + x_2, x_1 - x_2) = (y_1, y_3)$$

$$\Psi^{-1}(y_1, y_3) = \left(\frac{y_1 + y_3}{2}, \frac{y_1 - y_3}{2} \right) \quad J\Psi^{-1}(y_1, y_3) = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$|J\Psi^{-1}(y_1, y_3)| = 1/2$$

$$\begin{aligned} \text{car } \Rightarrow f_{(Y_1, Y_3)}(y_1, y_3) &= \int_{(x_1, x_2)} f_{(X_1, X_2)}\left(\frac{y_1 + y_3}{2}, \frac{y_1 - y_3}{2}\right) \cdot 1/2 \\ &= 1/2 (\lambda^2 e^{-\lambda(y_1)}) = 1/2 \lambda^2 e^{-\lambda y_1} \end{aligned}$$

$$f_{Y_3}(y_3) = \int_0^\infty dy_1 \cdot 1/2 \lambda^2 e^{-\lambda y_1} = \frac{\lambda^2}{2} [-1/\lambda e^{-\lambda y_1}]_0^\infty = \frac{\lambda}{2}$$

$$\Rightarrow f_{Y_1, Y_3}(y_1, 0) = \frac{f_{(Y_1, Y_3)}(y_1, 0)}{f_{Y_3}(0)} = \frac{1/2 \lambda^2 e^{-\lambda y_1}}{\lambda/2} = \lambda e^{-\lambda y_1}$$

1^{ère} Solution: limite d'év. du type $1 \leq \frac{X_1}{X_2} \leq 1 + \varepsilon$

$$\Leftrightarrow X_2 \leq X_1 \leq X_2 + \varepsilon X_2$$

2^{ème} Solution: limite d'év. du type $0 \leq X_1 - X_2 \leq 0 + \varepsilon$

$$\Leftrightarrow X_2 \leq X_1 \leq X_2 + \varepsilon$$

Déf 5.20: X, Y à densité, l'espérance conditionnelle de Y sachant X est la v. alé $E(Y|X)(\omega) = E(Y|X=\dots) = \int_{\mathbb{R}} y f_{Y|X}(y|x) dy$

Lemme 5.19: X, Y à densité, φ tq $\varphi(x) \in \mathcal{L}^1$ alors $E(E(Y|X)\varphi(X)) = E(Y\varphi(X))$

Preuve:
$$\begin{aligned} E(E(Y|X)\varphi(X)) &= \int dx \left\{ \int dy y f_{Y|X}(y|x) \varphi(x) \right\} f_X(x) = \int dx \int dy \varphi(x) \overbrace{f_{Y|X}(y|x)}^{f_{(X,Y)}(x,y)} f_X(x) \\ &= E(Y\varphi(X)) \end{aligned}$$

Proba et Stat:4.5 Le théorème central limite:Problématique:

$X_1, X_2, \dots$ i.i.d., $E(X_1) = \mu$, $\text{Var}(X_1) = \sigma^2 \in (0, \infty)$

On a vu: $\forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (X_k - \mu)\right| > \varepsilon\right) = 0$

Loi faible des grands nombres

Fluctuations? " $\sum_{k=1}^n (X_k - \mu) = o(n)$ "

quelle fonction de n ?

$$\text{Var}\left(\sum_{k=1}^n (X_k - \mu)\right) = \text{Var}\left(\sum_{k=1}^n X_k\right) = n \cdot \text{Var}(X_1) = n\sigma^2$$

$$\hookrightarrow \left\| \sum_{k=1}^n (X_k - \mu) \right\| \approx \sqrt{n\sigma^2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{n\sigma^2}} \sum_{k=1}^n (X_k - \mu) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} ?$$

Formule d'écart-type

Thm 4.8: $X_1, X_2, \dots$ v.a. i.i.d., $E(X_1) = \mu$, $\text{Var}(X_1) = \sigma^2 \in (0, \infty)$,

$$\text{Alors } \forall a < b: \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{1}{\sqrt{n\sigma^2}} \sum_{k=1}^n (X_k - \mu) \in [a, b]\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-x^2/2} dx$$

En fait, si $E(|X_1 - \mu|^3) < \infty$, alors

$$\sup_x \left| P\left(\frac{1}{\sqrt{n\sigma^2}} \sum_{k=1}^n (X_k - \mu) \leq x\right) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt \right| \leq C \cdot \frac{E(|X_1 - \mu|^3)}{\sigma^3 \sqrt{n}}$$

avec $C \leq 0,4748$ ($C \approx 0,40993$)

Preuve:

Spdg: $\mu = 0$, $\sigma^2 = 1$ (sinon $Y_k = \frac{X_k - \mu}{\sigma}$)

Soient $Z_1, \dots$ v.a. i.i.d. $\sim \mathcal{N}(0, 1)$ indép des $(X_k)_{k \geq 1}$

$$S_n = \frac{1}{\sqrt{n}} (X_1 + \dots + X_n) \quad \text{et} \quad T_n = \frac{1}{\sqrt{n}} (Z_1 + \dots + Z_n) \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

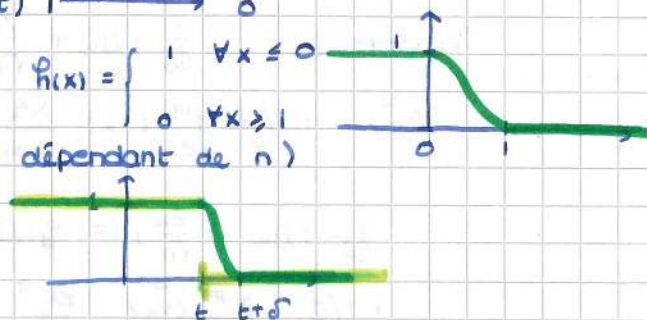
À montrer: $\left| P(S_n \leq t) - P(T_n \leq t) \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

soit $h: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$, C^3 tq $h(x) = \begin{cases} 1 & \forall x \leq 0 \\ 0 & \forall x \geq 1 \end{cases}$

$\delta > 0$ fixé (on verra plus tard dépendant de n)

On déf $f_\delta(x) = h\left(\frac{x-t}{\delta}\right)$

$$\begin{aligned} P(S_t \leq t) &= E\left(\mathbb{1}_{[-\infty, t]}(S_n)\right) \\ &\leq E(f_\delta(S_n)) \end{aligned}$$



Preuve: (Suite)

$$\Rightarrow \mathbb{P}(S_n \leq t) - \mathbb{P}(T_n \leq t)$$

$$\leq \mathbb{E}(f_\sigma(S_n)) - \mathbb{E}(f_\sigma(T_n)) + \underbrace{\mathbb{E}(f_\sigma(T_n)) - \mathbb{E}(\mathbb{1}_{(-\infty, t]}(T_n))}_{=0}$$

2^{ème} partie: $\mathbb{E}(f_\sigma(T_n)) - \mathbb{E}(\mathbb{1}_{(-\infty, t]}(T_n))$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f_\sigma(x) e^{-x^2/2} dx - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{1}_{(-\infty, t]} e^{-x^2/2} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{(f_\sigma(x) - \mathbb{1}_{(-\infty, t]}(x))}_{= \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq t \\ 0 & \text{si } x > t+\sigma \\ f_\sigma(x) & \forall x \in [t, t+\sigma] \end{cases}} e^{-x^2/2} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_t^{t+\sigma} f_\sigma(x) e^{-x^2/2} dx \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_t^{t+\sigma} 1 dx = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}$$

$$\begin{aligned} f_\sigma(S_n) - f_\sigma(T_n) &= f_\sigma\left(\frac{1}{\sqrt{n}}(x_1 + \dots + x_n)\right) - f_\sigma\left(\frac{1}{\sqrt{n}}(z_1 + \dots + z_n)\right) \\ &= f_\sigma\left(\frac{\mu_1 + x_1/\sqrt{n}}{\sqrt{n}}\right) - f_\sigma\left(\frac{\mu_1 + z_1/\sqrt{n}}{\sqrt{n}}\right) \\ &= f_\sigma\left(\frac{\mu_2 + x_2/\sqrt{n}}{\sqrt{n}}\right) - f_\sigma\left(\frac{\mu_2 + z_2/\sqrt{n}}{\sqrt{n}}\right) \\ &= \vdots \\ &= f_\sigma\left(\frac{1}{\sqrt{n}}(z_1 + \dots + z_{n-1} + x_n)\right) - f_\sigma\left(\frac{1}{\sqrt{n}}(z_1 + \dots + z_n)\right) = \end{aligned}$$

Notons $\mu_k = z_1 + \dots + z_{k-1}, x_k + \dots + x_n$

$$= \sum_{k=1}^n \left(f_\sigma\left(\mu_k + \frac{x_k}{\sqrt{n}}\right) - f_\sigma\left(\mu_k + \frac{z_k}{\sqrt{n}}\right) \right)$$

En particulier, μ_k, z_k et x_k indép.

Taylor en μ_k : $f_\sigma\left(\mu_k + \frac{x_k}{\sqrt{n}}\right) = f_\sigma(\mu_k) + f'_\sigma(\mu_k) \frac{x_k}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2} f''_\sigma(\mu_k) \frac{x_k^2}{n} + \frac{1}{6} f'''_\sigma(\tilde{\nu}_k) \frac{x_k^3}{n^{3/2}}$

$$\begin{aligned} f_\sigma\left(\mu_k + \frac{z_k}{\sqrt{n}}\right) &= f_\sigma(\mu_k) + f'_\sigma(\mu_k) \frac{z_k}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2} f''_\sigma(\mu_k) \frac{z_k^2}{n} \\ &+ \frac{1}{6} f'''_\sigma(\tilde{\nu}_k) \frac{z_k^3}{n^{3/2}} \end{aligned}$$

Praba :Preuve: (Suite)

$$|E(f_\sigma(u_k + \frac{X_k}{\sqrt{n}}) - f_\sigma(u_k + \frac{Z_k}{\sqrt{n}}))| \leq E(f'_\sigma(u_k) \cdot \frac{E(X_k) - E(Z_k)}{\sqrt{n}}) \\ + \frac{1}{2} E(f''_\sigma(u_k) \cdot \frac{E(X_k^2) - E(Z_k^2)}{n}) + \frac{1}{6} \sup_y |f'''_\sigma(y)| \cdot \frac{E(|X_k|^3) + E(|Z_k|^3)}{n^{3/2}} \\ \leq \frac{A}{\sigma^3 n^{3/2}} (E(|X_k|^3) + E(|Z_k|^3))$$

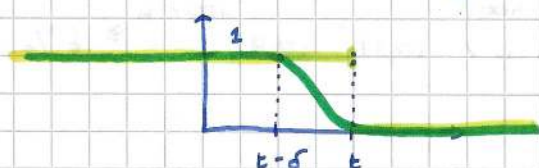
$$\sup_y |f'''_\sigma(y)| = \sup_y \left| \frac{d^3}{dy^3} \varphi\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right) \right| \\ = \frac{1}{\sigma^3} \sup_y |h'''(y)| = \frac{A}{\sigma^3}$$

$$\Rightarrow P(S_n \leq t) - P(T_n \leq t) \leq \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{k=1}^n \frac{A}{6n^{3/2} \sigma^3 \sqrt{n}} (E(|X_k|^3) + E(|Z_k|^3)) \leq * \\ \text{Choisit } \sigma \text{ tq } \sigma = \frac{1}{\delta^3 \sqrt{n}} \Leftrightarrow \sigma = 1/n^{1/8}$$

$$* \leq C/n^{1/8}$$

Par la borne inférieure:

$$g_\sigma(x) = \varphi\left(\frac{x-\mu+\sigma}{\sigma}\right)$$



$$g_\sigma(x) \leq 1_{(-\infty, t]} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$P(S_n \leq t) - P(T_n \leq t) \geq -\frac{C}{n^{1/8}}$$

$$\Rightarrow |P(S_n \leq t) - P(T_n \leq t)| \leq C/n^{1/8}$$

Lemme: $\forall x > 0 :$

$$(1 - \frac{1}{x^2}) \frac{1}{x} e^{-x^2/2} \leq \int_x^\infty e^{-t^2/2} dt \leq \frac{1}{x} e^{-x^2/2}$$

Preuve:

$$\int_x^\infty e^{-t^2/2} dt = \int_x^\infty \frac{1}{t} (t e^{-t^2/2}) dt = \left[-\frac{1}{t} e^{-t^2/2} \right]_x^\infty - \int_x^\infty \frac{1}{t^2} e^{-t^2/2} dt$$

$$= \frac{1}{x} e^{-x^2/2} + \int_x^\infty \frac{1}{t^2} e^{-t^2/2} dt \\ \frac{1}{x} e^{-x^2/2} - \frac{1}{x^3} e^{-x^2/2} \leq \int_x^\infty \frac{1}{t^2} e^{-t^2/2} dt \leq \frac{1}{x^3} e^{-x^2/2} \\ \leq \frac{1}{x} e^{-x^2/2}$$

$$0 \leq \int_x^\infty \frac{1}{t^2} e^{-t^2/2} dt \leq \frac{1}{x^3} \int_x^\infty t e^{-t^2/2} dt \\ = \frac{1}{x^3} \left[-e^{-t^2/2} \right]_x^\infty = \frac{1}{x^3} e^{-x^2/2}$$

Le thm central limite mq pour $n \gg 1$:

Formule Correcte

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{\sqrt{n}\sigma^2} \sum_{k=1}^n (X_k - \mu) \in [a, b]\right) \approx \Phi(b) - \Phi(a)$$

$$\text{où } \Phi(x) = \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt$$

Pratique pour

calcul.

$$\mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^n X_k \in [\tilde{a}, \tilde{b}]\right) \approx \Phi\left(\frac{\tilde{b} - \mu n}{\sqrt{n}\sigma^2}\right) - \Phi\left(\frac{\tilde{a} - \mu n}{\sqrt{n}\sigma^2}\right) "$$

Ex 7.2: 10% pièces défectueuse

$\mathbb{P}(\geq 50$ pièces défectueuse dans échantillon de 400 pièces)

$(X_k)_{k \geq 1}$ v.a. iid, $\sim \text{Bern}(p)$, $p = 0,1$ $X_k = \begin{cases} 1 & \text{si la } k^{\text{ème}} \text{ pièce défectueuse} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$$\mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^{400} X_k \in [50, 400]\right)$$

$$\mu n = p \cdot n = 0,1 \cdot 400 = 40$$

$$\sqrt{n}\sigma^2 = \sqrt{400 \cdot p(1-p)} = \sqrt{400 \cdot 0,1 \cdot 0,9} = \sqrt{36} = 6$$

$$\text{TCL} \Rightarrow \mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^{400} X_k \in [50, 400]\right) \approx \Phi\left(\frac{400}{6}\right) - \Phi\left(\frac{10}{6}\right)$$

$$= \Phi(60) - \Phi(5/3) \approx 1 - \Phi(5/3) \approx 5\%$$

$$\mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^{400} X_k \in [50, 400]\right) = \sum_{L=50}^{400} \binom{400}{L} (0,1)^L (0,9)^{400-L} \approx 6\%$$

7.2.2 Quelques inégalités:

Thm 7.3: $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, alors $\mathbb{P}(\varphi(X) \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(\varphi(X))}{a} \quad \forall a > 0$

Preuve: $A = \{\varphi(X) \geq a\} \quad \varphi(X) \geq a \cdot \mathbb{1}_A$

$$\Rightarrow \mathbb{E}(\varphi(X)) \geq \mathbb{E}(a \mathbb{1}_A) = a \mathbb{P}(A)$$

■

Cor 7.1: 1) Inég. de Markov:

$$\mathbb{P}(|X| \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(|X|)}{a} \quad \forall a > 0$$

2) Inég. de Bienaymé - Tchebychev:

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq a) \leq \frac{\text{Var}(X)}{a^2} \quad \forall a > 0$$

3) Inég. de Chernov:

$$\mathbb{P}(X \geq a) \leq \exp\left(-\sup_{t \geq 0} (t \cdot a - H(t))\right) \quad \text{où } H(t) = \begin{cases} +\infty \\ \log \mathbb{E}(e^{tX}) \text{ si } \mathbb{E}(e^{tX}) < \infty \end{cases}$$

Proba:Preuve:

$$1) \quad \mathbb{P}(|X| \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(|X|)}{a}$$

$$2) \quad Y = X - \mathbb{E}(X)$$

$$\mathbb{P}(|Y| \geq a) = \mathbb{P}(Y^2 \geq a^2) \leq \frac{\mathbb{E}(Y^2)}{a^2} = \frac{\text{Var}(X)}{a^2}$$

$$3) \quad \forall t > 0$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \geq a) &= \mathbb{P}(e^{tX} \geq e^{ta}) \leq \frac{\mathbb{E}(e^{tX})}{e^{ta}} = \exp(-(ta - \log(\mathbb{E}(e^{tX}))) \\ &= \exp(-(ta - H(t))) \end{aligned}$$

Ex 7.1: 10'000 Lancers à P/F $p = 1/2$

$$\mathbb{P}(|\#P - \#F| \geq 10'000) \leq ?$$

$$X_k = \begin{cases} 1 & \text{si P au k-ème} \\ -1 & \text{si F " " " "} \end{cases}$$

 $X_1, X_2, \dots$ iid $\sim \text{Bern}(1/2)$

$$S_n = \frac{X_1 + \dots + X_{10'000}}{n}$$

$$\mathbb{P}(S_n \geq x) \leq \exp(-\sup_{t>0} (tx - H(t)))$$

$$\begin{aligned} H(t) &= \log(\mathbb{E}(e^{tS_n})) = \log(\mathbb{E}(e^{t/n(X_1 + \dots + X_n)})) = \log(\mathbb{E}(e^{t/n} X_1))^n \\ &= n \log \cosh(t/n) \end{aligned}$$

$$\mathbb{P}(S_n \geq x) \leq \exp(-n \sup_{t>0} (t/n x - \log \cosh(t/n))) = \exp(-n I(x))$$

$$I(x) = \frac{1}{2} \{ (1+x) \log(1+x) + (1-x) \log(1-x) \}$$

$$\mathbb{P}(|S_n| \geq 0,1) = 2 \mathbb{P}(S_n \geq 0,1) \leq 2 e^{-n I(0,1)} \approx 3,5 \cdot 10^{-22}$$

