Proba et Stat : le 20.02.19

7.3 Mode de convergence :

$X_1, X_2, \dots$ v.a

Q : Comportement de $\lim_{n\to\infty} X_n$?

Déf 7.1 : $X_1, X_2 \dots$ var. aléat. sur $(\Omega, F, \mathbb{P})$

1. $X_n \xrightarrow{p.s.} X$ (X_n tend vers X presque sûrement)
   si $\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \mid \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\}) = 1$

2. $X_n \xrightarrow{r} X$ (X_n tend vers X en r-moyenne) $r \geq 1$
   si $\mathbb{E}(|X_n|^r) < \infty \ \forall n$ et $\mathbb{E}(|X_n - X|^r) \xrightarrow{n\to\infty} 0$

3. $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ (X_n tend vers X en probabilité)
   si $\forall \varepsilon > 0$, $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) = 0$

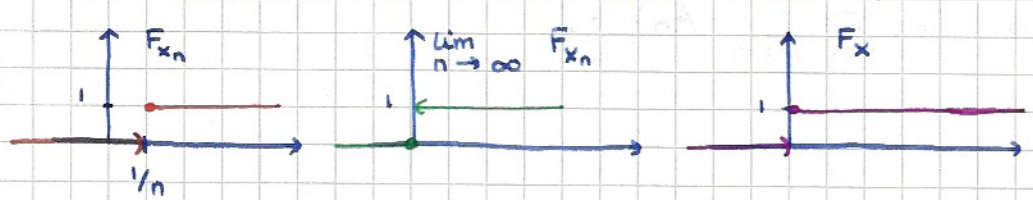
4. $X_n \xrightarrow{\text{loi}} X$ (X_n tend vers X en loi)
   si $\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$ en tout point de continuité de F_X

ici : si Y v.a. $F_Y(y) := \mathbb{P}(Y \leq y)$ Fct de répartition

- elle est croissante
- $\lim_{y\to+\infty} F_Y(y) = 1$
- $\lim_{y\to-\infty} F_Y(y) = 0$
- F_Y est continue à droite.

Ex : $\mathbb{P}(X_n = 1/n) = 1$

On aimerait $X_n \xrightarrow{\text{loi}} X$ avec $\mathbb{P}(X = 0) = 1$



ici 0 n'est pas un point de continuité.

Thm 7.4 : Les implications suivantes sont vérifiées :

$$X_n \xrightarrow{p.s} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{\text{loi}} X$$

$$X_n \xrightarrow{s} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{r} X \quad \text{si } s > r$$

Démo en exo

Thm 7.5 :

1) Si $X_n \xrightarrow{\text{loi}} X$ avec $X = c \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} c$

Dém : On sait $F_{X_n}(x) \longrightarrow F_c(x) = \begin{cases} 1 & x \geq c \\ 0 & \text{si } x < c \end{cases}$ en tout pt de continuité.

On fixe $\varepsilon > 0$, $\mathbb{P}(|X_n - c| > \varepsilon) = \mathbb{P}(X_n < c - \varepsilon) + \mathbb{P}(X_n > c + \varepsilon)$

$\leq \mathbb{P}(X_n \leq c - \varepsilon) + 1 - \mathbb{P}(X_n \leq c + \varepsilon) = F_{X_n}(c - \varepsilon) + 1 - F_{X_n}(c + \varepsilon) = 0$

(↑ 0 pour $F_{X_n}(c-\varepsilon)$, ↑ 1 pour $F_{X_n}(c+\varepsilon)$)

7.2.1 Les Lemmes de Borel - Cantelli :

$(\Omega, F, \mathbb{P})$

$A_1, A_2, \ldots \in F$

"A_k est réalisé pr une infinité de valeurs de k"

$= \{ \forall n \geq 1 \ \exists m \geq n \text{ tq } A_m \text{ est réalisé} \} = \bigcap_{n \geq 1} \bigcup_{m \geq n} A_m$

$=: \limsup_{n \to \infty} A_n$

Thm 7.2 : Les Lemmes de Borel - Cantelli

(Proba d'avoir une infinité de A_m)

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) < \infty \Rightarrow \mathbb{P}\left(\bigcap_{n \geq 1} \bigcup_{m \geq n} A_m\right) = 0$

2) $A_1, A_2, \ldots \in F$ indépendants, alors si $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = \infty$

$\Rightarrow \mathbb{P}\left(\bigcap_{n \geq 1} \bigcup_{m \geq n} A_n\right) = 1$

Dém : 1) $\mathbb{P}\left(\bigcap_{n\geq 1} \overbrace{\bigcup_{m\geq n} A_m}^{\text{en } n}\right) \overset{\text{Lemme 5.1}}{=} \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{m\geq n} A_m\right)$

$\leq \lim_{n\to\infty} \sum_{m\geq n} \mathbb{P}(A_m) = 0$

2) $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\geq 1} \overbrace{\bigcap_{m\geq n} A_m^c}^{\text{en } n}\right) \overset{\text{Lemme 5.1}}{=} \lim_{n\to\infty} \overbrace{\mathbb{P}\left(\bigcap_{m\geq n} A_m^c\right)}^{0} = 0$

$\mathbb{P}\left(\bigcap_{m\geq n} A_m^c\right) = \mathbb{P}\left(\lim_{N\to\infty} \bigcap_{m=n}^{N} A_m^c\right) = \lim_{N\to\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{m=n}^{N} A_m^c\right)$

$= \lim_{N\to\infty} \prod_{m=n}^{N} \underbrace{\mathbb{P}(A_m^c)}_{=1-\mathbb{P}(A_m)\leq e^{-\mathbb{P}(A_m)}}$

$\leq \lim_{N\to\infty} e^{-\sum_{m=n}^{N} \mathbb{P}(A_m)}$

$= e^{-\sum_{m=n}^{\infty} \mathbb{P}(A_m)} \overset{*}{=} 0$ □

Thm 4.5 :

3) Si $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) < \infty$, $\forall \varepsilon > 0$, alors $X_n \xrightarrow{p.s} X$

Dém : $\{X_n \to X\} = \{\omega \in \Omega \mid X_n(\omega) \to X(\omega)\} = \{\omega \in \Omega \mid \forall \varepsilon > 0, \exists N \text{ tq } \forall n \geq N$

$|X_n(\omega) - X(\omega)| \leq \varepsilon\} = \{\omega \in \Omega \mid \forall M \geq 1, \exists N \text{ tq } \forall n \geq N, |X_n(\omega) - X(\omega)| \leq \frac{1}{M}\}$

$= \bigcap_{M\geq 1} \bigcup_{N\geq 1} \bigcap_{n\geq N} \{|X_n(\omega) - X(\omega)| \leq 1/M\}$

$\mathbb{P}\left(\bigcap_{M\geq 1} \overbrace{\bigcup_{N\geq 1} \bigcap_{n\geq N} \{|X_n(\omega) - X(\omega)| \leq 1/M\}}^{M}\right)$

$= \lim_{M\to\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{N\geq 1} \bigcap_{n\geq N} \{|X_n(\omega) - X(\omega)| \leq 1/M\}\right) = \lim_{M\to\infty} \mathbb{P}(A_M)$

$\mathbb{P}(A_M^c) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{N\geq 1} \overbrace{\bigcup_{n\geq N} \{|X_n(\omega) - X(\omega)| > 1/M\}}^{\text{en } N}\right) = \lim_{N\to\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{n\geq N} \{|X_n(\omega) - X(\omega)| > 1/M\}\right)$

$\leq \lim_{N\to\infty} \sum_{n\geq N} \mathbb{P}(|X_n(\omega) - X(\omega)| > 1/M) = 0 \quad \forall M \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \mathbb{P}(X_n \to X) = 1$ ▨

7.4.2. La loi forte des grands nombres :

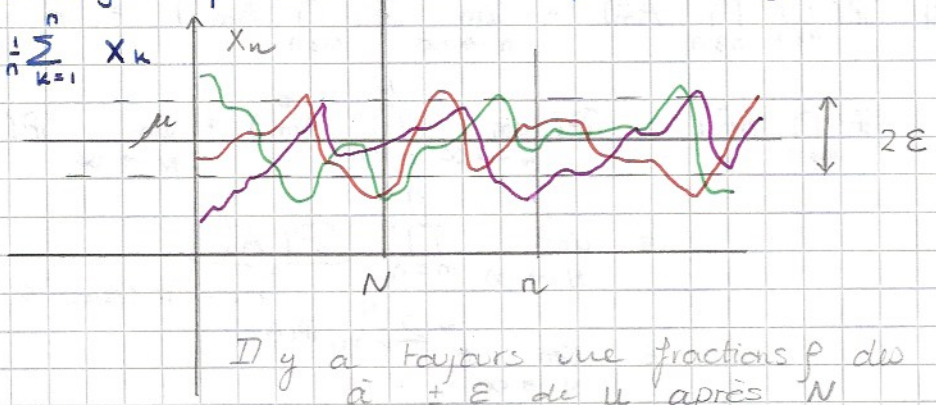
Rap : Que dit la loi faible des grands nombres ?

$X_1, X_2, \dots$ V.A iid , $\mathbb{E}(X_1) = \mu$

On fixe $\varepsilon > 0$ et $\rho \in (0,1)$

$\Rightarrow \exists N(\varepsilon, \rho)$ tq $\forall n \geq N$, $\mathbb{P}(|\overline{X_n} - \mu| > \varepsilon) \leq \rho$

$\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$



Il y a toujours une fraction ρ des résultats à $\pm\varepsilon$ de μ après N

Loi forte des grands nombres : Pour presque tout $\omega \in \Omega$, on a $\overline{X}_n(\omega) \longrightarrow \mu$.

Thm 4.4 : $X_1, X_2, \dots$ v.a iid , $\mathbb{E}(X_1) = \mu$, alors $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow{\mathbb{P}} \mu$

Dém : (Sous l'hypothèse que $\mathbb{E}(|X_1|^4) < \infty$)

spdg : $\mu = 0$ soit $\varepsilon > 0$

$\mathbb{P}(|\overline{X_n}| > \varepsilon) = \mathbb{P}(\overline{X_n}^4 > \varepsilon^4) \leq \dfrac{\mathbb{E}(\overline{X_n}^4)}{\varepsilon^4}$

$\mathbb{E}(\overline{X_n}^4) = \mathbb{E}\left[\frac{1}{n^4}(X_1 + \dots X_n)(X_1 + \dots + X_n)(X_1 + \dots + X_n)(X_1 + \dots + X_n)\right]$

$= \frac{1}{n^4}\left[n\mathbb{E}(X_1^4) + \binom{n}{2}\binom{4}{2}\mathbb{E}(X_1^2X_2^2) + \dots \mathbb{E}(X_1X_2^3) + \dots \mathbb{E}(X_1^2X_2X_3) + \dots \mathbb{E}(X_1X_2X_3X_4)\right]$

$\frac{n(n-1)}{2} \cdot 6$ // $\mathbb{E}(X_1^2)^2$ // $\mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(\dots) = 0$ // $= 0$ // $= 0$

$\leq \frac{c'}{n^3} + \frac{c''}{n^2} \leq \frac{c}{n^2}$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(|\overline{X_n}| > \varepsilon) \leq \frac{c}{\varepsilon^4}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty \quad \forall \varepsilon > 0$

$\Rightarrow \overline{X_n} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$

Proba et Stat : le 20.02.19

7.6 Loi 0/1 de Kolmogorov :

Déf 7.2 : $X_1, X_2, \dots$ v.a sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ $\forall$ ss-famille $(X_i)_{i \in I}$, on note

$\sigma(X_i, i \in I)$ = la + petite tribu tq chaque $X_i, i \in I$ est mesurable

X_i mesurable pr $\mathcal{G}$: $X_i^{-1}(B) \in \mathcal{G}$ $\forall B$ borélien de $\mathbb{R}$

$\sigma(X_i, i \in I)$ = { évènements que l'on peut exprimer en termes des v.a $X_i, i \in I$ }

Déf 7.3 : Soit $\mathcal{T}_n = \sigma(X_{n+1}, X_{n+2}, \dots)$, $\mathcal{T}_n \supset \mathcal{T}_{n+1}$ $\forall n$

$\mathcal{T}_\infty = \bigcap_{n \geq 1} \mathcal{T}_n$ est la tribu asymptotique

Exc : $\mathcal{T}_\infty$ contient : { $(X_n)_{n \geq 1}$ converge }

{ $\sum_{n \geq 1} X_n < \infty$ }

$\mathcal{T}_\infty$ ne contient pas : { $\sum_1^\infty X_n = 3$ }

---

le 27.02.19

Rap : $X_1, X_2, \dots$ v.a

$\mathcal{T}_n = \sigma(X_{n+1}, X_{n+2}, \dots)$ $\quad \mathcal{T}_\infty = \bigcap_{n \geq 1} \mathcal{T}_n$

Thm 7.9 : Loi 0-1 de Kolmogorov

Si $X_1, \dots$ v.a sont indépendantes, alors

$\mathcal{T}_\infty$ est triviale : $\forall A \in \mathcal{T}_\infty$, $\mathbb{P}(A) \in \{0,1\}$

Preuve : Soit $A \in \mathcal{T}_\infty \subset \sigma(X_1, X_2, \dots)$,

$\forall n$ $A \in \mathcal{T}_n \Rightarrow$ A indép. de $X_1, \dots, X_n \Rightarrow$ A indép $\sigma(X_1, \dots, X_n)$

$\Rightarrow$ A indép de $\bigcup_n \sigma(X_1 \dots X_n)$

$\Rightarrow$ A indép de $\sigma(X_1 \dots) \ni A$

$\Rightarrow$ A indép de A : $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap A) = \mathbb{P}(A)^2 \Rightarrow \mathbb{P}(A) \in \{0,1\}$ p 5

Ch. 8 Retour aux marches aléatoires:

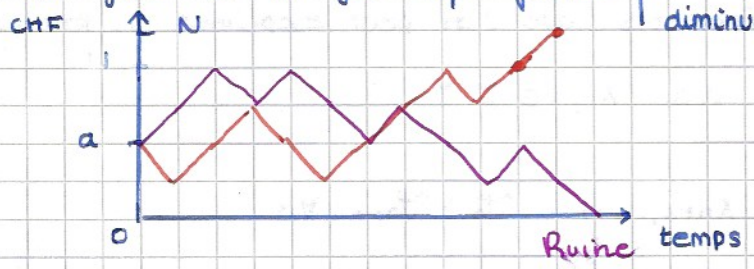
8.1 Complément sur la MAS sur $\mathbb{Z}$:

8.1.1 Ruine du joueur:

Fortune = a CHF

A besoin de $N > a$ CHF

Va jouer à un jeu tq fortune { augmente de 1 chF proba p ; diminue de 1 CHF proba 1-p



Q : $\mathbb{P}_a(\underbrace{\text{Ruine}})$

$\min\{n \geq 0 : S_n = 0\} < \min\{n \geq 0 : S_n = N\}$

La fonction $a \longmapsto \mathbb{P}_a(\text{Ruine})$ est sol de

(D) $\begin{cases} f(x) = p f(x+1) + q f(x-1) \\ f(0) = 1 \\ f(N) = 0 \end{cases}$

Effectivement, $\mathbb{P}_a(\text{Ruine}) = \mathbb{P}_a(\text{Ruine} \mid S_1 = a+1) \cdot \mathbb{P}_a(S_1 = a+1)$

$+ \mathbb{P}_a(\text{Ruine} \mid S_1 = a-1) \cdot \mathbb{P}_a(S_1 = a-1)$

$= \mathbb{P}_{a+1}(\text{Ruine}) \cdot p + q\, \mathbb{P}_{a-1}(\text{Ruine})$

Lemme 8.1 : (D) possède une unique solution

Preuve : Existence : de $f : a \longmapsto \mathbb{P}_a(\text{Ruine})$

Unicité : f et g deux solutions de (D), soit $h = f - g$.

h est solution de (D') $\begin{cases} h(x) = p h(x+1) + q h(x-1) \\ h(0) = 0 = h(N) \end{cases}$

Soit $0 < \bar{x} < N$ tq $|h(\bar{x})|$ soit maximal

Sdg : $h(\bar{x}) > 0$ (sinon $h = g - f$) $h(\bar{x}) = p h(\bar{x}+1) + q h(\bar{x}-1)$

$\Rightarrow h(\bar{x}) \geq h(\bar{x}+1) = \frac{1}{p}(h(\bar{x}) - q h(\bar{x}-1)) \geq \frac{1}{p}(h(\bar{x}) - h(\bar{x}) q)$ p6

$= \frac{1}{p} h(\bar{x})(1-q) = h(\bar{x}) \Rightarrow h(\bar{x}) = h(\bar{x}+1) = \dots = h(\bar{x}+s) = h(N) \overset{*}{=} 0$

$\overset{*}{\Rightarrow} h \equiv 0$

$\Rightarrow f = g$ ∎

Si $p = q = 1/2$, on a : $2f(x) = f(x+1) + f(x-1)$

$\Rightarrow \delta = f(x) - f(x-1) = f(x+1) - f(x) \quad \forall x \in \{1, \dots, N-1\}$

$f(a) = f(a) - f(a-1) + f(a-1) - f(a-2) + \dots + f(1) - f(0) + f(0)$

$= a \cdot \delta + 1$

$f(N) = 0 \Rightarrow \delta \cdot N + 1 = 0 \Rightarrow \delta = -1/N$

$$\Rightarrow \boxed{P_a(\text{Ruine}) = 1 - a/N}$$

si $p \neq q$, $\begin{pmatrix} f(a+1) \\ f(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/p & -q/p \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(a) \\ f(a-1) \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1/p & -q/p \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} f(a-1) \\ f(a-2) \end{pmatrix}$

$= \dots = \begin{pmatrix} 1/p & -q/p \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^a = \begin{pmatrix} f(1) \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1/p & -q/p \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^a = \begin{pmatrix} \alpha(a) & \beta(a) \\ \gamma(a) & \delta(a) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} f(N+1) \\ f(N) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(a) & \beta(a) \\ \gamma(a) & \delta(a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(1) \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow 0 = f(N) = \gamma(a) f(1) + \delta(a) \Rightarrow f(1) = -\dfrac{\delta(a)}{\gamma(a)}$

$$\boxed{P_a(\text{Ruine}) = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^a - \left(\frac{q}{p}\right)^N}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^N}}$$

8.1.2 Visites et retour :

Rap : $\gamma_0 = \min\{n \geq 1 : S_n = 0\}$

on a vu $\mathbb{P}_0(\gamma_0 < \infty) = 1 \quad (p = q = 1/2)$

Déf : $\gamma_b = \min\{n \geq 1 : S_n = b\} \quad (b \neq 0)$

Thm 8.1 : MASS sur $\mathbb{Z}$ $(p = q = 1/2)$, $\forall b \in \mathbb{Z}$, $\mathbb{P}_0(\gamma_b < \infty) = 1$

Preuve : On a déjà mq $\mathbb{P}_0(\gamma_0 < \infty) = 1$

Soit $b > 0$: $\mathbb{P}_0(\gamma_{b+1} < \infty) = \mathbb{P}_0(\gamma_{b-1} < \infty)$

$\mathbb{P}_0(\gamma_b < \infty) = \underbrace{\mathbb{P}_1(\gamma_b < \infty)}_{<\infty} \cdot 1/2 + \underbrace{\mathbb{P}_{-1}(\gamma_b < \infty)}_{=} \cdot 1/2$

La fct $b \longmapsto \mathbb{P}_0(\gamma_b < \infty)$ est sol de

$$\begin{cases} f(x) = 1/2\, f(x+1) + 1/2\, f(x-1) \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

$f(x+1) - f(x) = f(x) - f(x-1) = \delta$

$\Rightarrow f(a) = a \cdot \delta + 1$

$0 \leq \mathbb{P}_0(\gamma_b < \infty) \leq 1 \quad \forall b \Rightarrow$ la seule possibilité est $\delta = 0$

$\Rightarrow \mathbb{P}_0(\gamma_b < \infty) = 1 \quad \forall b \neq 0$ ∎

Thm 8.2 : Soit N_b = # fois que la marche visite b

Alors si $p = q = 1/2$, $\mathbb{P}_0(N_b = \infty \ \forall b \in \mathbb{Z}) = 1$

Preuve : $\gamma_b^{(k)}$ = temps de la k-ième visite en b

$(N < k \Rightarrow \gamma_b^{(k)} = +\infty)$, $k \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{P}_0(N_b = k) = \sum_L \mathbb{P}_0(N_b = k,\ \gamma_b^{(k)} = L) = \sum_L \mathbb{P}_0(N_b = k \mid \gamma_b^{(k)} = L) \cdot \mathbb{P}_0(\gamma_b^{(k)} = L)$$

$\mathbb{P}_0(N_b = k \mid \gamma_b^{(k)} = L) = \mathbb{P}_0(N_b = k \mid S_L = b,\ k-1 \text{ visites avant temps } L)$

$= \mathbb{P}_b(S_1 \neq b, S_2 \neq b, \dots) = \mathbb{P}_0(S_1 \neq 0, S_2 \neq 0, \dots) = \mathbb{P}_0(\gamma_0 = \infty) = 0$

$\Rightarrow \mathbb{P}_0(N_b = k) = 0 \Rightarrow \mathbb{P}_0(N_b < \infty) = \sum_k \mathbb{P}_0(N_b = k) = 0$

$\Rightarrow \mathbb{P}_0(\exists b \text{ tq } N_b < \infty) = \mathbb{P}_0(\bigcup_{b \in \mathbb{Z}} \{N_b < \infty\}) \leq \sum_k \mathbb{P}(N_b < \infty) = 0$

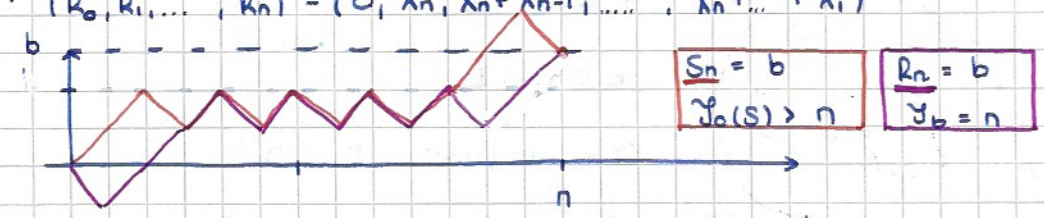
Thm 8.3: ($p \in [0,1]$ quelconque)

$$\forall b \neq 0, \quad \mathbb{P}_0(\mathcal{T}_b = n) = \mathbb{P}_0(\mathcal{T}_0 > n, S_n = b) = \frac{|b|}{n}\mathbb{P}_0(S_n = b)$$

Preuve: Renversement du temps

$X_1, X_2, \ldots$ v.a. iid $\mathbb{P}(X_1 = 1) = 1 - \mathbb{P}(X_1 = -1) = p$

- $(S_0, S_1, \ldots, S_n) = (0, X_1, X_1+X_2, \ldots, X_1 + \ldots + X_n)$
- $(R_0, R_1, \ldots, R_n) = (0, X_n, X_n + X_{n-1}, \ldots, X_n + \ldots + X_1)$



$$S_n = b, \ \mathcal{T}_0(S) > n \iff \begin{cases} X_1 + \ldots + X_n = b \\ S_k = X_1 + \ldots + X_k > 0 \quad \forall k \in \{1, \ldots n\} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} X_n + \ldots + X_1 = b \\ X_n + \ldots + X_1 - (X_n + \ldots + X_{k-1}) > 0 \quad \forall k \in \{1, \ldots n\} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} R_n = b \\ R_n - R_{n-k} > 0 \quad \forall k \in \{1, \ldots n\} \end{cases} \iff \begin{cases} R_n = b \\ R_{n-k} < R_0 = b \quad \forall k \in \{1, \ldots n\} \end{cases}$$

$$\iff \mathcal{T}_b(R) = n$$

$$\mathbb{P}_0(\mathcal{T}_b(S) = n) = \mathbb{P}_0(\mathcal{T}_b(R) = n) = \mathbb{P}_0(S_n = b, \mathcal{T}_0(S) > n) \quad \blacksquare$$

Cor 8.1: ($p = q = 1/2$)

$\mathbb{E}$(# visite en b avant $\mathcal{T}_0$) = 1

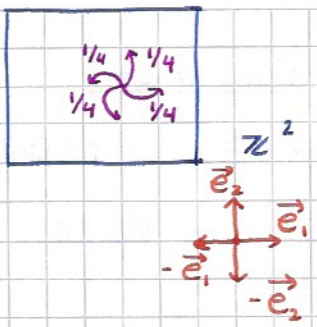
Preuve:

$$\mathbb{E}\left(\sum_{n=1}^{\mathcal{T}_0 - 1} \mathbb{1}_{\{S_n = b\}}\right) = \mathbb{E}\left(\sum_{n \geq 1} \mathbb{1}_{\{S_n = b, \, n < \mathcal{T}_0\}}\right)$$

$$= \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}_0(S_n = b, \mathcal{T}_0 > n) = \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}_0(\mathcal{T}_b = n)$$

$$= \mathbb{P}_0(\mathcal{T}_b < \infty) = 1 \quad \blacksquare$$

8.2 Marche aléatoire simple symétrique sur $\mathbb{Z}^d$:

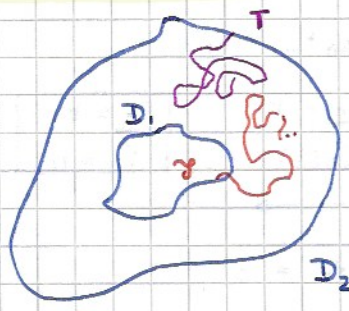


Déf: $X_1, X_2, \dots$ vect. aléat. iid, $\mathbb{P}(X_1 = \pm \vec{e}_k) = 1/2d$

$$S_n = a + \sum_{k=1}^{n} X_k \qquad a \in \mathbb{Z}^d$$

Lemme 8.1 : il s'étend à cette situation (à montrer)

8.2.1 Proba de sortie :



$D_1 \subset D_2 \subset \mathbb{Z}^d$

$x \in D_2 \setminus D_1$

$\gamma = \min\{n \geq 0 : S_n \in D_1\}$

$T = \min\{n \geq 0 : S_n \notin D_2\}$

le 06.03.19

Q : $\mathbb{P}_x(\gamma < T) = ?$

Lemme 8.2 : $x \longmapsto \mathbb{P}_x(\gamma < T)$ est l'unique solution de

$$(D) = \begin{cases} \Delta_d f(x) = 0 & \forall x \in D_2 \setminus D_1 \\ f(x) = 1 & \forall x \in D_1 \\ f(x) = 0 & \forall x \notin D_2 \end{cases}$$

où Δ_d est le laplacien discret : $\Delta_d f(x) = \frac{1}{2d} \sum_{y \sim x} (f(y) - f(x))$

Preuve : $\mathbb{P}_x(\gamma < T) = \sum_{y \sim x} \mathbb{P}_x(\gamma < T \mid S_1 = y)\, \mathbb{P}_x(S_1 = y) = \frac{1}{2d} \sum_{y \sim x} \mathbb{P}_y(\gamma < T) = \mathbb{P}_x(\gamma - T)$

$= 0$

$x \in D_1 \Rightarrow \gamma = 0 \Rightarrow \mathbb{P}_x(0 < T) = 1$

$x \notin D_2 \Rightarrow T = 0 \Rightarrow \mathbb{P}_x(\gamma < 0) = 0$

Unicité : Soient f et g 2 solutions de (D). $h = f - g$ est sol de

$$(D') : \begin{cases} \Delta_d h(x) = 0 & \forall x \in D_2 \setminus D_1 \\ h(x) = 0 & \forall x \in D_1 \cup D_2^c \end{cases}$$

Soit $\bar{x} \in D_2 \setminus D_1$ tq $|h(\bar{x})|$ soit maximal (Spdg $h(\bar{x}) \geq 0$

$\sum_{y \sim \bar{x}} (h(y) - h(\bar{x})) = 0 \Rightarrow h(y) = h(\bar{x})\ \forall y \sim \bar{x} \Rightarrow h(\bar{x}) = 0$

$\Rightarrow h \equiv 0 \Rightarrow f = g$ □

8.2.2 Récurrence et transience des MASS sur $\mathbb{Z}^d$:

Q : $\tau_0 = \min\{ n \geq 1 \mid S_n = 0 \}$

$\mathbb{P}_0(\tau_0 < \infty) = ? = \begin{cases} 1 & \leftarrow \{S_n\} \text{ récurrente} \\ < 1 & \leftarrow \{S_n\} \text{ transiente} \end{cases}$

Thm 8.4 : La MASS sur $\mathbb{Z}^d$ est récurrente $\Leftrightarrow$ $d \leq 2$

Lemme 8.3 : Soit N = # de retour à l'origine, alors :

$\{S_n\}$ récurrente $\Leftrightarrow \mathbb{E}_0(N) = \infty$

$\Leftrightarrow \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}_0(S_n = 0) = \infty$

Preuve : $r = \mathbb{P}_0(\tau_0 < \infty)$

$\mathbb{E}_0(N) = \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}_0(N \geq n)$

$\mathbb{P}_0(N \geq n) = \mathbb{P}_0(N \geq n \mid N \geq n-1) \cdot \mathbb{P}_0(N \geq n-1)$

$\mathbb{P}_0(N \geq n \mid N \geq n-1) = \sum_L \mathbb{P}_0(N \geq n \mid \tau_0^{(n-1)} = L) \cdot \mathbb{P}_0(\tau_0^{(n-1)} = L \mid N \geq n-1)$

$\mathbb{P}(N \geq n \mid \tau_0^{(n-1)} = L) = \mathbb{P}_0(N \geq n \mid S_L = 0 \text{ , } (n-1)^{\text{é}} \text{ visite})$

$= \mathbb{P}_0(\exists m \geq 1 \text{ tq } S_m = 0) = \mathbb{P}_0(\tau_0 < \infty) = r$

$\Rightarrow \mathbb{P}_0(N \geq n / N \geq n-1) = r \cdot \sum_L \mathbb{P}_0(\tau_0^{(n-1)} = L \mid N \geq n-1) = r$

$\Rightarrow \mathbb{P}_0(N \geq n) = r \cdot \mathbb{P}_0(N \geq n-1) = r^2 \mathbb{P}(N \geq n-2) = \dots = r^n$

$\Rightarrow \mathbb{E}_0(N) = \sum_{n \geq 1} r^n = \begin{cases} \frac{r}{1-r} & \text{si } r < 1 \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$

$\Rightarrow \{S_n\}$ récurrente $\Leftrightarrow \mathbb{E}_0(N) = +\infty$

$\mathbb{E}_0(N) = \mathbb{E}_0\left(\sum_{n \geq 1} \mathbb{1}_{\{S_n = 0\}}\right) = \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}_0(S_n = 0)$ ∎

Preuve : (Thm 8.4)

On va utiliser : $\{S_n\}$ transiente $\Leftrightarrow \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}_0(S_n = 0) < \infty$

$\mathbb{P}_0(S_n = 0) = \mathbb{E}_0(\mathbb{1}_{\{S_n = 0\}})$

On a $\forall x \in \mathbb{Z}^d$, $\mathbb{1}_{\{x=0\}} = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi,\pi]^d} \dots \int dp_1 \dots dp_d \, e^{ipx = i\sum_{k=1}^{d} p_k x_k}$

- $x = 0$ ✓
- $x \neq 0$: $x = (x_1, \dots x_d)$ $\exists k \in [1,d]$ tq $x_k \neq 0$

Spdg $x_1 = 0$:

$$\int_{[-\pi,\pi]^d} \dots \int dp_2 \dots dp_d \, e^{i\sum_{k=2}^{d} p_k x_k} = \cdot \int_{-\pi}^{\pi} dp_1 \, e^{ip_1 x_1}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{ip_1 x_1} dp_1 = \int_{-\pi}^{\pi} \cos x_1 p_1 + i \sin p_1 x_1 \, dp_1$$

et $\int_{-\pi}^{\pi} \cos x_1 p_1 \, dp_1 = 0 = \int_{-\pi}^{\pi} i \sin p_1 x_1 \, dp_1$

$$\Rightarrow \mathbb{1}_{\{S_n = 0\}} = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi,\pi]^d} \dots \int dp_1 \dots dp_d \, e^{ip \cdot S_n}$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}_0(S_n = 0) = 1/(2\pi)^d \int_{[-\pi,\pi]^d} \dots \int dp_1 \dots dp_d \, \mathbb{E}_0(e^{ipS_n})$$

et $\mathbb{E}_0(e^{ipS_n}) = \mathbb{E}_0(e^{ip(X_1 + \dots + X_n)}) = [\mathbb{E}_0(e^{ipX_1})]^n$

$$= [\phi_{X_1}(p)]^n \qquad x_1 = \vec{e_i} \quad x_1 = -\vec{e_i}$$

$$\phi_{X_1}(p) = \mathbb{E}_0(e^{ipX_1}) = \frac{1}{2d}\underbrace{(e^{ip_1} + e^{-ip_1}}_{2\cos(p_1)} + \dots + \underbrace{e^{ip_d} + e^{-ip_d}}_{2\cos(p_d)})$$

$$= \frac{1}{d} \sum_{k=1}^{d} \cos(pk)$$

$$\Rightarrow \sum \mathbb{P}_0(S_n = 0) = \sum_{n\geq 1} 1/(2\pi)^d \int_{[-\pi,\pi]^d} \dots \int dp_1 \dots dp_d \, (\phi_{X_1}(p))^n$$

$$= 1/(2\pi)^d \int_{[-\pi,\pi]^d} \dots \int dp_1 \dots dp_d \sum_{n\geq 1} (\phi_{X_1}(p))^n$$

$$\Rightarrow S_n \text{ transiente} \Leftrightarrow \int_{[-\pi,\pi]^d} \dots \int dp_1 \dots dp_d \, \frac{\phi_{X_1}(p)}{1 - \phi_{X_1}(p)} < \infty$$

$1 - \phi_{X_1}(p) = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{d} |1 - \cos(p_k)| = 0 \Leftrightarrow p = 0$

$$\Rightarrow \int_{[-\pi,\pi]} \dots \int dp_1 \dots dp_d \, \frac{\phi_{X_1}(p)}{1 - \phi_{X_1}(p)} = 0 \text{ en } p = 0$$

Preuve : (Suite)

$\{S_n\}$ trans $\Leftrightarrow \int\cdots\int_{B_\varepsilon(0)} dp_1 \dots dp_d \frac{1}{1-\Phi_{X_1}(p)} < \infty$

$\Phi_{X_1}(p) = \frac{1}{d}\sum_{k=1}^{d} \cos(p_k)$

$\forall x \in [-1,1]$: $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x_0^4}{24}$ $\quad 0 \le x_0 < |x|$

$\Rightarrow 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \ge \cos(x) \ge 1 - \frac{x^2}{2}$

$1 - \frac{11x^2}{24} \ge \cos(x) \ge 1 - \frac{x^2}{2}$

$\frac{x^2}{2} \ge 1 - \cos(x) \ge \frac{11}{24}x^2$

$\Rightarrow 1 - \Phi_{X_1}(p) = \frac{1}{d}\sum_{k=1}^{d} (1 - \cos(p_k))$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\|p\|_2^2 \ge 1 - \Phi_{X_1}(p) \ge \frac{11}{24}\|p\|_2^2$

$\Rightarrow \{S_n\}$ transiente $\Leftrightarrow \int\cdots\int_{B_\varepsilon(0)} dp_1 \dots dp_d \frac{1}{\|p\|_2^2} < \infty$

$\Leftrightarrow \int_0^\varepsilon dr \overbrace{r^{d-1}}^{r^{d-3}} \frac{1}{r^2} < \infty \ (\Leftrightarrow d-3 > -1$

$\Leftrightarrow d > 2$ ■

On a vu :

$d = 1$: MASS récurrente nulle ($\mathbb{E}_0(\mathcal{T}_0) = +\infty$)

$d = 2$: MASS récurrente

$d \ge 3$: MASS Transiante

Thm 8.5 : La MASS sur $\mathbb{Z}^2$ est récurrente nulle

Preuve : $S_n = (S_n(1), S_n(2)) \in \mathbb{Z}^2 = \sum_{k=1}^{n} (X_k(1), X_k(2))$

$\tilde{S}_n := S_n(1) + S_n(2) = \sum_{k=1}^{n} (X_k(1) + X_k(2)) = \sum_{k=1}^{n} \tilde{X}_k$

App : $(\tilde{S}_n)$ est MASS sur $\mathbb{Z}$

indép : ✓ identiquement dist : ✓

Loi : $\mathbb{P}(\tilde{X}_k = 1) = \mathbb{P}(X_k(1) + X_k(2) = 1) = 1/2$

$\mathbb{P}(\tilde{X}_k = -1) = 1/2$ ✓

Preuve : (Suite)

$$\mathbb{E}_0(\mathcal{Y}_0(S_n)) = \mathbb{E}_0(\min\{n\geq 1 : S_n = 0\}) = \mathbb{E}_0(\min\{n\geq 1 : S_{n(1)} = S_{n(2)} = 0\})$$
$$\geq \mathbb{E}_0(\min\{n\geq 1 \mid S_{n(1)} + S_{n(2)} = 0\})$$
$$= \mathbb{E}_0(\mathcal{Y}_0(\tilde{S}_n)) = +\infty$$

Ch. 9 Les chaînes de Markov :

9.1 Définition et exemple :

Déf : $X_0, X_1, \ldots$ v.a à valeur dans S fini ou dénombrable

$X = \{X_n\}_{n\geq 0}$, $\mathbb{P}$ sa loi.

X est une chaîne de Markov, s'il possède la propriété de Markov

$$\mathbb{P}(X_n = s_n \mid X_0 = s_0, \ldots, X_{n-1} = s_{n-1}) = \mathbb{P}(X_n = s_n \mid X_{n-1} = s_{n-1})$$

S est l'espace des états de la chaîne.

Ex :
- $(X_k)_k$ iid
- MAS $\mathbb{Z}$
- MASS $\mathbb{Z}^d$ $(S = \mathbb{Z}^d)$
- $(Z_n)_{n\geq 0}$ taille de pop. dans Galton-Watson $S \in \mathbb{N}$

Rem : Dans ce chapitre, on suppose $|S| < \infty$

Déf : La C.M. X est homogène si $\mathbb{P}(X_n = j \mid X_{n-1} = i) = \mathbb{P}(X_1 = j \mid X_0 = i)$ $\forall n \geq 1$

Rem : On suppose X toujours homogène.

Déf : L'évolution de la C.M est caractérisée par $p(i,j) = \mathbb{P}(X_1 = j \mid X_0 = i)$ et alors la matrice $P = (p(i,j))_{i,j\in S}$ est la matrice de transition de la C.M.

Lemme 9.1 : Une matrice de transition est caractérisée par :

1) $p(i,j) \geq 0 \quad \forall i,j \in S$

2) $\sum_{j \in S} p(i,j) = 1 \quad \forall i \in S$

Une telle matrice est dite stochastique

Déf : Soit $\mu = (\mu_i)_{i \in S}$ mesure de proba sur S

P - matrice stochastique

La C.M (P, μ) est la C.M de matrice de trace P et de loi initiale μ : $\mathbb{P}(X_0 = i) = \mu_i \quad \forall i \in S$

$X \sim (P, \mu)$, loi $\mathbb{P}_\mu$

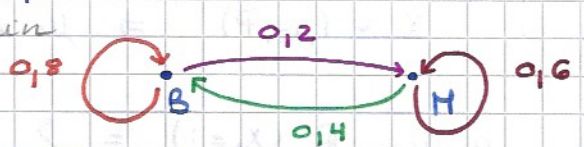
Si $\exists i \in S$ tq $\mu_i = 1$, on écrira $\mathbb{P}_i$ et $\mathbb{E}_i$

Ex : Le temps sur l'île de Robinson

$S_R = \{$ beau, mauvais $\} = \{B, M\}$

aujourd'hui ↓ demain

$$P = \begin{array}{c|cc} & B & M \\ B & 0,8 & 0,2 \\ M & 0,4 & 0,6 \end{array}$$



est C.M

Proba de $\begin{matrix} B \\ M \end{matrix}$ au jour n sachant $\begin{matrix} B \\ M \end{matrix}^2$ les jours n-1 et n-2.

On change S_R, on veut $S_{\text{vendredi}} = S_R \times S_R = \{BB, BM, MB, MM\}$

$(Y_n)_{n \geq 0}$, $Y_n = (X_n, X_{n-1})$

Si on connait $Y_{n-1} = (X_{n-1}, X_{n-2})$ alors on peut prédire $Y_n = (X_n, X_{n-1})$

On a alors une C.M.

le 13.03.19

Not : $\begin{cases} P = (p(i,j))_{i,j \in S} \\ \mu_0 \end{cases}$

$n \geq 1$

$P_n = (p_n(i,j))$

$p_n(i,j) = \mathbb{P}_i(X_n = j)$ proba de transition en n pas. (Proba qu'il fasse beau dans 10 jour ai P proba beau demain)

Obs : $p_n(i,j) = \mathbb{P}_i(X_n = j) = \sum_{k \in S} \mathbb{P}_i(X_n = j, X_{n-1} = k)$

$= \sum_{k \in S} \mathbb{P}_i(X_n = j \mid X_{n-1} = k) \cdot \mathbb{P}_i(X_{n-1} = k)$

$= \sum_{k \in S} p_{n-1}(i,k)\, p(k,j)$

Eq de Chapman - Kolmogorov.

Thm 9.1 : $P_n = P^n \quad \forall n \geq 1$

Pv : $(P_n)_{ij} = \sum_{k \in S} (P_{n-1})_{ik} (P)_{kj} = (P_{n-1} P)_{ij}$.

$P_n = P_{n-1} P = \dots = P^n$ ▨

Not : $\mu_n(j) = \mathbb{P}_{\mu_0}(X_n = j) = ?$

Cor 9.1 : $X \sim (\mu_0, P) \Rightarrow \mu_n = \mu_0 P^n$

Pv : $\mu_n(j) = \mathbb{P}_{\mu_0}(X_n = j) = \sum_{i \in S} \mathbb{P}_{\mu_0}(X_n = j \mid X_0 = i) \cdot \mathbb{P}(X_0 = i)$

$= (\mu_0 P_n)_j = (\mu_0 P^n)_j$ ▨

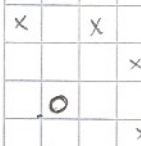
Déf 9.5 : P stochastique sur S fini.

- Un état $j \in S$ est atteignable depuis $i \in S$, $i \longrightarrow j$, si $\exists n \geq 1$ tq $p_n(i,j) > 0$
- Un état $j \in S$ est absorbant si $p(j,j) = 1$
- P est irréductible si $\forall i,j \in S$, $i \longrightarrow j$
- P est absorbante si $\forall i \in S$, $\exists j \in S$ absorbant tq $i \to j$
- CM $\{X_n\}_{n \geq 0}$ est irréductible / absorbante si sa matrice de transition associée est irréductible / absorbante.

Not: $i,j \in S \quad n(i,j) = \min\{n \geq 1 : p_n(i,j) > 0\}$

$n(i,j) < \infty \Leftrightarrow i \longrightarrow j$

Ex 9.2 : Sur un échéquier. (8×8)

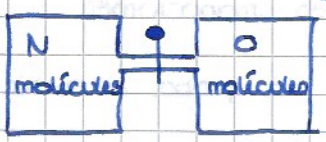


On place le cavalier qui va faire une marche aléatoire,

Q : # pas moyen nécessaire pour retourner au pt de départ ?

C'est une chaîne de markov irréductible.

Ex 9.3 : (Urnes d' Ehrenfest)



et on ouvre le robinet.

on s'attend après longtemps à qqch de l'ordre de $\frac{N}{2}$ dans chaque urnes. (Évolution irréversible) macroscopique

Mais l'évolution microscopique est réversible

Modèle : 2 urnes , N boules numérotées toutes

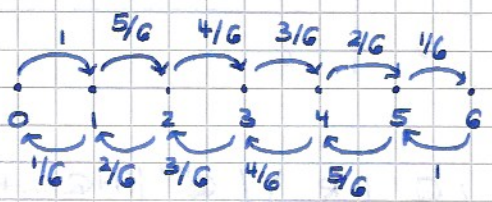


dans A.

On tire une boule et on l'a met dans l'autre urne.

X_n = # boules dans A au temps N

N = 6



C'est une C.M. irréductible.

Ex 9.4 : Modèle du votant

grille $n \times n$, enroulée sur un tore, chaque case à 8 voisines

$k \geq 2$ est le # de couleurs $= |\{1, \dots k\}|$.

$S = \{$ colorianges possibles $\} = \{1, \dots k\}^{n^2}$

Dynamique : · à chaque instant on tire une case x au hasard unif

· on tire y voisine de x unif

· on repeint x de la couleur de y

$X_n =$ coloriages au temps n

C.M est absorbante.

k états absorbants : k coloriages monochromes

Q : Étant donné X_0, qu'elle est la proba d'avoir toutes les cases de couleur $i \in \{1 \dots k\}$?

9.2 Chaînes de Markov absorbantes :

Not : $\mathcal{A} = \{ i \in S \mid i$ est absorbant $\}$

Forme canonique de P :

$$\begin{array}{c|cc} & S\setminus A & A \\ \hline S\setminus A & Q & R \\ A & 0 & 1 \end{array}$$

Lemme 9.2 : $P^n = \left(\begin{array}{c|c} Q^n & (1+Q+\dots+Q^{n-1})R \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)$

Pv : $n = 1$ ✓

$$P^n = PP^{n-1} = \left(\begin{array}{c|c} Q & R \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} Q^{n-1} & (1+Q+\dots+Q^{n-2})R \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} Q & (1+Q+\dots+Q^{n-1})R \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)$$

■

Q: Est-ce que la CM finit tjrs absorbée ?

$\forall i,j \notin \mathcal{A} \quad \lim_{n\to\infty} \underbrace{\mathbb{P}_i(X_n = j)}_{(Q^n)_{ij}} = 0$?

Prop 9.1: $\lim_{n\to\infty} Q^n = 0$

Pv: $i,j \notin \mathcal{A}$

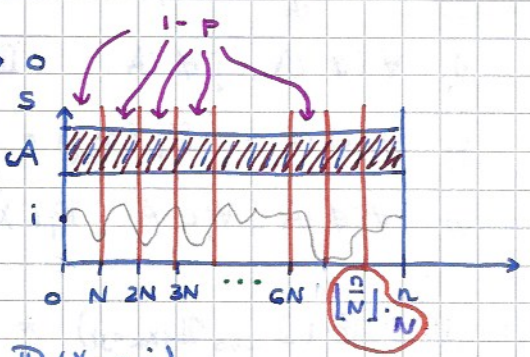
$(Q^n)_{ij} = \mathbb{P}_i(X_n = j) \le \mathbb{P}_i(X_n \notin \mathcal{A}) \le \max_{i\in S} \mathbb{P}_i(X_n \notin \mathcal{A})$

$\max\{n \ge 1 : \mathbb{P}_i(X_n \in A) > 0\} =: N$

$\mathbb{P}_i(X_N \in A) > 0 \quad \forall i \in S$

On pose $p := \min_{i\in S} \mathbb{P}_i(X_N \in \mathcal{A}) > 0$

$\Rightarrow \mathbb{P}_i(X_N \notin \mathcal{A}) \le 1 - p$



$\max_{i\in S} \mathbb{P}_i(X_n \notin \mathcal{A})$

$= \max_{i\in S} \sum_{j\notin\mathcal{A}} \mathbb{P}_i(X_n \notin A, X_N = j)$

$= \max_{i\in S} \sum_{j\notin\mathcal{A}} \mathbb{P}_i(X_n \notin \mathcal{A} \mid X_N = j) \cdot \mathbb{P}_i(X_N = j)$

$\le \max_{k\in S} \mathbb{P}_k(X_{n-N} \notin \mathcal{A}) \max_{i\in S} \sum_{j\notin\mathcal{A}} \mathbb{P}_i(X_N = j)$

$\le (1-p) \max_{k\in S} \mathbb{P}_k(X_{n-N} \notin \mathcal{A}) \le \dots \le \dots \le \dots$

$\le (1-p)^{\lfloor n/N \rfloor} \max_{k\in S} \mathbb{P}_k(X_{n-\lfloor \frac{n}{N} \rfloor N} \notin \mathcal{A}) \le C^{-p(\frac{n}{N}-1)} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ ∎

$$\lim_{n\to\infty} P^n = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \lim_{n\to\infty}(\sum_{k=0}^{n-1} Q^k)R \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)$$

Cor 9.2: la matrice $1 - Q$ est inversible et son inverse est

$N = (1-Q)^{-1} = 1 + Q + \dots + Q^q + \dots$

Pv: $I - Q$ inversible $\Leftrightarrow$ $(I-Q)v = 0 \Rightarrow v = 0$

$(I-Q)v = 0 \Rightarrow v = Qv \Rightarrow \dots \Rightarrow Q^n v \quad \forall n \geq 1$

$\Rightarrow v = \lim_{n \to \infty} Q^n v = 0$

$(I-Q)(I+Q+Q^2+\dots+Q^n) = I - Q^{n+1}$

$\Rightarrow (I+Q+Q^2+\dots+Q^n) = N(I-Q^{n+1}) \xrightarrow{n \to \infty} N$

$\downarrow$

$\sum_{k=0}^{\infty} Q^k$ ∎

Déf: N est la matrice fondamentale de la chaîne de H.

Thm 9.2: $\tau_A = \min\{n \geq 0 : X_n \text{ absorbant}\}$

1) $\forall i \notin A,\ j \notin A : \mathbb{E}_i\left(\sum_{k \geq 0} \mathbb{1}_{\{X_k = j\}}\right) = N_{ij}$
2) $\forall i \notin A : \mathbb{E}_i(\tau_A) = \sum_{j \notin A} N_{ij}$
3) $\forall i \notin A,\ \forall j \in A \quad \mathbb{P}_i(X_{\tau_A} = j) = (NR)_{ij}$ (proba d'être absorbé en j)

Typique Examen

Pv: 1) $\mathbb{E}_i\left(\sum_{k \geq 0} \mathbb{1}_{\{X_k = j\}}\right) = \sum_{k \geq 0} \mathbb{P}_i(X_k = j) = \left(\sum_{k \geq 0} Q^k\right)_{ij} = N_{ij}$

2) $\mathbb{E}_i(\tau_A) = \sum \mathbb{E}_i\left(\sum_{k \geq 0} \mathbb{1}_{\{X_k \notin A\}}\right) = \mathbb{E}_i\left(\sum_{k \geq 0} \sum_{j \notin A} \mathbb{1}_{\{X_k = j\}}\right)$

$= \sum_{j \notin A} \mathbb{E}_i\left(\sum_{k \geq 0} \mathbb{1}_{\{X_k = j\}}\right) = \sum_{j \notin A} N_{ij}.$

3) $\mathbb{P}_i(X_{\tau_A} = j) = \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}_i(X_n = j,\ X_{n-1} \notin A)$

$= \sum_{n \geq 1} \sum_{k \notin A} \mathbb{P}_i(X_n = j \mid X_{n-1} = k) \cdot \mathbb{P}_i(X_{n-1} = k)$

$= \sum_{k \notin A} R_{kj} \left(\sum_{n \geq 0} Q^n\right)_{ik} = \sum_{k \notin A} N_{ik} R_{kj} = (NR)_{ij}$ ∎

Ex: Modèle du votant : $n = 100$, grille 100×100, $k = 4$ couleurs

$|S| = \underset{10'000}{4} = \underset{20'000}{2} = \underset{6'000}{10}$

Déf 9.7: Soit $f : S \to \mathbb{R}$, $f = (f(i))_{i \in S}$, P matrice stoch.

alors f est P-harmonique si $f(i) = \sum_{j \in S} p(i,j) f(j)$

ou $f = Pf$

↑ vecteur propre à droite de P matrice

Proba et Stat: le 20.03.19

Rap: $f = (f(i))_{i \in S}$ est P-harmonique

$\Leftrightarrow f = Pf$

$\Leftrightarrow f(i) = \sum_{j \in S} p(i,j) f(j)$

$\Leftrightarrow \sum_{j \in S} p(i,j)(f(j) - f(i)) = 0$

Thm 9.3: $\tau_A := \min\{n \geq 0 : X_n \in A\}$, $\forall f$ P-harmonique

$f(i) = \sum_{j \in A} \mathbb{P}_i(X_{\tau_A} = j) f(j)$

Pv: $f = Pf = P^n f \quad \forall n \geq 1 \Rightarrow f = \lim_{n \to \infty} P^n f = \begin{pmatrix} 0 & | & A \\ \hline 0 & | & NR \\ & | & 1 \end{pmatrix} f$

$\Rightarrow f(i) = \sum_{j \in A} (NR)_{ij} f(j) = \sum_{j \in A} \mathbb{P}_i(X_{\tau_A} = j) f(j)$ ▨

Ex 9.4: Modèle du votant

$n \times n$ grille, k couleurs : $1 \dots k$

Aff: $N_1 = \#$ cases de couleur 1 est P-harmonique

$\sum_{j \in S} p(i,j)(N_1(j) - N_1(i)) \stackrel{?}{=} 0$

et $\sum_{j \in S} p(i,j)(N_1(j) - N_1(i)) = \sum_{(x,y) \text{ cases voisines}} \frac{1}{8n^2} (N_1(i_{x \to y}) - N_1(i))$

et $N_1(i_{x \to y}) - N_1(i) = \begin{cases} +1 & \text{si } i(x) \neq 1 \text{ et } i(y) = 1 \\ -1 & \text{si } i(x) = 1 \text{ et } i(y) \neq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$\Rightarrow \sum_{j \in S} p(i,j)(N_1(j) - N_1(i)) = 0$

Notation: états absorbants : $a_1 \dots a_k$ (ap a toutes ses cases couleur p)

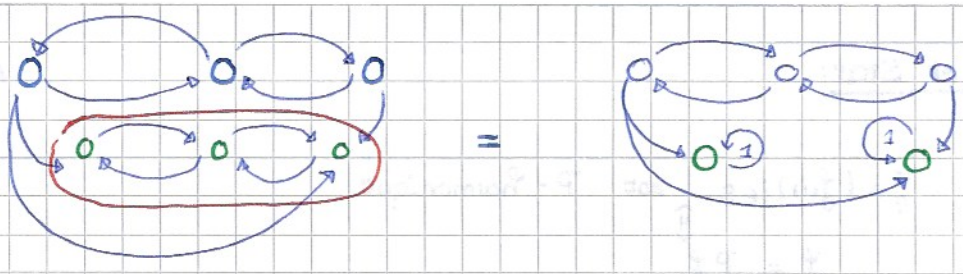
Etat initial : $i_0 \in S$

$N_1(i_0) = \sum_{l=1}^{k} \mathbb{P}_{i_0}(X_{\tau_A} = a_l) N_1(a_l) = \mathbb{P}_{i_0}(X_{\tau_A} = a_1) n^2$

$N_1(a_l) = \begin{cases} n^2 & \text{si } l = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$\Rightarrow \mathbb{P}_{i_0}(X_{\tau_A} = a_1) = \frac{N_1(i_0)}{n^2} =$ fraction de case de couleur 1 dans i_0.

Ex :



9.3 Chaînes irréductibles :

Déf 9.9 : Un état $i \in S$ est <u>récurrent</u> si $\mathbb{P}_i(\exists n \geq 1, X_n = i) = 1$

sinon i est <u>transiant</u>.

X est <u>récurrente</u> si tous les états le sont.

Lemme 9.3 : Un état $j \in S$ est récurrent $\Leftrightarrow \sum_n p_n(j,j) = +\infty$

de plus si j est récurente, $\sum_n p_n(i,j) = +\infty \ \forall i$ tq $i \longrightarrow j$

si $j \in S$ est transiant alors $\sum_n p_n(i,j) < \infty \quad \forall i \in S$

Pv : $G_{i,j}(s) = \sum_{n \geq 0} p_n(i,j)\, s^n \qquad i,j \in S$

$H_{ij}(s) = \sum_{n \geq 1} h_n(i,j)\, s^n \qquad$ où

$h_n(i,j) = \mathbb{P}_i(X_1 \neq j, X_2 \neq j, \dots, X_{n-1} \neq j, X_n = j)$

$\forall n \geq 1 :$ $p_n(i,j) = \mathbb{P}_i(X_n = j) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}_i(X_1 \neq j \dots X_{k-1} \neq j, X_k = j)\, \mathbb{P}_i(X_{n-k} = j)$

$= \sum_{k=1}^{n} h_k(i,j)\, p_{n-k}(j,j)$

$G_{ij}(s) = p_0(i,j) + \sum_{n \geq 1} p_n(i,j)\, s^n$

$= \delta_{ij} + \sum_{n \geq 1} \sum_{k=1}^{n} h_k(i,j)\, p_{n-k}(j,j)\, s^n$

$= \delta_{ij} + \sum_{k \geq 1} h_k(i,j)\, s^k \sum_{n \geq k} p_{n-k}(j,j)\, s^{n-k}$

$= \delta_{ij} + H_{ij}(s) + G_{jj}(s)$

$\forall i,j \in S \quad G_{ij}(s) = \delta_{ij} + H_{ij}(s) + G_{jj}(s)$

si $i = j \Rightarrow G_{jj}(s) = 1/(1 - H_{jj}(s))$

$$\sum_n p_n(j,j) = G_{jj}(s) = \frac{1}{1 - H_{jj}(1)} = \begin{cases} +\infty & j \text{ récurrent} \\ < \infty & j \text{ transiant} \end{cases}$$

$H_{jj}(1) = \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}_j(1^{er} \text{ retour en } j \text{ au temps } n)$

Pv : (Suite)

$i \neq j$: $G_{ij}(s) = H_{ij}(s)\, G_{jj}(s)$

- j récurrent : $G_{jj}(1) = +\infty$, $i \to j$

$$\sum_n p_n(i,j) = G_{ij}(1) = H_{ij}(1)\, G_{jj}(1) = +\infty$$

- j transiant : $G_{jj} < +\infty$

$$\sum_n p_n(i,j) = G_{ij}(1) = H_{ij}(1)\, G_{jj}(1) < \infty$$

Rem: Si j est transiant, $\sum_n p_n(i,j) < \infty \quad \forall i \in S$

$$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} p_n(i,j) = 0 \quad \forall i \in S$$

Lemme 9.4 : Soit X irréd, alors X est récurrente.

De plus, le temps moyen de récurrence de l'état $i \in S$,

$\rho_i = \mathbb{E}_i[T_i]$ où $T_i = \min\{n \geq 1 : X_n = i\}$ est fini

$\Rightarrow$ X récurrente positive.



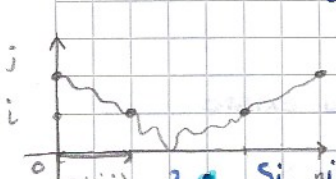
Pv : 1. $\exists i \in S$ récurrent

Supp que ce n'est pas le cas. Alors, $\forall j \in S$, j transient

$$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} p_n(i,j) = 0 \quad \forall i,j \in S.$$

$$i \in S \quad 1 = \sum_{j \in S} p_n(i,j) \quad \forall n \geq 1$$

$$1 = \lim_{n \to \infty} \sum_{j \in S} p_n(i,j) = \sum_{j \in S} \lim_{n \to \infty} p_n(i,j) = 0 \quad \lightning$$



2. Si i est récurrent et $j \in S$ tq $j \xrightarrow{>0} i$ alors j est récurrent.

$$\sum_n p_n(j,j) \geq \sum_{n \geq n(j,i)+n(i,j)} \underbrace{p_{n(j,i)}(j,i)}_{>0}\, p_{n-n(j,i)-n(i,j)}^{(i,i)}\, \underbrace{p_{n(i,j)}(i,j)}_{>0}$$

$$= \dots = +\infty$$

$$p_n(j,j) \geq p_{n(j,i)}(j,i)\, p_{n-n(j,i)-n(i,j)}^{(i,i)}\, p_{n(i,j)}^{(i,j)}$$

3. 1 + 2 $\Rightarrow$ Récurrence de X.

Pv : (Suite)

Fixons $i \in S$

$$E_i[T_i] = \sum_{n \geq 0} \mathbb{P}_i(T_i > n) \leq \sum_{n \geq 0} e^{-p\left(\frac{n}{n(i)} - 1\right)} < \infty$$

$$n(i) = \max_{j \in S} n(j,i), \quad \min_{j \in S} \mathbb{P}_j(X_{n(j,i)} = i) = p > 0$$

$$\max_{j \in S} \mathbb{P}_j(X_{n(j,i)} \neq i) = 1 - p < 1$$

$$\#\text{ tranches} = \left\lfloor \frac{n}{n(i)} \right\rfloor =: M$$

$$\mathbb{P}_i(T_i > n) \leq \sum_{\substack{k_1, \dots, k_M \\ \neq i}} \prod_{L=1}^{M} \mathbb{P}_{k_{L-1}}(X_{n(k_{L-1}, i)} = k_L)$$

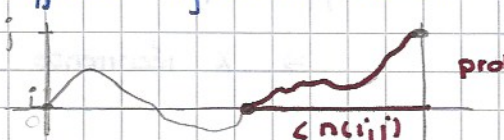
$$= \sum_{\substack{k_1, \dots, k_{M-1} \\ \neq i}} \prod_{L=1}^{M-1} \mathbb{P}_{k_{L-1}}(X_{n(k_{L-1}, i)} = k_L) \cdot \sum_{k_M \neq i} \mathbb{P}_{k_{M-1}}(X_{n(k_{M-1}, i)} = k_M)$$

$$\leq (1-p) \sum_{\substack{k_1, \dots, k_{M-1} \\ \neq i}} \prod_{L=1}^{M-1} \mathbb{P}_{k_{L-1}}(\dots) \leq \dots \leq (1-p)^M$$

$$\leq e^{-pM} = e^{-p\left\lfloor \frac{n}{n(i)} \right\rfloor} \leq e^{-p\left(\frac{n}{n(i)} - 1\right)}$$

∎

Lemme 9.5 : X irréd sur S fini. Alors : $\forall i, j \in S \quad \mathbb{P}_j(\exists n \geq 1 : X_n = i) = 1$



Pv : On sait que $\mathbb{P}_i(\exists n \geq 1, X_n = i) = 1$

$$0 = \mathbb{P}_i(X_n \neq i \ \forall n \geq 1) \geq \mathbb{P}_i(X_n \neq i \ \forall n \geq 1, X_{n(i,j)} = j)$$

$$= \mathbb{P}_i(X_n \neq i, \ \forall n > n(i,j)) = \underbrace{\mathbb{P}_i(X_{n(i,j)} = j)}_{> 0} \mathbb{P}_j(X_n \neq i \ \forall n \geq 1)$$

$$\Rightarrow 0 = \mathbb{P}_j(X_n \neq i \ \forall n \geq 1) \Rightarrow \mathbb{P}_j(\exists n \geq 1 \ X_n = i) = 1$$

∎

9.3.1 Distribution stationaire : (Fixe $i \in S$)

On peut espérer sous de bonnes conditions qu'il existe

$\pi := (\pi(j))_{j \in S}$ tq $\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}_i(X_n = j) = \pi(j) \quad \forall j \in S.$

Dans ce cas, on aurait :

$$\sum_{j \in S} p_n(i,j) = 1 \quad \forall n \geq 1$$

$$\downarrow n \to \infty$$

$$\sum_{j \in S} \lim_{n \to \infty} p_n(i,j) = \sum_{j \in S} \pi(j) = 1 \Rightarrow \pi \text{ proba sur } S.$$

$$\sum_{j\in S} \pi(j)\, p(j,k) = \sum_{j\in S} \lim_{n\to\infty} p_n(i,j)\, p(j,k)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \underbrace{\sum_{j\in S} p_n(i,j)\, p(j,k)}_{p_{n+1}(i,k)} = \pi(k)$$

$$\Rightarrow \pi = \pi P$$

Déf 9.9 : Un vecteur $\pi := (\pi(j))_{j\in S}$ est appellée distribution stationaire associée à P si :

1) $\pi(j) \geq 0 \ \forall j \in S$ et $\sum_{j\in S} \pi(j) = 1$

2) $\pi = \pi P$

On a vu que : si $X \sim (\mu_0, P)$

alors $\mu_n(j) = \mathbb{P}_{\mu_0}(X_n = j)$ satisfait $\mu_n = \mu_0 P^n$

Supp. $X \sim (\pi, P)$ alors :

$$\mathbb{P}_\pi(X_n = j) = (\pi P^n)_j = (\pi)_j = \pi(j) \quad \forall n \geq 1$$

---

le 03.04.19

Obs : Le seul candidat pour la loi de X_n lorsque $n \longrightarrow \infty$ est une proba $\underline{\pi} = (\pi(i))_{i\in I}$ tq $\underline{\pi} = \underline{\pi} P$

Q : Existence ?

Unicité ?

On fixe $k \in S$. On considère le vecteur $\underline{\gamma}^k$ déf. par

$$\gamma^k(i) = \mathbb{E}_k\left[\sum_{n=0}^{T_k - 1} \mathbb{1}_{\{X_n = i\}}\right] \qquad T_k = \min\{n \geq 1 : X_n = k\}$$

Départ de k — # moyen de passage par i avant le 1er retour en k

Thm 9.4 : P irréd. sur S fini. Alors, $\forall k \in S$,

i) $\gamma^k(k) = 1$

ii) $\underline{\gamma}^k P = \underline{\gamma}^k$

iii) $\sum_{i\in S} \gamma^k(i) = \rho_k \ (:= \mathbb{E}_k(T_k) < \infty)$

iv) $0 < \gamma^k(i) < \infty \quad \forall i \in S$

$\Rightarrow \underline{\pi} = \frac{1}{\rho_k} \underline{\gamma}^k$ est une distribution stationaire associée à P.

Pr. i) $\gamma^k(k) = \mathbb{E}_k\left[\sum_{n=0}^{T_k-1} \mathbb{1}_{\{X_n = k\}}\right] = \mathbb{E}_k(1) = 1$

ii) $\gamma^k(j) = \mathbb{E}_k\left[\sum_{n=0}^{T_k-1} \mathbb{1}_{\{X_n = j\}}\right]$

$= \mathbb{E}_k\left[\sum_{n=1}^{T_k} \mathbb{1}_{\{X_n = j\}}\right]$

$= \mathbb{E}_k\left[\sum_{n\geq 1} \mathbb{1}_{\{X_n = j,\ T_k \geq n\}}\right]$

$= \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}_k(X_n = j,\ T_k \geq n)$

$= \sum_{n\geq 1} \sum_i \mathbb{P}_k(X_n = j,\ X_{n-1} = i,\ T_k \geq n)$

$= \sum_{n\geq 1} \sum_i \mathbb{P}_k(X_n = j \mid X_{n-1} = i) \cdot \mathbb{P}_k(X_{n-1} = i,\ T_k \geq n)$

$= \sum_i p(i,j) \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}_k(X_{n-1} = i,\ T_k \geq n)$

$= \sum_i p(i,j) \sum_{n\geq 0} \mathbb{P}_k(X_n = i,\ T_k > n)$

$= \sum_i p(i,j)\ \mathbb{E}_k\left[\sum_{n=0}^{T_k-1} \mathbb{1}_{\{X_n = i\}}\right]$

$= \sum_i p(i,j)\ \gamma^k(i) = (\gamma^k P)_j$

iii) $\sum_{i\in S} \gamma^k(i) = \sum_{i\in S} \mathbb{E}_k\left[\sum_{n=0}^{T_k-1} \mathbb{1}_{\{X_n = i\}}\right]$

$= \mathbb{E}_k\left[\sum_{n=0}^{T_k-1} \sum_{i\in S} \mathbb{1}_{\{X_n = i\}}\right] = \mathbb{E}[T_k] = \rho_k$

iv) $\gamma^k(i) \leq \sum_{j\in S} \gamma^k(j) = \rho_k < \infty$

$\gamma^k(k) = 1$

$\gamma^k(i) = \sum_{j\in S} \gamma^k(j)\ p_{n(k,i)}(j,i) \geq \gamma^k(k)\ p_{n(k,i)}(k,i) > 0$

$(n(k,i) = \min\{n \geq 1 : p_n(k,i) > 0\}$

Thm 9.5 : P stochastique, irréd, S fini.

Alors, P possède une unique distribution stationaire π. De plus : $\forall i \in S \quad \pi(i) = \frac{1}{\beta_i}$

Pv : Soit $\underline{\lambda} = (\lambda(i))_{i \in S}$ tq

- $\lambda(i) \geq 0 \quad \forall i \in S$
- $\underline{\lambda} P = \underline{\lambda}$
- $\underline{\lambda} \neq 0$

Aff : $\Rightarrow \lambda(i) > 0 \quad \forall i \in S$

En effet, $\exists j \in S$ tq $\lambda(j) > 0 \overset{i \neq j}{\Rightarrow} \lambda(i) = \sum_{l \in S} \lambda(l) \, p_{n(l,j)}(l,i)$

$\geq \lambda(j) \, p_{n(i,j)}(j,i) > 0$

Spdg : $\lambda(k) = 1$

Aff : $\lambda = \gamma^k \qquad j \in S$

$$\lambda(j) = \sum_{i_1 \in S} \lambda(i_1) \, p(i_1,j) = \sum_{i_1 \neq k} \lambda(i_1) \, p(i_1,j) + \lambda(k) \, p(k,j)$$

$$= \sum_{\substack{i_1 \neq k \\ i_2 \neq k}} (\lambda_i(i_2) \, p(i_2,i_1) \, p(i_1,j) + \cdots \, p(k,j) + \sum_{i_1 \neq k} p(k,i_1) \, p(i_1,j)$$

$$= \ldots = \sum_{i_1, \ldots i_n \neq k} \lambda(i_n) \, p(i_n, i_{n-1}) \, p(i_1, j)$$

$$+ P(k,j) + \sum_{i_1 \neq k} p(k,i_1) \, P(i_1 j) + \sum_{i_1 \ldots i_{n-1} \neq k} p(k, i_{n-1}) \cdot p(i,j) \geq \mathbb{P}_k(X_1 = j, T_k \geq 1) +$$

$$\ldots + \mathbb{P}_k(X_n = j, T_k \geq n) = \sum_{m=1}^{n} \mathbb{P}_k(X_m = j, T_k \geq m)$$

$$\Rightarrow \lambda(j) \geq \lim_{n \to \infty} \sum_{m=1}^{n} \mathbb{P}_k(X_m = j, T_k \geq m) = \gamma^k(j)$$

$$\Rightarrow \lambda(j) \geq \gamma^k(j) \quad \forall j \in S$$

Soit $\mu = \lambda - \gamma^k$. On a :

Pr : (Suite)

$$\begin{cases} \mu(i) = \lambda(i) - \gamma^k(i) \geq 0 & \forall i \in S \\ \mu(k) = \lambda(k) - \gamma^k(k) = 1 - 1 = 0 \\ \mu P = \lambda P - \gamma^k P = \lambda - \gamma^k = \lambda \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \mu = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \gamma^k$$

On a également : $\pi = \gamma^k / \rho_k$

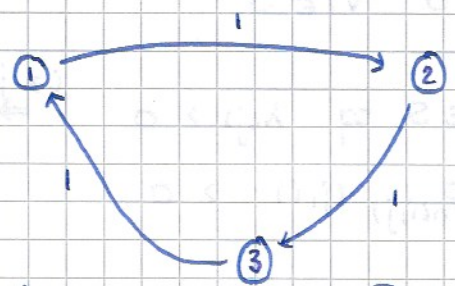
$$\pi(k) = \gamma^k(k) / \rho_k = 1 / \rho_k \qquad \forall k \in S$$

■

Q : $\mathbb{P}_\mu(X_n = i) \xrightarrow{n \to \infty} \pi(i)$??

Non en cas de période

Ex :



$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\pi = (1/3, 1/3, 1/3)$

$$\mathbb{P}_{①}(X_n = ①) = \begin{cases} 1 & \text{si } 3 \mid n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

9.3.2 Convergence :

Déf 9.10 :

- $d(i) = \text{pgcd}\{n \geq 1 : p_n(i,i) > 0\}$ **période** de l'état $i \in S$
- $i \in S$ est **apériodique** si $d(i) = 1$
- X est **apériodique** si tous ses états le sont
- X est **ergodique** si elle récurrente - positive, irréductible et apériodique.

Lemme 9.6 : Soit X C.M. irréd. + apériodique, alors $\exists N < \infty$ tq

$$\forall i,j \quad p_n(i,j) > 0 \quad \forall n > N$$

Thm : Bézout

Soient $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{N}^*$ tq $\text{pgcd}\{x_1, \dots, x_m\} = d$. Alors $\forall n \geq 1$

$\exists a_1, \dots, a_m \in \mathbb{Z}$ tq $\sum_{i=1}^{m} a_i x_i = n \cdot d$. De plus si $n \geq x_1 \dots x_m$ alors

$a_i \in \mathbb{N}$

! multiplication !

Pv : $j \in S$. X apériodique $\Rightarrow d(j) = 1 \Rightarrow \exists t_1, \dots, t_L$ tq

$P_{t_k}(j,j) > 0$ et $\text{pgcd}(t_1, \dots, t_L) = 1$

Soit $n \geq M(j) := t_1 \cdot t_2 \cdot \dots \cdot t_L$, par Bézout $\exists a_1, \dots, a_L \in \mathbb{N}$ tq

$a_1 t_1 + \dots + a_L t_L = n \Rightarrow P_n(j,j) \geq (P_{t_1}(j,j))^{a_1} \cdot \dots \cdot (P_{t_L}(j,j))^{a_L} > 0$

$\forall n \geq M(j)$

Soit $i \in S$, $i \neq j$. Irréd $\Rightarrow n(i,j) < \infty$

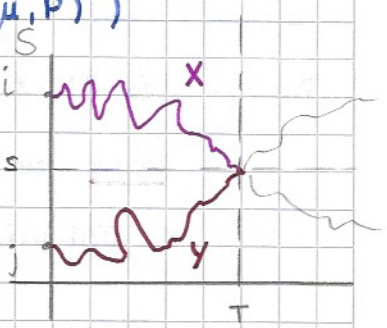
$P_n(i,j) \geq P_{n(i,j)}(i,j) \, P_{n-n(i,j)}(j,j) > 0 \quad \forall n \geq M(i,j) := M(j) + n(i,j)$

$N = \max_{i,j} M(i,j)$

Thm 9.6 : P irréd et apériodique, S fini, μ proba sur S.

Alors : $\lim_{n \to \infty} \mu P^n = \pi$ (unique dist. stationaire)

$\left(\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}_\mu(X_n = i) = \pi(i) \quad \forall i \in S \quad X \sim (\mu, P) \right)$



Pv : $s \in S$, X, Y de matrice de transition P

C.M. indépendante.

$Z_n := (X_n, Y_n)$ C.M sur $S \times S$

Aff : (Z_n) est irréductible

En effet : $\mathbb{P}_{(i,j)}(Z_n = (k,L)) = \mathbb{P}_{(i,j)}(X_n = k, Y_n = L)$

$= \mathbb{P}_i(X_n = k) \cdot \mathbb{P}_j(Y_n = L) > 0 \quad \forall n > N$

$T := \min\{n \geq 0 : X_n = Y_n = s\}$, $m \geq 1$

$\mathbb{P}_{(i,j)}(X_{T+m} = k, Y_{T+m} = L) = \sum_r \mathbb{P}_{(i,j)}(X_{r+m} = k, Y_{r+m} = L \mid T = r) \cdot \mathbb{P}_{(i,j)}(T = r)$

$= \sum_r \mathbb{P}_i(X_{r+m} = k, Y_{r+m} = L \mid X_r = Y_r = s) \cdot \mathbb{P}_{(i,j)}(T = r)$

$= \sum_r \mathbb{P}_s(X_m = k) \, \mathbb{P}_s(Y_m = L) \, \mathbb{P}_{(i,j)}(T = r) \overset{*}{=} p_m(s,k) \, p_m(s,L)$

* les lois de X et Y après le temps T sont identiques

$p_n(i,k) = \mathbb{P}_i(X_n = k) = \mathbb{P}_{(i,j)}(X_n = k) = \mathbb{P}_{(i,j)}(X_n = k, T \leq n)$

$+ \mathbb{P}_{(i,j)}(X_n = k, T > n) \leq \mathbb{P}_j(Y_n = k) + \mathbb{P}_{(i,j)}(T > n)$

$= p_n(j,k) + \mathbb{P}_{(i,j)}(T > n)$

$\Rightarrow |p_n(i,k) - p_n(j,k)| \leq \mathbb{P}_{(i,j)}(T > \infty) \xrightarrow{n \to \infty} 0$

Pv : (Suite)

$$\Rightarrow \left| p_n(i,k) - \pi(k) \right| = \left| p_n(i,k) - \sum_j \pi(j)\, p_n(j,k) \right|$$

$$= \left| \sum_j \pi(j) \left(p_n(i,k) - p_n(j,k) \right) \right| \leq \sum_j \pi(j) \left| p_n(i,k) - p_n(j,k) \right|$$

$$\xrightarrow{n \to \infty} 0$$

$$\Rightarrow \left| \sum_j \mu(j) \left(p_n(j,k) - p_n(i,k) \right) \right| \leq \sum_j \mu(j) \left| p_n(j,k) - p_n(i,k) \right| \xrightarrow{n \to \infty} 0$$

9.3.3 Réversibilité :

$(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ C.M. irréductible tq $\mathbb{P}(X_m = i) = \pi(i) \quad \forall m \in \mathbb{Z}$

Idée : (X_n) est réversible si $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}} \overset{\text{loi}}{=} (X_{-n})_{n \in \mathbb{Z}}$

On pose $Y_n := X_{-n} \quad \forall n \in \mathbb{Z}$

Déf : La C.M X est réversible (à l'équilibre) si les matrices de transition de X et Y sont égales.

Thm 9.7 : La C.M X est réversible $\Leftrightarrow$ la condition d'équilibre locale est satisfaite : le 10.04.19

$$\pi(i)\, p(i,j) = \pi(j)\, p(j,i) \quad \forall i,j \in S$$

Pv :

$$\mathbb{P}(Y_{n+1} = j \mid Y_n = i) = \mathbb{P}(X_{-n-1} = j \mid X_{-n} = i)$$

$$= \mathbb{P}(X_{-n} = i \mid X_{-n-1} = j) \frac{\mathbb{P}(X_{-n-1} = j)}{\mathbb{P}(X_{-n} = i)} = p(j,i) \frac{\pi(j)}{\pi(i)} = p(i,j)$$

Thm 9.8 : X irréductible. Si $\exists\, \underline{\pi}$ tq $0 \leq \pi(i)$, $\sum_{i \in S} \pi(i) = 1$, $\pi(i)\, p(i,j) = \pi(j)\, p(j,i)$ $\forall i,j \in S$. Alors X est réversible et $\underline{\pi}$ est la distribution stationaire de X.

Pv : à voir : $\underline{\pi} P = \underline{\pi}$

$$(\pi P)_i = \sum_{j \in S} \pi(j)\, p(j,i) = \sum_{j \in S} \pi(i)\, p(i,j) = \pi(i) \sum_{j \in S} \pi(j) = \pi(i)$$

le 10.04.19

Probabilité et Stat :

Ex :  N boules

A B

X_n = # boules dans l'urne A au temps n.

$$p(i, i-1) = \frac{i}{N}$$

$$p(i, i-1) = \frac{N-i+1}{N}$$

$$\pi(i) = \pi(i-1)\frac{p(i-1,i)}{p(i,i-1)} = \pi(i-1)\frac{(N-i+1)/N}{i/N} = \frac{N-i+1}{i}\pi(i-1)$$

$$= \dots = \frac{(N-i+1)(N-i+3)\dots N}{i(i-1)\dots 1}\pi(0) = \frac{N!}{(N-i)!\,i!}\pi(0)$$

$$= \binom{N}{i}\pi(0)$$

$$1 = \sum_{i=0}^{N}\pi(i) = \pi(0)\sum_{i=0}^{N}\binom{N}{i} = \pi(0)\cdot 2^N \Rightarrow \pi(0) = 2^{-N}$$

$$\Rightarrow \pi(i) = \binom{N}{i}2^{-N} \quad \forall i \in \{0,\dots,N\}$$

Application :



$N = 10^{23}$

temps de transition : 10^{-10} s

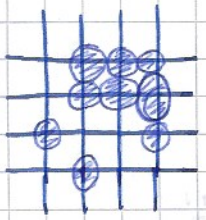
$$\mathbb{E}_{\frac{N}{2}}\left[T_{\frac{N}{2}}\right] = 1/\pi\left(\tfrac{N}{2}\right) = \frac{2^N}{\binom{N}{N/2}} = \dots \overset{\text{stirling}}{\simeq} \sqrt{\pi/2 \cdot N} \simeq 40 \text{ secondes.}$$

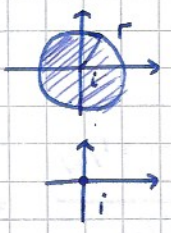
$$\mathbb{E}_N[T_N] = \frac{1}{\pi(N)} = \frac{2^N}{1} = 2^{10^{23}} = 10^{3\cdot 10^{22}} \text{ > âge de l'univers}$$

10. Modèle de Percolation

10.1 Définition :

$(X_i \mid i \in \mathbb{Z}^2)$ iid, $\mathbb{P}_p(X_i = 1) = 1 - \mathbb{P}_p(X_i = 0) = p \quad p \in [0,1]$



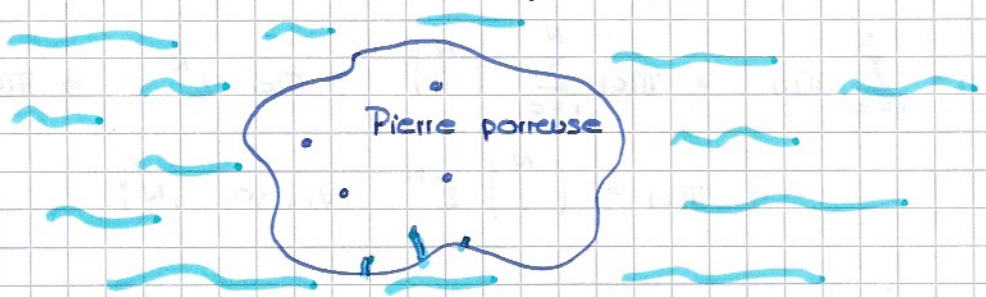


$X_i = 1$ avec $1/2 < r < 1/\sqrt{2}$

$X_i = 0$

$i \leftrightarrow j$ si i et j appartiennent à la même composante connexe de l'union des disques

$C(i)$ "amas" contenant i, $\{j \in \mathbb{Z}^2 : j \leftrightarrow i\}$

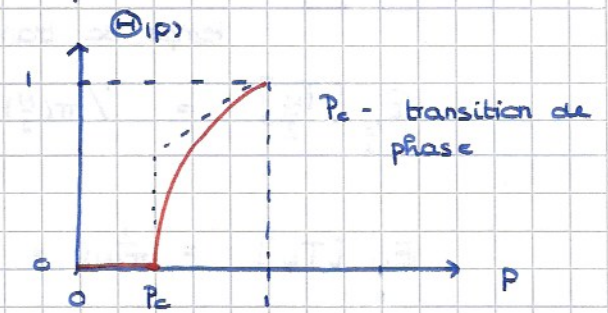


Q : L'eau atteint-elle le centre de la pierre ?

Q : $\mathbb{P}_p(|C(0)| = \infty) > 0$? (amas contenant 0)

$\mathbb{P}_p(|C(0)| = \infty) = \Theta(p)$

10.2 Transition de phase :



Thm 10.1 :

1) $\exists\, 0 < p_c < 1$ tq

$$\begin{cases} \Theta(p) = 0 & \forall p < p_c \\ \Theta(p) > 0 & \forall p > p_c \end{cases}$$

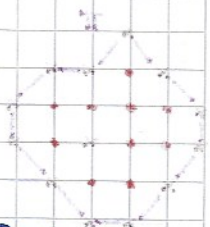
2) $\mathbb{P}_p(\exists i \text{ tq } |C(i)| = \infty) = \begin{cases} 0 & \text{si } p < p_c \\ 1 & \text{si } p > p_c \end{cases}$

($C(i)$: amas contenant i)

Pv : 2) (On suppose 1))

$\{\exists i \in \mathbb{Z}^2 : |C(i)| = +\infty\} \in \mathcal{J}_\infty$

$\Rightarrow \mathbb{P}_p(\exists i, |C(i)| = \infty) \in \{0,1\}$



Rem : $\{|C(0)| = \infty\} \notin \mathcal{J}_\infty$

$p > p_c$:

$\mathbb{P}_p(\exists i : |C(i)| = \infty) \geq \mathbb{P}_p(|C(0)| = \infty) = \theta(p) > 0$

$\Rightarrow \mathbb{P}_p(\exists i : |C(i)| = \infty) = 1$

$p < p_c$:

$\mathbb{P}_p(\exists i : |C(i)| = \infty) = \mathbb{P}_p\left(\bigcup_{i \in \mathbb{Z}^2} \{|C(i)| = \infty\}\right)$

$\leq \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} \mathbb{P}_p(|C(i)| = \infty) = 0$ ▨

1) 3 étapes :

I. $\theta(p) = 0$ $\forall p$ suff. petit.

II. $\theta(p) \uparrow 1$ lorsque $p \uparrow 1$

III. $p \longmapsto \theta(p)$ est croissante.

I. $\gamma = (i_1, \dots, i_n)$ chemin de longueur n ($|\gamma| = n$) si

- $i_1, \dots, i_n \in \mathbb{Z}^2$ tous distincts
- $\|i_k - i_{k-1}\|_2 = 1$ $\forall\, 2 \leq k \leq n$

$\mathcal{N}(n) = \{\gamma$: chemin tq $|\gamma| = n$ et $i_1 = 0\}$

$N(n) = \#\,\mathcal{N}(n)$ $\quad N_o(n) = \#\{\gamma \in \mathcal{N}(n) : \gamma$ ouvert $\}$

$\gamma = (i_1, \dots i_n)$ est ouvert si $X_{i_1} = \dots = X_{i_n} = 1$

Aff : $N(n) \leq 4^n$

Soit $\gamma \in \mathcal{N}(n)$, $\gamma = (i_1, \dots, i_n)$, $\mathbb{P}_p(\gamma$ ouvert$) = \mathbb{P}_p(X_{i_1} = 1, \dots X_{i_n} = 1)$

$= \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}_p(X_{i_k} = 1) = p^n$

$\theta(p) = \mathbb{P}_p(|C(0)| = \infty) \leq \mathbb{P}_p(N_o(n) \geq 1)$ $\forall n \geq 1$

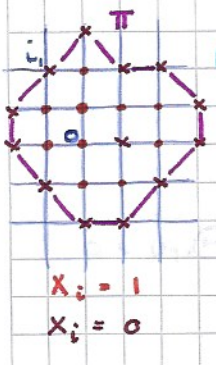
$\leq \mathbb{E}_p(N_o(n)) \leq (4p)^n$ $\forall n \geq 1$ $\xrightarrow{n \to \infty}$ 0

$p < 1/4$

P_v : 1) (Suite)

$$\mathbb{E}_p[N_0(n)] = \mathbb{E}_p\Big[\sum_{\gamma \in \mathcal{S}(n)} \mathbb{1}_{\{\gamma \text{ ouverte}\}}\Big] = \sum_{\gamma \in \mathcal{S}(n)} \mathbb{P}_p(\gamma \text{ ouvert})$$

$$= p^n N(n) = (4p)^n$$



II : $\Theta(p) \uparrow 1$ quand $p \uparrow 1$

$$\mathbb{P}_p(|C(0)| < \infty) \leq \underbrace{\mathbb{P}_p(X_0 = 0)}_{1-p} + \mathbb{P}_p(X_0 = 1, |C(0)| < \infty)$$

$\pi = (i_1, \dots, i_n)$ est un étoile $(*)$ - circuit de longueur n $|\pi| = n \Leftrightarrow$

- $i_1, \dots, i_n \in \mathbb{Z}^2$ tous distincts
- $\| i_k - i_{k-1} \|_2 \leq \sqrt{2}$ $\forall\, 2 \leq k \leq n$
- $\| i_n - i_1 \|_2 \leq \sqrt{2}$

$$\mathcal{C}(n) = \{ \pi : * \text{-circuit tq } |\pi| = n \text{ et } \pi \text{ entoure } 0 \}$$

$$C(n) = |\mathcal{C}(n)|$$

$$C_v(n) = |\{ \pi \in \mathcal{C}(n) : \pi \text{ vide} \}|$$

π est vide si $X_{i_k} = 0$ $\forall k = 1, \dots, n$.

Soit $\pi \in \mathcal{C}(n)$, $\mathbb{P}_p(\pi \text{ vide}) = \dots = (1-p)^n$

Aff : $C(n) \leq \frac{n}{2} 8^n$

$$\mathbb{P}_p(X_0 = 1, |C(0)| < \infty) = \mathbb{P}_p(\exists n \geq 4 \text{ tq } N_v(n) \geq 1)$$

$$= \mathbb{P}\Big(\bigcup_{n \geq 0} \{ N_v(n) \geq 1 \}\Big) \leq \sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(N_v(n) \geq 1)$$

$$\leq \sum_{n \geq 4} \mathbb{E}_p(N_v(n)) = *$$

$$\mathbb{E}_p(N_v(n)) = \mathbb{E}_p\Big[\sum_{\pi \in \mathcal{C}(n)} \mathbb{1}_{\{\pi \text{ vide}\}}\Big] = \sum_{\pi \in \mathcal{C}(4)} \mathbb{P}_p(\pi \text{ vide})$$

$$\leq ((1-p)8)^n \frac{n}{2}$$

$$* \leq \sum_{n \geq 4} ((1-p)8^0)^n$$

III : $p \longmapsto \Theta(p)$ est croissante.

p_1 p_2 $(Y_i)_{i \in \mathbb{Z}^2}$ iid, $Y_i \sim \mathcal{U}[0,1]$

$\mathbb{P}_{p_1}$ $\mathbb{P}_{p_2}$ $\forall\, 0 \leq p \leq 1$:

$$X_i^p = \begin{cases} 1 & \text{si } Y_i \leq p \\ 0 & \text{si } Y_i > p \end{cases}$$

Loi de $(Y_i)_{i \in \mathbb{Z}^2}$: $\mathcal{U}$.

Preuve: (suite)

Aff: $(X_i)^p_{i\in\mathbb{Z}^2} \sim \mathbb{P}_p$

$A, B \subset \mathbb{Z}^2$ de taille finie.

$\mathbb{Q}\{X_i^p = 1 \ \forall i\in A, \ X_j^p = 0 \ \forall j\in B\}$

$= \mathbb{Q}(U_i \le p \ \forall i\in A, U_j > p \ \forall j\in B) = \dots = p^{|A|}\cdot(1-p)^{|B|}$

$= \mathbb{P}_p(X_i = 1 \ \forall i\in A, X_j = 0 \ \forall j\in B)$

obs: $p_1 < p_2$. Alors $X_i^{p_1} = 1 \Rightarrow U_i \le p_1 \Rightarrow U_i \le p_2$

$\Rightarrow X_i^{p_2} = 1$

$\Theta(p_1) = \mathbb{P}_{p_1}(|C(0)| = \infty) = \mathbb{Q}(|C(0)| = \infty \text{ pour } (X_i^{p_1})_{i\in\mathbb{Z}^2})$

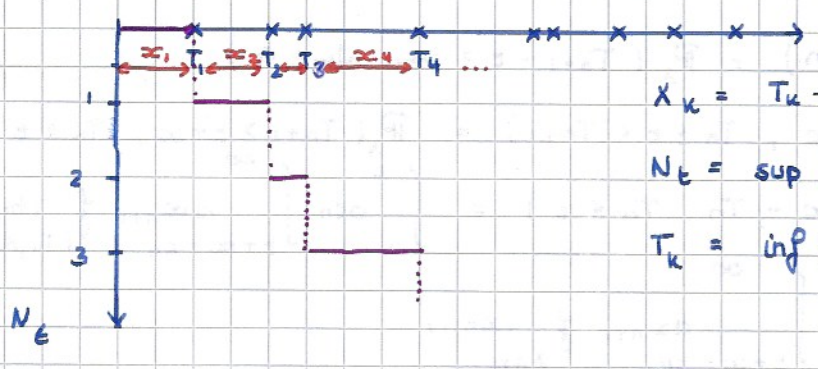
$\le \mathbb{Q}(|C(0)| = \infty \text{ pour pour } (X_i^{p_2})_{i\in\mathbb{Z}^2})$

$= \mathbb{P}_{p_2}(|C(0)| = \infty) = \Theta(p_2)$. ▨

le 17.04.19

Ch. II de Processus de Poisson.

II.1 Définitions et propriétés élémentaires:



$X_k = T_k - T_{k-1}$

$N_t = \sup\{k\ge 0 : T_k \le t\}$

$T_k = \inf\{t > 0 : N_t \ge k\}$

Déf II.1: Soient $X_1, X_2, \dots$ v.a., $\mathbb{P}(X_k > 0) = 1 \ \forall k$. On pose $T_0 = 0$

$T_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$. On pose $N_t = \sup\{k\ge 0 : T_k \le t\}$

$(N_t)_{t\ge 0}$ est appelé processus de comptage.

Rem: On suppose dans tout le chapitre que $\lim_{n\to\infty} T_n = +\infty$ p.s

X_k = le temps d'attente = durée de vie.

Déf II.2 : Un processus de comptage pour lequel les temps d'attentes sont iid est appelé un processus de renouvellement.

Déf II.3 : Un processus de Poisson d'intensité $\lambda > 0$ est un processus de renouvellement dont le temps d'attente $X_k \sim \exp(\lambda)$

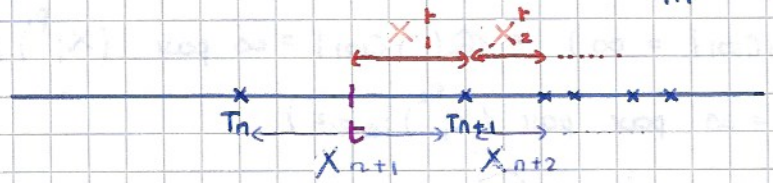
On note $\mathbb{P}_\lambda$ la loi de ce processus. ($PP(\lambda)$)

Thm II.1 : $(N_t)_{t\geq 0}$ $PP(\lambda)$. Alors $\forall t, s \geq 0$

1) $N_{t+s} - N_t \overset{\text{loi}}{=} N_s$

2) $\forall 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$, les v.a $(N_{t_{i+1}} - N_{t_i})_{i=1,\dots n-1}$ sont indép.

Pv :



$N_t = n$

$$\begin{cases} X_1^t = T_{N_t+1} - t \ , \dots , \ X_k^t = X_{N_t+k} & k \geq 2 \\ T_L^t = \sum_{k=1}^{L} X_k^t \end{cases}$$

$x \geq 0$:

$$\mathbb{P}_\lambda(X_1^t > x, N_t = n) = \mathbb{P}_\lambda(T_{n+1} - t > x, N_t = n)$$

$$= \mathbb{P}_\lambda(T_{n+1} > t+x, T_n \leq t < T_{n+1}) = \mathbb{P}_\lambda(T_{n+1} > t+x, T_n \leq t)$$

$$= \mathbb{P}_\lambda(X_{n+1} > t + x - T_n, T_n \leq t) = \int_0^t dt_n \int_{t+x-t_n}^{\infty} dx_{n+1} \, f_{(T_n, X_{n+1})}(t_n, x_{n+1})$$

$$= \int_0^t dt_n \, f_{T_n}(t_n) \int_{t+x-t_n}^{\infty} dx_{n+1} \, f_{X_{n+1}}(x_{n+1})$$

$$= \int_0^t dt_n \, f_{T_n}(t_n) \cdot \mathbb{P}_\lambda(X_{n+1} > t + x - t_n) = *$$

Perte de mémoire : $\mathbb{P}_\lambda(X_{n+1} > t + x - t_n) = \mathbb{P}_\lambda(X_{n+1} > t - t_n + x \mid X_{n+1} > t - t_n)$

$\cdot \ \mathbb{P}_\lambda(X_{n+1} > t - t_n) = \mathbb{P}_\lambda(X_{n+1} > x) \cdot \mathbb{P}_\lambda(X_{n+1} > t - t_n) = e^{-\lambda x} \mathbb{P}_\lambda(X_{n+1} > t - t_n)$

$$* = e^{-\lambda x} \int_0^t dt_n \int_{t-t_n}^{\infty} dx_{n+1} \, f_{(T_n, X_{n+1})}(t_n, x_{n+1})$$

$$= e^{-\lambda x} \cdot \mathbb{P}_\lambda(N_t = n)$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}_\lambda(X_1^t > x \mid N_t = n) = e^{-\lambda x}$$

Pr : (Suite)

$$\mathbb{P}_\lambda(X_1^t > x_1, X_2^t > x_2, \dots, X_k^t > x_k, N_t = n)$$

$$= \mathbb{P}_\lambda(X_{n+1} > t + x_1 - T_n, T_n \le t, X_{n+2} > x_2, \dots, X_{n+k} > x_k)$$

$$= \mathbb{P}_\lambda(X_{n+1} > t + x_1 - T_n, T_n \le t)\, \mathbb{P}_\lambda(X_{n+2} > x_2) \dots \mathbb{P}_\lambda(X_{n+k} > x_k)$$

$$= e^{-\lambda x_1} \cdot \mathbb{P}_\lambda(N_t = n)\, e^{-\lambda(x_2 + \dots + x_k)}$$

$$= e^{-\lambda(x_1 + \dots + x_k)} \cdot \mathbb{P}_\lambda(N_t = n)$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}_\lambda(X_1^t > x_1, \dots, X_k^t > x_k \mid N_t = n) = e^{-\lambda(x_1 + \dots + x_k)}$$

$$= \mathbb{P}_\lambda(X_1 > x_1, \dots, X_k > x_k)$$

$\Rightarrow$ la loi conjointe des v.a $(X_i^t)_{i \ge 1}$ sous $\mathbb{P}_\lambda(\cdot \mid N_t = n)$ coïncide avec la loi conjointe des v.a $(X_i)_{i \ge 1}$ sous $\mathbb{P}_\lambda$

1) $[N_{t+s} - N_t \overset{\text{loi}}{=} N_s]$

$m \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{P}_\lambda(N_{t+s} - N_t = m) = \sum_{n \ge 0} \mathbb{P}_\lambda(N_{t+s} - N_t = m \mid N_t = n)\, \mathbb{P}_\lambda(N_t = n)$$

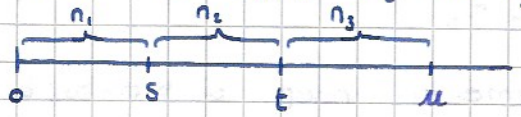
$$= \sum_{n \ge 0} \mathbb{P}_\lambda(T_m \le s < T_{m+1}) \cdot \mathbb{P}_\lambda(N_t = n)$$

$$= \sum_{n \ge 0} \mathbb{P}_\lambda(N_s = m)\, \mathbb{P}_\lambda(N_t = n) = \mathbb{P}_\lambda(N_s = m)$$

2) $N_{t+s} - N_t = \sup\{k \ge 0 : T_k^T \le s\}$

$N_s = \sup\{k \ge 0 : T_k \le s\}$

$\Rightarrow$ les v.a. $N_{t+s} - N_t$ sous $\mathbb{P}_\lambda(\cdot \mid N_t = n)$ ont la même loi que N_s sous $\mathbb{P}_\lambda$



$$\mathbb{P}_\lambda(N_s = n_1, N_t - N_s = n_2, N_u - N_t = n_3)$$

$$= \mathbb{P}_\lambda(N_t - N_s = n_2, N_u - N_t = n_3 \mid N_s = n_1) \cdot \mathbb{P}_\lambda(N_s = n_1)$$

$$= \mathbb{P}_\lambda(N_t - N_s = n_2, N_u - N_s = n_3 + n_2 \mid N_s = n_1) \cdot \mathbb{P}_\lambda(N_s = n_1)$$

$$= \mathbb{P}_\lambda(N_{t-s} = n_2, N_{u-s} = n_2 + n_3)\, \mathbb{P}_\lambda(N_s = n_1)$$

$$= \mathbb{P}_\lambda(N_{t-s} = n_2, N_{u-s} - N_{t-s} = n_2 + n_3 - N_{t-s})\, \mathbb{P}_\lambda(N_s = n_1)$$

$$= \mathbb{P}_\lambda(N_{t-s} = n_2, N_{u-s} - N_{t-s} = n_3) \cdot \mathbb{P}_\lambda(N_s = n_1)$$

$$= \dots = \mathbb{P}_\lambda(N_s = n_1)\, \mathbb{P}_\lambda(N_t - N_s = n_2) \cdot \mathbb{P}_\lambda(N_u - N_t = n_3)$$

Lemme II.1 : $(N_t)_{t\geq 0}$, PP(λ). Alors : $T_n \sim$ gamma(λ, n)

$$f_{T_n}(x) = \frac{1}{(n-1)!}\,\lambda^n\, x^{n-1}\, e^{-\lambda x}\, \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)$$

Pv : $\boxed{n=1}$ $T_1 = X_1 \sim \exp(\lambda) = \text{gamma}(\lambda, 1)$

Supp. ok pour T_n :

$$f_{T_{n+1}}(t) = f_{T_n + X_{n+1}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} du\, f_{T_n}(u)\, f_{X_{n+1}}(t-u)$$

$$= \int_0^t \frac{1}{(n-1)!}\,\lambda^n\, u^{n-1}\, e^{-\lambda u}\, \lambda e^{-\lambda(t-u)}\, du$$

$$= \frac{1}{(n-1)!}\,\lambda^{n+1}\, e^{-\lambda t} \int_0^t u^{n-1}\, du = \frac{1}{n!}\,\lambda^{n+1}\, t^n\, e^{-\lambda t}$$

▨

Thm II.2 : $(N_t)_{t\geq 0}$, PP(λ). Alors, $\forall t \geq s \geq 0$, $N_t - N_s \sim$ Poisson$(\lambda(t-s))$

Pv : Il suffit de considérer N_{t-s}. $n \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{P}_\lambda(N_{t-s} = n) = \mathbb{P}_\lambda(T_n \leq t-s < T_{n+1}) = \mathbb{P}_\lambda(T_n \leq t-s) -$$

$$\mathbb{P}_\lambda(T_n \leq t-s,\ T_{n+1} \leq t-s) = \int_0^{t-s} (f_{T_n}(u) - f_{T_{n+1}}(u))\, du$$

$$= \frac{\lambda^n}{n!} \int_0^{t-s} (n u^{n-1} e^{-\lambda u} - \lambda u^n e^{-\lambda u})\, du$$

$$= \frac{\lambda^n}{n!} \left[u^n e^{-\lambda u} \right]_0^{t-s} = \frac{(\lambda(t-s))^n}{n!}\, e^{-\lambda(t-s)}$$

Poisson$(\lambda(t-s))$

▨

Déf II.4 :

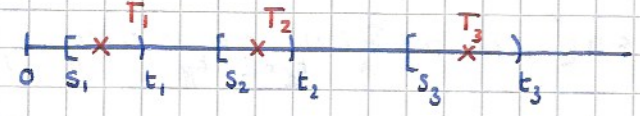
- On appelle accroissements d'un processus stochastique $(Z_t)_{t\geq 0}$ les différences $Z_t - Z_s$ avec $t \geq s \geq 0$.
- $(Z_t)_{t\geq 0}$ est à accroissements stationaires si $\forall t, s \geq 0$ on a $Z_{t+s} - Z_t \overset{\text{loi}}{=} Z_s - Z_0$
- $(Z_t)_{t\geq 0}$ est à accroissements indép. si $\forall\, 0 = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$ les v.a $(Z_{t_i} - Z_{t_{i-1}})_{i=1,\dots}$ sont indép.

Thm II.3 : Un processus de Comptage $(N_t)_{t\geq 0}$ est un PP(λ) $\Leftrightarrow$ ses accroissements $N_{t+s} - N_t$ sont stationaires, indép et de loi de Poisson(λs)

Proba et Stat :

le 17.04.19

Pv :



$\mathbb{P}(T_k \in [S_k, t_k),\ 1 \le k \le n) = ? = *$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \bullet & N_{t_k} - N_{S_k} = 1 \quad \forall k = 1 \dots n-1 \\ \bullet & N_{t_n} - N_{S_n} \geq 1 \\ \bullet & N_{S_k} - N_{t_{k-1}} = 0 \quad \forall k = 1, \dots n \end{array} \right\} (*)$$

$$* \ \mathbb{P}((*)) = \left(\prod_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(N_{t_k} - N_{S_k} = 1) \right) \left(\prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(N_{S_k} - N_{t_{k-1}} = 0) \right) \mathbb{P}(N_{t_n} - N_{S_n} \geq 1)$$

$$= \left(\prod_{k=1}^{n} \lambda (t_k - S_k) e^{-\lambda(t_k - S_k)} \right) \left(\prod_{k=1}^{n} e^{-\lambda(S_k - t_{k-1})} \right) \left(1 - e^{-\lambda(t_n - S_n)} \right)$$

$$= e^{-\lambda S_n} \left(1 - e^{-\lambda(t_n - S_n)} \right) \lambda^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} (t_k - S_k) = \left(e^{-\lambda S_n} - e^{-\lambda t_n} \right) \lambda^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} (t_k - S_k)$$

$$\overset{?}{=} \int_{S_1}^{t_1} dy_1 \dots \int_{S_n}^{t_n} dy_n \ f(y_1, \dots, y_n)$$

$$= \int_{S_1}^{t_1} dy_1 \dots \int_{S_n}^{t_n} dy_n \ \lambda^n e^{-\lambda y_n}$$

$$\Rightarrow f_{(T_1, T_2, \dots)}(y_1, \dots, y_n) = \lambda^n e^{-\lambda y_n} \quad \text{si } 0 \le y_1 \le \dots \le y_n.$$

---

le 09.05.19

Pv : (Suite)

$$\mathbb{P}(X_1 \le x_1, \dots, X_n \le x_n) = \mathbb{P}(T_1 \le x_1, T_2 - T_1 \le x_2, \dots, T_n - T_{n-1} \le x_n)$$

$$= \int_0^{x_1} dt_1 \int_{t_1}^{t_1 + x_2} dt_2 \dots \int_{t_{n-1}}^{t_{n-1} + x_n} dt_n \ f_{(T_1, \dots, T_n)}(t_1, \dots, t_n)$$

$$y_k = t_k - t_{k-1} \quad = \int_0^{x_1} dy_1 \int_0^{x_2} dy_2 \dots \int_0^{x_n} dy_n \ f_{(T_1, \dots, T_n)}(y_1, y_1 + y_2, \dots, y_1 + \dots + y_n)$$

$$\Rightarrow f_{(X_1, \dots X_n)}(x_1, \dots, x_n) = \lambda^n e^{-\lambda(y_1 + \dots + y_n)} = \prod_{k=1}^{n} \lambda e^{-\lambda y_k}$$

qui est la densité d'une v.a. $\exp(\lambda)$

$\Rightarrow X_1, \dots, X_n$ iid $\sim \exp(\lambda) \Rightarrow PP(\lambda)$

Lemme II.2 : $(N_t)_{t\geq 0}$. $PP(\lambda)$. $0 < t_1 < \dots < t_k$.

Alors, $\forall\, 0 \leq n_1 \leq n_2 \dots \leq n_k$, on a • $\mathbb{P}_\lambda(N_{t_k+\varepsilon} - N_{t_k} = 0 \,/\, N_{t_j} = n_j,\ 1 \leq j \leq k)$

$= 1 - \lambda\varepsilon + o(\varepsilon)$

• $\mathbb{P}_\lambda(N_{t_k+\varepsilon} - N_{t_k} = 1 \mid N_{t_j} = n_j,\ 1 \leq j \leq k) = \lambda\varepsilon + o(\varepsilon)$

• $\mathbb{P}_\lambda(N_{t_k+\varepsilon} - N_{t_k} \geq 2 \mid N_{t_j} = n_j,\ 1 \leq j \leq k) = o(\varepsilon)$

Pv : $\mathbb{P}_\lambda(N_{t_k+\varepsilon} - N_{t_k} = n \mid N_{t_j} = n_j,\ 1 \leq j \leq k)$

$= \mathbb{P}_\lambda(N_{t_k+\varepsilon} - N_{t_k} = n \mid N_{t_j} - N_{t_{j-1}} = n_j - n_{j-1},\ 1 \leq j \leq k)$

$= \mathbb{P}_\lambda(N_{t_k+\varepsilon} - N_{t_k} = n) = \mathbb{P}_\lambda(N_\varepsilon = n) = \dfrac{(\lambda\varepsilon)^n}{n!} e^{-\lambda\varepsilon}$

$\underline{n=0}$: $e^{-\lambda\varepsilon} = 1 - \lambda\varepsilon + o(\varepsilon)$

$\underline{n=1}$: $\lambda\varepsilon e^{-\lambda\varepsilon} = \lambda\varepsilon(1 + o(\varepsilon)) = \lambda\varepsilon - o(\varepsilon)$ ∎

Thm II.4 : Un processus de comptage satisfaisant • est un $PP(\lambda)$

Pv : $0 \leq t_1 < \dots < t_k$, $0 \leq n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_k$, $A = \{N_{t_j} = n_j,\ 1 \leq j \leq k\}$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $p_n(t) = \mathbb{P}(N_{t_k+t} - N_{t_k} = n \,/\, A)$

Il suffit de mq $p_n(t) = \dfrac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$ $\quad n \in \mathbb{N}$ $\quad t \geq 0$

$p_n(t+\varepsilon) = \mathbb{P}(N_{t_k+t+\varepsilon} - N_{t_k} = n \mid A)$

$= \sum_{m=0}^{n} \mathbb{P}(N_{t_k+t+\varepsilon} - N_{t_k} = n \mid A,\ N_{t_k+t} - N_{t_k} = n-m) \cdot \mathbb{P}(N_{t_k+t} - N_{t_k} = n-m \mid A)$

$= \sum_{m=0}^{n} \mathbb{P}(N_{t_k+t+\varepsilon} - N_{t_k+t} = m \mid A,\ N_{t_k+t} - N_{t_k} = n-m) \cdot p_{n-m}(t)$

$= \underbrace{\left[1 - \lambda\varepsilon + o(\varepsilon)\right] p_n(t)}_{m=0} + \underbrace{\mathbb{1}_{\{n \geq 1\}} (\lambda\varepsilon + o(\varepsilon)) p_{n-1}(t)}_{m=1} + o(\varepsilon)$

$\forall t > 0$ $\quad p_n(t+\varepsilon) = (1 - \lambda\varepsilon) p_n(t) + \mathbb{1}_{\{n \geq 1\}} \lambda\varepsilon\, p_{n-1}(t) + o(\varepsilon)$

$\Rightarrow \dfrac{p_n(t+\varepsilon) - p_n(t)}{\varepsilon} = -\lambda p_n(t) + \mathbb{1}_{\{n \geq 1\}} \lambda p_{n-1}(t) + \dfrac{o(\varepsilon)}{\varepsilon}$

$p_n'(t) = -\lambda p_n(t) + \mathbb{1}_{\{n \geq 1\}} \lambda p_{n-1}(t)$

On a finalement : $\begin{cases} p_n'(t) = -\lambda p_n(t) + \mathbb{1}_{\{n \geq 1\}} \lambda p_{n-1}(t) \\ p_n(0) = \delta_{0,n} \end{cases}$

Proba :

PV : (Suite)

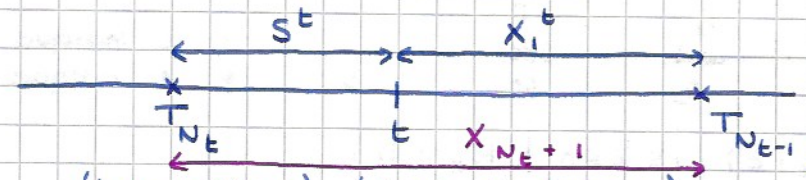
$n=0$: $\begin{cases} p_0'(t) = -\lambda p_0(t) \\ p_0(0) = 1 \end{cases} \Rightarrow p_0(t) = e^{-\lambda t}$

Par récurrence : $\begin{cases} p_{n+1}'(t) = -\lambda p_{n+1}(t) + \lambda \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} \\ p_{n+1}(0) = 0 \end{cases}$

Vérifier que la solution est $p_{n+1}(t) = \frac{(\lambda t)^{n+1}}{(n+1)!} e^{-\lambda t}$ ☑

II.2 Autres propriétés :

II.2.1 Le paradoxe de l'autobus :



(tram précédent) (Sortie du bureau) (tram suivant)

On a vu que $X_t' \sim \exp(\lambda)$

$s>0$: $\mathbb{P}_\lambda(S^t > s) = \mathbb{P}_\lambda(N_t - N_{t-s} = 0) = \mathbb{P}_\lambda(N_s = 0)$

$= \begin{cases} e^{-\lambda s} & \text{si } s \leq t \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$\mathbb{E}_\lambda[T_{N_t+1} - T_{N_t}] = \mathbb{E}_\lambda[S^t + X_t'] = \mathbb{E}_\lambda[S^t] + \underbrace{\mathbb{E}_\lambda[X_t']}_{1/\lambda}$

$\mathbb{E}_\lambda(S^t) = \int_0^\infty \mathbb{P}_\lambda(S^t \geq s)\, ds = \int_0^t e^{-\lambda s}\, ds$

$= -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda s} \Big|_0^t = \frac{1}{\lambda}(1 - e^{-\lambda t}) \simeq \frac{1}{\lambda}$ pour $t \gg 1$

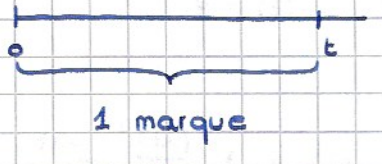


la proba de tomber dans un grand intervalle est plus grande que celle de tomber dans un petit, d'où le "paradoxe".

$\mathbb{E}_\lambda [X_{N_t+1}] \geq \frac{2}{\lambda}$ alors que $\mathbb{E}_\lambda [X_n] = \frac{1}{\lambda}$ $\forall n \geq 1$

II.2.2 PP et statistique d'ordre :

$t > 0$.



$0 \leq s \leq t$

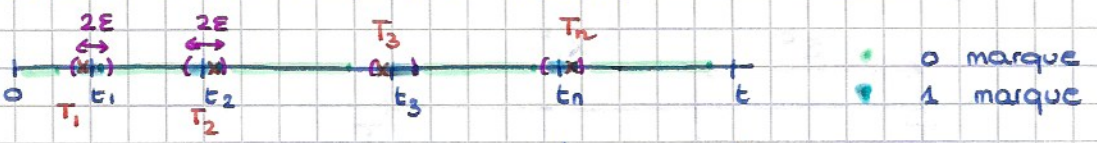
$\mathbb{P}_\lambda (T_1 \leq s \mid N_t = 1)$

$$= \frac{\mathbb{P}_\lambda (T_1 \leq s, N_1 = 1)}{\mathbb{P}_\lambda (N_t = 1)} = \frac{\mathbb{P}_\lambda (N_s = 1, N_t - N_s = 0)}{\mathbb{P}_\lambda (N_t = 1)} = \frac{\mathbb{P}_\lambda (N_s = 1)\, \mathbb{P}_\lambda (N_t - N_s = 0)}{\mathbb{P}_\lambda (N_t = 1)}$$

$$= \frac{(\lambda s e^{-\lambda s})(e^{-\lambda (t-s)})}{\lambda t e^{-\lambda t}} = \frac{s}{t}$$

$\Rightarrow$ La loi de T_1 , cond. à $N_t = 1$, est uniforme sur $[0, t]$

$0 < t_1 < t_2 \dots < t_n < t$, $\varepsilon > 0$ (petit)



$\mathbb{P}_\lambda (T_k \in (t_k - \varepsilon, t_k + \varepsilon) , 1 \leq k \leq n \mid N_t = n)$

$$= \frac{\mathbb{P}_\lambda (T_k \in (t_k - \varepsilon, t_k + \varepsilon) , N_t = n)}{\mathbb{P}_\lambda (N_t = n)} = \frac{\mathbb{P}_\lambda (N_{t_k + \varepsilon} - N_{t_k - \varepsilon} = 1, N_{t_k - \varepsilon} - N_{t_{k-1} + \varepsilon} = 0)}{\mathbb{P}_\lambda (N_t = n)}$$

$$= \frac{e^{-\lambda (t - 2\varepsilon n)} (\lambda 2\varepsilon e^{-\lambda \varepsilon \cdot 2})^n}{\frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}} = n! \left(\frac{2\varepsilon}{t} \right)^n$$

$$= \int_{t_1 - \varepsilon}^{t_1 + \varepsilon} ds_1 \int \dots \int_{t_n - \varepsilon}^{t_n + \varepsilon} ds_n \underbrace{n! \frac{1}{t^n}}_{f_{(T_1, \dots T_n) \mid N_t} (s_1, \dots s_n \mid n)}$$

Loi conjointe de n v.a. iid $\sim \mathcal{U}[0, t]$

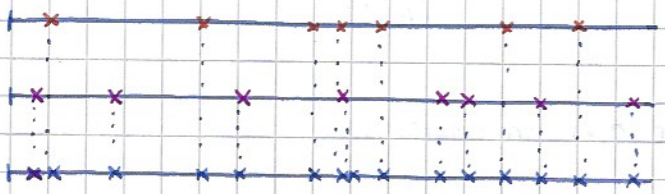
$= n! \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{t}$ statistique d'ordre

Proba :

le 08.05.19

II.2.3 Superposition et amincissement :

A l'exam. 100 %



$(N_t^1)_{t\geq 0}$ $PP(\lambda_1)$

$(N_t^2)_{t\geq 0}$ $PP(\lambda_2)$) Indép !

$(N_t)_{t\geq 0}$ superposition de (N_t^1) et (N_t^2)

Thm II.5 : $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$.

(N_t^1) $PP(\lambda_1)$ et (N_t^2) $PP(\lambda_2)$ indépendants

Alors $N_t = N_t^1 + N_t^2$ est un $PP(\lambda)$

Pv :

$$\mathbb{P}(N_t - N_s = n) = \mathbb{P}(N_t^1 - N_s^1 + N_t^2 - N_s^2 = n)$$

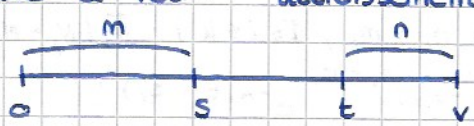
$$= \sum_{m=0}^{n} \mathbb{P}(N_t^1 - N_s^1 = m,\ N_t^2 - N_s^2 = n-m)$$

$$= \sum_{m=0}^{n} \mathbb{P}(N_t^1 - N_s^1 = m)\ \mathbb{P}(N_t^2 - N_s^2 = n-m)$$

$$= \sum_{m=0}^{n} \frac{(\lambda_1(t-s))^m}{m!} e^{-\lambda_1(t-s)} \frac{(\lambda_2(t-s))^{n-m}}{(n-m)!} e^{-\lambda_2(t-s)}$$

$$= \frac{(t-s)^n}{n!} e^{-\lambda(t-s)} \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} \lambda_1^m \lambda_2^{n-m} = \frac{(\lambda(t-s))^n}{n!} e^{-\lambda(t-s)}$$

Reste à voir : accroissement de (N_t) indép.



$$\mathbb{P}(N_s = m,\ N_v - N_t = n) = \mathbb{P}(N_s^1 + N_s^2 = m,\ N_v^1 - N_t^1 + N_v^2 - N_t^2 = n)$$

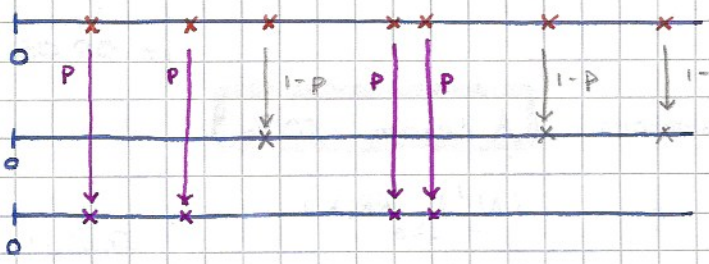
$$= \sum_{k=0}^{m} \sum_{L=0}^{n} \mathbb{P}(N_s^1 = k, N_s^2 = m-k,\ N_v^1 - N_t^1 = L, N_v^2 - N_t^2 = n-L)$$

$$= \sum_{k=0}^{m} \sum_{L=0}^{n} \mathbb{P}(N_s^1 = k;\ N_v^1 - N_t^1 = L)\, \mathbb{P}(N_s^2 = m-k,\ N_v^2 - N_t^2 = n-L)$$

$$= \sum_{k=0}^{m} \sum_{L=0}^{n} \mathbb{P}(N_s^1 = k)\, \mathbb{P}(N_v^1 - N_t^1 = L)\, \mathbb{P}(N_s^2 = m-k)\, \mathbb{P}(N_v^2 - N_t^2 = n-L)$$

$$= \sum_{k=0}^{m} \mathbb{P}(N_s^1 = k, N_s^2 = m-k) \cdot \sum_{L=0}^{n} \mathbb{P}(N_v^1 - N_t^1 = L, N_v^2 - N_t^2 = n-L)$$

$$= \mathbb{P}(N_s = m)\ \mathbb{P}(N_v - N_t = n)$$



$(N_t)_{t\geq 0}$ PP(λ)

$0<p<1$

(N_t^2)

(N_t^1)

Thm II.6 : $(N_t)_{t\geq 0}$ PP(λ) , $p \in (0,1)$ on colorie .....

Alors $(N_t^1)_{t\geq 0}$ PP(λp)

$(N_t^2)_{t\geq 0}$ PP($\lambda(1-p)$) indépendants

procès. d'amincissement.

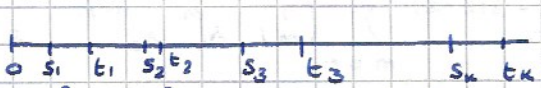
Pv : $\mathbb{P}(N_t^1 - N_s^1 = n) = \sum_{m\geq n} \mathbb{P}(N_t^1 - N_s^1 = n \mid N_t - N_s = m)\, \mathbb{P}(N_t - N_s = m)$

$= \sum_{m\geq n} \binom{m}{n} p^n (1-p)^{m-n} \frac{(\lambda(t-s))^m}{m!} e^{-\lambda(t-s)}$

$= e^{-\lambda(t-s)} p^n \frac{(\lambda(t-s))^n}{n!} \sum_{m\geq n} \frac{1}{(m-n)!} (1-p)^{m-n} (\lambda(t-s))^{m-n}$

$= \frac{(p\lambda(t-s))^n}{n!} e^{-\lambda(t-s)} e^{\lambda(t-s)(1-p)} = \frac{(\lambda p(t-s))^n}{n!} e^{\lambda p(t-s)}$

Pv : (Suite) le 15.05.19



$\mathbb{P}_\lambda(N_{t_i}^1 - N_{s_i}^1 = n_i,\ N_{t_i}^2 - N_{s_i}^2 = m_i,\ 1\leq i\leq k)$

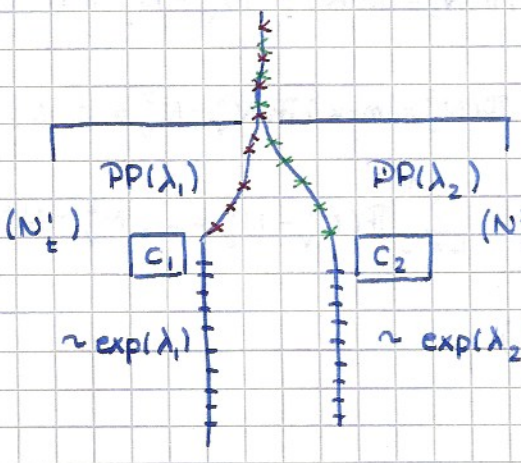
$= \mathbb{P}_\lambda(N_{t_i}^1 - N_{s_i}^1 = n_i,\ 1\leq i\leq k \mid N_t - N_s = n_i + m_i,\ 1\leq i\leq k) \cdot \mathbb{P}_\lambda(N_t - N_s = n_i + m_i,\ 1\leq i\leq k)$

$= \left\{ \prod_{i=1}^k \binom{n_i+m_i}{n_i} p^{n_i} (1-p)^{m_i} \right\} \left\{ \prod_{i=1}^k \frac{(\lambda(t_i-s_i))^{n_i+m_i}}{(n_i+m_i)!} e^{-\lambda(t_i-s_i)} \right\}$

$= \left\{ \prod_{i=1}^k \frac{(\lambda p(t_i-s_i))^{n_i}}{n_i!} e^{-\lambda p(t_i-s_i)} \right\} \left\{ \prod_{i=1}^k \frac{(\lambda(1-p)(t_i-s_i))^{m_i}}{m_i!} e^{-\lambda(1-p)(\lambda t_i - s_i)} \right\}$

$= \mathbb{P}(N_{t_i}^1 - N_{s_i}^1 = n_i)\ \mathbb{P}(N_{\delta_i}^2 - N_{\delta_i}^2 = m_i)$ ☒

Exo :



Q : $\mathbb{P}(T_n^1 \leq T_m^2) = ?$

$\{T_n^1 < T_m^2\}$ = { parmis les $n+m-1$ premiers clients à quitter le magasin, au moins n sont passés par la première caisse }

Proba :

Ex : (Suite)

$$\mathbb{P}(T_n^1 < T_m^2) = \sum_{k=n}^{n+m-1} \binom{n+m-1}{k} p^k (1-p)^{n+m-1-k} = *$$

On veut : $N_t = N_t^1 + N_t^2$, $\lambda_1 = p \cdot \lambda = p(\lambda_1 + \lambda_2) \Rightarrow p = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$

$$* = \sum_{k=n}^{n+m-1} \binom{n+m-1}{k} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^k \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{n+m-1-k}$$

II.2.4 : Processus de Poisson non-homogène :

$\lambda \rightsquigarrow \lambda(t)$ fonction continue

Déf II.7 : Un processus de comptage à accroissements indép. $(N_t)_{t \geq 0}$ est un PP non homogène de fct de densité $\lambda(t) \geq 0$, $t \geq 0$ si :

① $\mathbb{P}(N_{t+\varepsilon} - N_t = 1) = \lambda(t)\varepsilon + o(\varepsilon)$

② $\mathbb{P}(N_{t+\varepsilon} - N_t \geq 2) = o(\varepsilon)$

Thm II.7 : (N_t) PPNH$(\lambda(t))$

Alors $\forall t \geq s \geq 0$, $N_t - N_s \sim$ Poisson $(m(t) - m(s))$

où $m(u) = \int_0^u \lambda(v)\, dv$.

Pv : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall s < t$: $p_n(s,t) = \mathbb{P}(N_t - N_s = n)$

En procédant comme avant,

$$p_n(s, t+\varepsilon) = (1 - \lambda(t)\varepsilon)\, p_n(s,t) + \mathbb{1}_{\{n \geq 1\}} \lambda(t)\varepsilon\, p_{n-1}(s,t) + o(\varepsilon)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p_n(s,s) = \delta_{0,n} \\ \frac{\partial}{\partial t} p_n(s,t) = -\lambda(t) p_n(s,t) + \mathbb{1}_{\{n \geq 1\}} \lambda(t)\, p_{n-1}(s,t) \end{cases}$$

$\underline{n=0}$: $\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} p_0(s,t) = -\lambda(t)\, p_0(s,t) \\ p_0(s,s) = 1 \end{cases} \Rightarrow p_0(s,t) = e^{-\int_s^t \lambda(u)\, du}$

etc par récurrence ☑

II.2.5 Le processus de Poisson composé :

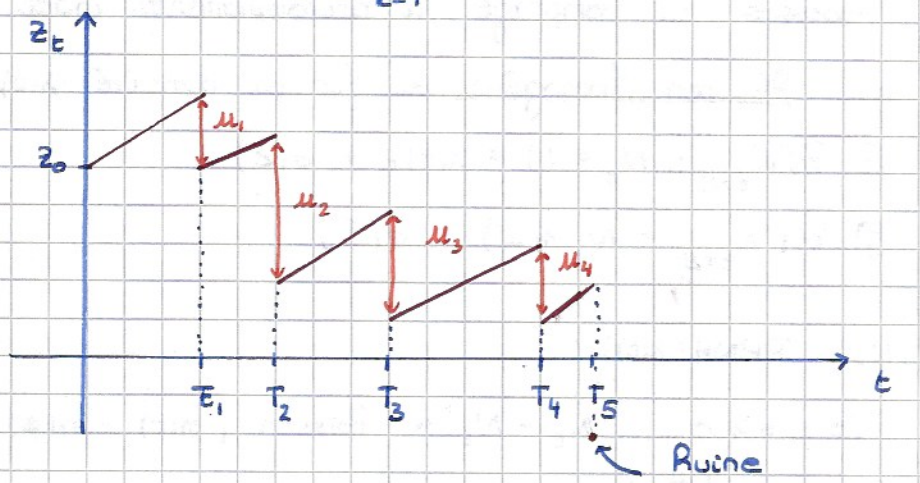
Déf II.9 : $(N_t)_{t\geq 0}$ $PP(\lambda)$, $U_1, U_2, \dots$ v.a iid et indép. de $(N_t)_{t\geq 0}$

Le processus $Y_t = \sum_{k=1}^{N_t} U_k$, $t \geq 0$ est le processus de Poisson composé.

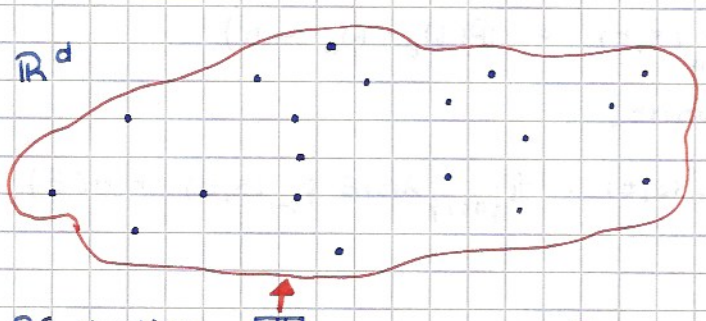
Ex II.2 : Réserves d'une compagnie d'assurance

- primes de taux c.
- Coût du n-ème sinistre : U_n $(U_k)_{k\geq 1}$ iid.
- Les sinistres ont lieu aux instants d'un $PP(\lambda)$
- Réserve initiale Z_0

$\Rightarrow Z_t = Z_0 + c\cdot t - \sum_{k=1}^{N_t} U_k$ (N_t : # de sinistre jusqu'au temps t)



II.2.6 Processus de Poisson spatial :



Réalisation Π, ss-ens. dénomb. de $\mathbb{R}^d$.

Encodé par les v.a. : $(N(A))_{A\in\mathcal{B}^d}$

Proba :

Déf 11.10 : le ss-ens. aléatoire dénombrable $\Pi \subset \mathbb{R}^d$ est un processus de Poisson spatial d'intensité $\lambda > 0$ si

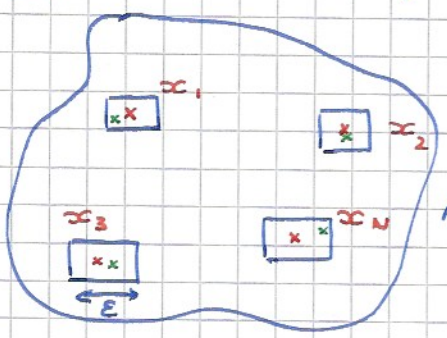
- $N(A) \sim$ poisson $(\lambda |A|)$ $\forall A \in \mathcal{B}^d$ (|A| : volume de A)
- $A_1, \dots, A_n \subset \mathbb{R}^d$ tq $A_i \cap A_j = \emptyset$ $\forall i \neq j$

  $\Rightarrow N(A_1) \dots N(A_n)$ sont indépendants.

Thm 11.8 : Π PPS(λ) sur $\mathbb{R}^d$

$A \subset \mathbb{R}^d$ ouvert, $0 < |A| < \infty$. Alors conditionnellement à $N(A) = n$ les n points de $\Pi \cap A$ suivent la même loi que n points choisi au hasard unif. indép dans A.

Pv : $\exists \varepsilon > 0$, $B_\varepsilon(x_i) \subset A$ $\forall i$, $B_\varepsilon(x_i) \cap B_\varepsilon(x_j) = \emptyset$ $\forall i \neq j$



n pts de $\Pi \cap A$: $X_1, \dots, X_n$ numérotés au hasard unif.

$$\mathbb{P}_\lambda(X_i \in B_\varepsilon(x_i),\ 1 \le i \le n \mid N(A) = n) = \frac{\mathbb{P}_\lambda(X_i \in B_\varepsilon(x_i),\ 1 \le i \le n,\ N(A) = n)}{\mathbb{P}_\lambda(N(A) = n)}$$

$$= \frac{1}{n!} \frac{\mathbb{P}_\lambda(N(B_\varepsilon(x_i)) = 1,\ 1 \le i \le n,\ N(A \setminus \cup_{i=1}^n B_\varepsilon(x_i)) = 0)}{\mathbb{P}_\lambda(N(A) = n)}$$

$$\overset{?}{=} \frac{\frac{1}{n!} \prod_{i=1}^n \overbrace{\mathbb{P}_\lambda(N(B_\varepsilon(x_i)) = 1)}^{(\lambda\varepsilon^d) e^{-\lambda\varepsilon^d}} \overbrace{\mathbb{P}_\lambda(N(A \setminus \cup_{i=1}^n B_\varepsilon(x_i)) = 0)}^{e^{-\lambda(|A| - n\varepsilon^d)}}}{\underbrace{\mathbb{P}_\lambda(N(A) = n)}_{\frac{(\lambda|A|)^n}{n!} e^{-\lambda|A|}}}$$

$$= e^{d_n} \left(\frac{1}{|A|}\right)^n$$

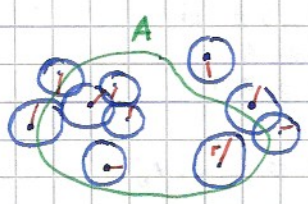
$$= \int_{B_\varepsilon(x_1)} dy_1 \int \dots \int_{B_\varepsilon(x_n)} dy_n \ \frac{1}{|A|^n}$$

densité conjointe des n points

$\blacksquare$

Ex II.3 : Le modèle booléen

$\mathbb{R}^2$, Π PPS(λ) , $r > 0$



$$\overline{\Pi} = \bigcup_{x \in \Pi} D_r(x)$$

$$D_r(x) = \{ y \in \mathbb{R}^2 \mid \|x - y\|_2 \leq r \}$$

$A \subset \mathbb{R}^2$, $0 < |A| < \infty$

Q : $\mathbb{E}_\lambda \left(\dfrac{|A \cap \overline{\Pi}|}{|A|} \right) = ?$

$$\mathbb{E}_\lambda \left(|A \cap \overline{\Pi}| \right) = \mathbb{E}_\lambda \left(\int_A \mathbb{1}_{\{x \in \overline{\Pi}\}} \, dx \right) = \int_A \mathbb{P}_\lambda (x \in \overline{\Pi}) \, dx$$

$$= (1 - e^{-\lambda \pi r^2}) \, |A|$$

$$\mathbb{P}_\lambda (x \notin \overline{\Pi}) = \mathbb{P}_\lambda (N(D_r(x)) = 0) = e^{-\lambda \pi r^2}$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}_\lambda \left[\frac{|A \cap \overline{\Pi}|}{|A|} \right] = 1 - e^{-\lambda \pi r^2}$$

Proba : le 15.05.19

Ch. 12 Introduction à la statistique :

12.1 Estimateur :

Observation : $x_1, x_2, \dots, x_N \in \mathbb{R}^d$

But : Construire un modèle tq $x_1, \dots, x_N$ correspondent à n réalisations indép. d'une v.a. X.

Déf :
- n - échantillon : de loi $\mathbb{P}$, n v.a $X_1 \dots X_n$ iid
- réalisation : d'un n-échantillon, résultat de n tirages indép. selon $\mathbb{P}$, $x_1, \dots x_n \in \mathbb{R}^d$

Ex :
- Sondage Binaire de n-individus :
  $\rightsquigarrow X_1, \dots, X_n$ iid, $X_i \sim \text{Bern}(p)$ $p \in [0,1]$
- Durée de vie d'un composant électrique :
  $\rightsquigarrow X_1, \dots, X_n$ iid, $X_i \sim \exp(\lambda)$ $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$
- Taille des individus d'une population homogène :
  $\rightsquigarrow X_1, \dots, X_n$ iid, $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ $\mu \in \mathbb{R}_*^+$ $\sigma^2 \in \mathbb{R}_*^+$

Dans tous les cas, • la forme de la loi est connue
• les paramètres de la loi sont inconnus

$\{\mathbb{P}_\theta\}_\theta$, $\theta \in \Theta$

- Estimation paramétrique : prédire une valeure approchée de θ à partir des observations.

le 22.05.19

Déf 12.2 : $X_1, \dots, X_n$ n-échantillons $\sim \mathbb{P}_\theta$ $\theta \in \Theta$

- Statistique : $= F(X_1, \dots, X_n)$
- Estimateur de $g(\theta)$ = statistique servant à estimer $g(\theta)$

Déf 12.3 : Un estimateur T_n de $g(\theta)$ est consistant si : $\forall \varepsilon > 0$

$$\mathbb{P}_\theta(|T_n - g(\theta)| \geq \varepsilon) \xrightarrow{n \to \infty} 0$$

Exe :

- Moyenne empirique :

$X_1, \dots, X_n$ n-éch. $\sim \mathbb{P}_\theta$.

Cherche à estimer : $g(\theta) = \mathbb{E}_\theta(X_1)$

Aff : $\bar{X}_n = \frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n)$ estimateur de $g(\theta)$ consistant.

LFGN : $\mathbb{P}_\theta(|\bar{X}_n - \mathbb{E}_\theta(X_1)| \geq \varepsilon) \xrightarrow{n \to \infty} 0 \quad \forall \varepsilon > 0$

- Variance empirique :

Cherche à estimer : $g(\theta) = \mathrm{Var}_\theta(X_1)$

$$\hat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k\right)^2 \xrightarrow{n \to \infty} \mathrm{Var}_\theta(X_1)$$

$$\to \mathbb{E}_\theta(X_1^2) \qquad \to \mathbb{E}_\theta(X_1)^2$$

- Covariance empirique :

$(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$

Cherche à estimer : $g(\theta) = \mathrm{Cov}_\theta(X_1, Y_1)$

$$\hat{\tau}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k Y_k - \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n Y_k\right)$$

$$\to \mathbb{E}_\theta(X_1 Y_1) \qquad \to \mathbb{E}_\theta(X_1)\mathbb{E}_\theta(Y_1) \qquad \to \mathrm{Cov}_\theta(X_1, Y_1)$$

- Monte-Carlo : $a < b$ dans $\mathbb{R}$

densité d'une v.a $\sim \mathcal{U}[a,b]$

$$I = \int_a^b h(x)\,dx = (b-a)\int_{-\infty}^{\infty} h(x)\,\frac{\mathbb{1}_{(a,b)}(x)}{b-a}\,dx$$

$= (b-a)\,\mathbb{E}(h(U))$ où U est un v.a $\sim \mathcal{U}[a,b]$

$$\hat{I}_n = (b-a)\,\underbrace{\frac{1}{n}(h(U_1) + \dots + h(U_n))}_{\mathbb{E}(h(U))} \quad \text{où } U_i \text{ v.a iid} \sim \mathcal{U}[a,b]$$

$$\Rightarrow \hat{I}_n \xrightarrow{n \to \infty} I$$

Proba :

le 22.05.19

12.1.3 : Estimateur du maximum de vraissemblance :

$X_1, \dots, X_n$ n-éch $\sim \mathbb{P}_\theta$, $\theta \in \Theta$

$x_1, \dots, x_n$ réalisation

Idée : $\theta \longmapsto \mathbb{P}_\theta(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n)$

On cherche la valeur de θ maximisant cette fonction.

Variable / paramètres

Déf 12.6 : La vraissemblance (ou fonction de vraissemblance) $L(\theta; x_1, \dots, x_n)$ d'un modèle en $x_1, \dots, x_n$ est :

$$L(\theta, x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} \mathbb{P}_\theta(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) & \text{si } X_i \text{ discrètes} \\ f_{(X_1, \dots X_n)\theta}(x_1, \dots x_n) & \text{si } X_i \text{ à densité} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \prod_{k=1}^n \mathbb{P}_\theta(X_k = x_k) \\ \prod_{k=1}^n f_\theta(x_k) \end{cases}$$

Déf 12.7 : L'estimateur du maximum de vraissemblance de θ est la v.a. $\hat{\theta}(X_1, \dots, X_n) = \max L(\theta; X_1, \dots, X_n)$

Ex :

- $X_1, \dots, X_n$ n-éch, $\sim \exp(\lambda)$

$$L(\lambda, x_1, \dots, x_n) = \prod_{k=1}^n \lambda e^{-\lambda x_k} = \lambda^n e^{-\lambda \sum_{k=1}^n x_k}$$

$$\log L(\lambda; x_1, \dots, x_n) = n \log \lambda - \lambda \sum_{k=1}^n x_k$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \log(L) = \frac{n}{\lambda} - \sum_{k=1}^n x_k = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{n}{\lambda} = \sum_{k=1}^n x_k$$

$$\lambda = n / \sum_{k=1}^n x_k \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\bar{X}_n} = \boxed{\lambda_n = \frac{n}{\sum_{k=1}^n X_k}}$$

- $X_1, \dots X_n$ n-éch, $\sim U[0, \theta]$, $\theta > 0$, $x_1, \dots, x_n > 0$

$$L(\theta, x_1, \dots x_n) = \prod_{k=1}^n \frac{1}{\theta} \mathbb{1}_{\{x_k \le \theta\}} = \theta^{-n} \mathbb{1}_{\{\max\{x_1, \dots, x_n\} \le \theta\}}$$

si $\theta < \max\{x_1, \dots x_n\}$, alors $L(\theta, x_1, \dots x_n) = 0$

Sup $\theta \ge \max\{x_1, \dots, x_n\} \Rightarrow L(\theta, x_1, \dots x_n) = \theta^{-n}$ ↘ en θ

$\Rightarrow$ max en $\theta = \max\{x_1, \dots x_n\} \Rightarrow \hat{\theta} = \max\{X_1, \dots, X_n\}$

Exc : $X_1, \dots, X_n$ n-éch, $\sim \mathcal{U}[0,\theta]$, $\theta > 0$

$\mathbb{E}_\theta(X_1) = \frac{\theta}{2} \Rightarrow \theta = 2\mathbb{E}_\theta(X_1)$

$\Rightarrow \tilde{\theta} = 2\overline{X_n}$ estimateur de θ constitant

Q : lequel des estimateurs $\hat{\theta}$ et $\tilde{\theta}$ est le meilleur ?

12.1.4 Comparaison d'estimateurs :

Déf 12.8 : Le risque quadratique associé à un estimateur $\hat{\theta}$ de θ est défini par : $\mathcal{R}_{\hat{\theta}}(\theta) = \mathbb{E}_\theta((\hat{\theta}-\theta)^2) = \underset{\theta}{\mathrm{Var}}(\hat{\theta}) + (\underset{\theta}{\mathbb{E}}(\hat{\theta}-\theta))^2$

Déf 12.9 : Si $\hat{\theta}_1$ et $\hat{\theta}_2$ sont 2 estimateurs de θ, on dira que $\hat{\theta}_1$ est meilleur que $\hat{\theta}_2$ si $\mathcal{R}_{\hat{\theta}_1}(\theta) < \mathcal{R}_{\hat{\theta}_2}(\theta) \quad \forall \theta \in \Theta$.

Exc : $X_1, \dots, X_n$ n-éch, $\sim \mathcal{U}[0,\theta]$, $\theta > 0$

- $\tilde{\theta} = 2\overline{X_n} = \frac{2}{n}(X_1 + \dots + X_n)$

$\mathbb{E}_\theta(\tilde{\theta}) = \frac{2}{n}(\mathbb{E}_\theta(X_1) + \dots + \mathbb{E}_\theta(X_n)) = \frac{2}{n} \cdot n \cdot \frac{\theta}{2} = \theta$

$\Rightarrow \mathcal{R}_{\tilde{\theta}}(\theta) = \mathrm{Var}_\theta(\tilde{\theta}) = \frac{4}{n^2} \cdot n \cdot \mathrm{Var}_\theta(X_1) = \frac{\theta^2}{3n}$

- $\hat{\theta} = \max\{X_1, \dots, X_n\}$

$\mathbb{P}_\theta(\hat{\theta} \le x) = \mathbb{P}_\theta(\max\{X_1, \dots, X_n\} \le x) = \mathbb{P}_\theta(X_1 \le x, \dots, X_n \le x)$

$= \mathbb{P}_\theta(X_1 \le x)^n = (\frac{x}{\theta})^n$

$\Rightarrow f_{\hat{\theta}}(x) = \theta^{-n} n x^{n-1}$

$\Rightarrow \mathcal{R}_{\hat{\theta}}(\theta) = \frac{2\theta^2}{(n+1)(n+2)}$

$\frac{2\theta^2}{(n+1)(n+2)} \overset{?}{\le} \frac{\theta^2}{3n}$

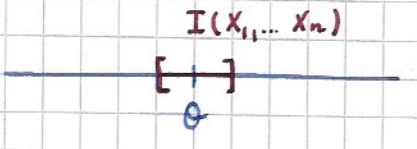
$6n \overset{?}{\le} (n+1)(n+2) = n^2 + 3n + 2$

$0 \le (n-2)(n-1)$

$\hat{\theta}$ est meilleur que $\tilde{\theta}$ dès que $n \ge 3$.

Proba : le 22.05.19

12.2 Intervalles de confiance :



tq $\mathbb{P}_\theta(I \ni \theta) \geq 1-\alpha$

Déf 12.10 : $\alpha \in (0,1)$

Un intervalle aléatoire $I = I(X_1, \dots, X_n)$ est appelé intervalle de confiance au niveau (de confiance) $1-\alpha$ si :

$$\mathbb{P}_\theta(I \ni \theta) = 1-\alpha \quad \forall \theta \in \Theta$$

Exo : $X_1, \dots, X_n$ n-éch. $\sim \mathcal{N}(\mu, 1)$

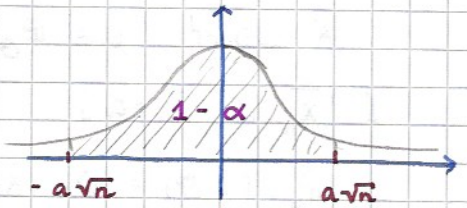
On a vu : $\overline{X_n}$ estimateur consistant de μ.

On cherche $a > 0$ tq $I = [\overline{X_n} - a ; \overline{X_n} + a]$ satisfasse

$\mathbb{P}_\mu(I \ni \mu) = 1-\alpha$

$\overline{X_n} \sim \mathcal{N}(\mu, 1/n) \Rightarrow \sqrt{n}(\overline{X_n} - \mu) = Z \sim \mathcal{N}(0,1)$

$$\mathbb{P}_\mu(I \ni \mu) = \mathbb{P}_\mu(|\overline{X_n} - \mu| \leq a) = \mathbb{P}_\mu(\sqrt{n}|\overline{X_n} - \mu| \leq a\sqrt{n})$$
$$= \mathbb{P}(|Z| \leq a\sqrt{n}) \overset{!}{=} 1-\alpha$$



$\alpha = 10\% \Rightarrow a\sqrt{n} \simeq 1{,}64$

$\Rightarrow a \simeq \frac{1{,}64}{\sqrt{n}}$

$\Rightarrow I = \left[\overline{X_n} - \frac{1{,}64}{\sqrt{n}}, \overline{X_n} + \frac{1{,}64}{\sqrt{n}}\right]$ est un I.C ($\underbrace{90\%}_{1-\alpha}$)

Exo : $X_1, \dots, X_n$ n-éch, $\sim \mathcal{U}[0,\theta]$, $\theta > 0$

$\hat{\theta} = \max\{X_1, \dots, X_n\} \leq \theta$

On cherche $c > 1$ tq $I = [\hat{\theta}, c\cdot\hat{\theta}]$ soit un IC $(1-\alpha)$

$$\mathbb{P}_\theta(I \ni \theta) = \mathbb{P}_\theta(c\hat{\theta} \geq \theta) = \mathbb{P}_\theta\left(\hat{\theta} \geq \frac{\theta}{c}\right) = 1 - \mathbb{P}_\theta\left(\hat{\theta} < \frac{\theta}{c}\right)$$
$$= 1 - c^{(-n)} = 1-\alpha$$

$\Rightarrow \alpha = c^{-n} \Rightarrow c = \alpha^{-1/n}$

$\Rightarrow I = [\hat{\theta}, \alpha^{-1/n}\hat{\theta}]$ est un I.C $(1-\alpha)$

Déf 12.11 : $I(X_1, \dots, X_n)$ est un intervalle de confiance par excès au niveau $1-\alpha$ si $\mathbb{P}_\theta(I \ni \theta) \geq 1-\alpha \quad \forall \theta \in (H)$

Ex : $X_1, \dots, X_n$ n-éch, $\underset{\theta}{Var}(X_1) = \sigma^2$ connue.

On veut estimer : $g(\theta) = \mathbb{E}_\theta(X_1)$

$I = [\bar{X}_n - a ; \bar{X}_n + a]$

$\mathbb{P}_\theta(|\frac{1}{n}\sum_1^n X_k - \mathbb{E}_\theta(X_1)| \leq a) \overset{!}{\geq} 1-\alpha$

$1 - \mathbb{P}_\theta(|1/n \sum_1^n X_k - \mathbb{E}_\theta(X_1)| > a) \geq 1 - \frac{Var(\bar{X}_n)}{a^2} = 1 - \frac{\sigma^2}{n a^2}$

$\Rightarrow \frac{\sigma^2}{n a^2} = \alpha \quad \Rightarrow \quad a = \frac{\sigma}{\sqrt{n\alpha}}$

$\Rightarrow I = [\bar{X}_n - \frac{\sigma}{\sqrt{n\alpha}} ; \bar{X}_n + \frac{\sigma}{\sqrt{n\alpha}}]$ est ICE $(1-\alpha)$

Déf 12.12 : $I_n(X_1, \dots, X_n)$ est un I.C.E asymptotique au niveau $1-\alpha$ si

$\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}_\theta(I_n \ni \theta) \overset{\geq}{\sim} 1-\alpha \quad \forall \theta \in (H)$

Ex : $X_1, \dots, X_n$ n-éch, $\underset{\theta}{Var}(X_1) = \sigma^2$

A estimer : $\mu = \mathbb{E}_\theta(X_1)$

$I = [\bar{X}_n - a ; \bar{X}_n + a]$

$\mathbb{P}_\theta(I \ni \theta) = \mathbb{P}(|\bar{X}_n - \mu| \leq a) = \mathbb{P}(\frac{\sqrt{n}}{\sigma}|\bar{X}_n - \mu| \leq b)$ (TCL $\longrightarrow |Z| \sim \mathcal{N}(0,1)$)

$\frac{\sqrt{n}}{\sigma}|\bar{X}_n - \mu| \longrightarrow |Z| \sim \mathcal{N}(0,1)$

$\xrightarrow{n \to \infty} \mathbb{P}(|Z| \leq b) \overset{!}{\sim} 1-\alpha$

$\Rightarrow I = [\bar{X}_n - \frac{b\sigma}{\sqrt{n}} ; \bar{X}_n + \frac{b\sigma}{\sqrt{n}}]$ avec b tq $\mathbb{P}(|Z| \leq b) \geq 1-\alpha$

App : mesure d'une grandeur μ, incertitude moyenne 0,73

Q : Combien de mesures pour une précision de $\frac{1}{10}$?

Mesures $X_1, \dots, X_n$, $\mathbb{E}(X_1) = \mu$, $\sigma = 0,73$

$\alpha = 1\% \Rightarrow b \overset{\sim}{=} 2,58 \Rightarrow I_n [\bar{X}_n - \frac{1,88}{\sqrt{n}}, \bar{X}_n + \frac{1,88}{\sqrt{n}}]$

est un ICA au niveau 99 %

$\frac{1,88}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{10} \Rightarrow n \geq 355$

Proba: le 29.05.19

XII.3 Tests d'hypothèses: (Pas à l'Examen)

Exe: Patron, chaîne de production.

- durée de vie : iid, $T \sim \exp(\frac{1}{\theta})$
- garantie : 2 ans
- retour maximum : 10 %

On veut donc :

$$\mathbb{P}_\theta(T<2) \leq 10\%$$

$$\mathbb{P}_\theta(T<2) = 1 - \mathbb{P}_\theta(T\geq 2) = 1 - e^{-2/\theta} \overset{!}{\leq} 0{,}1 \iff e^{-2/\theta} \geq 0{,}9$$

$$\iff \frac{2}{\theta} \leq |\log 0{,}9| \iff \theta \geq \frac{2}{|\log 0{,}9|} =: \theta^*$$

On veut s'assurer que $\theta < \theta^*$ n'est pas vieu.

Si $\boxed{\theta < \theta^*}$, il faudra remplacer la chaîne de production.

Si on se trompe, il y a un risque de ruine !

H_0 : "$\theta < \theta^*$" hypothèse nulle

H_1 : "$\theta \geq \theta^*$" hypothèse alternative

2 types d'erreur possibles :

- Erreur de 1ère espèce : rejetter H_0 alors que H_0 vraie → ruine !
- Erreur de 2nd espèce : ne pas rejetter H_0 alors qu'elle est fausse → argent dépensé dans le vide (inutilement)

Risque acceptable : $\alpha \in [0,1]$ ($\alpha = 5\%$ p.exe)

Soit z_0 tq $\mathbb{P}_\theta(\underbrace{\hat{\theta}_n \geq z_0}_{\text{↳ improbable sous } H_0}) \leq \alpha \quad \forall \theta < \theta^* \} \mapsto H_0$ vraie

→ Si on observe $\hat{\theta}_n \geq z_0$. Alors on rejette H_0. (on ne fait rien)

on se trompe avec proba $\leq \alpha$.

↳ Si on observe $\hat{\theta}_n < z_\alpha$. Alors on ne rejette pas H_0 (on investit dans une nouvelle chaîne de production)

XII 3.2 Procédure de test :

$X_1, \dots, X_n$ n-éch $\sim \mathbb{P}_\theta$, $\theta \in \Theta$

$\Theta = \Theta_0 \cup \Theta_1$

Test : H_0 : "$\theta \in \Theta_0$" hypothèse nulle

H_1 : "$\theta \in \Theta_1$" hyp. alternative

Zône de rejet : évènement $D(X_1, \dots, X_n)$ "improbable sous H_0"

Procédure de test :

- Rejet de H_0 si D a lieu
- Non-rejet de H_0 si D n'a pas lieu

Niveau de risque : $\alpha \in [0,1]$

$\sup_{\theta \in \Theta_0} \mathbb{P}_\theta(D) = \alpha$ — proba de faire une erreur de 1ère espèce $\leq \alpha$

($\theta \in \Theta_0$: H_0 vraie ; $\mathbb{P}_\theta(D)$: rejet de H_0)

Puissance du test :

$1-\beta = \inf_{\theta \in \Theta_1} \mathbb{P}_\theta(D)$ — proba erreur de 2nd esp $\leq \beta$

($\theta \in \Theta_1$: H_0 fausse ; $\mathbb{P}_\theta(D)$: rejet de H_0)

Ex : 1) $X_1, \dots, X_n \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ où σ^2 est connue

$H_0 = "\mu = \mu_0"$ $H_1 = "\mu \neq \mu_0"$ $\alpha = 5\%$

$D = \{ |\bar{X}_n - \mu_0| > c \}$ avec c tq $\mathbb{P}_{\mu_0}(D) = 5\%$

$\bar{X}_n \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2/n)$, $\mathbb{P}_{\mu_0}(D) = \mathbb{P}_{\mu_0}(|\bar{X}_n - \mu_0| > c)$

$Z = \frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\bar{X}_n - \mu_0)$ $= \mathbb{P}(|Z| > \frac{c\sqrt{n}}{\sigma}) \overset{!}{=} 5\%$

$\longrightarrow \frac{c\sqrt{n}}{\sigma} = 1{,}96$ ssi $c = \frac{1{,}96 \cdot \sigma}{\sqrt{n}}$

Proba: le 29.05.19

Exc: 2) $X_1, \dots, X_n$ n-éch $\sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

$Y_1, \dots, Y_m$ m-éch $\sim \mathcal{N}(\nu, \gamma^2)$ } connus

H_0: "$\mu = \nu$" H_1: "$\mu \neq \nu$"

$\underbrace{\overline{X_n} - \overline{Y_m}}_{\text{estimation}} \sim \mathcal{N}(\mu - \nu, \sigma^2/n + \gamma^2/m)$

H_0': "$\mu - \nu = 0$" H_1: "$\mu - \nu \neq 0$"

On conclut avec l'exemple précédent.

XII 3.5 Test du χ^2:

1) Test d'adéquation du χ^2:

But: déterminer si une v.a suit une certaine loi (non paramétrique)

Expérience aléatoire dont les résultats peuvent être répartis en

k classes: $C_1, \dots, C_k$, avec proba $p_1, \dots, p_k$. $(\sum_1^k p_i = 1)$

n répétitions $\rightsquigarrow (N_n(1), \dots, N_n(k))$ où $N_n(j) = \sum_{i=1}^{k} \mathbb{1}_{\{X_i \in C_j\}}$

$$\mathbb{P}(N_n(1) = n_1, \dots, N_n(k) = n_k) = \frac{n!}{n_1! \cdot \dots \cdot n_k!} p_1^{n_1} \cdot \dots \cdot p_k^{n_k}$$

$\rightsquigarrow (N_n(1), \dots, N_n(k)) \sim$ multinomiale $(n, p_1, \dots, p_k)$

[On s'est ramené à un problème d'estimation paramétrique partout sur les param. d'une loi multinomiale]

Soient $q_1, \dots, q_k \in [0,1]$ $(\sum q_i = 1)$

H_0: "$p_i = q_i \ \forall i$" H_j: "$\exists j : p_i \neq q_j$"

$\forall j$: $\frac{N_n(j)}{n} \xrightarrow{n \to \infty} q_j$ (LGN)

$\sum_j \left(\frac{N_n(j)}{n} - q_j \right)^2$?

↑ fréq. empirique ← fréq. théorique

Prop: Soit $(N_1, \dots, N_k) \sim$ multinom $(n, p_1, \dots, p_k)$, alors

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{(N_i - np_i)^2}{np_i} \xrightarrow{n \to \infty} \chi^2_{k-1}$$

C-à-d : avec densité $\frac{1}{2^{k/2}\,\Gamma(k/2)}\, x^{k/2-1} e^{-x/2}\, \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)$

$$Z_n := \sum_{j=1}^{k} \frac{(N_n(j) - nq_j)^2}{nq_j} = n \sum_{j=1}^{k} \frac{\left(\frac{N_n(j)}{n} - q_j\right)^2}{q_j}$$

Sous H_0 : Prop $\Rightarrow Z_n \xrightarrow{n \to \infty} \chi^2_{k-1}$

Sous H_1 : $\exists j$ tq $q_j \neq p_j$

$\Rightarrow \left(\frac{N_n(j)}{n} - q_j\right)^2 \xrightarrow{n \to \infty} (p_j - q_j)^2 > 0$

$\Rightarrow \sum_{1}^{k} \frac{(N_n(j)/n - q_j)^2}{q_j} > 0$ unif en n grand

$\hookrightarrow Z_n \xrightarrow{n \to \infty} +\infty$

On définit $\mathcal{D} := \{ Z_n > c \}$ avec c tq $\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}_{H_0}(Z_n > c) = \mathbb{P}(\chi^2_{k-1} > c) \overset{!}{=} \alpha$

⚠ approximation assympt., dans la pratique ok si $nq_j \geq 5 \ \forall j = 1 \dots k$.

Exe : Expériences de Mendel (pois)

- Couleur : jaune C dominant ; vert c récessif
- Forme : rond R dominant ; ridé r récessif

Croisements d'individus $CcRr$

16 enfants possibles (génotypes) et 4 phénotypes

jaune - rond : $\frac{9}{16}$ jaune - ridé : $\frac{3}{16}$ vert - rond : $\frac{3}{16}$ vert - ridé : $\frac{1}{16}$

H_0 : "Mendel a raison" H_1 : "Mendel a tort"

	Jaune Rond	Jaune ridé	vert Rond	vert ridé
Eff :	315	101	108	32
Fr. Emp	$315/556$	$101/556$	$108/556$	$32/556$
Fr th	$9/16$	$3/16$	$3/16$	$1/16$

$$Z_{556} = \sum_{j=1}^{4} \frac{(N_n(j) - nq_j)^2}{nq_j} = \dots = 0,47$$

Proba :

le 29.05.19

Ex : (Suite)

$\alpha = 5\%$ pour la biologie

$\mathbb{P}(\chi^2_3 > c) = 0,05 \Rightarrow c = 7,82$

$D = \{Z_{556} > 7,82\} = \{0,47 > 7,82\}$

D n'est pas réalisé

$\Rightarrow$ les observations sont compatibles avec H_0.

2) le test d'indépendance du χ^2 :

	c. blond	c. brun	c. rouge	c. noir	total	Fréq
y bleu	$25/124$	$9/124$	$7/124$	$3/$	44	$44/124$
y gris	$13/$	$17/$	$7/$	$10/$	47	$47/124$
y marron	$7/$	$13/$	$5/$	$8/$	33	$33/124$
tot	$45/$	$39/$	$19/$	$21/$	124	
Fréquence	$45/124$	$39/124$	$19/124$	$21/124$		