

Théorie de la mesure et intégrale de Lebesgue :

Tests intermédiaires : 18 octobre, 15 novembre, 13 décembre

Motivations :

- La fonction de Dirichlet (l'indicatrice de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$)

$\chi_{\mathbb{Q}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \chi_{\mathbb{Q}}(q) = \begin{cases} 1 & q \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ est extrêmement discontinue, et elle n'est pas intégrable au sens de Riemann.

(Comme beaucoup d'autres fonctions)

- Théorème fondamental du calcul intégrale :

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable, alors $\int_a^x f'(t) dt = f(x) - f(a)$

si : a) f' est intégrable au sens de Riemann et l'intégrale est au sens de Riemann.

b) $f'(x)$ est bornée et l'intégrale est au sens de Lebesgue.

c) l'intégrale est au sens de Henstock - Kurzweil.

- Restriction par rapport au passage à la limite.

On a $\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx$ si f_n converge vers f uniformément.

Notations :

(1) On écrit $A \cup B$ au lieu de $A \vee B$ si $A \cap B = \emptyset$

(2) On note $X^Y = \{ f: Y \rightarrow X \}$ [Ex : $\mathbb{C}^{\mathbb{R}}$]

(3) $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} = \mathbb{N} = \omega$

On va identifier $n = \{0, 1, \dots, n-1\}$

[Ex : $\mathbb{R}^n = \{ f: n \rightarrow \mathbb{R} \}$]

Ex : $\mathbb{R}^{\omega} = \{ \text{suites de nbr réels } (x_0, x_1, \dots), x_i \in \mathbb{R} \}$

(4) $f_{x,y,\dots} = f(x, y, \dots)$ si $x \in X, y \in Y, \dots$ et $X, Y, \dots$ sont finis ou dénombrables

(5) $2^X = \{ f: X \rightarrow \{0, 1\} \} \simeq \mathcal{P}(X)$ l'ens. des s.s.-ens de X

(6) Fonctions caractéristiques : $\chi_A: B \rightarrow \mathbb{R}$, $\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$, $A \subset B$

(7) On dit que $\gamma \in \mathcal{P}(X)^Y$ est disjoint si les $\{\gamma(y)\}_{y \in Y}$ sont deux à deux disjoints.

(8) La droite réelle achevée $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\} = [-\infty, +\infty]$

$\forall x \in \mathbb{R}$, on a $-\infty < x < +\infty$

$$\pm \infty \cdot a = \begin{cases} \pm \infty & \text{si } a > 0 \\ 0 & \text{si } a = 0 \\ \mp \infty & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

Interdit : $+\infty + (-\infty)$

$$+\infty + a = +\infty \quad \text{si } a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

Éléments de la théorie générale de la mesure :

Déf. Une tribu ou σ -algèbre sur un ensemble X est un s.s-ensemble $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ qui possède les propriétés suivantes :

i) $X \in \mathcal{A}$

ii) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c := X \setminus A \in \mathcal{A}$

iii) $A \in \mathcal{A}^\omega \Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$

les éléments d'une tribu sont les ensembles mesurables et le couple $(X, \mathcal{A})$ est l'espace mesurable.

Rem. i) Si la prop. iii) est remplacée par : $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$

alors on a la notion d'algèbre d'ensembles.

ii) Plus généralement, on définit un anneau d'ensemble : $\emptyset \neq \mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$

t.q. $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{A}$ et $A \cup B \in \mathcal{A}$.

Ex. i) $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$

ii) $\mathcal{A} = \{\emptyset, X\}$

Analyse III :

le 20.09.19

Déf: Soient $(X, \mathcal{A}_X)$ et $(Y, \mathcal{A}_Y)$ deux espaces mesurables. Une application $f: X \rightarrow Y$ est dite mesurable si $\forall A \in \mathcal{A}_Y \quad f^{-1}(A) \in \mathcal{A}_X$

Rem:

Esp. topo	$\longleftrightarrow$	Esp. mesurable
ouverts	$\longleftrightarrow$	mesurables (ensemble)
continues	$\longleftrightarrow$	mesurables (applications)

Prop 1: Soit X un ensemble et $\{\mathcal{A}_\alpha\}_{\alpha \in I}$ une famille de tribus sur X . Alors $\bar{\mathcal{A}} = \bigcap_{\alpha \in I} \mathcal{A}_\alpha$ est une tribu.

Dém:

- 1) $X \in \mathcal{A}_\alpha \quad \forall \alpha \in I \Leftrightarrow X \in \bar{\mathcal{A}}$
- 2) $A \in \bar{\mathcal{A}} \Leftrightarrow A \in \mathcal{A}_\alpha \quad \forall \alpha \in I \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}_\alpha \quad \forall \alpha \in I \Leftrightarrow A^c \in \bar{\mathcal{A}}$
- 3) $A \in (\bar{\mathcal{A}})^w \Leftrightarrow A \in (\mathcal{A}_\alpha)^w \quad \forall \alpha \in I \Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}_\alpha \quad \forall \alpha \in I$
 $\Leftrightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \bar{\mathcal{A}}$

Prop - Déf: Tribu engendrée par une famille d'ensemble.

Soit X un ensemble et $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$. Alors $\exists ! \sigma(\mathcal{F})$ tribu sur X appelée tribu engendrée par $\mathcal{F}$, tq $\forall \mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ tribu tq $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ on a $\sigma(\mathcal{F}) \subset \mathcal{A}$

Dém: Soit S l'ensemble de toutes les tribus contenant $\mathcal{F}$. ($S \neq \emptyset : \mathcal{P}(X) \in S$)
On définit $\sigma(\mathcal{F}) = \bigcap_{\mathcal{A} \in S} \mathcal{A}$.

Déf: Soit $X = (X, \mathcal{T})$ un espace topologique. La tribu $\mathcal{B}_X := \sigma(\mathcal{T})$ est la tribu borélienne

Rem: Dans ce cours, on va construire la tribu de Lebesgue qui contient $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$.

Déf: Une mesure (positive) sur un ensemble mesurable $(X, \mathcal{A})$ est une application $\mu: \mathcal{A} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0} = [0, +\infty]$ telle que:

- 1) $\mu(\emptyset) = 0$
- 2) $\forall A \in \mathcal{A}^{\omega}$ disjoint, $\mu(\bigcup_{n \in \omega} A_n) = \sum_{n \in \omega} \mu(A_n)$ [σ -additivité]

Ex: 1) Mesure de comptage: $(X, \mathcal{P}(X), \mu)$ où

$$\mu(A) = \begin{cases} +\infty & \text{si } A \text{ infini} \\ \text{le \# d'élément dans } A & \text{si } A \text{ fini.} \end{cases}$$

2) Mesure de Dirac: $(X, \mathcal{P}(X), \mu)$ où

$$\mu = \delta_a \quad a \in X, \quad \delta_a(A) = \chi_A(a) = \begin{cases} 1 & a \in A \\ 0 & a \notin A \end{cases}$$

3) Mesure de Probabilité: sur un ensemble fini $(n, \mathcal{P}(n), \mu)$ où

$$\mu(A) = \sum_{i \in A} t_i \quad \text{où } t_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}^n \text{ tq } \sum_{i \in n} t_i = 1 \quad (t_i \text{ est la proba en } i)$$

Thm: (Propriétés élémentaires de la mesure)

Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Alors,

- 1) $A, B \in \mathcal{A}, A \cap B = \emptyset \Rightarrow \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ (additivité)
- 2) $A, B \in \mathcal{A}, A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$ (monotonie)
- 3) $A \in \mathcal{A}^{\omega} \Rightarrow \mu(\bigcup_{n \in \omega} A_n) \leq \sum_{n \in \omega} \mu(A_n)$ (σ -ss-additivité)
- 4) $A \in \mathcal{A}^{\omega}: A_n \subset A_{n+1} \quad \forall n \in \omega$. Alors $\mu(\bigcup_{n \in \omega} A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$ (continuité à gauche)
- 5) $A \in \mathcal{A}^{\omega}: A_n \supset A_{n+1} \quad \forall n \in \omega$. Alors $\mu(\bigcap_{n \in \omega} A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$ (cont. à droite)

Dém: 1) On définit $C \in \mathcal{A}^{\omega}: C_0 = A, C_1 = B, C_n = \emptyset \quad \forall n \geq 2$. C est disjoint.

$$\Rightarrow \mu(\bigcup_n C_n) = \sum_n \mu(C_n) = \mu(A) + \mu(B) \quad \text{et } \bigcup_n C_n = A \cup B \quad \blacksquare$$

2) Soit $A, B \in \mathcal{A}, A \subset B$. Alors A et $B \setminus A$ sont disjoints:

$$A^c = X \setminus A \in \mathcal{A}, \quad B \setminus A = B \cap A^c = (X \setminus B^c) \cap (X \setminus A)$$

Loi de Morgan

$$= X \setminus (B^c \cup A) = (B^c \cup A)^c \in \mathcal{A}$$

$$\text{Par la partie (1): } \mu(B) = \mu(B \setminus A \cup A) = \overbrace{\mu(B \setminus A)}^{\geq 0} + \mu(A) \geq \mu(A) \quad \blacksquare$$

Analyse III:

Dém: (Suite)

3) $A \in \mathcal{A}^w$. On définit $B \in \mathcal{A}^w$ par $B_n = A_n \setminus (\bigcup_{i \in n} A_i)$ On a l'inclusion $B_n \subset A_n \quad \forall n \in w \Rightarrow \mu(B_n) \leq \mu(A_n)$

$$\begin{aligned} \bigcup_{i \in w} A_i &= A_{n-1} \cup \left(\bigcup_{i \in n-1} A_i \right) = B_{n-1} \cup \left(\bigcup_{i \in n-1} A_i \right) = \dots = B_{n-1} \cup B_{n-2} \cup \dots \cup B_k \cup \left(\bigcup_{i \in k} A_i \right) \\ &= \bigcup_{i \in n} B_i = \bigsqcup_{i \in n} B_i \end{aligned}$$

$$\bigcup_{n \in w} A_n = \bigcup_{n \in w} \bigsqcup_{i \in n} A_i = \bigcup_{n \in w} \bigsqcup_{i \in n} B_i = \bigsqcup_{n \in w} B_n$$

$$\Rightarrow \mu\left(\bigcup_{n \in w} A_n\right) = \mu\left(\bigsqcup_n B_n\right) = \sum_n \mu(B_n) \leq \sum_n \mu(A_n) \quad \blacksquare$$

4) $A \in \mathcal{A}^w$, $A_n \subset A_{n+1} \quad \forall n \in w$.On définit $B \in \mathcal{A}^w$ par $B_n = A_n \setminus A_{n-1}$

$$A_n = A_{n-1} \sqcup B_n = \dots = \bigsqcup_{i \in n+1} B_i, \quad (A_0 = B_0 \text{ et } A_{-1} = \emptyset)$$

Comme B^w est une suite disjointe, par la prop 1), on a

$$\mu(A_n) = \sum_{i \in n+1} \mu(B_i) \quad \forall n \in w$$

$$\begin{aligned} \text{De plus, on a } \bigcup_{n \in w} A_n &= \bigsqcup_{n \in w} B_n \Rightarrow \mu\left(\bigcup_n A_n\right) = \sum_n \mu(B_n) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mu(B_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n \mu(B_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i \in n+1} \mu(B_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

5) $A \in \mathcal{A}^w$, $A_n \supset A_{n+1} \quad \forall n \in w$

$$[A_0 = A_0 \setminus A_n \sqcup A_n \Rightarrow \mu(A_0) = \mu(B_n) + \mu(A_n)]$$

On définit $B \in \mathcal{A}^w$, $B_n = A_0 \setminus A_n = A_0 \cap (A_n)^c$

$$\text{On a } B_n \subset B_{n-1} \quad \forall n \in w \text{ et } \mu\left(\bigcup_n B_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(B_n) =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} (\mu(A_0) - \mu(A_n)) = \mu(A_0) - \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$$

$$\bigcup_n B_n = \bigcup_n (A_0 \setminus A_n) = A_0 \setminus \left(\bigcap_n A_n\right)$$

$$\mu\left(\bigcup_n B_n\right) = \mu(A_0) - \mu\left(\bigcap_n A_n\right)$$

$$\Rightarrow \mu(A_0) - \mu\left(\bigcap_n A_n\right) = \mu(A_0) - \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \mu\left(\bigcap_n A_n\right) \quad \blacksquare$$

 $\triangle$ on a vraiment besoin de la finitude de A_0 $\triangle$

Ex: $(\omega, \mathcal{P}(\omega), \mu)$ mesure de comptage

$$A_n = \omega \setminus n = \{n, n+1, \dots\}, \quad A_n \supset A_{n+1} \quad \forall n \in \omega$$

$$\mu(A_n) = \infty \quad \forall n \in \omega \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \infty$$

$$\bigcap_n A_n = \emptyset \Rightarrow \mu\left(\bigcap_n A_n\right) = 0 \neq \infty \quad \text{car } \mu(A_0) = \infty.$$

le 27.09.19

Sommation de fonctions positives:

Déf: X un ensemble, $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$, on définit $\sum_{x \in X} f(x) = \sup \left\{ \sum_{x \in F} f(x) \mid F \subset X \text{ est fini} \right\}$

Prop: Soit $A := f^{-1}(\overline{\mathbb{R}}_{>0})$, si A est :

a) non-dénombrable, alors $\sum_{x \in X} f(x) = \infty$

b) infini dénombrable, alors $\forall$ bijection $g: \omega \rightarrow A$, on a

$$\sum_{x \in X} f(x) = \sum_{n \in \omega} f(g_n) \quad (\text{à } g_n := g(n) \text{ ce qui marque une suite.})$$

$$\Delta g(n) = g(\{1, \dots, n\}) \Delta$$

Dém: a) On a $A = \bigcup_{n \in \omega} A_n$ où $A_n := f^{-1}(\overline{\mathbb{R}}_{> \frac{1}{n+1}})$, comme A n'est pas dénombrable, $\exists n_0 \in \omega$ (au moins un) tq A_{n_0} est non-dénombrable.

Soit $F \subset A_{n_0}$ une partie finie, alors:

$$\sum_{x \in F} f(x) > \frac{|F|}{n_0 + 1} \Rightarrow \sum_{x \in X} f(x) = \infty. \quad \square$$

b) Soit $g: \omega \rightarrow A$ une bijection. On définit $B \subset \mathcal{P}(A)^\omega$ une suite de ss-ensemble, par la formule suivante: $B_n := g(n) := \{g_i \mid i \in n\}$

Alors $\forall F \subset X$ partie finie, $\exists n_F \in \omega$ tq $F \cap A \subset B_m$, $\forall m \geq n_F$

$$\sum_{x \in F} f(x) = \sum_{x \in F \cap A} f(x) \leq \sum_{x \in B_m} f(x) = \sum_{i \in m} f(g_i) \leq \sum_{x \in X} f(x)$$

$$\stackrel{m \rightarrow \infty}{\Rightarrow} \sum_{x \in F} f(x) \leq \sum_{i \in \omega} f(g_i) \leq \sum_{x \in X} f(x)$$

$$\Rightarrow \sum_{x \in X} f(x) \leq \sum_{i \in \omega} f(g_i) \leq \sum_{x \in X} f(x) \Leftrightarrow \sum_{i \in \omega} f(g_i) = \sum_{x \in X} f(x) \quad \square \quad \text{p.6}$$

Analyse III:

Exo: X un ensemble, $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$. On définit $\mu: \mathcal{P}(X) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$ par $\mu(A) = \sum_{x \in A} f(x)$.
Alors $(X, \mathcal{P}(X), \mu)$ est un espace mesuré.

Mesure extérieure:

Déf: Soit X un ensemble. Une mesure extérieure sur X est une applic.

$\varphi: \mathcal{P}(X) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$ telle que :

- 1) $\varphi(\emptyset) = 0$
- 2) $A \subset B \Rightarrow \varphi(A) \leq \varphi(B)$
- 3) $A \in (\mathcal{P}(X))^{\omega} \Rightarrow \varphi(A) \leq \sum_{n \in \omega} \varphi(A_n)$

Rem: 1) On a aussi la sous-additivité finie :

$$A \in (\mathcal{P}(X))^n \Rightarrow \varphi(A) \leq \sum_{i \in n} \varphi(A_i)$$

- 2) $\forall$ espace mesuré $(X, \mathcal{A}, \mu)$, on a la mesure extérieure φ_{μ} définie par $\varphi_{\mu}(B) = \inf \{ \mu(A) \mid A \in \mathcal{A}, B \subset A \}$

On vérifie la σ -sous-additivité de $\varphi(\mu)$:

Soient $B \in (\mathcal{P}(X))^{\omega}$ et $\varepsilon > 0$, alors $\exists A \in \mathcal{A}^{\omega}$ tel que $B_n \subset A_n$ et $\mu(A_n) \leq \varphi_{\mu}(B_n) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} \quad \forall n \in \omega$

Alors on a :

$$\begin{aligned} B_n \subset A_n \quad \forall n \in \omega &\Rightarrow \bigcup_{n \in \omega} B_n \subset \bigcup_{n \in \omega} A_n \Rightarrow \varphi_{\mu}(\bigcup_{n \in \omega} B_n) \leq \mu(\bigcup_{n \in \omega} A_n) \\ &\leq \sum_{n \in \omega} \mu(A_n) \leq \sum_{n \in \omega} \left(\varphi_{\mu}(B_n) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} \right) = \sum_{n \in \omega} \varphi_{\mu}(B_n) + \sum_{n \in \omega} \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} \\ &= \sum_{n \in \omega} \varphi_{\mu}(B_n) + \varepsilon \Rightarrow \varepsilon \rightarrow 0 \text{ on a la } \sigma\text{-ss-add.} \end{aligned}$$

$\forall B, \exists$ mesurable A tq $B \subset A$.

Construction de mesures extérieures :

Prop: Soient $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ et $p: \mathcal{F} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}_{\geq 0}$ tels que $\{\emptyset, X\} \subset \mathcal{F}$ et $p(\emptyset) = 0$.

Alors, $\varphi_p: \mathcal{P}(X) \rightarrow \bar{\mathbb{R}}_{\geq 0}$ définie par $\varphi_p(B) = \inf_{\text{new}} \left\{ \sum p(A_n) \mid A \in \mathcal{R}_{\mathcal{F}}(B) \right\}$,

où $\mathcal{R}_{\mathcal{F}}(B) = \{A \in \mathcal{F}^{\omega} \mid B \subset \bigcup A_n\}$, est une mesure extérieure.

Dém: $\forall B \subset X, \mathcal{R}_{\mathcal{F}}(B) \neq \emptyset \Rightarrow \varphi_p$ est bien définie.

1) $\varphi_p(\emptyset) = 0 \iff (\emptyset, \emptyset, \dots) \in \mathcal{R}_{\mathcal{F}}(\emptyset)$

2) $\varphi_p(A) \leq \varphi_p(B) \iff \mathcal{R}_{\mathcal{F}}(B) \subset \mathcal{R}_{\mathcal{F}}(A)$ Tout recouvrement de B est rec. de A

3) $B \in (\mathcal{P}(X))^{\omega}$ et $\varepsilon > 0$. Alors pour tout $n \in \omega$, $\exists A_n \in \mathcal{R}_{\mathcal{F}}(B_n)$ tq

$$\sum_{m \in \omega} p(A_{n,m}) \leq \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} + \varphi_p(B_n) \quad A_{n,m} = (A_n)_m$$

Comme l'ensemble $\{A_{n,m}\}_{m,n \in \omega}$ correspond à un élément de $\mathcal{R}_{\mathcal{F}}(\bigcup_{n \in \omega} B_n)$

et on a $\varphi_p(\bigcup_{n \in \omega} B_n) \leq \sum_{(m,n)} p(A_{n,m}) = \sum_n \sum_m p(A_{n,m}) \leq \sum_n \left(\frac{\varepsilon}{2^{n+1}} + \varphi_p(B_n) \right)$

$$= \varepsilon + \sum_n \varphi_p(B_n) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \varphi_p(\bigcup_{n \in \omega} B_n) \leq \sum_n \varphi_p(B_n)$$

Construction d'une mesure à partir d'une mesure extérieure :

Déf: Soit φ une mesure extérieure sur un ens. X . On dit que $A \subset X$ est

φ -mesurable si il satisfait la relation de Carathéodory:

$$\varphi(B) = \varphi(B \cap A) + \varphi(B \setminus A) \quad \forall B \in \mathcal{P}(X).$$

Thm: de Carathéodory.

Soit φ une mesure extérieure sur X . Alors, l'ensemble $\mathcal{A}_{\varphi}$ de toutes les parties de X φ -mesurable est une tribu et $\varphi|_{\mathcal{A}_{\varphi}}$ est une mesure.

Lemme 1: $\mathcal{A}_{\varphi}$ est une algèbre (d'ensemble)

$$[\quad 1) X \in \mathcal{A}_{\varphi} \quad 2) A, B \in \mathcal{A}_{\varphi} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}_{\varphi} \quad 3) A \in \mathcal{A}_{\varphi} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}_{\varphi}]$$

Dém: 1) $B \subset X, \underbrace{\varphi(B \cap X)}_B + \underbrace{\varphi(B \setminus X)}_{\emptyset} = \varphi(B)$

2) $B \setminus A = B \cap A^c \Rightarrow A \in \mathcal{A}_{\varphi} \iff A^c \in \mathcal{A}_{\varphi}.$

Analyse III :

Dém: (Suite)

3) $A, B \in \mathcal{A}_\varphi, C \subset X$

$$\begin{aligned}\varphi(C) &= \varphi(C \cap A) + \varphi(C \cap A^c) = \varphi(C \cap A \cap B) + \varphi(C \cap A \cap B^c) \\ &\quad + \varphi(C \cap A^c \cap B) + \varphi(C \cap A^c \cap B^c)\end{aligned}$$

On a aussi $A \cup B = A \cap B \cup A \cap B^c \cup B \cap A = A \cap B^c \cup A \cap B \cup B \cap A^c$

$$\Rightarrow C \cap (A \cup B) = C \cap A \cap B^c \cup C \cap A \cap B \cup C \cap B \cap A^c$$

sans additivité.

$$\Rightarrow \varphi(C \cap (A \cup B)) \leq \varphi(C \cap A \cap B^c) + \varphi(C \cap A \cap B) + \varphi(C \cap B \cap A^c)$$

(*)

$$\varphi(C) \leq \varphi(C \cap (A \cup B)) + \varphi(C \cap (A \cup B)^c)$$

$$\leq (*) + \varphi(C \cap A^c \cap B^c) = \varphi(C) \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}_\varphi$$

□

Rap: $\mathcal{A}_\varphi$ est une algèbre (Lemme 1)

16 04.10.19

Lemme 2: Soient $C \subset X, A, B \in \mathcal{A}_\varphi$ tels que $A \cap B = \emptyset$.

$$\text{Alors } \varphi(C \cap (A \cup B)) = \varphi(C \cap A) + \varphi(C \cap B)$$

Dém: On a $B \cap A = \emptyset \Leftrightarrow B \subset A^c \Leftrightarrow B \cap A^c = B$

$$\begin{aligned}\forall D \subset X, \text{ on a } \varphi(D) &= \varphi(D \cap A) + \varphi(D \cap A^c) = \varphi(D \cap A) + \varphi(D \cap A^c \cap B) \\ &\quad + \varphi(D \cap A^c \cap B^c) = \varphi(D \cap A) + \varphi(D \cap B) + \varphi(D \cap (A \cup B)^c)\end{aligned}$$

On choisit $D = C \cap (A \cup B)$

$$\varphi(D) = \varphi(C \cap (A \cup B)) = \varphi(C \cap A) + \varphi(C \cap B)$$

□

Cor: Par récurrence, on conclut:

Soient $n \in \mathbb{N}, C \subset X, A_i \in (\mathcal{A}_\varphi)^n$ disjoints, alors

$$\varphi\left(C \cap \left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right)\right) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \varphi(C \cap A_i)$$

Δ nbr fini Δ

Dém: du thm de Carathéodory

1) $\mathcal{A}_\varphi$ est stable par la réunion

$$A \in (\mathcal{A}_\varphi)^w \stackrel{?}{\Rightarrow} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}_\varphi$$

On définit $B \in (\mathcal{A}_\varphi)^w$ par $B_n = A_n \setminus \bigcup_{i < n} A_i \subset A_n$

$$\text{On a } A_i \cap B = \emptyset \quad \forall i \in \mathbb{N} \Rightarrow B_i \cap B_n = \emptyset \quad \forall i < n$$

$$\text{On a aussi } \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$$

$$\text{Car, } \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i = A_{n-1} \cup \bigcup_{i \in \mathbb{N}-1} A_i = B_{n-1} \cup \bigcup_{i \in \mathbb{N}-1} A_i = \dots = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i$$

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$$

$$\Leftrightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n =: D$$

$$\text{Soit } C \in \mathcal{X}, \quad \varphi(C \cap D) = \varphi(C \cap \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \varphi(C \cap B_n)$$

$$= \sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_{i \in \mathbb{N}} \varphi(C \cap B_i) \stackrel{\text{lemme 2}}{=} \sup_{n \in \mathbb{N}} \varphi(C \cap \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i)$$

$$\text{on a } \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i \subset D \Leftrightarrow D^c \subset (\bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i)^c \Rightarrow D^c \cap C \subset C \cap (\bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i)^c$$

$$\Rightarrow \varphi(C \cap D^c) \leq \varphi(C \cap (\bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i)^c)$$

$$\varphi(C \cap D) + \varphi(C \cap D^c) \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \varphi(C \cap \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i) + \varphi(C \cap D^c)$$

$$= \sup_{n \in \mathbb{N}} (\varphi(C \cap \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i) + \varphi(C \cap D^c)) = *$$

$$\varphi(C \cap D^c) \leq \varphi(C \cap (\bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i)^c)$$

$$\text{Car, } D = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i \cup \bigcup_{i > n} B_i \text{ et } C \cap D^c = C \cap (\bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i)^c \cap (\bigcup_{i > n} B_i)^c \dots$$

$$\dots \subset C \cap (\bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i)^c$$

$$* \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} (\varphi(C \cap \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i) + \varphi(C \cap (\bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i)^c)) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \varphi(C) = \varphi(C)$$

$$C = C \cap D \cup C \cap D^c$$

$$\varphi(C) \leq \varphi(C \cap D) + \varphi(C \cap D^c) \leq \varphi(C)$$

$$\Rightarrow D \in \mathcal{A}_\varphi$$

Dém: 2) σ -additivité de $\varphi|_{\mathcal{A}_\varphi}$

Soit $A \in (\mathcal{A}_\varphi)^\omega$ disjoints, soit $B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$, $\varphi(B) \stackrel{?}{=} \sum_{n \in \mathbb{N}} \varphi(A_n)$

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \subset B \Rightarrow \varphi\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) \leq \varphi(B)$$

$$\Rightarrow \sum_{i \in \mathbb{N}} \varphi(A_i) \leq \varphi(B) \Rightarrow \sum_{n \in \mathbb{N}} \varphi(A_n) \leq \varphi(B)$$

$$\varphi(B) = \varphi\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \varphi(A_n) \Rightarrow \varphi(B) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \varphi(A_n)$$

□

Déf: Soit φ une mesure extérieure sur un eno. X . Une partie $A \subset X$ est dite φ -négligable si $\varphi(A) = 0$.

$$\mathcal{N}_\varphi := \{A \subset X \mid \varphi(A) = 0\}$$

Prop: i) $\mathcal{N}_\varphi \subset \mathcal{A}_\varphi$

$$ii) A \Delta B := A \setminus B \cup B \setminus A \in \mathcal{N}_\varphi \Rightarrow \varphi(A) = \varphi(B)$$

et de plus $A \in \mathcal{A}_\varphi \Leftrightarrow B \in \mathcal{A}_\varphi$

Dém: i) $A \in \mathcal{N}_\varphi$. Soit $B \subset X$

$$\text{on a } B \cap A \subset A \Rightarrow \varphi(B \cap A) \leq \varphi(A) = 0 \Rightarrow \varphi(B \cap A) = 0$$

$$\varphi(B) \leq \varphi(B \cap A) + \varphi(B \cap A^c) = \varphi(B \cap A^c) \leq \varphi(B)$$

$$\Rightarrow \varphi(B) = \varphi(B \cap A) + \varphi(B \cap A^c) \Leftrightarrow A \in \mathcal{A}_\varphi$$

$$ii) A \Delta B \in \mathcal{N}_\varphi \Leftrightarrow A \setminus B, B \setminus A \in \mathcal{N}_\varphi$$

$$\Rightarrow \varphi(A) = \varphi(A \setminus B \cup A \cap B) \leq \varphi(A \setminus B) + \varphi(A \cap B) = \varphi(A \cap B) \leq \varphi(A)$$

$$\Rightarrow \varphi(A \cap B) = \varphi(A) \text{ et par symétrie } \varphi(A \cap B) = \varphi(B) \Rightarrow \varphi(A) = \varphi(B)$$

$$\text{Si } A \in \mathcal{A}_\varphi, B = B \cap A \cup B \setminus A = \overset{\text{mesurable}}{B \cap A} \cup \overset{\text{mesurable}}{B \setminus A} \in \mathcal{A}_\varphi$$

□

Déf: Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. On dit que μ est une mesure complète si $\forall A \in \mathcal{A}$ de mesure nulle, on a $\mathcal{P}(A) \in \mathcal{A}$.

Cor: Pour toute mesure ext. φ sur X , $\varphi|_{\mathcal{A}_\varphi}$ est complète.

La mesure de Lebesgue:

La mesure ext. de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$: (on fixe $d \in \mathbb{Z}_{>0}$)

Déf: Un pavé (droit) ouvert de $\mathbb{R}^d$ est un ss-ens $P \subset \mathbb{R}^d$ de la forme $P = P_{a,b} := \{x \in \mathbb{R}^d \mid a_i < x_i < b_i, \forall i \in d\}$ où $a, b \in \mathbb{R}^d$.

Rem: Pavés (droits) fermés:

$\overline{P}_{a,b} := \{x \in \mathbb{R}^d \mid a_i \leq x_i \leq b_i, \forall i \in d\}$
 pas l'adhérence mais une notation.
 $\text{Int}(\overline{P}_{a,b}) = P_{a,b}$ (intérieur)
 si $P_{a,b} \neq \emptyset \Rightarrow (\overline{P_{a,b}})^* = \overline{P_{a,b}}$ * (adhérence)
 $\overline{P_{a,b}} = \emptyset$

On définit $\mathcal{J} := \mathcal{J}_{\mathbb{R}^d}$ = tous les pavés ouverts $\cup \{\mathbb{R}^d\}$

et $\text{vol}_d: \mathcal{J} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_{>0}$ $\text{vol}(P) = \begin{cases} 0 & P = \emptyset \\ \prod_{i \in d} (b_i - a_i) & \text{si } P = P_{a,b} \neq \emptyset \\ +\infty & P = \mathbb{R}^d \end{cases}$

Déf: La mesure ext. de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$, notée $\lambda := \lambda_d$, est la mesure ext. associée à l'application $\text{vol}_d: \mathcal{J}_{\mathbb{R}^d} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_{>0}$

Rem: $\forall x \in \mathbb{R}^d$, on a $x + P_{a,b} = P_{x+a, x+b}$

$\Rightarrow \text{vol}(x + P) = \text{vol}(P) \quad \forall x \in \mathbb{R}^d, \forall P \in \mathcal{J}$

$\Rightarrow A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ et t.q. $\mathcal{R}_{\mathcal{J}}(A)$ et $\mathcal{R}_{\mathcal{J}}(x + A)$ sont en bijection canonique $\Rightarrow \lambda(A) = \lambda(x + A) \quad \forall x \in \mathbb{R}^d \quad \forall A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$

Rem: λ -mesurable = Lebesgue mesurable, λ -négligable = Lebesgue-mesurable
 $\mathcal{A}_\lambda$ est la tribu de Lebesgue.

Thm: (La mesure ext d'un pavé fermé)

Pour tout pavé fermé $\bar{P}$ de $\mathbb{R}^d$, on a $\lambda(\bar{P}) = \text{vol}(P)$

où $P = \text{int}(\bar{P})$.

le 18.10.19

Dém: Soit $\bar{P} = \bar{P}_{a,b} \neq \emptyset$.

Soit $\varepsilon > 0$, $\vec{\varepsilon}_1 = (\varepsilon, \varepsilon, \dots, \varepsilon) \in \mathbb{R}^d$

On définit $Q \in \mathcal{R}_J(\bar{P})$ par $Q_n = \emptyset \ \forall n > 0$, $Q_0 = \bar{P}_{a-\vec{\varepsilon}_1, b+\vec{\varepsilon}_1}$

$$\lambda(\bar{P}) \leq \text{vol}(Q_0) = \prod_{i \in d} (b_i - a_i + 2\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \text{vol}(P)$$

Soit $Q \in \mathcal{R}_J(\bar{P})$, comme $\bar{P}$ est compact $\Rightarrow$

$\exists J \subset \omega$ ss-ens. fini tq $\bar{P} \subset \bigcup_{i \in J} Q_i$

On définit $y := \sum_{i \in J} \chi_{Q_i} \geq \chi_{\bar{P}}$

Rap: $R_i \int \chi_P = \text{vol}(P)$

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \omega} \text{vol}(Q_n) &\geq \sum_{n \in J} \text{vol}(Q_n) = \sum_{n \in J} R_i \int \chi_{Q_n} = R_i \int \sum_{n \in J} \chi_{Q_n} \\ &= R_i \int y \geq R_i \int \chi_{\bar{P}} = \text{vol}(P) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lambda(\bar{P}) \geq \text{vol}(P) \quad \Rightarrow \lambda(\bar{P}) = \text{vol}(P) \quad \square$$

Cor: Soit $A \subset \mathbb{R}^d$ encadrée par un pavé fermé $\bar{P}$ et son intérieur P

$$P \subset A \subset \bar{P}, \quad P \in \mathcal{C}$$

Alors $\lambda(A) = \text{vol}(P)$

en particulier, $\lambda(P) = \text{vol}(P)$

Rv: En effet, $\bar{P} \setminus A \subset \partial \bar{P} \Rightarrow \lambda_d(\partial \bar{P}) = 0$ (λ_d -négligeable)
 $\Rightarrow \lambda_d(A) = \lambda_d(P) = \text{vol}(P)$

■

Ex: Soit $L \in \mathbb{R}_{>0}$, $[0, L]^d \subset \mathbb{R}^d$
 $\lambda_d([0, L]^d) \leq \lambda_d(\mathbb{R}^d)$
 $\stackrel{L^d}{\Rightarrow} \lambda_d(\mathbb{R}^d) = +\infty$

Ex: Soit $x \in \mathbb{R}^d$, $\{x\}$ pavé fermé $\Rightarrow \lambda_d(\{x\}) = 0$
 Donc si $A \subset \mathbb{R}^d$ est dénombrable $\Rightarrow \lambda_d(A) = 0$
 $\Rightarrow \lambda_d(\mathbb{Q}^d) = 0$

Rem: $\mathbb{R}$ est non dénombrable

La Relation entre la tribu borélienne et la tribu de Lebesgue:

Lemme: Pour que $A \subset \mathbb{R}^d$ soit Lebesgue-mesurable, il suffit que la relation de Carathéodory soit satisfaite pour tout pavé ouvert de $\mathbb{R}^d$.

Dém: Supposons que $\lambda(P) = \lambda(P \cap A) + \lambda(P \setminus A) \quad \forall P \in \mathcal{C}$

Soit $B \subset \mathbb{R}^d$ et $\varepsilon > 0$

$\exists P \in \mathcal{R}_{>0}(B)$ tq $\sum_{new} \text{vol}(P_n) \leq \lambda(B) + \varepsilon$

$$B \subset \bigcup_{new} P_n \Rightarrow \begin{cases} B \cap A \subset \bigcup_{new} P_n \cap A \\ B \cap A^c \subset \bigcup_{new} P_n \cap A^c \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lambda(B \cap A) \leq \sum_{new} \lambda(P_n \cap A) \text{ et } \lambda(B \cap A^c) \leq \sum_{new} \lambda(P_n \cap A^c)$$

$$\lambda(B \cap A) + \lambda(B \cap A^c) \leq \sum_{new} \underbrace{\lambda(P_n \cap A) + \lambda(P_n \cap A^c)}_{\lambda(P_n)} = \sum_{new} \text{vol}(P_n)$$

$$\leq \lambda(B) + \varepsilon$$

$$\Rightarrow \lambda(B) \leq \lambda(B \cap A) + \lambda(B \cap A^c) \leq \lambda(B)$$

■

Lemme: Soit $d \geq 1$. $\forall x \in \mathbb{R}$ l'ensemble $\mathbb{R}_{>x}$ est λ_1 -mesurable.

Dém: $(\mathbb{R}_{>x})^c = \mathbb{R}_{\leq x}$

$$(a,b) \subset \mathbb{R}$$

$$1) x \notin (a,b) \Rightarrow \text{Soit } (a,b) \subset \mathbb{R}_{>x}$$

$$\text{Soit } (a,b) \subset \mathbb{R}_{\leq x}$$

$$\Rightarrow \lambda_1((a,b) \cap \mathbb{R}_{>x}) + \lambda_1((a,b) \cap \mathbb{R}_{\leq x}) = \lambda_1((a,b))$$

$$2) x \in (a,b) \Rightarrow (a,b) \cap \mathbb{R}_{>x} = (x,b)$$

$$(a,b) \cap \mathbb{R}_{\leq x} = (a,x]$$

$$\lambda_1((a,b)) = b-a = b-x + x-a = \lambda_1((x,b)) + \lambda_1((a,x])$$

$$= \lambda_1((a,b) \cap \mathbb{R}_{>x}) + \lambda_1((a,b) \cap \mathbb{R}_{\leq x})$$

□

Lemme: Soit $d \geq 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$ et $\forall i \in d$

$H_{x,i} := \{y \in \mathbb{R}^d \mid y_i > x\}$ est Lebesgue-mesurable.

Dém: $pr_i: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ $y \mapsto y_i$ $\tilde{pr}_i: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d-1}$ $y \mapsto (y_0, y_1, \dots, y_{i-1}, y_{i+1}, \dots, y_{d-1})$

Soit $P = P_{a,b} \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}^d}$ tq $P \cap H_{x,i} \neq \emptyset$ et $P \cap (H_{x,i})^c \neq \emptyset$

$$pr_i(P \cap H_{x,i}) = pr_i(\{y \in \mathbb{R}^d \mid y_j \in (a_j, b_j) \forall j \in d \text{ et } y_i > x\})$$

$$= \{y_i \in \mathbb{R} \mid y_i \in (a_i, b_i), y_i > x\} = (a_i, b_i) \cap \mathbb{R}_{>x}$$

$$= pr_i(P) \cap \mathbb{R}_{>x}$$

$$\tilde{pr}_i(P \cap H_{x,i}) = \tilde{pr}_i(P) \quad \tilde{pr}_i(P \setminus H_{x,i}) = \tilde{pr}_i(P)$$

$$pr_i(P \setminus H_{x,i}) = pr_i(P) \setminus \mathbb{R}_{>x}$$

On remarque que: on a $X \in \tilde{\mathcal{C}}_{\mathbb{R}^{d-1}}$ pour $X \in \{\tilde{pr}_i(P), i \in d\}$

$$\text{et } X \in \tilde{\mathcal{C}}_{\mathbb{R}} \quad X \in \{pr_i(P) \cap \mathbb{R}_{>x} \mid pr_i(P) \cap \mathbb{R}_{\leq x}\}$$

Dém: (Suite)

$$\Rightarrow \lambda_d(P \cap H_{x_i}) = \lambda_1(p r_i(P) \cap H_{x_i}) \cdot \lambda_{d-1}(\tilde{p r}_i(P))$$

$$\text{et } \lambda_d(P \cap (H_{x_i})^c) = \lambda_1(p r_i(P) \cap (H_{x_i})^c) \lambda_{d-1}(\tilde{p r}_i(P))$$

$$\begin{aligned} \lambda_d(P \cap H_{x_i}) + \lambda_d(P \cap (H_{x_i})^c) &= \\ &= \underbrace{(\lambda_1(p r_i(P) \cap H_{x_i}) + \lambda_1(p r_i(P) \cap (H_{x_i})^c))}_{\lambda_1(p r_i(P))} \lambda_{d-1}(\tilde{p r}_i(P)) \end{aligned}$$

$$= \lambda_1(p r_i(P)) \lambda_{d-1}(\tilde{p r}_i(P)) = \lambda_d(P) \quad \square$$

Cor: Tout pavé ouvert est Lebesgue mesurable.

Démo: En effet, $A := \bigcap_{i \in \mathbb{d}} (H_{a_{i,i}} \setminus H_{b_{i,i}})$ est un pavé semi-ouvert
$$:= \bigcap_{i \in \mathbb{d}} (H_{a_{i,i}} \cap (H_{b_{i,i}})^c)$$

et $P_{a,b} \subset A$.

$\Rightarrow$ Comme $A \setminus P_{a,b}$ est λ -négligeable, $P_{a,b}$ est λ -mesurable. $\square$

Lemme: Tout ouvert de $\mathbb{R}^d$ est une réunion dénombrable de pavés ouverts.

Dém: $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert, $x \in \Omega$

$\forall r > 0, r \in \mathbb{R}$ tq $B(x, r) \subset \Omega$

Soit $a, b \in \mathbb{R}^d$ tq $x_i - \frac{r}{d} < a_i < x_i < b_i < x_i + \frac{r}{d} \quad \forall i \in \mathbb{d}$

$\Rightarrow x \in P_{a,b}$ et $\forall y \in P_{a,b}$ on a $|x_i - y_i| < \frac{r}{d} \quad \forall i \in \mathbb{d}$

$\Rightarrow \|x - y\|^2 = \sum_{i \in \mathbb{d}} |x_i - y_i|^2 < \frac{r^2}{d} \leq r^2 \Rightarrow y \in B(x, r)$

$\Rightarrow P_{a,b} \subset B(x, r)$

$\Rightarrow \Omega \subset \bigcup_{x \in \Omega} P_{a,b}(x) \subset \bigcup_{a,b \in \mathbb{Q}^d} P_{a,b}$

$\Rightarrow$ tout ouvert de $\mathbb{R}^d$ est mesurable $\square$

$\Rightarrow$ La tribue Borélienne $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^d} \subset \mathcal{A}_{\lambda_d}$ (Lebesgue-mesurable)

On va voir : $\mathcal{A}_{\lambda_d} \neq \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ et $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^d} \neq \mathcal{A}_{\lambda_d}$

Analyse III:

Prop: Pour toute partie $A \subset \mathbb{R}^d$, les conditions suivantes sont équivalentes :

- 1) A est Lebesgue - mesurable vu comme mesure ext.
- 2) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists$ un ouvert $G \subset \mathbb{R}^d$ tq $A \subset G$ et $\lambda^*(G \setminus A) < \varepsilon$
- 3) $\exists$ un Borélien $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}$ de la forme d'intersections dénombrables d'ouverts, tq $A \subset B$ et $\lambda^*(B \setminus A) = 0$
- 4) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists$ un fermé $F \subset \mathbb{R}^d$ tq $F \subset A$ et $\lambda^*(A \setminus F) < \varepsilon$
- 5) $\exists B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}$ de la forme de la réunion dénombrable de fermés tq $B \subset A$ et $\lambda^*(A \setminus B) = 0$
- 6) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists$ un ouvert G et un fermé F ^{de $\mathbb{R}^d$} tels que $F \subset A \subset G$ et $\lambda(G \setminus F) < \varepsilon$
- 7) $\exists B_{\pm} \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}$ tq $B_- \subset A \subset B_+$ et $\lambda(B_+ \setminus B_-) = 0$

Dém: 1) $\Rightarrow$ 2)

i) $\lambda(A) < \infty$. $\exists P \subset \mathcal{R}_{\Sigma}(A)$ tq: $\sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda(P_n) < \lambda(A) + \varepsilon$.

Donc l'ouvert $G = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} P_n$ est tq $A \subset G$, $\lambda(G) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda(P_n) < \lambda(A) + \varepsilon$ et $\lambda(G) = \lambda(G \setminus A \cup A) = \lambda(G \setminus A) + \lambda(A)$.

$$\lambda(G \setminus A) = \lambda(G) - \lambda(A) < \varepsilon$$

ii) $\lambda(A) = \infty$. Soit $\mathcal{U} \in \mathcal{R}_{\Sigma}(\mathbb{R}^d)$. On définit $B \in (\mathcal{A}_{\lambda})^{\omega}$

$$B_n := A \cap \mathcal{U}_n, \quad A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n, \quad \lambda(B_n) < \lambda(\mathcal{U}_n) < \infty$$

Par i), $\exists$ un ouvert G_n tq $B_n \subset G_n$ et $\lambda(G_n \setminus B_n) < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$.

Donc l'ouvert $G = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} G_n$ est tq $A \subset G$, $G \setminus A \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} G_n \setminus B_n$

$$\Rightarrow \lambda(G \setminus A) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda(G_n \setminus B_n) < \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} = \varepsilon$$

2) $\Rightarrow$ 3)

Soit $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'ouverts telle que $A \subset G_n$ et $\lambda(G_n \setminus A) < \frac{1}{n+1}$. Alors le borélien $B := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} G_n$ est tel que $A \subset B$, $\lambda(B \setminus A) = \lambda(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (G_n \setminus A)) \leq \lambda(G_{n_0} \setminus A) < \frac{1}{n_0+1}$
 $n_0 \rightarrow \infty \Rightarrow \lambda(B \setminus A) = 0$

3) $\Rightarrow$ 1)

Soit $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}$ tel que $A \subset B$ et $\lambda(B \setminus A) = 0$

$\Rightarrow A \in \mathcal{A}_\lambda$ par un lemme / thm vu il y a 3 semaines.

1) $\Rightarrow$ 4)

$A^c \in \mathcal{A}_\lambda$, par 2), $\exists$ un ouvert G tq $A^c \subset G$ et $\lambda(G \setminus A^c) < \varepsilon$. On a $G \setminus A^c = G \cap A = A \cap G^c$ et $A^c \subset G \Leftrightarrow G^c \subset A$.

Donc le fermé $F := G^c$ est tel que $F \subset A$ et $\lambda(A \setminus F) < \varepsilon$

4) $\Rightarrow$ 2) clair

1) $\Rightarrow$ 5)

$A^c \in \mathcal{A}_\lambda$, par 3), $\exists B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}$ t.q. $B = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} G_n$, $A^c \subset B$ et $\lambda(B \setminus A^c) = 0 \Rightarrow B^c \subset A$, $B^c = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} G_n^c$, $B^c \subset A$,
 $\lambda(A \setminus B^c) = \lambda(B \setminus A^c) = 0$

5) $\Rightarrow$ 3) clair

1) $\Rightarrow$ 6)

Soit $\varepsilon > 0$, par 2) et 4) $\exists$ un ouvert G et un fermé F tels que $F \subset A \subset G$ et $\lambda(G \setminus A) < \varepsilon/2$, $\lambda(A \setminus F) < \varepsilon/2$.

Or $G \setminus F = G \setminus A \cup A \setminus F$

$\Rightarrow \lambda(G \setminus F) = \lambda(G \setminus A) + \lambda(A \setminus F) < \varepsilon$

6) $\Rightarrow$ 2)

Soit $\varepsilon > 0$, F fermé et G ouvert tq $F \subset A \subset G$ et $\lambda(G \setminus F) < \varepsilon$

$G \setminus F = G \setminus A \cup A \setminus F \Rightarrow G \setminus A \subset G \setminus F$

$\Rightarrow \lambda(G \setminus A) \leq \lambda(G \setminus F) < \varepsilon$

Analyse III :1) $\Rightarrow$ 4)

Par 3) et 5), $\exists B_{\pm} \subset \mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}$ tq $B_- \subset A \subset B_+$, $\lambda(B_+ \setminus A) = 0$
et $\lambda(A \setminus B_-) = 0$.

$$B_+ \setminus B_- = B_+ \setminus A \cup A \setminus B_-$$

$$\Rightarrow \lambda(B_+ \setminus B_-) = \lambda(B_+ \setminus A) + \lambda(A \setminus B_-) = 0$$

4) $\Rightarrow$ 3) clair

□

Thm: (de Vitali)

Pour tout sous-ensemble $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $\lambda(\Omega) > 0$.

Il existe $V \subset \Omega$ non Lebesgue-mesurable.

Dém: Soit $Q \in \mathcal{R}_\Sigma(\Omega)$, $\Omega = \Omega \cap \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} Q_n \right) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Omega \cap Q_n$

$$\Rightarrow \exists k \in \mathbb{N} \text{ tq } 0 < \lambda(\Omega \cap Q_k) < \infty$$

$$\Omega' := \Omega \cap Q_k.$$

Soit $a \in \mathbb{R}^d$ tq $\Omega' \subset P_{-a,a} =: P$

$\lambda(\Omega') > 0 \Rightarrow \exists$ un ss-ensemble infini dénombrable

$$J \subset \Omega' \quad (\text{ex: } J = \mathbb{Q}^d \cap \Omega')$$

Soit $\langle J \rangle$ le ss-groupe additif de $\mathbb{R}^d$ engendré par J .

$\mathbb{R}^d / \langle J \rangle$ - le groupe quotient.

$$A \in \mathbb{R}^d / \langle J \rangle \Leftrightarrow A = x + \langle J \rangle \Rightarrow \forall y \in A, \text{ on a}$$

$$A = y + \langle J \rangle.$$

La relation d'équivalence correspondante : $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \langle J \rangle$

$$\mathbb{R}^d = \bigsqcup_{A \in \mathbb{R}^d / \langle J \rangle} A, \quad \Omega' = \Omega' \cap \mathbb{R}^d = \bigsqcup_{A \in S} A$$

où $S = \{ A \in \mathbb{R}^d / \langle J \rangle \mid \Omega' \cap A \neq \emptyset \}$ non-dénombrable.

Par l'axiome du choix, $\exists v: S \rightarrow \Omega'$ telle que

$$v(A) \in A \cap \Omega'.$$

On définit $\check{V} := v(S) = \{v(A) \mid A \in S\}$

On va voir que $\check{V}$ n'est pas Lebesgue mesurable.

Supposons par l'absurde que $\check{V} \in \mathcal{A}_\lambda$.

On a $J \subset \langle J \rangle \cap \Omega' \subset \langle J \rangle \cap P_{-a,a} \subset \langle J \rangle \cap 2P$

L'ensemble $\langle J \rangle \cap 2P$ est infini dénombrable.

Soit $b: \omega \rightarrow \langle J \rangle \cap 2P$ une bijection.

On définit $W \in (\mathcal{P}(\mathbb{R}^d))^{\omega}$, $W_n := b_n + \check{V}$

Où $W_n \cap W_m = \emptyset$ si $n \neq m$:

$$\lceil x \in W_n \cap W_m \Rightarrow x = b_m + v(A) = b_n + v(B)$$

$$\Leftrightarrow b_n - b_m = v(A) - v(B) \in \langle J \rangle \Leftrightarrow A = B \text{ et } b_n = b_m$$

$$\Leftrightarrow n = m$$

On a aussi $\Omega' \subset \bigcup_{n \in \omega} W_n$

$$\lceil x \in \Omega' \Rightarrow \exists ! A \in S \text{ tq } x \in A, x - v(A) \in \langle J \rangle \cap 2P = b(\omega)$$

$$\Rightarrow \exists ! n \in \omega : x = b_n + v(A) \in W_n \quad \rfloor$$

$$\bigcup_{n \in \omega} W_n \subset 3P \Leftrightarrow \check{V} \subset \Omega' \subset P \quad b(\omega) \subset 2P$$

$$W_n = \bigcup_{2P} b_n + \bigcup_P \check{V} \subset 3P$$

$$0 < \lambda(\Omega') \leq \lambda\left(\bigcup_{n \in \omega} W_n\right) \leq \lambda(3P) < \infty$$

Par contre,

$$\lambda\left(\bigcup_{n \in \omega} W_n\right) = \sum_{n \in \omega} \lambda(W_n) = \sum_{n \in \omega} \lambda(b_n + \check{V}) = \sum_{n \in \omega} \lambda(\check{V}) = \begin{cases} 0 & \text{si } \lambda(\check{V}) = 0 \\ \infty & \text{sinon} \end{cases}$$

contradiction

□

Analyse III :Ensembles de Lebesgue - mesurables non - boréliens :L'ensemble de Cantor :

On considère l'ensemble de toutes les suites binaires :

$$2^{<\omega} := \bigsqcup_{n \in \omega} 2^n, \quad 2^{<n} := \bigsqcup_{k \in n} 2^k$$

$$2 := \{0, 1\} \quad n := \{0, \dots, n-1\}$$

On écrit $s = (s_i)_{i \in n} = (s_0, \dots, s_{n-1})$ $s_i \in \{0, 1\}$

Ex: $2^0 = \{()\}$

$$2^1 = \{(0), (1)\}$$

$$2^2 = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$$

⋮

L'application longueur $L: 2^{<\omega} \longrightarrow \omega$, $L(s) = n$ si $s \in 2^n$

produit $2^{<\omega} \times 2^{<\omega} \longrightarrow 2^{<\omega}$
 $(s, t) \longmapsto st$

$$(st)_i = \begin{cases} s_i & \text{si } i < L(s) \\ t_{i-L(s)} & \text{sinon} \end{cases}$$

$$L(st) = L(s) + L(t)$$

le produit est associatif : $(st)u = s(tu)$

On a les propriétés :

$$2^{n+1} = \{(i)s \mid i \in 2, s \in 2^n\} \Rightarrow$$

$$2^{<n+1} = \{(i)s \mid i \in 2, s \in 2^{<n}\} \sqcup 2^0$$

La famille de Cantor des intervalles ouverts dans $[0, 1]$:

$$G \in (\mathcal{T}_{\mathbb{R}} \cap \mathcal{P}([0, 1]))^{2^{<\omega}}$$

$$G_{(i)s} = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right), \quad G_{(i)s} = h_{i, 1/3}(G_s) \quad \forall s \in 2^{<\omega}$$

où $h_{a, k}$ l'homothétie de centre a et rapport k .

$$h_{a, k}(x) = (x - a)k + a$$

$$G_0 = R_{0,1/3}(G_{11}) = \varphi_{0,1/3}((\frac{1}{3}, \frac{2}{3})) = (\frac{1}{9}, \frac{2}{9})$$

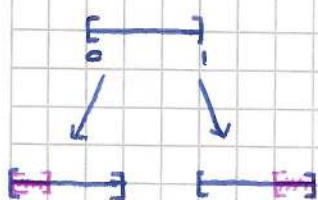
$$G_1 = R_{1,1/3}(G_0) = \dots = (\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$$

Lemme: La famille de Cantor est disjointe.

Démo: (1) $G(2^0) = \emptyset$

(2) Supposons que $G(2^n)$ est disjointe, alors

$$\begin{aligned} G(2^{n+1}) &= G(2^0) \cup \{G_{i,1/3} \mid i \in 2, s \in 2^n\} \\ &= \{G_{11}\} \cup \bigcup_{i \in 2} R_{i,1/3}(G(2^n)) \end{aligned}$$



$$R_{0,1/3}([0,1]) = [0, 1/3]$$

$$R_{1,1/3}([0,1]) = [2/3, 1]$$

disjoints

↑
disjoints

□

Lemme: On a $\lambda_1(\mathcal{M}_G) = 1$ où $\mathcal{M}_G = \bigsqcup_{s \in 2^{<\omega}} G_s \subset [0,1]$

Dém: $\lambda_1(G_0) = \lambda_1((\frac{1}{3}, \frac{2}{3})) = \frac{1}{3}$

Soit $s = (i) \in$

$$\lambda_1(G_s) = \lambda_1(R_{i,1/3}(G_t)) = \frac{1}{3} \lambda_1(G_t)$$

$$\lambda_1(\mathcal{M}_G) = \sum_{s \in 2^{<\omega}} \lambda_1(G_s) = \sum_{n \in \omega} \sum_{s \in 2^n} \lambda_1(G_s)$$

$$= \sum_{n \in \omega} \sum_{s \in 2^n} \left(\frac{1}{3}\right)^n \cdot \frac{1}{3} = \sum_{n \in \omega} 2^n \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} = 1$$

□

Déf: L'ensemble (triadique) de Cantor est le complémentaire de $\mathcal{M}_G$ dans $[0,1]$: $K_3 := [0,1] \setminus \mathcal{M}_G$

Rem: $\lambda_1(K_3) = 0$ car $\lambda_1([0,1]) = \lambda_1(K_3) + \lambda_1(\mathcal{M}_G)$

1

= 0

1

Analyse III:RésuméLa fonction de Cantor:

$$B(\mathbb{R}, \mathbb{R}) := \{ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid \text{bornée} \} =: B(\mathbb{R})$$

$$\text{Norme uniforme: } \|f\|_{\infty} = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$$

Rem: 1) l'espace $(B(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \|\cdot\|_{\infty})$ est un espace de Banach.

2) le ss-espace $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ de fonctions bornées continues est un ss-espace vectoriel fermé.

On définit une application $T: B(\mathbb{R}) \rightarrow B(\mathbb{R})$

$$D_0 = \mathbb{R}_{< \frac{1}{2}}, \quad D_1 = (D_0)^c = \mathbb{R}_{\geq \frac{1}{2}}$$

$$T(f)|_{D_i} = h_{i, \frac{1}{2}} \circ f \circ h_{i, \frac{1}{3}} \quad i \in 2 = \{0, 1\}$$

Rem:

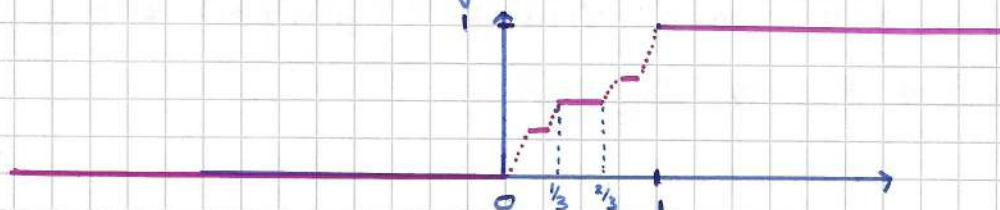
$$1) h_{i, \frac{1}{3}}([0, 1]) \subset D_i \quad \forall i \in 2$$

$$2) \|T(u) - T(v)\|_{\infty} < \frac{1}{2} \|u - v\|_{\infty} \quad (\text{Test contractante})$$

Donc, par le thm du point fixe, il existe une unique application bornée $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tq $T(g) = g$

Cette fonction est appelée fonction de Cantor.

En particulier, cette fonction est continue



Exercice: On définit $F_c \subset C(\mathbb{R}) \subset B(\mathbb{R})$

$f \in F_c \Leftrightarrow f$ est continue croissante

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 1 \\ 0 & \text{si } x < 0 \\ 1/2 & \text{si } x \in [1/3, 2/3] \end{cases}$$

(et on a que $T(f) = f$) ?

Lemme: Pour $P \in G(2^{\mathbb{N}})$ la restriction $g|_P$ est une fonction constante.

Dém: Comme $g \in \mathbb{F}$, on a $g|_{G(1)} = 1/2$.

Supposons que $g|_{G_s} = \text{cot} \quad \forall s \in 2^{\mathbb{N}}$

$$g|_{G(i)s} = g \circ R_{i,1/3} \big|_{G_s} = R_{i,1/2} \circ g \circ R_{i,1/3} \big|_{G_s} = R_{i,1/2} \circ g|_{G_s} = \text{cot}$$

Ensembles dans $\mathcal{A}_1 \setminus \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$:

Lemme: Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue, surjective et strictement croissante. Alors l'ensemble $\mathcal{F} := \{A \subset \mathbb{R} \mid f(A) \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}\}$ est une tribu contenant $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.

Dém: 1) $\mathbb{R} \in \mathcal{F}$: $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$

2) $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$?

$$\mathbb{R} = f(\mathbb{R}) = f(A \cup A^c) = f(A) \cup f(A^c)$$

$$f(A) \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \Rightarrow f(A^c) = f(A)^c \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \\ \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$$

3) $A \in \mathcal{F}^{\omega}$, $f(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f(A_n) \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$
 $\Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{F}$

$\forall a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, on a $f((a, b)) = (f(a), f(b)) \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$
donc $(a, b) \in \mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \subset \mathcal{F}$

Lemme: Soit g la fonction de Cantor, on définit $\hat{g} = \text{id}_{\mathbb{R}} + g$
[$\hat{g}(x) = x + g(x)$]. Alors $\hat{g}$ est continue, strictement croissante et surjective et $\lambda_1(\hat{g}|_{K_3}) = 1$

Analyse III:

Dém: 1) $\forall x > 1, \hat{g}(x) = x + g(x) = x + 1 \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$
 $\forall x \leq 0, \hat{g}(x) = x + g(x) = x \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} -\infty$ } $\Rightarrow$ surjectivité de $\hat{g}$

2) croissance stricte:

$$x > y \quad \hat{g}(x) - \hat{g}(y) = x - y + \underbrace{g(x) - g(y)}_{> 0} > x - y > 0$$

3) $\hat{g}([0,1]) = [\hat{g}(0), \hat{g}(1)] = \dots = [0,2]$

$$P \in G(2^{\omega}) \quad , \quad \hat{g}(P) = \{ \hat{g}(x) \mid x \in P \} = \{ x + g(x) \mid x \in P \}$$

$$= g|_P + P$$

$$\lambda_1(\hat{g}(P)) = \lambda_1(P) \Rightarrow \lambda_1(\hat{g}(U_G)) = \lambda_1(U_G) = 1$$

$$\hat{g}(K_3) = \hat{g}([0,1]) - \hat{g}(U_G)$$

$$2 = \lambda_1(\hat{g}([0,1])) = \underbrace{\lambda_1(\hat{g}(U_G))}_{=1} + \lambda_1(\hat{g}(K_3))$$

Corollaire: $\forall A \in \mathcal{P}(\hat{g}(K_3)) \setminus \mathcal{A}_{\lambda_1}$, on a $\hat{g}^{-1}(A) \in \mathcal{A}_{\lambda_1} \setminus \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$

Fonctions Lebesgue - mesurable

le 08.11.19

$\Omega = (\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré complet.

En particulier, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega) \cap \mathcal{A}_{\lambda_d}$, $\mu = \lambda_d|_{\mathcal{A}}$

Fonctions mesurables à valeurs dans $\mathbb{R}^n$: $n \in \mathbb{Z}_{>0}$

Déf: $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ est Lebesgue-mesurable ou mesurable si elle est mesurable comme $f: (\Omega, \mathcal{A}) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$

Prop: $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ est $\mathcal{L}$ -mesurable $\Leftrightarrow$ pour tout ouvert $V \subset \mathbb{R}^n$, $f^{-1}(V) \in \mathcal{A}$

Dém: $(\Rightarrow)$ clair

$(\Leftarrow)$ L'ensemble $K = \{A \subset \mathbb{R}^n \mid f^{-1}(A) \in \mathcal{A}\}$ est une tribu consistant
contenant tous les ouverts de $\mathbb{R}^n$.

Donc $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} \subset K$

Rem: Si Ω est un espace topologique tel que $\mathcal{B}_{\Omega} \subset \mathcal{A}$
alors toute application continue est $\mathcal{A}$ -mesurable. $\square$

Lemme: Soient $pr_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $i \in n$, projections canoniques.
Alors $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ est mesurable $\Leftrightarrow pr_i \circ f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est
mesurable $\forall i \in n$.

Dém: $(\Rightarrow)$ Soit $V \subset \mathbb{R}$ un ouvert, $(pr_i \circ f)^{-1}(V) = f^{-1} \circ pr_i^{-1}(V)$
 $= f^{-1}(\underbrace{pr_i^{-1}(V)}_{\text{ouvert de } \mathbb{R}^n \text{ car } pr_i \text{ continue}})$

Donc $f^{-1}(pr_i^{-1}(V))$ est mesurable ($\in \mathcal{A}$)

$(\Leftarrow)$ Soit $P =]a, b[\in \mathcal{T}_{\mathbb{R}^n}$, $f^{-1}(P) = \{x \in \Omega \mid f(x) \in P\}$
 $= \{x \in \Omega \mid pr_i \circ f(x) \in (a_i, b_i) \forall i \in n\}$
 $= \bigcap_{i \in n} \{x \in \Omega \mid pr_i \circ f(x) \in (a_i, b_i)\}$
 $= \bigcap_{i \in n} \underbrace{(pr_i \circ f)^{-1}((a_i, b_i))}_{\in \mathcal{A}}$ $\square$

Lemme: Soient $m \in \mathbb{Z}_{>0}$, $W \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, $f: \Omega \rightarrow W$ une
application mesurable, $g: W \rightarrow \mathbb{R}^m$ une application
continue. Alors $g \circ f$ est mesurable.

Dém: Soit $V \subset \mathbb{R}^m$ un ouvert. Alors $g^{-1}(V)$ est un ouvert de
 W , c-à-d $\exists U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert tq $g^{-1}(V) = W \cap U$.

Donc $g^{-1}(V)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n \Rightarrow$

$$(g \circ f)^{-1}(V) = f^{-1}(g^{-1}(V)) \in \mathcal{A}$$

Analyse III :Fonctions mesurables à valeurs dans $\mathbb{R}$:Thm : Opérations sur les fonctions mesurables

Soient $f, g: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mesurables. Alors $f \pm g, f \cdot g, \max(f, g), \min(f, g)$ sont mesurables.

De plus si $g(x) \neq 0 \forall x \in \Omega$, alors f/g est aussi mesurable.

Dém : Soit $k: W \rightarrow \mathbb{R}$ l'une des opérations $(x, y) \mapsto x \pm y, xy, \max(x, y), \min(x, y)$ avec $W = \mathbb{R}^2$ et $\frac{x}{y}$ avec $W = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\neq 0}$.
Alors l'application $k \circ h: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ où $h: \Omega \rightarrow W \subset \mathbb{R}^2$
 $h(x) = (f(x), g(x))$ correspond à une des opérations.
Comme k est continue et h mesurable
 $\Rightarrow k \circ h$ est mesurable. ▣

Fonctions mesurables à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$:

Déf : On dit que $f: \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est (Lebesgue) - mesurable si $f^{-1}(\overline{\mathbb{R}}_a) \in \mathcal{A} \forall a \in \mathbb{R}$. L'ensemble de toutes les appl. mesurables $f: \Omega \rightarrow A \subset \overline{\mathbb{R}}$ est noté $M(\Omega, A)$.

Lemme 3 : Soit $f \in (M(\Omega, \overline{\mathbb{R}}))^{\omega}$. Alors $\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n, \inf_{n \in \mathbb{N}} f_n, \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n, \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n$ sont mesurables.

Dém : (i) $g := \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n$. Soit $a \in \mathbb{R}$
 $x \in g^{-1}(\overline{\mathbb{R}}_a) \Leftrightarrow g(x) \in \overline{\mathbb{R}}_a \Leftrightarrow g(x) > a \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}$
 $\text{t.q. } g(x) > f_n(x) > a \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} \text{ t.q. } x \in f_n^{-1}(\overline{\mathbb{R}}_a)$
 $\Leftrightarrow x \in \underbrace{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} f_n^{-1}(\overline{\mathbb{R}}_a)}_{\in \mathcal{A}}$. Donc g est mesurable.

$$(2) \quad \inf_{n \in \mathbb{N}} f_n = - \sup_{n \in \mathbb{N}} (-f_n)$$

f_n mesurable $\Rightarrow -f_n$ mesurable et $\sup$ mesurable $\Rightarrow$
 $-\sup$ mesurable $\Rightarrow \inf_{n \in \mathbb{N}} f_n$ mesurable

$$(3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sup f_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{m \geq n} f_m \right) = \inf_{n \in \mathbb{N}} \left(\sup_{m \geq n} f_m \right) \in M(\Omega, \bar{\mathbb{R}})$$

(4) même argument

□

Rem: Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge ponctuellement, alors la limite
 $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ est mesurable.

Fonctions étagées:

Déf: Une fonction $f \in M(\Omega, \bar{\mathbb{R}})$ est dite étagée si
 $f(\Omega)$ est un ensemble fini.

$$E(\Omega, A) = \{ f: \Omega \rightarrow A \text{ étagée} \}$$

Ex: $E \in \mathcal{A}$, alors $\chi_E: \Omega \rightarrow \bar{\mathbb{R}} \in E(\Omega, \bar{\mathbb{R}})$.

$$\chi_E(\Omega) \in \{0, 1\}.$$

$$\chi_E^{-1}(\{0\}) = \Omega \setminus E, \quad \chi_E^{-1}(\{1\}) = E$$

Rem: Si $f \in E(\Omega, \bar{\mathbb{R}})$ alors, on a la décomposition canonique

$$\text{suivante: } f = \sum_{s \in f(\Omega)} s \chi_{f^{-1}(\{s\})} \quad \text{à } f^{-1}(\{s\}) \in \mathcal{A}$$

Notation: Pour $f \in M(\Omega, \bar{\mathbb{R}}, \mathcal{A})$, on définit

$$E(f) := \{ e \in E(\Omega, \bar{\mathbb{R}}) \mid \underbrace{e(x) \leq f(x)}_{e \leq f} \quad \forall x \in \Omega \}$$

Analyse III :Rm : (Approximation monotone) $\forall f \in M(\Omega, \mathbb{R}_{\geq 0})$, $\exists$ une suite croissante $e \in (\mathcal{E}(f))^w$ tq

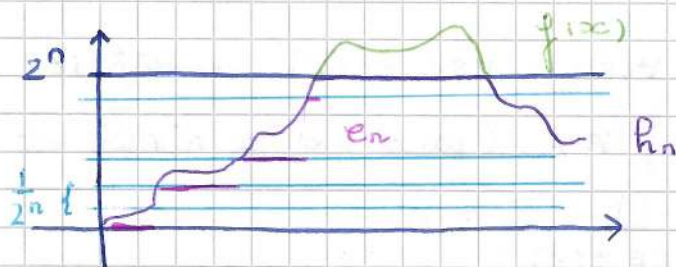
$$\sup_{new} e_n = f \quad (\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} e_n = f)$$

Dém : On définit 2 suites : $R, e \in ((\mathbb{R}_{\geq 0})^\Omega)^w$

$$R_n(x) = \min(f(x), 2^n)$$

$$e_n(x) = \max(S_n(x))$$

$$S_n(x) = (2^{-n}\mathbb{Z}) \cap [0, R_n(x)]$$

 R et e sont des suites croissantes :

$$(n, x) \in \omega \times \Omega$$

$$2^n < 2^{n+1} \Rightarrow \min(f(x), 2^n) \leq \min(f(x), 2^{n+1})$$

$$\Rightarrow R_n \leq R_{n+1}$$

$$2^{-n}\mathbb{Z} \subset 2^{-(n+1)}\mathbb{Z} \Rightarrow S_n(x) \subset S_{n+1}(x)$$

$$\Rightarrow e_n \leq e_{n+1}$$

$$e_n(\Omega) \subset (2^{-n}\mathbb{Z}) \cap [0, 2^n] \text{ fini.}$$

 R_n est mesurable par le thm.

$$s \in e_n(\Omega)$$

$$e_n^{-1}(\{s\}) = \{x \in \Omega \mid s \leq R_n(x) < s + 2^{-n}\}$$

$$= R_n^{-1}([s, s + 2^{-n})) \in \mathcal{A}$$

$$\Rightarrow e_n \in \mathcal{E}(\Omega, \mathbb{R}_{\geq 0}). \text{ On a } e_n \leq R_n \leq f.$$

$$\text{Donc } e_n \in \mathcal{E}(f), x \in \Omega, \text{ on a } 0 \leq R_n(x) - e_n(x) < 2^{-n}$$

$$\Rightarrow \sup(e_n(x)) = \lim_{n \rightarrow \infty} e_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \min(f(x), 2^{-n}) = f(x)$$

L'intégrale de Lebesgue:

$\Omega = (\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ espace mesuré complet.

Déf: Soit $c \in \mathcal{E}(\Omega, \mathbb{R}_{\geq 0})$ (fonction étagée positive)

L'intégrale de Lebesgue de c est:

$$\int c := \sum_{s \in c(\Omega)} s \mu(c^{-1}(\{s\})) \in [0, +\infty]$$

Lemme: Soit $c \in \mathcal{E}(\Omega, \mathbb{R}_{\geq 0})$, $n \in \mathbb{N}$, $c_i \in (\mathbb{R}_{\geq 0})^n$ et $E_i \in \mathcal{A}^n$ tel que $\Omega = \bigsqcup_{i \in n} E_i$, $c = \sum_{i \in n} c_i \chi_{E_i}$, alors $\int c = \sum_{i \in n} c_i \mu(E_i)$

Dém: On suppose $E_i \neq \emptyset \forall i \in n$. $\forall s \in c(\Omega)$, on définit

$$J_s := \{i \in n \mid c_i = s\} \neq \emptyset \text{ (parce que la réunion est disjointe)}$$

$$c^{-1}(\{s\}) = \bigsqcup_{i \in J_s} E_i, \quad \bigsqcup_{s \in c(\Omega)} J_s = n.$$

$$\begin{aligned} \int c &= \sum_{s \in c(\Omega)} s \mu(c^{-1}(\{s\})) = \sum_{s \in c(\Omega)} s \mu(\bigsqcup_{i \in J_s} E_i) = \sum_{s \in c(\Omega)} s \sum_{i \in J_s} \mu(E_i) \\ &= \sum_{s \in c(\Omega)} \sum_{i \in J_s} s \mu(E_i) = \sum_{s \in c(\Omega)} \sum_{i \in J_s} c_i \mu(E_i) = \sum_{i \in \bigsqcup_{s \in c(\Omega)} J_s} c_i \mu(E_i) \\ &= \sum_{i \in n} c_i \mu(E_i) \end{aligned}$$

□

Prop: Soient $c \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, $f, g \in \mathcal{E}(\Omega, \mathbb{R}_{\geq 0})$. Alors, on a

1) $\int f = 0 \Leftrightarrow f^{-1}(\mathbb{R}_{\geq 0}) \in \mathcal{N}_\mu$

2) $\int (f+g) = \int f + \int g$

3) $\int cf = c \int f$

4) $f \leq g \Rightarrow \int f \leq \int g$

Analyse III :

Dém: 1) $\int \gamma = 0 \Leftrightarrow \sum_{s \in \gamma(\Omega) \setminus \{0\}} s \cdot \mu(\gamma^{-1}(\{s\})) = 0$

$$\Leftrightarrow \mu(\gamma^{-1}(\{s\})) = 0 \quad \forall s \in \gamma(\Omega) \setminus \{0\}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{s \in \gamma(\Omega) \setminus \{0\}} \mu(\gamma^{-1}(\{s\})) = 0$$

$$\Leftrightarrow \mu\left(\bigsqcup_{s \in \gamma(\Omega) \setminus \{0\}} \gamma^{-1}(\{s\})\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \mu(\gamma^{-1}(\mathbb{R}_{\neq 0})) = 0$$

2) On note $F_s := \gamma^{-1}(\{s\}) \quad \forall s \in \gamma(\Omega)$ et $G_t := \gamma^{-1}(\{t\}) \quad \forall t \in g(\Omega)$

$$\bigsqcup_{s \in \gamma(\Omega)} F_s = \Omega = \bigsqcup_{t \in g(\Omega)} G_t \quad \text{et} \quad F_s = F_s \cap \Omega = \bigsqcup_{t \in g(\Omega)} F_s \cap G_t$$

$$= \bigsqcup_{s \in \gamma(\Omega)} F_s \cap G_t$$

$$\Rightarrow \chi_{F_s} = \sum_{t \in g(\Omega)} \chi_{F_s \cap G_t}, \quad \chi_{G_t} = \sum_{s \in \gamma(\Omega)} \chi_{F_s \cap G_t}$$

$$\gamma + g = \sum_{s \in \gamma(\Omega)} s \chi_{F_s} + \sum_{t \in g(\Omega)} t \chi_{G_t} = \sum_{s \in \gamma(\Omega)} s \sum_{t \in g(\Omega)} \chi_{F_s \cap G_t} +$$

$$\sum_{t \in g(\Omega)} t \sum_{s \in \gamma(\Omega)} \chi_{F_s \cap G_t} = \sum_{\substack{s \in \gamma(\Omega) \\ t \in g(\Omega)}} (s+t) \chi_{F_s \cap G_t}$$

$$\Rightarrow \int (\gamma + g) = \sum_{\substack{s \in \gamma(\Omega) \\ t \in g(\Omega)}} (s+t) \mu(F_s \cap G_t)$$

$$= \sum_{s \in \gamma(\Omega)} s \sum_{t \in g(\Omega)} \mu(F_s \cap G_t) + \sum_{t \in g(\Omega)} t \sum_{s \in \gamma(\Omega)} \mu(F_s \cap G_t)$$

$$= \sum_{s \in \gamma(\Omega)} s \mu\left(\bigsqcup_{t \in g(\Omega)} (F_s \cap G_t)\right) + \sum_{t \in g(\Omega)} t \mu\left(\bigsqcup_{s \in \gamma(\Omega)} (F_s \cap G_t)\right)$$

$$= \dots = \sum_{s \in \gamma(\Omega)} s \mu(F_s) + \sum_{t \in g(\Omega)} t \mu(G_t)$$

$$= \int \gamma + \int g$$

3) $c = 0$, clair

$c > 0$, $c\gamma(\Omega) \subset \mathbb{R}_{>0}$, $\forall t \in c\gamma(\Omega)$ on a que

$$(c\gamma)^{-1}(\{t\}) = \{x \in \Omega \mid c\gamma(x) = t\} = \{x \in \Omega \mid \gamma(x) = \frac{t}{c}\} \\ = \gamma^{-1}(\{\frac{t}{c}\})$$

$$\int c\gamma = \sum_{t \in c\gamma(\Omega)} t \mu((c\gamma)^{-1}(\{t\})) = \sum_{t \in c\gamma(\Omega)} t \mu(\gamma^{-1}(\{\frac{t}{c}\}))$$

$$\xrightarrow{s = \frac{t}{c}} \sum_{s \in \gamma(\Omega)} s \cdot c \mu(\gamma^{-1}(\{s\})) = c \sum_{s \in \gamma(\Omega)} s \mu(\gamma^{-1}(\{s\})) = c \cdot \int \gamma.$$

4) On définit $R := g - \gamma \in \mathcal{E}(\Omega, \mathbb{R}_{>0})$

$g = R + \gamma$. On a $\int R > 0$

$$\int g = \int (R + \gamma) = \int R + \int \gamma > \int \gamma$$



Déf: Une proposition $P(x)$ $x \in \Omega$ est dite (μ) -presque partout (p.p.) si $\Omega \setminus \{x \in \Omega \mid P(x)\}$ est μ négligeable

Ex: Prop 1) : $\int \gamma = 0 \Leftrightarrow \gamma(x) = 0$ p.p.

L'intégrale de Lebesgue de fonctions mesurables positives

Déf: Soit $\gamma \in M(\Omega, \mathbb{R}_{>0})$. L'intégrale de Lebesgue de γ est le nombre :

$$\int \gamma := \sup \left\{ \int c \mid c \in \mathcal{E}(\gamma) \right\}$$

Si $A \in \mathcal{A}$, alors on définit :

$$\int_A \gamma := \int \gamma \chi_A$$

Rem: 1) En particulier :

$$\int_{\Omega} \gamma = \int \gamma$$

2) Si $\gamma = c \in \mathcal{E}(\Omega, \mathbb{R}_{>0})$. Alors $\gamma \in \mathcal{E}(\gamma)$ et $\int \gamma = \int \gamma$

3) $\int \gamma > 0 \Leftrightarrow 0 \in \mathcal{E}(\gamma)$

4) Notation : $\int \gamma, \int_{\Omega} \gamma, \int_{\Omega} \gamma d\mu, \int_{\Omega} \gamma(x) d\mu(x), \int_{\Omega} \gamma(x) \mu(dx)$

Analyse III :

Prop : Soient $c > 0$, $f, g \in M(\Omega, \bar{\mathbb{R}}_{>0})$, alors

- 1) $\int f = 0 \Leftrightarrow f = 0$ p.p.
- 2) $\int c \cdot f = c \int f$
- 3) $f \leq g \Rightarrow \int f \leq \int g$
- 4) Si $f = g$ p.p. $\Rightarrow \int f = \int g$
- 5) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \int_A f \leq \int_\Omega f$

Dém :

$$1) (\Leftarrow) f = 0 \text{ p.p.} \Rightarrow c = 0 \text{ p.p. } \forall c \in \mathcal{E}(f) \Rightarrow \int c = 0 \quad \forall c \in \mathcal{E}(f) \\ \Rightarrow \int f = 0$$

$(\Rightarrow)$ On définit $E \in \mathcal{A}^w$, $E_n = f^{-1}(\mathbb{R}_{>\frac{1}{n+1}})$, alors

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n+1} \chi_{E_n} \in \mathcal{E}(f) \Rightarrow \frac{1}{n+1} \mu(E_n) \leq \int f = 0 \\ \Rightarrow \mu(E_n) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$f^{-1}(\mathbb{R}_{>0}) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} E_n \Rightarrow \mu(f^{-1}(\mathbb{R}_{>0})) = \mu(\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} E_n) \leq 0$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad E_n \subset E_{n+1} \Rightarrow \mu(\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} E_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E_n) = 0$$

$$2) c > 0$$

$$c \in \mathcal{E}(f) \Leftrightarrow cc \in \mathcal{E}(cf)$$

$$\{ \int c \mid c \in \mathcal{E}(cf) \} = \{ \int cc \mid cc \in \mathcal{E}(cf) \} = \{ c \int c \mid c \in \mathcal{E}(f) \} \\ = c \{ \int c \mid c \in \mathcal{E}(f) \}$$

$$3) \mathcal{E}(f) \subset \mathcal{E}(g) \Rightarrow \int f \leq \int g$$

$$4) \text{ On définit } E = \{ x \in \Omega \mid f(x) = g(x) \}$$

$$\text{Alors } \mu(\Omega \setminus E) = 0 \quad \text{et} \quad E = \Omega \setminus (\Omega \setminus E) \Rightarrow E \in \mathcal{A}$$

$$\Rightarrow h := f \cdot \chi_E = g \cdot \chi_E \in M(\Omega, \bar{\mathbb{R}}_{>0})$$

Soit p une des fonctions f ou g , on va montrer

$$\int p = \int h$$

$$\text{On a } R \leq p \Rightarrow \int R \leq \int p$$

$c \in \mathcal{E}(p)$. Alors on a $c = c \chi_E + c \chi_{\Omega \setminus E}$ où

$c \chi_E \in \mathcal{E}(R)$ et $c \chi_{\Omega \setminus E} = 0$ pp.

$$\begin{aligned} \int c &= \int (c \chi_E + c \chi_{\Omega \setminus E}) = \int c \chi_E + \int c \chi_{\Omega \setminus E} = \int c \chi_E \\ &\leq \int R \Rightarrow \int p \leq \int R. \end{aligned}$$

$$5) \quad y \cdot \chi_A \leq y \Rightarrow \int_A y \leq \int y$$



Thm: de Convergence Monotone (Très important)

Soit $y \in (M(\Omega, \bar{\mathbb{R}}, \mu))^{\omega}$ une suite croissante. Alors la suite

$$\begin{aligned} (\int f_n)_{n \in \omega} &\text{ est aussi croissante et } \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n = \sup_{n \in \omega} \int f_n = \\ &= \int \sup_{n \in \omega} f_n = \int \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \end{aligned}$$

Dém: $f_n \leq f_{n+1} \Rightarrow \int f_n \leq \int f_{n+1}$

$$\text{Soit } g := \sup_{n \in \omega} f_n \geq f_n \Rightarrow \int g \geq \int f_n \Rightarrow \int g \geq \sup_{n \in \omega} \int f_n$$

Soit $\theta \in (0, 1)$, $c \in \mathcal{E}(g)$, $c = \sum_{s \in c(\Omega)} s \chi_{E_s}$ $S := c(\Omega)$, $E_s := c^{-1}(\{s\})$

$\forall x \in \Omega \exists N \in \omega$ t.q. $f_n(x) > \theta c(x) \quad \forall n \geq N$

On définit $F \in (\mathcal{P}(\Omega))^{\omega}$

$$F_n := \{x \in \Omega \mid f_n(x) > \theta c(x)\}$$

$$F_n \subset F_{n+1} \quad \forall n \in \omega, \quad \bigcup_{n \in \omega} F_n = \Omega$$

$$x \in F_n \Rightarrow f_{n+1}(x) > f_n(x) > \theta c(x)$$

$$\Rightarrow x \in F_{n+1}$$

$$F_n \in \mathcal{A} \quad \forall n \in \omega$$

$$F_n \cap E_s = \{x \in E_s \mid f_n(x) > \theta s\} = f_n^{-1}(\bar{\mathbb{R}}_{>\theta s}) \cap E_s$$

$$F_n = \bigcup_{s \in S} F_n \cap E_s = \bigcup_{s \in S} \underbrace{f_n^{-1}(\bar{\mathbb{R}}_{>\theta s})}_{\in \mathcal{A}} \cap \underbrace{E_s}_{\in \mathcal{A}} \in \mathcal{A}$$

Analyse III :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \text{ on a } 0 \leq \int_{F_n} e = \int_{F_n} 0e \leq \int_{F_n} f_n \leq \int_{\Omega} f_n$$

On prend le suprénum des 2 côtés :

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{F_n} e \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{\Omega} f_n =: c$$

$$\begin{aligned} \int_{F_n} e &= \int e \chi_{F_n} = \int \chi_{F_n} \cdot \sum_{s \in S} s \chi_{E_s} = \int \sum_{s \in S} s \chi_{F_n \cap E_s} \\ &= \sum_{s \in S} \int s \chi_{F_n \cap E_s} = \sum_{s \in S} s \mu(F_n \cap E_s) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{F_n} e &= \sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_{s \in S} s \mu(F_n \cap E_s) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{s \in S} s \mu(F_n \cap E_s) \\ &= \sum_{s \in S} s \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(F_n \cap E_s) = \sum_{s \in S} s \mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n \cap E_s\right) \\ &= \sum_{s \in S} s \mu(E_s) = \int_{\Omega} e \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } 0 \cdot \int_{\Omega} e &\leq c \Rightarrow 0 \leq c \\ &\Rightarrow \int g \leq c \end{aligned}$$

□

Lemme : Soient $f, g \in M(\Omega, \mathbb{R}_{\geq 0})$. Alors, $\int (f+g) = \int f + \int g$

Dém : $\exists$ deux suites croissantes $p \in \mathcal{E}(f)^{\omega}$, $q \in \mathcal{E}(g)^{\omega}$ tq

$$f = \sup_{n \in \mathbb{N}} p_n \text{ et } g = \sup_{n \in \mathbb{N}} q_n$$

$\Rightarrow (p_n + q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante et

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} (p_n + q_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (p_n + q_n) = f + g$$

$$\int (f+g) = \int \sup_{n \in \mathbb{N}} (p_n + q_n) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \int (p_n + q_n)$$

$$= \sup_{n \in \mathbb{N}} \left(\int p_n + \int q_n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int p_n + \int q_n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int p_n + \lim_{n \rightarrow \infty} \int q_n$$

$$= \sup_{n \in \mathbb{N}} \int p_n + \sup_{n \in \mathbb{N}} \int q_n = \int f + \int g \quad \square$$

Cor: $\forall f \in M(\Omega, \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0})^w$, on a $\sum_{n \in \omega} \int f_n = \int \sum_{n \in \omega} f_n$.

Dém: On définit $(g_n := \sum_{i \in n} f_i)_{n \in \omega}$ une suite croissante

$$\Rightarrow \sup_{n \in \omega} \int g_n = \int \sup_{n \in \omega} g_n$$

$$\Rightarrow \sup_{n \in \omega} \sum_{i \in n} \int f_i = \sum_{i \in \omega} \int f_i = \int \sum_{i \in \omega} f_i$$

Lemme: Soit $f \in M(\Omega, \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0})$ t.q. $\int f < +\infty$, alors $f^{-1}(\{+\infty\})$ est μ -négligable.

Dém: On définit $E \in \mathcal{A}^w$, $E_n := f^{-1}(\mathbb{R}_{\geq n})$.

on a $\forall n \in \omega$ $E_{n+1} \subset E_n$

$$\bigcap_{n \in \omega} E_n = f^{-1}(\{+\infty\})$$

$x \in E_n \Rightarrow f(x) \geq n \Rightarrow f(x) \geq n+1 \Rightarrow x \in E_{n+1}$

$$\forall n \in \omega, n \chi_{E_n} \in \mathcal{E}(f) \Rightarrow \int n \chi_{E_n} \leq \int f < +\infty$$

$$\text{et } \int n \chi_{E_n} = n \mu(E_n) \Rightarrow \mu(E_n) \leq \frac{C}{n}$$

$$\mu\left(\bigcap_{n \in \omega} E_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{C}{n} = 0$$

$$\mu(f^{-1}(\{+\infty\})) = 0$$

Lemme: de Borel - Cantelli

Soit $E \in \mathcal{A}^w$ t.q. $\sum_{n \in \omega} \mu(E_n) < +\infty$. Alors l'ensemble

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} E_n := \bigcap_{n \in \omega} \bigcup_{k \geq n} E_k \text{ est } \mu\text{-négligable.}$$

Dém: On définit $f := \sum_{n \in \omega} \chi_{E_n} = \sup_{n \in \omega} \sum_{i \in n} \chi_{E_i} \in M(\Omega, \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0})$

On a $f(x) < +\infty \Leftrightarrow \exists N \in \omega$ t.q. $\chi_{E_n}(x) = 0 \forall n \geq N$

$$\Leftrightarrow x \notin \bigcup_{n \geq N} E_n$$

$$f^{-1}(\{+\infty\}) = \{x \in \Omega \mid x \in \bigcup_{i \geq n} E_i \forall n \in \omega\} = \bigcap_{n \in \omega} \{x \in \Omega \mid x \in \bigcup_{i \geq n} E_i\}$$

$$= \bigcap_{n \in \omega} \bigcup_{i \geq n} E_i = \limsup_{n \rightarrow \infty} E_n$$

Analyse III:

$$\int f = \int \sum_{n \in \mathbb{N}} \chi_{E_n} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \int \chi_{E_n} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(E_n) < +\infty$$

lemme $\Rightarrow \mu$ -négligeable.

□

Lemme: de Fatou

Soit $f \in (M(\Omega, \mathbb{R}_{\geq 0}))^{\mathbb{N}}$. Alors $\int \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n$.

Dém: On définit $(g_m = \inf_{n \geq m} f_n)_{m \in \mathbb{N}}$ une suite croissante

Alors, on a :

$$\int \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n = \int \sup_{m \in \mathbb{N}} g_m = \sup_{m \in \mathbb{N}} \int g_m$$

$$g_m = \inf_{n \geq m} f_n \leq f_k \quad \forall k \geq m$$

$$\Rightarrow \int g_m \leq \int f_k \Rightarrow \int g_m \leq \inf_{k \geq m} \int f_k$$

$$\Rightarrow \int \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n \leq \sup_{m \in \mathbb{N}} \inf_{k \geq m} \int f_k = \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n$$

□

Fonctions Lebesgue - intégrables :

$\Omega = (\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ esp. mesuré complet.

Déf: Une fonction $f \in M(\Omega, \mathbb{R})$ est dite Lebesgue intégrable si $\int |f| < \infty$.

$$\mathcal{L}^1(\Omega; \mathbb{A}) = \{f \in M(\Omega; \mathbb{A}) \mid \int |f| < +\infty\} \quad \mathbb{A} \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$$

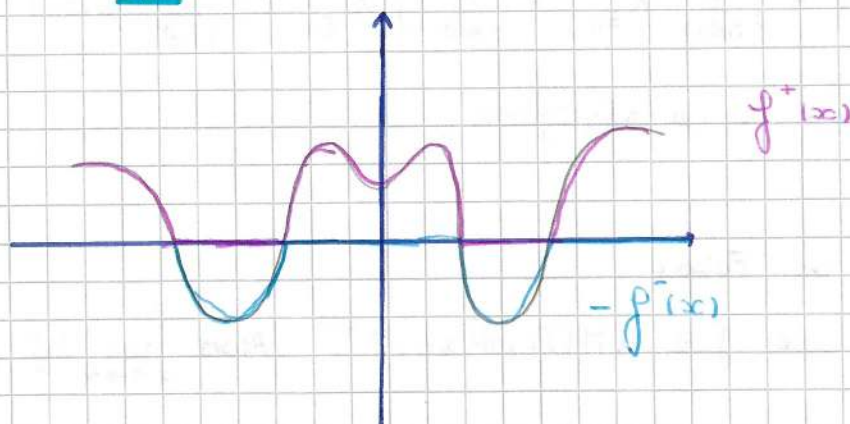
Rem: $\mathcal{L}^1(\Omega; \mathbb{R})$ est un espace vectoriel.

$$f, g \in \mathcal{L}^1(\Omega; \mathbb{R}), \lambda \in \mathbb{R} \stackrel{?}{\Rightarrow} f + \lambda g \in \mathcal{L}^1(\Omega; \mathbb{R})$$

$$|f + \lambda g| \leq |f| + |\lambda| |g| \Rightarrow \int |f + \lambda g| < \infty$$

Déf: On définit $f^+ := \max(f, 0)$
 $f^- := -\min(f, 0)$

Ex:



Rem: $|f| = f^+ + f^-$, $f = f^+ - f^-$

Déf: Soit $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A})$. L'intégrale de Lebesgue de f est $\int f := \int f^+ - \int f^- \in \mathbb{R}$.

Rem: 1) Soient $f \in \mathcal{L}^1(\Omega; \overline{\mathbb{R}})$, $g, h \in \mathcal{L}^1(\Omega, \overline{\mathbb{R}}, 0)$ tels que $f = g - h$. Alors $\int f = \int g - \int h$

$$\begin{aligned} f = f^+ - f^- = g - h &\Leftrightarrow f^+ + h = g + f^- \\ \Rightarrow \int f^+ + \int h &= \int f^- + \int g \Leftrightarrow \underbrace{\int f^+ - \int f^-}_{= \int f} = \int g - \int h \end{aligned}$$

2) $|\int f| \leq \int |f|$

$$\begin{aligned} & \text{"} \\ & |\int f^+ - \int f^-| \leq \int f^+ + \int f^- = \int |f| \end{aligned}$$

Prop: $f, g \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathbb{R})$, $c \in \mathbb{R} \Rightarrow$

1) $\int c \cdot f = c \cdot \int f$

2) $\int (f + g) = \int f + \int g$

3) $f \leq g \Rightarrow \int f \leq \int g$

4) $f = g \text{ p.p.} \Rightarrow \int f = \int g$

Analyse III :

Dém: 1) $c > 0$, $(cf)^\pm = c f^\pm$

$$\int cf = \int (cf)^+ - \int (cf)^- = \int c f^+ - \int c f^- = \dots = c \int f$$

$c < 0$, $(cf)^\pm = |c| f^\mp$

$$\begin{aligned} \int cf &= \int (cf)^+ - \int (cf)^- = \int |c| f^- - \int |c| f^+ \\ &= |c| (\int f^- - \int f^+) = (-c) (-\int f) = c \int f. \end{aligned}$$

2) $f+g = f^+ + g^+ - (f^- + g^-)$

$$\begin{aligned} \int (f+g) &= \int (f^+ + g^+) - \int (f^- + g^-) \\ &= \dots = \int f + \int g \end{aligned}$$

3) $f \leq g \Leftrightarrow f^+ - f^- \leq g^+ - g^- \Leftrightarrow f^+ + g^- \leq g^+ + f^- \Leftrightarrow$

$$\int f^+ + \int g^- \leq \int g^+ + \int f^- \Leftrightarrow \int f \leq \int g$$

4) $f = g$ p.p. $\Leftrightarrow f^+ - f^- = g^+ - g^-$ p.p. $\Leftrightarrow f^+ + g^- = g^+ + f^-$ p.p.
 $\Rightarrow \int f^+ + \int g^- = \int g^+ + \int f^- \Leftrightarrow \int f = \int g$



Thm: de convergence dominée

Soient $f_n \in (M(\Omega; \mathbb{R}))^w$, $g \in \mathbb{R}^{\Omega}$, $h \in \mathcal{L}^1(\Omega; \mathbb{R}_{\geq 0})$

tels que 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = g$ p.p.

2) $\forall n \in \mathbb{N}$, $|f_n| \leq h$ p.p.

Alors, $g \in \mathcal{L}^1(\Omega; \mathbb{R})$, $f_n \in (\mathcal{L}^1(\Omega; \mathbb{R}))^w$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n = \int g$

Dém: On définit:

$$E := \{x \in \Omega \mid g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)\} \in \mathcal{A}$$

$$F_n := \{x \in \Omega \mid |f_n(x)| \leq R(x)\} \in \mathcal{A}, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$G := E \cap \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n\right) \in \mathcal{A} \text{ et } G^c \text{ est } \mu\text{-négligeable.}$$

$$\text{On définit } \hat{f}_n := \chi_G f_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$\text{On a } 1. \hat{f}_n = f_n \text{ p.p. } (*)$$

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{f}_n(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x \in G \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{f}_n = g \text{ p.p. } (*)$$

$\Rightarrow g$ est mesurable

$$\forall n \in \mathbb{N}, \text{ on a } |\hat{f}_n| \leq R \Rightarrow \int |\hat{f}_n| \leq \int R < +\infty$$

$$\Rightarrow \hat{f}_n \text{ est intégrable } (*) \Rightarrow f_n \text{ est intégrable}$$

$$\text{On définit } p := \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{f}_n \Rightarrow |p| = \lim_{n \rightarrow \infty} |\hat{f}_n| \leq R$$

$$\Rightarrow \int |p| \leq \int R < +\infty \Rightarrow p \text{ est intégrable } (*) \Rightarrow g \text{ est intégrable}$$

$$\text{On a } R \pm \hat{f}_n \in M(\Omega; \mathbb{R}_{\geq 0}) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\begin{aligned} R \pm \int p &= \int (R \pm p) = \int \lim_{n \rightarrow \infty} (R \pm \hat{f}_n) = \int \liminf_{n \rightarrow \infty} (R \pm \hat{f}_n) \\ &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int (R \pm \hat{f}_n) \stackrel{\text{L.F.}}{=} \int R \cdot \liminf_{n \rightarrow \infty} (\pm \int \hat{f}_n) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \pm \int p \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} (\pm \int \hat{f}_n)$$

$$\int p \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int \hat{f}_n$$

$$-\int p \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} (-\int \hat{f}_n) = -\limsup_{n \rightarrow \infty} \int \hat{f}_n$$

$$\Leftrightarrow \limsup_{n \rightarrow \infty} \int \hat{f}_n \leq \int p$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int \hat{f}_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \int \hat{f}_n$$

$$\Rightarrow \liminf_{n \rightarrow \infty} \int \hat{f}_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} \int \hat{f}_n = \int p = \int g$$

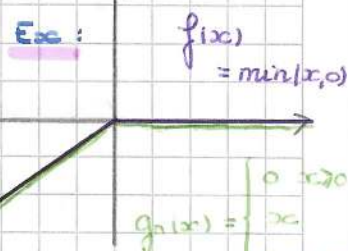
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int \hat{f}_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n$$

Analyse III :Intégrale inférieure et supérieure de LebesgueDef: $f \in \bar{\mathbb{R}}^{\Omega}$.L'intégrale supérieure de Lebesgue de f est :

$$\bar{\int} f := \begin{cases} \inf \left\{ \int g \mid \underbrace{g \in \mathcal{L}^1(\Omega, \bar{\mathbb{R}})}_{(*)}, f \leq g \right\} \\ +\infty & \text{si } (*) = \emptyset \end{cases}$$

" " inférieure " "

$$\underline{\int} f := \begin{cases} \sup \left\{ \int g \mid \underbrace{g \in \mathcal{L}^1(\Omega, \bar{\mathbb{R}})}_{(*)}, g \leq f \right\} \\ -\infty & \text{si } (*) = \emptyset \end{cases}$$

Rem: i) $f \leq g \Rightarrow \bar{\int} f \leq \bar{\int} g$ et $\underline{\int} f \leq \underline{\int} g$ ii) $\bar{\int} (f+g) \leq \bar{\int} f + \bar{\int} g$, si $\{\bar{\int} f, \bar{\int} g\} \neq \{+\infty, -\infty\}$ ↓iii) $\underline{\int} g \leq \bar{\int} f$ iv) $\underline{\int} (-f) = -\bar{\int} f$ v) Si f est intégrable, alors $\bar{\int} f = \underline{\int} f = \int f$ Prop: Soient $f \in \bar{\mathbb{R}}^{\Omega}$, $a \in \mathbb{R}$ tels que $\bar{\int} f = \underline{\int} f = a$.Alors $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, \bar{\mathbb{R}})$ et $\int f = a$ Dém: Il existe deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans $\mathcal{L}^1(\Omega, \bar{\mathbb{R}})$ telles que : 1) $v_n \leq f \leq u_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$

2) $\int u_n - \frac{1}{n+1} < a < \int v_n + \frac{1}{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

$$p := \inf_{n \in \mathbb{N}} \int u_n, \quad q := \sup_{n \in \mathbb{N}} \int v_n$$

On a $p, q \in \mathcal{L}^1(\Omega, \overline{\mathbb{R}})$:

$$\left. \begin{array}{l} v_0 \leq p \leq \mu_0 \\ -\mu_0 \leq -p \leq -v_0 \end{array} \right\} \Rightarrow |p| \leq \max(\mu_0, -v_0) \leq |\mu_0| + |v_0|$$

$$\Rightarrow \int |p| \leq \int |\mu_0| + \int |v_0| < +\infty$$

$$\text{--- " ---} \Rightarrow \int |q| < +\infty$$

$\forall n \in \mathbb{N}$, on a 1) $v_n \leq q \leq f$

$$\Rightarrow a - \frac{1}{n+1} < \int v_n \leq \int q \leq \int f = a$$

2) $f \leq p \leq \mu_n$

$$\Rightarrow a = \int f \leq \int p \leq \int \mu_n < a + \frac{1}{n+1}$$

$$n \rightarrow +\infty \Rightarrow \int p = \int q = a$$

$$q \leq p \Rightarrow p - q \geq 0 \quad \int (p - q) = 0 \Rightarrow p - q = 0 \text{ p.p.}$$

$$\Leftrightarrow p = q \text{ p.p.}$$

$$\text{Comme } q \leq f \leq p \Rightarrow 0 \leq p - f \leq p - q = 0 \text{ p.p.} \Rightarrow p - f = 0 \text{ p.p.}$$

$$\Leftrightarrow p = f \text{ p.p.}$$

$$\Rightarrow f \in \mathcal{L}^1(\Omega, \overline{\mathbb{R}}) \text{ avec } \int f = a.$$



Comparaison avec l'intégrale de Riemann:

Rap: $d \in \mathbb{Z}_{>0}$, $\Omega = \mathbb{R}^d$

Soit $\tilde{\mathcal{Y}}_{\mathbb{R}^d} = \{ \text{pavés (ouverts, semi-ouverts et fermés) de } \mathbb{R}^d \}$

$$\tilde{\mathcal{E}} := \{ \text{fonction en escalier} \} = \left\{ f = \sum_{i \in n} c_i \chi_{P_i} \mid P_i \in \tilde{\mathcal{Y}}_{\mathbb{R}^d}, c_i \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathcal{E}$$

On définit une application linéaire :

$$I: \tilde{\mathcal{E}} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad I\left(\sum_{i \in n} c_i \chi_{P_i}\right) = \sum_{i \in n} c_i \text{vol}(P_i)$$

On dit $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ est intégrable au sens de Riemann

si $\forall \varepsilon > 0, \exists g, h \in \tilde{\mathcal{E}}$ tels que 1) $g \leq f \leq h$

$$2) I(h - g) \leq \varepsilon$$

Analyse III:

et l'intégrale de Riemann de f est définie par:

$$\begin{aligned} R \int f &:= \sup \{ I(g) \mid g \in \tilde{E}, g \leq f \} \\ &= \inf \{ I(h) \mid h \in \tilde{E}, h \geq f \} \end{aligned}$$

Prop: Soit $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction Riemann-intégrable.

Alors f est Lebesgue-intégrable et $R \int f = \int f$.

Dém: $\forall g \in \tilde{E}$, on a $I(g) = \int g$

$$\begin{aligned} R \int f &= \sup \{ I(g) \mid g \in \tilde{E}, g \leq f \} \\ &= \sup \{ \int g \mid g \in \tilde{E}, g \leq f \} \leq \int f \leq \bar{\int} f \\ &\leq \inf \{ \int h \mid h \in \tilde{E}, f \leq h \} \\ &= \inf \{ I(h) \mid h \in \tilde{E}, f \leq h \} = R \int f \end{aligned}$$

$\Rightarrow R \int f = \int f = \bar{\int} f \Rightarrow f$ est $\mathcal{L}$ -intégrable et

$$\int f = R \int f.$$

Ex: Soit $A := \mathbb{Q} \cap [0, 1] \in \mathcal{A}_{\lambda_1}$

$$\chi_A \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

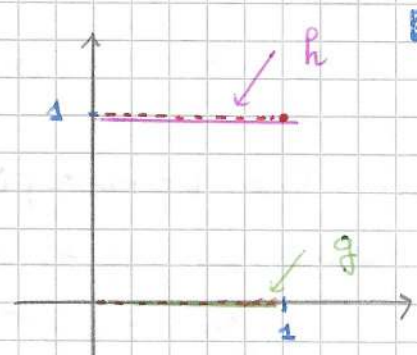
$$\int \chi_A = \lambda_1(A) = 0$$

Si $h \in \tilde{E}$, $h \geq \chi_A$, alors $h \geq \chi_{[0,1]}$

et $g \in \tilde{E}$, $g \leq \chi_A$, alors $g \leq 0$

$$I(h-g) \geq 1$$

$\Rightarrow \chi_A$ n'est pas Riemann-intégrable.



Espaces Mesurés Produits :Prémesures :

Soit E un ensemble, $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}(E)$ une algèbre d'ensembles :

- 1) $E \in \mathcal{D}$
- 2) $A \in \mathcal{D} \Rightarrow E \setminus A \in \mathcal{D}$
- 3) $A, B \in \mathcal{D} \Rightarrow (A \cup B \in \mathcal{D}) \Leftrightarrow (A^c \cap B^c \in \mathcal{D})$

Déf: Une prémesure sur une algèbre d'ensembles $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}(E)$ est une fonction $p: \mathcal{D} \rightarrow [0, +\infty]$ telle que :

- 1) $p(\emptyset) = 0$
- 2) σ -additivité : $A \in \mathcal{D}^{\omega}$ disjointe telle que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{D}$
 $\Rightarrow p(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} p(A_n)$

Rem: Toute mesure est une prémesure.

Déf: Soit p une prémesure sur une algèbre $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}(E)$. Une mesure $\mu: \mathcal{d} \rightarrow [0, +\infty]$ est dite prolongement de p si :

- 1) $\mathcal{D} \subset \mathcal{d}$
- 2) $\mu|_{\mathcal{D}} = p$

Rappel: Toute prémesure p induit une mesure extérieure $\varphi_p: \mathcal{P}(E) \rightarrow [0, +\infty]$

définie par $\varphi_p(A) = \inf \left\{ \sum_{n \in \mathbb{N}} p(B_n) \mid B \in \mathcal{R}_p(A) \right\}$

où $\mathcal{R}_p(A) = \left\{ B \in \mathcal{D}^{\omega} \mid A \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{recouvrement dénombrable de } A \\ \text{en partie de } \mathcal{D} \end{array} \right\}$

On a la tribu $\mathcal{d}_p = \{ A \in \mathcal{P}(E) \mid A \text{ est } \varphi_p\text{-mesurable} \}$

A est φ_p -mesurable $\Leftrightarrow \forall B \subset E$, on a $\varphi_p(B) = \varphi_p(B \setminus A) + \varphi_p(B \cap A)$

De plus, $\varphi_p|_{\mathcal{d}_p}$ est une mesure.

Prop: (déf) Existence de prolongement

Soit p une prémesure sur une algèbre $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}(E)$. Alors

$\varphi_p|_{\mathcal{d}_p}$ est un prolongement de p appelé le prol. maximal de p .

La restriction $\varphi_p|_{\sigma(\mathcal{D})}$ est le prolongement de Hahn-Kolmogorov.

Analyse III :Dém: Il suffit de démontrer

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{D} \subset \mathcal{A}_{\varphi_f} \quad (\Rightarrow \sigma(\mathcal{D}) \subset \mathcal{A}_{\varphi_f}) \quad (i) \\ \varphi_f|_{\mathcal{D}} = f \quad (ii) \end{array} \right.$$

i) Soient $A \in \mathcal{D}$ et $B \in \mathcal{E}$, $\varepsilon > 0$.

$$\exists C \in \mathcal{R}_f(B) \text{ tel que } \sum_{new} p(C_n) \leq \varphi_f(B) + \varepsilon$$

$$\text{on a } C_n = C_n \cap A \sqcup C_n \setminus A \Rightarrow p(C_n) = p(C_n \cap A) + p(C_n \setminus A)$$

$$(C_n \cap A)_{new} \in \mathcal{R}_f(B \cap A)$$

$$(C_n \setminus A)_{new} \in \mathcal{R}_f(B \setminus A)$$

$$\Rightarrow \varphi_f(B) + \varepsilon \geq \sum_{new} p(C_n \cap A) + \sum_{new} p(C_n \setminus A)$$

$$\geq \varphi_f(B \cap A) + \varphi_f(B \setminus A)$$

 $\varepsilon \rightarrow 0$ $\Rightarrow A \in \mathcal{A}_{\varphi_f}$ (car on a la zone infé de manière naturelle)ii) Soient $A \in \mathcal{D}$, $B \in \mathcal{R}_f(A)$

$$\text{on définit } (C_n = A \cap (B_n \setminus (\bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i)))_{new} \in \mathcal{R}_f(A)$$

$$\text{disjointe, } A = \bigsqcup_{new} C_n, C_n \subset B_n.$$

$$\text{Comme } p \text{ est une prémesure, on a que } p(A) = \sum_{new} p(C_n) \leq \sum_{new} p(B_n) \leq \varphi_f(A)$$

$$\text{Comme on a } (A, \emptyset, \emptyset, \dots) \in \mathcal{R}_f(A), \text{ on a que } \varphi_f(A) \leq p(A) \\ \Rightarrow \varphi_f(A) = p(A)$$

Thm: Comparaison de prolongements

Soient p une prémesure sur une alg. $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}(E)$ et $\mu: \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty]$ un prolongement de p . Alors, on a

$$i) \mu(A) \leq \varphi_f(A) \quad \forall A \in \mathcal{A} \cap \mathcal{A}_{\varphi_f} \quad (\supset \sigma(\mathcal{D}))$$

$$iii) (A \in \mathcal{A} \cap \mathcal{A}_{\varphi_f}, \varphi_f(A) < +\infty) \Rightarrow (\mu(A) = \varphi_f(A))$$

$$ii) B \in \mathcal{D}^w \Rightarrow A := \bigcup_{new} B_n \text{ est tq } \mu(A) = \varphi_f(A)$$

(iv) Si p est σ -finie alors $\mu(A) = \varphi_p(A) \quad \forall A \in \mathcal{A} \cap \mathcal{A}_p$

Cor: Pour toute prémesure σ -finie $p: \mathcal{D} \rightarrow [0, +\infty]$, le prolongement de Hahn-Kolmogorov est l'unique prol. de p sur $\sigma(\mathcal{D})$.

Déf: On dit qu'une prémesure $p: \mathcal{D} \rightarrow [0, +\infty]$ est σ -finie si $\exists A \in \mathcal{R}_\mathcal{D}(E)$ tq $p(A_n) < \infty \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Dém: (thm)

i) Soient $A \in \mathcal{A} \cap \mathcal{A}_p$, $B \in \mathcal{R}_\mathcal{D}(A)$.

~~[On définit $(C_n := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{R}_\mathcal{D}(A)$ une suite croissante.]~~ $\times$

$$\Rightarrow \mu(A) \stackrel{\sigma\text{-ss-add}}{\leq} \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(B_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} p(B_n) \Rightarrow \mu(A) \leq \varphi_p(A)$$

ii) Soit $B \in \mathcal{D}^w$, $A := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$.

On définit $(C_n := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{D}^w$ une suite croissante

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n = A.$$

$$\Rightarrow \mu(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(C_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} p(C_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_p(C_n) = \varphi_p(A)$$

iii) Soit $A \in \mathcal{A} \cap \mathcal{A}_p$ tq $\varphi_p(A) < +\infty$.

Soient $\varepsilon > 0$ et $B \in \mathcal{R}_\mathcal{D}(A)$ tq $\sum_{n \in \mathbb{N}} p(B_n) < \varphi_p(A) + \varepsilon$

Soit $C := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$

$$\varphi_p(C \setminus A) + \varphi_p(A) = \varphi_p(C) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \varphi_p(B_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} p(B_n) < \varphi_p(A) + \varepsilon$$

$$\Rightarrow \varphi_p(C \setminus A) < \varepsilon$$

$$\varphi_p(A) \leq \varphi_p(C) \stackrel{(ii)}{=} \mu(C) = \mu(C \setminus A) + \mu(A) \stackrel{(i)}{\leq} \varphi_p(C \setminus A) + \mu(A) < \varepsilon + \mu(A).$$

$\varepsilon \rightarrow 0$

$$\Rightarrow \varphi_p(A) \leq \mu(A) \stackrel{(ii)}{\Rightarrow} \varphi_p(A) = \mu(A)$$

(iv) p est σ -finie. Soit $B \in \mathcal{R}_\mathcal{D}(E)$ tq $p(B_n) < \infty$.

On peut supposer B disjoint. Soit $A \in \mathcal{A} \cap \mathcal{A}_p$. Alors, on a

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A \cap B_n\right) \stackrel{\sigma\text{-ss-add}}{=} \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A \cap B_n) \stackrel{(iii)}{=} \sum_{n \in \mathbb{N}} \varphi_p(A \cap B_n) \\ &= \varphi_p\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A \cap B_n)\right) = \varphi_p(A) \end{aligned}$$

Analyse III:Tribu Produit:

Soient $(X, \mathcal{A})$ et $(Y, \mathcal{B})$ deux espaces mesurables.

Déf: Un rectangle mesurable de $X \times Y$ est ss-ensemble de la forme $A \times B \subset X \times Y$ où $A \in \mathcal{A}$ et $B \in \mathcal{B}$.

Déf: La tribu produit $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ est la tribu engendrée par tous les rectangles mesurables.

Prop: L'ensemble $\mathcal{D}_{X,Y}$ de toutes les réunions finies disjointes de rectangles mesurables est une algèbre d'ensemble.

Dém: i) $X \times Y \in \mathcal{D}_{X,Y}$

$$ii) A, B \in \mathcal{D}_{X,Y} \Rightarrow A = \bigcup_{i \in m} C_i \times D_i, B = \bigcup_{j \in n} E_j \times F_j$$

$$A \cap B = \bigcup_{\substack{i \in m \\ j \in n}} (C_i \times D_i) \cap (E_j \times F_j) = \bigcup_{i,j \in m,n} (C_i \cap E_j) \times (D_i \cap F_j)$$

$$iii) (E \times F)^c = X \times Y \setminus E \times F = ((E \cup E^c) \times Y) \setminus E \times F \\ = (E \times Y \cup E^c \times Y) \setminus E \times F = E \times F^c \cup E^c \times Y \in \mathcal{D}_{X,Y}$$

$$iv) (\bigcup_{i \in n} E_i \times F_i)^c = \bigcap_{i \in n} (E_i \times F_i)^c \in \mathcal{D}_{X,Y}$$

le 13.12.19

Mesures Produits:

Soient $X = (X, \mathcal{A}, \mu)$ et $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ deux esp. mesurés complets.

Lemme: Soient deux suites $A \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$, $B \in \mathcal{B}^{\mathbb{N}}$ telles que $(A_n \times B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est disjointe et $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A_n \times B_n) = E \times F$, $E \in \mathcal{A}$, $F \in \mathcal{B}$.

$$\text{Alors } \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n) \nu(B_n) = \mu(E) \nu(F)$$

Dém:

$$(x, y) \in X \times Y$$

$$\begin{aligned}\chi_E(x) \chi_F(y) &= \chi_{E \times F}(x, y) = \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} \chi_{A_n \times B_n} \right)(x, y) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \chi_{A_n \times B_n}(x, y) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \chi_{A_n}(x) \chi_{B_n}(y)\end{aligned}$$

$$\chi_E(x) \chi_F = \sum_{n \in \mathbb{N}} \chi_{A_n}(x) \chi_{B_n} \in M(Y, \mathbb{R}_{\geq 0})$$

$\Downarrow$

$$\int_Y \chi_E(x) \chi_F d\nu = \int_Y \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} \chi_{A_n}(x) \chi_{B_n} \right) d\nu$$

$$\chi_E(x) \nu(F) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \chi_{A_n}(x) \nu(B_n)$$

$\Updownarrow$

$$\nu(F) \chi_E = \sum_{n \in \mathbb{N}} \nu(B_n) \chi_{A_n} \in M(X, \mathbb{R}_{\geq 0})$$

$\Downarrow$

$$\int_X \nu(F) \chi_E d\mu = \int_X \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} \nu(B_n) \chi_{A_n} \right) d\mu$$

$$\nu(F) \mu(E) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \nu(B_n) \mu(A_n)$$

■

Prop - déf:

Soit $\mathcal{D}_{X,Y} \subset \mathcal{P}(X \times Y)$, l'algèbre engendrée par les rectangles mesurables. Alors l'application $\rho_{X,Y}: \mathcal{D}_{X,Y} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}_{\geq 0}}$ définie par $\emptyset \mapsto 0$, $\bigcup_{i \in m} (A_i \times B_i) \mapsto \sum_{i \in m} \mu(A_i) \nu(B_i)$ est bien définie et est une prémesure appelée prémesure produit sur $X \times Y$.

Pv: 1) Supposons que $A \in \mathcal{D}_{X,Y}$ est donnée par deux décompositions

$$A = \bigcup_{i \in m} B_i \times C_i = \bigcup_{j \in n} D_j \times E_j$$

$$\begin{aligned}B_i \times C_i &= (B_i \times C_i) \cap A = (B_i \times C_i) \cap \left(\bigcup_{j \in n} D_j \times E_j \right) \\ &= \bigcup_{j \in n} (B_i \cap D_j) \times (C_i \cap E_j)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}D_j \times E_j &= (D_j \times E_j) \cap A = (D_j \times E_j) \cap \left(\bigcup_{i \in m} B_i \times C_i \right) \\ &= \bigcup_{i \in m} (B_i \cap D_j) \times (C_i \cap E_j)\end{aligned}$$

Analyse III :

Par la linéarité, on a $\mu(B_i) \nu(C_i) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \mu(B_i \cap D_j) \nu(C_i \cap E_j)$ (*)

et $\mu(D_j) \nu(E_j) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(B_i \cap D_j) \nu(C_i \cap E_j)$

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(B_i) \nu(C_i) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \sum_{j \in \mathbb{N}} (*) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \sum_{i \in \mathbb{N}} (*) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \mu(D_j) \nu(E_j)$$

→ bien définie

2) σ -additivité de $p_{X,Y}$

Soient $A \in \mathcal{D}_{X,Y}$, $B \in (\mathcal{D}_{X,Y})^{\omega}$ suite disjointe tels que $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$

Soient $A = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} (C_i \times D_i)$, $B_n = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} E_{n,j} \times F_{n,j}$, $K_n \in \mathbb{Z}_{>0}$

$$C_i \times D_i = (C_i \times D_i) \cap A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (C_i \times D_i) \cap B_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{j \in K_n} \underbrace{(C_i \cap E_{n,j}) \times (D_i \cap F_{n,j})}_{(*)}$$

$$E_{n,j} \times F_{n,j} = A \cap (E_{n,j} \times F_{n,j}) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} (*)$$

$$\Rightarrow \text{par la linéarité : } \mu(C_i) \nu(D_i) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{j \in K_n} \mu(C_i \cap E_{n,j}) \nu(D_i \cap F_{n,j})$$

$$\mu(E_{n,j}) \nu(F_{n,j}) = \sum_{i \in \mathbb{N}} (*)$$

$$p_{X,Y}(A) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(C_i) \nu(D_i) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{j \in K_n} (*) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{j \in K_n} \sum_{i \in \mathbb{N}} (*)$$

$$= \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{j \in K_n} \mu(E_{n,j}) \nu(F_{n,j}) = \sum_{n \in \mathbb{N}} p_{X,Y}(B_n)$$

□

Prop: Soient X, Y deux espaces mesurés σ -finis. Alors la prémesure produit $p_{X,Y}$ est σ -finie.

Dém: Soient $A \in \mathcal{A}^{\omega}$ et $B \in \mathcal{B}^{\omega}$ deux recouvrements ^{dénombrables} de X et Y tels que $\mu(A_n) < \infty$ et $\nu(B_n) < \infty \forall n \in \mathbb{N}$.

Alors, $(A_n \times B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un recouvrement dénombrable de $X \times Y$.

$$X \times Y = \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) \times \left(\bigcup_{m \in \mathbb{N}} B_m \right) = \bigcup_{(n,m) \in \mathbb{N}^2} A_n \times B_m$$

On a $p_{X,Y}(A_n \times B_m) = \mu(A_n) \nu(B_m) < \infty \Rightarrow p_{X,Y}$ est σ -finie

□

Déf: Une mesure produit sur $X \times Y$ est un prolongement de la pré-mesure produit $\rho_{x,y}$.

Le prolongement maximal de $\rho_{x,y}$ est appelé la mesure produit maximale sur $X \times Y$.

Théorème de Fubini:

Soient $X = (X, \mathcal{A}, \mu)$, $Y = (Y, \mathcal{B}, \nu)$ deux espaces mesurés complets σ -finis et $X \times Y = (X \times Y, \mathcal{C}, e)$ l'espace mesuré produit maximal. $e = \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, $\phi^* = \Psi_{\rho_{x,y}}$, $\phi = \phi^*|_{\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}}$.

Pour toute fonction $f \in (\bar{\mathbb{R}})^{X \times Y}$, on définit $\bar{f}, \underline{f} \in (\bar{\mathbb{R}})^X$
 $\bar{f}(x) = \int_Y f(x,y) d\nu(y)$, $\underline{f}(x) = \int_Y f(x,y) d\nu(y)$

Thm: de Fubini.

Soit $f \in \mathcal{L}^1(X \times Y; \bar{\mathbb{R}})$. Alors:

1) $\bar{f}, \underline{f} \in \mathcal{L}^1(X; \bar{\mathbb{R}})$

2) $\int_X \bar{f} = \int_X \underline{f} = \int_{X \times Y} f$

Rem: Le théorème de Fubini est équivalent à l'énoncé suivant:

1) Par μ -presque tout $x \in X$, $f(x, \cdot) \in \mathcal{L}^1(Y, \bar{\mathbb{R}})$

$f(x, \cdot) \in \bar{\mathbb{R}}^Y$, $(f(x, \cdot))(y) = f(x, y)$.

2) $\exists g \in \mathcal{L}^1(X; \bar{\mathbb{R}})$ t.q. $g(x) = \int_Y f(x, y) d\nu(y)$ μ -p.p.

et $\int_X g = \int_{X \times Y} f$.

Lemme: Supposons que $\mu(X)$ et $\nu(Y)$ sont finis. Alors $\forall V \subset X \times Y$

la fonction $\bar{\chi}_V \in (\bar{\mathbb{R}}_{\geq 0})^X$ est telle que $\int_X \bar{\chi}_V \leq \phi^*(\nu)$

Analyse III:Dém: Soit $\varepsilon > 0$.

de l'annee

 $\exists A \in \mathcal{A}^W$ et $\exists B \in \mathcal{B}^W$ tels que $V \subset \bigcup_{k \in W} A_k \times B_k$

$$\sum_{k \in W} \mu(A_k) \nu(B_k) < \phi^*(V) + \varepsilon$$

$$g := \sum_{k \in W} \chi_{A_k \times B_k} \in M(X \times Y; \bar{\mathbb{R}}_{\geq 0})$$

$$\forall x \in X, f(x, \cdot) = \sum_{k \in W} \chi_{A_k}(x) \chi_{B_k} \in M(Y, \bar{\mathbb{R}}_{\geq 0})$$

$$\Rightarrow \int f(x, y) d\nu(y) = \sum_{k \in W} \chi_{A_k}(x) \nu(B_k) =: g(x)$$

$$g := \sum_{k \in W} \nu(B_k) \chi_{A_k} \in M(X, \bar{\mathbb{R}}_{\geq 0}), \quad g \in \mathcal{L}^1(X, \bar{\mathbb{R}}_{\geq 0})$$

$$\int_X g = \sum_{k \in W} \nu(B_k) \mu(A_k) < \phi^*(V) + \varepsilon < \infty$$

$$\mu := \bigcup_{k \in W} A_k \times B_k, \quad \chi_\mu = \min(1, f)$$

$$\chi_\nu(x, \cdot) \leq \chi_\mu(x, \cdot) \leq f(x, \cdot) \quad \forall x \in X$$

$$\Rightarrow \overline{\chi_\nu}(x, \cdot) \leq \int_Y \chi_\mu(x, y) d\nu(y) \leq g(x)$$

$$\Rightarrow \int_X \overline{\chi_\nu} \leq \int_X g < \phi^*(V) + \varepsilon, \quad \varepsilon \rightarrow 0$$

Théorème de Fubini (Suite):

2e 20.12.19

$$\text{Rap: } \left. \begin{array}{l} X = (X, \mathcal{A}, \mu) \\ Y = (Y, \mathcal{B}, \nu) \end{array} \right\} \sigma\text{-fini}$$

$$X \times Y = (X \times Y, \mathcal{C}, \phi)$$

$$\phi^* = \varphi_{f_{X,Y}}, \quad \mathcal{C} = \mathcal{A}_{\phi^*}, \quad \phi = \phi^*|_{\mathcal{C}}$$

$$g \in (\bar{\mathbb{R}})^{X \times Y}, \quad \underline{f}, \bar{f} \in (\bar{\mathbb{R}})^X$$

$$\bar{g}(x) = \int_Y g(x, y) d\nu(y), \quad \underline{g}(x) = \int_Y \dots$$

Thm (Fubini) [Rappel]

Si $f \in \mathcal{L}^1(X \times Y, \bar{\mathbb{R}})$, alors

1) $\underline{f}, \bar{f} \in \mathcal{L}^1(X, \bar{\mathbb{R}})$

2) $\int_X \underline{f} = \int_X \bar{f} = \int_{X \times Y} f$

Rem: On peut échanger les espaces X et Y .

Lemme: $(\mu(X) < \infty, \nu(Y) < \infty) \Rightarrow \forall V \subset X \times Y, \int_X \bar{\chi}_V \leq \phi^*(V)$
 $\uparrow$
Rappel

Dém: du théorème de Fubini

1) Supposons que $\mu(X) < \infty$ et $\nu(Y) < \infty$, $f = \chi_A$, $A \in \mathcal{C}$

$$\int_{X \times Y} f = \phi(A) \leq \phi(X \times Y) = \mu(X)\nu(Y) < \infty$$

$$1 = \chi_{A^c} + \chi_A \Rightarrow \int_Y 1 \, d\nu(y) = \int_Y \chi_{A^c}(x, y) \, d\nu(y) + \int_Y \chi_A(x, y) \, d\nu(y)$$

$$\Leftrightarrow \nu(Y) = (\bar{\chi}_{A^c} + \underline{\chi}_A) \in (\mathbb{R}_{\geq 0})^X$$

$$\int_X \nu(Y) \, d\mu(x) = \int_X \bar{\chi}_{A^c} \, d\mu(x) + \int_X \underline{\chi}_A \, d\mu(x) \dots$$

$$\underset{\mu(X)\nu(Y)}{\parallel} \dots \leq \phi^*(A^c) + \int_X \underline{\chi}_A \, d\mu(x)$$

$$\Leftrightarrow \phi(X \times Y) - \phi(A^c) \leq \int_X \underline{\chi}_A \, d\mu(x)$$

$$\phi(A) \leq \int_X \underline{\chi}_A \, d\mu(x)$$

$$\text{On a } \bar{\chi}_A \geq \underline{\chi}_A \Rightarrow \int_X \bar{\chi}_A \geq \int_X \underline{\chi}_A \geq \phi(A) \geq \int_X \bar{\chi}_A \geq \int_X \bar{\chi}_A$$

$$\Rightarrow \int_X \bar{\chi}_A = \int_X \bar{\chi}_A = \phi(A) \Rightarrow \bar{\chi}_A \in \mathcal{L}^1(X, \bar{\mathbb{R}})$$

$$\text{et } \int_X \bar{\chi}_A = \phi(A)$$

Analyse III :

Par symétrie entre A et A^c , on a aussi que

$$\bar{\chi}_{A^c} \in \mathcal{L}'(X, \mathbb{R}), \quad \int \bar{\chi}_{A^c} = \phi(A^c)$$

$$\Rightarrow \underline{\chi}_A = \mathcal{J}(Y) - \bar{\chi}_{A^c} \in \mathcal{L}'(X, \mathbb{R})$$

$$\int \underline{\chi}_A = \mathcal{J}(Y)\mu(X) - \phi(A^c) = \phi(A)$$

$$\Rightarrow \int \underline{\chi}_A = \int \bar{\chi}_A = \phi(A)$$

2) $\mu(X)$ et $\mathcal{J}(Y)$ sont finis. $f \in \mathcal{E}(X \times Y, \mathbb{R})$

$$f = \sum_{s \in S} s \chi_{E_s}, \quad S = f(X \times Y) \subset \mathbb{R} \text{ ensemble fini}, \quad E_s = f^{-1}(\{s\})$$

$$\text{On sait que } \int (f+g) \leq \int f + \int g \text{ et } \int f + \int g \leq \int (f+g)$$

$$\Rightarrow \bar{f} \leq \sum_{s \in S} s \bar{\chi}_{E_s} \text{ et } \sum_{s \in S} s \underline{\chi}_{E_s} \leq \underline{f}$$

$$\Rightarrow \sum_{s \in S} s \phi(E_s) \leq \int \underline{f} \leq \int \bar{f} \leq \sum_{s \in S} s \phi(E_s) = \int f$$

$$\int f \leq \int \underline{f} \leq \int \bar{f} \leq \int f$$

3) $f \in \mathcal{E}(X \times Y, \mathbb{R}_{\geq 0})$

Soient $A \in \mathcal{R}_+(X)$, $B \in \mathcal{R}_+(Y)$ tels que $\mu(A_n) < \infty$, $\mathcal{J}(B_n) < \infty$
 $\forall n \in \mathbb{N}$, $A_n \subset A_{n+1}$, $B_n \subset B_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

$$\Rightarrow \mu(X) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n), \quad \mathcal{J}(Y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{J}(B_n)$$

On définit $f_n := f \chi_{A_n \times B_n}$ une suite croissante : $f_n \leq f_{n+1}$
 $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n = f$ et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathcal{L}'(X, \mathbb{R}))^{\mathbb{N}}$ par partie 2)

Par le thm de conv. monotone,

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \int_X f_n = \int_X \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n$$

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{X \times Y} f_n = \int_{X \times Y} \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n = \int_{X \times Y} f$$

Soit $\Omega := \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \{x \in X \mid h_k(x, \cdot) \in \mathcal{L}^1(Y, \mathbb{R}_{\geq 0})\}$

Alors Ω^c est μ -négligeable.

$$\begin{aligned} \rightarrow \forall x \in \Omega : \underline{f}(x) &= \bar{f}(x) = \int_Y f(x, \cdot) = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_Y h_k(x, \cdot) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} h_k(x) =: g(x) \end{aligned}$$

4) $f \in \mathcal{L}^1(X \times Y; \mathbb{R}_{\geq 0})$

$\exists c \in (\mathcal{E}(X \times Y, \mathbb{R}_{\geq 0}))^{\mathbb{N}}$ croissante, $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = f$

le reste est la partie 3) avec $(h_n)_{n \geq 0}$ remplacé par $(c_n)_{n \geq 0}$

5) $f \in \mathcal{L}^1(X \times Y; \mathbb{R})$,

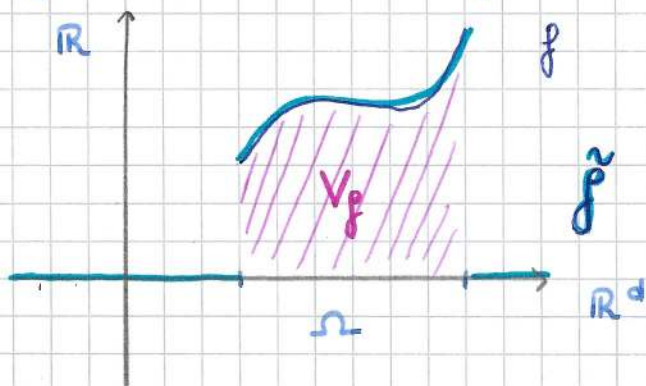
$$f = f^+ - f^- \quad \text{où } f^{\pm} = \max(0, \pm f) \in \mathcal{L}^1(X \times Y, \mathbb{R}_{\geq 0})$$

$$f = f^+ - f^- \Rightarrow \underline{f^+} + \overline{(-f^-)} \leq f \leq \bar{f} \leq \bar{f^+} + \overline{(-f^-)} = \bar{f^+} - \underline{f^-}$$

$$\Rightarrow \int f \leq \int \bar{f} \leq \int \bar{f^+} - \int \underline{f^-} = \int f^+ - \int f^- = \int f$$

$$\int f \leq \int \bar{f} \leq \int f \quad \int \bar{f} = \int \bar{f} = \int f$$



Analyse III :Un exemple d'application du thm de Fubini et interprétation géométrique de l'intégrale. $(\mathbb{R}^d, \mathcal{A}_{\lambda_d}, \lambda_d)$ mesure de Lebesgue $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ fonction mesurable ($\Omega \in \mathcal{A}_{\lambda_d}$)

$$V_f \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^{d+1}$$

$$\lambda_{d+1}(V_f) \stackrel{?}{=} \int_{\Omega} f$$

$$V_f := \{ (x, y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \mid x \in \Omega, 0 \leq y \leq f(x) \}$$

On veut démontrer : $V_f \in \mathcal{A}_{\lambda_{d+1}}$

$$V_f = (\chi_{\Omega} \circ p)^{-1}(\{1\}) \cap q^{-1}(\mathbb{R}_{\geq 0}) \cap (\tilde{f} \circ p - q)^{-1}(\mathbb{R}_{\geq 0})$$

$$\text{où } p: \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$$

$$q: \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\tilde{f}: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R} \quad \tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in \Omega \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (\chi_{\Omega} \circ p)^{-1}(\{1\}) &= \{ (x, y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \mid (\chi_{\Omega} \circ p)(x, y) = 1 \} \\ &= \{ \text{---} \mid x \in \Omega \} = \Omega \times \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$q^{-1}(\mathbb{R}_{\geq 0}) = \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_{\geq 0}$$

$$\begin{aligned} (\tilde{f} \circ p - q)^{-1}(\mathbb{R}_{\geq 0}) &= \{ (x, y) \mid \tilde{f}(x) - y \geq 0 \} \\ &= \{ (x, 0) \mid x \notin \Omega \} \cup \{ (x, y) \mid x \in \Omega, y \leq f(x) \} \end{aligned}$$

Supposons $\lambda_{d+1}(V_f) < \infty \Leftrightarrow \chi_{V_f} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^{d+1}, \mathbb{R})$

par le thm de Fubini, on a :

$$\int \chi_{V_f} = \int_{\mathbb{R}^d} \overline{\chi_{V_f}}$$

$$\chi_{v_f}(x, y) = \chi_{\Omega}(x) \chi_{[0, \hat{f}(x)]}(y)$$

$$\chi_{v_f}(x, \cdot) = \chi_{\Omega}(x) \chi_{[0, \hat{f}(x)]}$$

$$\Rightarrow \underline{\chi}_{v_f}(x) = \overline{\chi}_{v_f}(x) = \int_{\mathbb{R}} \chi_{v_f}(x, \cdot) = \chi_{\Omega}(x) \hat{f}(x)$$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^d} \overline{\chi}_{v_f} = \int_{\mathbb{R}^d} \chi_{\Omega}(x) \hat{f}(x) d_{\lambda_d}(x) = \int_{\Omega} \hat{f} = \int_{\Omega} f.$$