

Topologie générale.Ch 1. Espaces topologiques.

Déf: Soit X , un ensemble. Supposons que X est muni d'une famille de ss-ensembles de X , $\mathcal{T}$, satisfaisant 3 conditions:

- 1) $\emptyset$ et $X \in \mathcal{T}$
- 2) $\forall \{U_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{T}$, un ensemble d'éléments de $\mathcal{T}$, on a $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$
- 3) si $U_1, U_2 \in \mathcal{T}$ alors $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}$

alors on appelle un élément de $\mathcal{T}$ un "ouvert" dans X et on dit que $\mathcal{T}$ est une topologie (struct topologique) sur X .

Ex: 1. X ensemble, $\mathcal{T}_{disc} = \mathcal{P}(X) = \{\text{tous les ss-ensembles de } X\}$ est la topologie discrète (un point est un ouvert)

2. $\mathcal{T}_{triv} = \{\emptyset, X\}$ la topologie triviale.

3. $\mathcal{T}_f = \{U \subset X \mid X \setminus U \text{ est fini } \neq \emptyset\}$, la topologie cofinie

4. Topologie standard sur $\mathbb{R}^n$ (espace euclidien) muni de $d(x, y) = \|x - y\|_{\mathbb{R}^n}$ et de la notion de boule $B(x, \varepsilon) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid d(x, y) < \varepsilon\}$

$$\mathcal{T}_s := \{U \subset \mathbb{R}^n \mid \forall x \in U \exists \varepsilon > 0 \text{ tq } B(x, \varepsilon) \subset U\}$$

Donc $U \in \mathcal{T}$ ssi tout point de U est inclus dans U avec une petite boule autour.

Prop: $\mathcal{T}_s := \{U \subset \mathbb{R}^n \mid \forall x \in U \exists \varepsilon > 0 \text{ tq } B(x, \varepsilon) \subset U\}$ est bien une topologie sur $\mathbb{R}^n$.

Dém: En effet:

i) $X \in \mathcal{T}$, $\emptyset \in \mathcal{T}$

ii) $\{U_i\}_{i \in I} \xrightarrow{?} U = \bigcup U_i \in \mathcal{T}$

Soit $x \in U \Rightarrow \exists i \in I \text{ tq } x \in U_i \in \mathcal{T} \Rightarrow \exists \varepsilon \text{ tq } B(x, \varepsilon) \subset U_i$

$$\Rightarrow B(x, \varepsilon) \subset U = \bigcup_{i \in I} U_i$$

Dém: (Suite)

$$\begin{aligned} \text{iii)} \quad x \in \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2. \quad x \in \mathcal{U}_1 &\Rightarrow \exists \varepsilon_1 \text{ tq } B(x, \varepsilon_1) \subset \mathcal{U}_1 \\ \text{et } x \in \mathcal{U}_2 &\Rightarrow \exists \varepsilon_2 \text{ tq } B(x, \varepsilon_2) \subset \mathcal{U}_2 \\ \Rightarrow B(x, \varepsilon_1) \cap B(x, \varepsilon_2) &\subset \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 \\ &= B(x, \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)) \end{aligned}$$

Donc on a mq si $x \in \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$ alors $\exists \varepsilon = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$
tq $B(x, \varepsilon) \subset \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$. $\square$

Remarque: la condition (iii) peut être remplacée de façon équivalente par :

$$\text{(iii)'}: \forall n \in \mathbb{N} \text{ si } \mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_n \in \mathcal{T}, \text{ alors } \bigcap_{i=1}^n \mathcal{U}_i \in \mathcal{T}$$

NB! Ce n'est pas nécessairement vrai pour des intersections infinies $\bigcap_{i \in I} \mathcal{U}_i$ $|I| = \infty$

Ex:

$$\begin{aligned} X &= \mathbb{R} \quad \mathcal{U}_i =]-\frac{1}{i}; \frac{1}{i}[\subset X \text{ et } \mathcal{U}_i \in \mathcal{T}_{\text{std}} \\ \text{mais } \bigcup_{i \in \mathbb{I}} \mathcal{U}_i &= \{0\} \notin \mathcal{T}_{\text{std}}. \end{aligned}$$

Remarque: Sur un $\hat{m}$ ensemble X , on peut a priori définir des topologies différentes et avoir donc de différents esp. topo. sur un $\hat{m}$ espace

Déf:

Soit $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ deux topologies sur un ensemble X , on dit $\overset{\text{que}}{\mathcal{T}_2}$ est plus fine que $\mathcal{T}_1$ si $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$ (+ d'ouvert dans $\mathcal{T}_2$)

Ex:

$$1) \forall (X, \mathcal{T}) \quad \mathcal{T}_{\text{triv}} \subseteq \mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_{\text{disc}}$$

$$2) \text{ Si } X \text{ est fini alors } \mathcal{T}_f = \mathcal{T}_{\text{disc}}$$

$$\text{si } X \text{ est infini alors } \mathcal{T}_f \subset \mathcal{T}_{\text{disc}}.$$

$$3) \text{ Dans le cas } \mathbb{R}^n \quad \mathcal{T}_{\text{triv}} \subset \mathcal{T}_f \subset \mathcal{T}_{\text{std}} \subset \mathcal{T}_{\text{disc}}$$

Rem:

C'est une relation d'ordre des topologies sur X , mais ce n'est pas un ordre total, on peut avoir $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ sur X tq $\mathcal{T}_1 \not\subset \mathcal{T}_2$ et $\mathcal{T}_2 \not\subset \mathcal{T}_1$.

Géométrie II

Ex: $X = \{1, 2\}$ $\mathcal{T}_{\text{dis}} = \{X, \emptyset, \{1\}, \{2\}\}$ $\mathcal{T}_{\text{triv}} = \{X, \emptyset\}$

$\mathcal{T}_1 = \{X, \emptyset, \{1\}\}$ et $\mathcal{T}_2 = \{X, \emptyset, \{2\}\}$

$\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ pas comparable

Rem: soit $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2 \rightarrow \mathcal{T} = \mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2$ une topologie sur X
 $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}_2$

Déf: Un ss-ensemble $F \subset X$ est dit fermé si $X \setminus F$ est ouvert.

Rem: 1) On peut définir une topo. en terme de fermés en modifiant les conditions (ii) et (iii)

2) $\exists$ des ensembles qui sont à la fois fermés et ouverts
 et $\exists$ des ensembles ni fermé ni ouvert.

Ex: 1) X et $\emptyset$ sont ouverts et fermés

2) Donc $\mathcal{T}_{\text{dis}}$, $\forall U \subset X$ est ouvert et fermé.

3) $X, |X| \geq 2 \Rightarrow \exists U \subset X \neq \emptyset$ et dans $\mathcal{T}_{\text{triv}}$ U n'est ni ouvert, ni fermé.

4)  : Un intervalle de $\mathbb{R}$ n'est pas ouvert car il ne satisfait pas la déf d'un ouvert au pt x .

Son complément est $\mathbb{R} \setminus [-1, x] = (-\infty, -1] \cup (x, +\infty) \Rightarrow$ pas fermé non-plus $[-1, x]$

Déf: Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique.

Un $N \subset X$ est un voisinage d'un point $x \in X$ s'il existe $U \in \mathcal{T}$ tq $x \in U \subset N$.

Déf: Soit $A \subset X$, on définit $A^\circ =$ l'intérieur de $A = \{x \in A \mid A \text{ voisinage de } x\}$

A° est toujours un ouvert, A° est la réunion de tous les ouverts contenus dans A et donc c'est le + grand ouvert contenu dans A .

Ex: $A = (-1; x]$ alors $A^\circ = (-1; x)$ dans $\mathbb{J}_{\text{std}}$.

Déf: Soit $A \subset X$, $\bar{A}$ l'adhérence de A est $x \in \bar{A} = \{x \in X \mid X \setminus A \text{ n'est pas un voisinage de } x\}$
 $\Leftrightarrow \bar{A}$ est le ss-ensemble défini par la condition

$$\{x \in X \mid \bar{A} \Leftrightarrow X \setminus \bar{A} \text{ est un voisinage de } x\}$$

$\bar{A}$ est fermé, c'est le + petit fermé contenant A .

$$\bar{A} = \bigcap_{F \text{ fermé et } A \subset F} F$$

Cor: $A \subset X$ est ouvert $\Leftrightarrow A = A^\circ$

$A \subset X$ est fermé $\Leftrightarrow A = \bar{A}$

Déf: Soit $A \subset X$, le bord de A , $\partial A := \bar{A} \setminus A^\circ$

∂A est toujours fermé : $X \setminus \partial A = \underbrace{X \setminus \bar{A}}_{\emptyset} \cup \underbrace{A^\circ}_{\emptyset}$
donc $X \setminus \partial A$ ouvert

Ex:  $\mathbb{R}^2$ sauf $o = A = \text{cadrant sauf } o$

$A^\circ = \text{cadrant ouvert}$

$\bar{A} = \text{cadrant avec } o$

$\partial A = \text{bord du quadrant avec } o$

Rem: Dans ∂A , il y a des pt qui sont déjà dans A et des pt qui n'y étaient pas.

$\bar{A} = A \cup \text{les points qui ne sont pas dans } A.$

Déf: $A \subset X$ est dense dans $(X, \mathbb{J})$ si $\bar{A} = X$

Ex: $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ 1) $\mathbb{Q}^\circ = \emptyset$ 2) $\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$

2. Applications continues

Déf: Soient X, Y 2 espaces topologiques. $f: X \rightarrow Y$ est continue si $\forall$ ouvert U dans Y $f^{-1}(U)$ est un ouvert de X .

Propriété: Si X, Y, Z sont trois esp. topo et $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow Z$ sont continues, alors $g \circ f: X \rightarrow Z$ est continue.

Dém: En effet, soit $U \subset Z$ un ouvert $(g \circ f)^{-1}(U) = f^{-1} \circ g^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U))$
 $g^{-1}(U)$ est ouvert dans Y et $f^{-1}(g^{-1}(U))$ ouvert dans X .

Ex: 1) $\text{id}_X: (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X, \mathcal{T})$ est continue

$\text{id}_X: (X, \mathcal{T}_1) \rightarrow (X, \mathcal{T}_2)$ est continue $\Leftrightarrow \mathcal{T}_1 \supset \mathcal{T}_2 \Leftrightarrow \mathcal{T}_1$ plus fin que $\mathcal{T}_2$

2) $f: X \rightarrow Y$ application constante $\forall x \in X$ $f(x) = y_0$ est toujours continue.

Soit $U \subset Y$ ouvert, soit $y_0 \in U \Rightarrow f^{-1}(U) = X$ ouvert

soit $y_0 \notin U \Rightarrow f^{-1}(U) = \emptyset$ ouvert.
 „ $\{y_0\}^c$ “

3) $f: (X, \mathcal{T}) \rightarrow (Y, \mathcal{S})$, si $\mathcal{S}$ est grossière alors f est continue
 si $\mathcal{T}$ est discrète alors f est continue.

4) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue au sens usuel (ie: $\forall x \in \mathbb{R}$:
 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, tq si $|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$) est une
 application continue de $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{std}}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{std}})$

Pour vérifier cela, on utilisera une reformulation équivalente de la notion d'appl. continues.

Prop: Soit $f: X \rightarrow Y$ une appl. entre 2 esp. topo,

les assertions suivantes sont équivalentes (= tfae) :

1) f est continue

2) $\forall F$ fermé de Y , $f^{-1}(F)$ est fermé dans X

3) $\forall x \in X$ la prop. suivante est vérifiée :

$\forall$ voisinage N , de $f(x)$ dans Y , $f^{-1}(N)$ est vois de x p. 5

Preuve: (1) $\Leftrightarrow$ (2) exo

Montrons (1) $\Leftrightarrow$ (3):

(1) $\Rightarrow$ (3): Soit $f: X \rightarrow Y$ application continue, fixons $x \in X$ quelconque.
Soit $N \subset Y$ un voisinage de $f(x)$, par déf du vois $\exists U$ ouvert de Y
tq $f(x) \in U \subset N$. $x \in f^{-1}(U) \subset f^{-1}(N) \Rightarrow f^{-1}(N)$ est voisinage
de x . Et donc f est continue en x au sens de (3).

(3) $\Rightarrow$ (1): Soit f continue au sens de (3) $\forall x \in X$. Soit $U \subset Y$ ouvert.
Étant ouvert, U est voisinage de tout $y \in U$. (vu semaine passée)
En particulier, $\forall x \in f^{-1}(U)$, U est vois de $f(x)$.
Alors par (3), $f^{-1}(U)$ est vois de x .
Donc $f^{-1}(U)$ est un voisinage $\forall x$ de $f^{-1}(x) \Leftrightarrow f^{-1}(U)$ est ouvert.

Rem: La propriété (3) $\Leftrightarrow$ (1) nous dit qu' être continu
au sens global $\Leftrightarrow$ être continu au sens local en tout point.

Ex: (Retour)

4. Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue $\forall x \in \mathbb{R}$

(*) $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ s.t. $|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

Mq $f: (\mathbb{R}; \mathcal{T}_{std}) \rightarrow (\mathbb{R}; \mathcal{T}_{std})$ est continue avec (3).

N est vois de $x \in \mathbb{R}$ dans $\mathcal{T}_{std} \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0$ tq $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset N$

Réécrivons (*): $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tq $(x - \delta, x + \delta) \subset f^{-1}(f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon)$

Pour mq (3) est satisfait, on prend N vois de $f(x)$

par l'équivalence (**) $\exists \varepsilon > 0$ tq $(f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon) \subset N$

Par (*) réécrite, $\exists \delta > 0$ tq $(x - \delta, x + \delta) \subset f^{-1}(f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon) \subset f^{-1}(N)$

Donc par (**) $f^{-1}(N)$ est vois de x .

Et donc f est appli continue en x par (3), donc la prop

$f: (\mathbb{R}; \mathcal{T}_{std}) \rightarrow (\mathbb{R}; \mathcal{T}_{std})$ est une application continue.

Rem: les m arguments s'appliquent aux fonctions continues de plusieurs variables réels, ce sont des applic. continues $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_{std}) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_{std})$

Déf: Soit X un esp. topologique $(X, \mathcal{T})$ et $Y \subseteq X$ un ss-ensemble de X , alors sur Y on considère "la topologie induite"

$$\mathcal{T}_Y := \{ Y \cap U : U \in \mathcal{T} \}$$

On dit que $(Y, \mathcal{T}_Y)$ est un ss-esp. topologique de l'esp. topo $(X, \mathcal{T})$

Rem: 1) $\mathcal{T}_Y$ est bien une topologie sur Y
 2) C'est la topo la moins fine qu'on puisse mettre sur Y de telle sorte que $j: Y \rightarrow X$ soit continue.
 j est l'inclusion $j(y) = y \quad \forall y \in Y$

Ex: $X = (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{std})$ Soit $A \subset X$, $A = [0, 1)$ A ni ouvert, ni fermé.

Considérons différents ss-esp de X de manière à voir que les propriétés de A vont changer si on le considère comme sous-ens. de ces ss-esp.

1) $Y = [0, 1)$ Alors $A = Y$ est A ouvert et fermé dans $(Y, \mathcal{T}_Y)$

2) $Y = [0, \infty)$ $A \subset Y$ est ouvert car $A = (-1, 1) \cap Y$
 $A^c_Y = [1, \infty)$ ne peut pas être écrit comme $[0, \infty) \cap$ un ouvert de X
 $\Rightarrow A_Y$ n'est pas ouvert de Y
 $\Rightarrow A$ pas fermé de Y .

3) $Y = (-\infty, 1)$ A n'est pas ouvert de Y .

$A^c_Y = (-\infty, 0)$ est ouvert de Y

$\Rightarrow A$ est fermé de Y .

Prop: Quelques propriétés des applic. continues.

1) $A \subset X$ ss-esp top $\bar{J}: A \rightarrow X$ inclusion est continue

└ Si $\mathcal{U} \subset X$ ouvert $\bar{J}^{-1}(\mathcal{U}) = \mathcal{U} \cap A$ ouvert de A par déf

2) $f: X \rightarrow Y$, cont, $A \subset X$, alors $f|_A: A \rightarrow Y$ continue

└ Par la prop de la composition des appl continues

$$f|_A = f \circ j$$

3) $f: X \rightarrow Y$ continue, si $A \subset Y$ tq $f(X) \subset A$, alors $f: X \rightarrow A$ est aussi continue.

4) Si $X = \bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_i$ et $f: X \rightarrow Y$ est continue sur $f|_{\mathcal{U}_i} \forall i \in I$ alors $f: X \rightarrow Y$ est continue.

Déf: X, Y , deux esp. topo, $f: X \rightarrow Y$ est un homéomorphisme si f est continue, inversible (ie: bijection) tq f^{-1} est continue (l'application inverse $f^{-1}: Y \rightarrow X$)

Notation: $\exists f: X \rightarrow Y$ un homéomorphisme, alors on écrit $X \simeq Y$ et on dit X et Y sont homéomorphes.

Rem: $\text{Homeo}(X)$ - ensemble des homéo $X \rightarrow X$ est un groupe.

$\text{Homeo}(X) \curvearrowright X$ une action de groupe

Topologie étudie les prop. des esp. invariantes par cette action.

Ex: 1) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = ax + b, a, b \in \mathbb{R} \quad a \neq 0$ cont et $f^{-1}(y) = \frac{y}{a} - \frac{b}{a}$

1') Toute $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue, surjective et strictement monotone,

est un homéomorphisme de $\mathbb{R}$. e.g: $f(x) = x^3$

2) $f(x) = \frac{x}{1+|x|} \quad f: \mathbb{R} \rightarrow (-1, 1)$ est un homéo. $f^{-1}(y) = \frac{y}{1-|y|}$ continue aussi

plus généralement, tous les intervalles ouverts sont homéomorphes

entre eux et homéom. à $\mathbb{R}$.

par applic
affine

Géométrie II:

Ex: (suite)

- 2) Plus généralement, toutes les boules ouvertes dans $\mathbb{R}^n$ sont homéo entre elles et sont homéo à $\mathbb{R}^n$.

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow B(0,1) \rightarrow \text{rayon 1 et centre } 0 \in \mathbb{R}^n$$

$$x \mapsto \frac{x}{1 + \|x\|}$$

- 3) S^1 Cercle de rayon 1, $S^1 \setminus \{(1,0)\} \cong (0,1) \cong \mathbb{R}$

$f: S^1 \rightarrow [0,1)$ est continue et bijective mais f^{-1} pas cont.

1e 03.10.18

Rappel: $f: X \rightarrow Y$ est un homéo si f est continue, bijective, et $f^{-1}: Y \rightarrow X$ est continue. X et Y homéomorphes $X \cong Y$

Ex: 1. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$ ($a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$)

2. $\mathbb{R} \cong (-1,1)$ [Ex 2: S^3 tous les ouverts non vides sont homéo]

3. $\square \cong \bigcirc$ [Ex 3: S^3]

4. Soient $X = [0,1)$ (comme ss-esp de $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{std}})$) et $Y = S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z|=1\}$ (comme ss-esp de $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}^2$ muni $\mathcal{T}_{\text{std}}$) et $f: [0,1) \rightarrow S^1$ donnée par $f(t) = e^{2\pi i t}$



(*) f est continue:

$$\text{Soit } \tilde{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2,$$

$$t \mapsto (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$$

Donc $\tilde{f}$ est continue, vu en Analyse I, (au sens ε, δ)

$\Leftrightarrow$ (au sens de $\mathcal{T}_{\text{std}}$ sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$)

f est la restriction de $\tilde{f}$ à X et Y donc par prop. 1.2

f est continue.

(*) f est bijective: clair

(*) f^{-1} n'est pas continue: (Ce n'est pas un homéomorphisme)

On note $g = f^{-1}$ et elle n'est pas continue en $1 \in \mathbb{C}$



En effet: Soit $U = [0, 1/2)$

On a U voisinage de $0 = g(1) \in X = [0, 1)$
(car $U = (-1/2, 1/2) \cap X$ est un ouvert sur $\mathbb{R}$)

mais $g^{-1}(U)$ n'est pas voisinage de $1 \in Y = S^1$

car sinon on aurait $g^{-1}(U) \supset S^1 \cap B(1, \varepsilon)$ pour $\varepsilon > 0$
ce qui est impossible.

Ainsi, g n'est pas continue par prop 1.1.

Remarque: 1) $g = f^{-1}$ est continue en tous les autres points $z \in S^1 \setminus \{1\}$

Ainsi, $f|_{(0,1)} : (0,1) \rightarrow S^1 \setminus \{1\}$ est un homéomorphisme
d'où $(0,1) \cong S^1 \setminus \{1\}$

2) $g = f^{-1}$, intuitivement, "casse" le cercle, pas continu.

3) C'est un nouvel ex de: f cont + bij $\nRightarrow$ homéo.

1.3 Espaces Métriques:

Def: Soit X un ensemble, une appl. $d: X \times X \rightarrow [0, \infty)$ est appelée une métrique si:

i) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y \quad \forall x, y \in X$

ii) $d(x, y) = d(y, x) \quad \forall x, y \in X$

iii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \quad \forall x, y, z \in X$

(X, d) est un esp. métrique

- Remarque:
- 1) Souvent, on note simplement X un esp métrique
 - 2) Si (X, d) est un esp. métrique et $Y \subseteq X$, alors $d|_{Y \times Y}$ est une métrique: la métrique induite sur Y .
 - 3) Si (X, d) esp métrique, $x \in X, r > 0$ alors la boule ouverte de rayon r et centrée en x est $B_d(x, r) = \{y \in X \mid d(x, y) < r\}$

Ex:

1) $X = \mathbb{R}$ et $d(x, y) = |x - y|$

$$B(x, r) = \{y \in \mathbb{R} \mid |x - y| < r\} = (x - r, x + r)$$

2) $X = \mathbb{R}^n, p \geq 1, d_p: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow [0, \infty)$

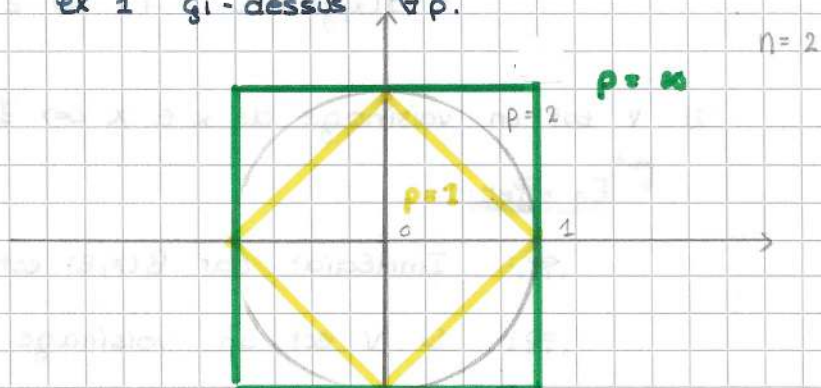
$$\text{où } d_p(x, y) = \left(\sum_{i=1}^n |y_i - x_i|^p \right)^{1/p} \text{ pour } x = (x_1, \dots, x_n) \text{ et } y = (y_1, \dots, y_n)$$

d_p est une métrique: (i) et (ii) trivial) (iii) $\leq$ de Minkowski

- $p = 2$: $d_2(x, y) = \|x - y\|_2$, distance euclidienne.

- $p = 1$: $d_1(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| = \|x - y\|_1$, métrique New-yorkaise

- $n = 1$: ex 1 ci-dessus $\forall p$.



- $p = \infty$ $d_\infty(x, y) = \max_{i=1, \dots, n} |x_i - y_i| = \|x - y\|_\infty$

- 3) Soit X quelconque, soit $d(x, y) := \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$
est la métrique discrète.

$$B(x, r) = \begin{cases} \{x\} & \text{si } r \leq 1 \\ X & \text{si } r > 1 \end{cases}$$

Revenons à la topologie:

Déf.

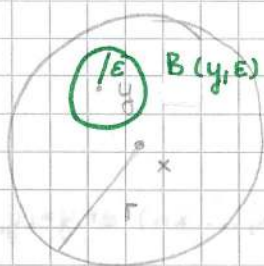
Soit (X, d) un esp. métrique, et soit $\mathcal{T}_d \subset \mathcal{P}(X)$ défini par:

$$U \in \mathcal{T}_d \iff \forall x \in U, \exists \varepsilon > 0 \text{ tq } B_d(x, \varepsilon) \subset U.$$

$\mathcal{T}_d$ est une topologie: on prouve que l'ex 4 en §I.1 ($d = d_2$ sur $\mathbb{R}^2$)

($\mathcal{T}_d$ est la topologie induite par la métrique d).

Remarque: 1) $\forall x \in X, \forall r > 0, B_d(x, r) \in \mathcal{T}_d$ (les boules ouvertes sont des ouverts de cette topologie)



En effet: Soit $x \in X$ et $r > 0$.

à voir: $\forall y \in B(x, r) \exists \varepsilon > 0 \text{ tq } B(y, \varepsilon) \subset B(x, r)$

Soit donc $y \in B(x, r)$

posons $\varepsilon := r - d(x, y)$

* - $y \in B(x, r) \iff d(x, y) < r \iff \varepsilon > 0$.

* - Vérifions que $B(y, \varepsilon) \subset B(x, r)$

Soit donc $z \in B(y, \varepsilon)$. On a: $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

$$\leq d(x, y) + \varepsilon = r \Rightarrow z \in B(x, r).$$

2) V est un voisinage de $x \in X \iff \exists \varepsilon > 0 \text{ tq } B(x, \varepsilon) \subset V$

En effet:

$\Leftarrow$: Immédiat car $B(x, \varepsilon)$ est ouvert

$\Rightarrow$: Si V est un voisinage de $x \in X$, alors $\exists U \in \mathcal{T}_d$

tq $x \in U \subset V$, par déf de $\mathcal{T}_d$, $\exists \varepsilon > 0 \text{ tq } B(x, \varepsilon) \subset U \subset V$

$\Rightarrow$ on a bien $B(x, \varepsilon) \subset V$

Ex:

1) sur $X = \mathbb{R}$, $d(x, y) = |x - y|$ induit $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}_{std}$ par définition

2) Plus généralement, sur $X = \mathbb{R}^n$, $d_2(x, y) = \|x - y\|_2$ induit

$\mathcal{T}_{d_2} = \mathcal{T}_{std}$ par déf.

(Question: $\mathcal{T}_{d_p} = ?$)

3) Sur X quelconque, la métrique discrète d induit la topo discrète $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}_{disc}$

En effet: Soit $U \subset X$ et $x \in U$, pour $\varepsilon = 1$, on a:
 $B(x, \varepsilon) = \{x\} \subset U$. Donc $U \in \mathcal{T}_{disc}$

Terminologie: Deux métriques d, d' sur un m ensemble X sont dites équivalentes ($d \sim d'$) s'il existe $c, c' > 0$ tq $c \cdot d(x, y) \geq d'(x, y)$ et $d'(x, y) \leq c' \cdot d(x, y) \quad \forall x, y \in X$

Prop 1.3: $d \sim d' \Rightarrow \mathcal{T}_d = \mathcal{T}_{d'}$
 (2 métriques équiv. induisent la m topo)

Preuve: Soit $d \sim d'$ tq $\exists c, c' > 0$ tq $c \cdot d(x, y) \leq d'(x, y) \leq c' \cdot d(x, y) \quad \forall x, y \in X$
 Cela induit les inclusions suivantes

$$B_{d'}(x, cr) \subseteq B_d(x, r) \subseteq B_{d'}(x, c'r) \quad \forall x \in X \quad \forall r > 0$$

En effet: soit $y \in B_{d'}(x, cr)$, $d'(y, x) \leq c \cdot r$
 $\Rightarrow d(x, y) \leq \frac{1}{c} \cdot d'(x, y) \leq \frac{1}{c} \cdot c \cdot r = r \Rightarrow y \in B_d(x, r)$
 (idem pour la 2ème inclusion)

Apf: $\mathcal{T}_d \subseteq \mathcal{T}_{d'}$

En effet: soit $U \in \mathcal{T}_d$ et soit $x \in U$, On a $\varepsilon > 0$ tq $B_d(x, \varepsilon) \subset U$. Posons $\varepsilon' = c \cdot \varepsilon$; on a donc
 $B_{d'}(x, \varepsilon') = B_{d'}(x, c \cdot \varepsilon) \subseteq B_d(x, \varepsilon) \subset U$
 $\Rightarrow U \in \mathcal{T}_{d'}$ Cela démontre l'apf

La seconde inclusion implique $\mathcal{T}_{d'} \subseteq \mathcal{T}_d$ (m preuve)
 d'où $\mathcal{T}_{d'} = \mathcal{T}_d$

□

Ex: 1) Sur $X = \mathbb{R}^n$, $\forall p \in [1, \infty)$, on a:

$$d_\infty(x, y) \leq d_p(x, y) \leq n^{1/p} d_\infty(x, y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

Cela implique $d_p \sim d_\infty \quad \forall p \in [1, \infty) \Rightarrow d_p \sim d_2 \quad \forall p \in [1, \infty)$

$$\Rightarrow \mathcal{T}_p = \mathcal{T}_{d_2} = \mathcal{T}_{std}$$

le 10.10.18

Rem: Toutes les normes sur $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes. (Vu Analyse I)

Cela implique: toutes les distances $d(x, y) = \|x - y\|$ sur $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes.

Mais toutes les distances ne sont pas équivalentes sur $\mathbb{R}$

P. Exemple: d_2 et la distance discrète ne sont pas équivalentes sur $\mathbb{R}$

$\hookrightarrow$ distance Euclidienne
en effet, si $d_2 \sim d_{disc} \Rightarrow \mathcal{T}_{std} = \mathcal{T}_{dis}$, or $\{x\} \in \mathcal{T}_{dis}$
mais $\{x\} \notin \mathcal{T}_{std}$.

(ou alors on utilise la déf d'équivalence)

Rem: 1. La réciproque à prop. 1.3 est fausse: $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}_{d'} \nRightarrow d \sim d'$

En effet: Étant donné une distance d sur X , l'app $\bar{d}: X \times X \rightarrow [0, 1]$

défini par $\bar{d}(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$ est aussi une distance tq $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}_{\bar{d}}$

Notons que $\bar{d}(x, y) < 1, \forall x, y \in X$. Ainsi si $d \sim \bar{d}$, cela implique

$\exists c > 0$ tq $d(x, y) \leq c \cdot \bar{d}(x, y) < c \quad \forall x, y \in X$ d'où

$d(x, y) < c \quad \forall x, y \in X$ ie (X, d) est borné

Ainsi si (X, d) n'est pas borné, alors $d \not\sim \bar{d}$

Ex: $X = \mathbb{R}$ avec $d(x, y) = |x - y|$ n'est pas borné

ainsi $d \not\sim \bar{d}$ à $\bar{d}(x, y) = \frac{|x - y|}{1 + |x - y|}$, mais $\mathcal{T}_{\bar{d}} = \mathcal{T}_d$

Terminologie: Un esp. métrique (X, d) est borné si $\exists c > 0$

tq $d(x, y) < c \quad \forall x, y \in X$

Rem: 2) En présence d'un esp métrique (X, d) , il faut distinguer:

- les notions métriques (qui dépendent de d) p.ex: borné
- les notions topologiques (qui dépendent de $\mathcal{T}_d$) p.ex: ouvert

Prop I.4: Soit (X, d_x) et (Y, d_y) deux esp. métriques, une application $f: X \rightarrow Y$ est continue en $x \in X$ (relativement à $\mathcal{T}_{d_x}$ et $\mathcal{T}_{d_y}$)
 $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tq si $x' \in X$ $d_x(x, x') < \delta \Rightarrow d_y(f(x), f(x')) < \varepsilon$

Preuve: Vu pour $(\mathbb{R}^n, d_2)$, se généralise immédiatement.

Cor I.5: $f: X \rightarrow Y$ comme ci-dessus est continue $\Leftrightarrow \forall x \in X, \forall \varepsilon > 0$
 $\exists \delta > 0, \forall x' \in X, d_x(x, x') < \delta \Rightarrow d_y(f(x), f(x')) < \varepsilon$

Déf: Un esp topo $(X, \mathcal{T})$ est dit métrisable s'il existe une métrique d sur X tq $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}$

- Ex:
- 1) $\forall X$ ensemble, $(X, \mathcal{T}_{dis})$ est métrisable (car $\mathcal{T}_{dis} = \mathcal{T}_d$ où d dist discrète)
 - 2) $\mathbb{R}^n$ munit de $\mathcal{T}_{std}$ est métrisable (car $\mathcal{T}_{std} = \mathcal{T}_d$ avec $d = d_2$)
 - 3) Soit X quelconque, on a: $(X, \mathcal{T}_{triv})$ est métrisable $\Leftrightarrow \#X \leq 1$.

En particulier, $X = \{1, 2\}$ munit de $\mathcal{T}_{triv}$ n'est pas métrisable.

Preuve:

$\Leftarrow$: Si on a $\#X \leq 1 \Rightarrow \mathcal{T}_{triv} = \mathcal{T}_{dis} \Rightarrow (X, \mathcal{T}_{triv}) = (X, \mathcal{T}_{dis})$ métrisable.

$\Rightarrow$: Soit X tq $\#X > 1$ et d une métrique sur X , on va mg: $\mathcal{T}_d \neq \mathcal{T}_{triv}$ (cela montre la contraposée de $\Rightarrow$)

Soient $x, y \in X$ (possible car $\#X = 2$)

Soit $U := B_d(x, r)$ où $r = [0, \infty]$

On a que $r = d(x, y) > 0$ car $x \neq y \Rightarrow x \in \mathcal{U}$

On a $y \in \mathcal{U}$ par déf, $\mathcal{U} \in \mathcal{T}_d$ car les boules sont

ouvertes $\Rightarrow \mathcal{U} \in \mathcal{T}_d, \mathcal{U} \notin \mathcal{T}_{triv} \Rightarrow \mathcal{T}_d \neq \mathcal{T}_{triv}$

4. Si X est fini, alors $(X; \mathcal{T})$ est métrisable $\Leftrightarrow \mathcal{T} = \mathcal{T}_{disc}$.

I.4. Bases et sous-bases:

Question: Comment déf. une topo sans faire la liste des ouverts?

Rép: Via une base ou sous-base

Déf: Soit $(X, \mathcal{T})$ un esp. topo, un ss-ensemble $B \subset \mathcal{T}$ est une base de $\mathcal{T}$ si

tout élément de $\mathcal{T}$ est union d'éléments de B : $\forall \mathcal{U} \in \mathcal{T}, \exists \{B_i\}_{i \in I}$

tg $B_i \in B \forall i \in I$ et $\mathcal{U} = \bigcup_{i \in I} B_i$

• un ss-ensemble $S \subset \mathcal{T}$ est une ss-base de $\mathcal{T}$ si l'ensemble des intersections finies d'éléments de S est une base de $\mathcal{T}$:

$\{\mathcal{U}_1 \cap \dots \cap \mathcal{U}_n \mid \mathcal{U}_i \in S \forall i\}$ est une base de $\mathcal{T}$.

Rem: 1) Une base est une ss-base

2) Une base B de $\mathcal{T}$ détermine entièrement $\mathcal{T}$, via $\mathcal{T} = \{\bigcup_{i \in I} B_i \mid B_i \in B \forall i \in I\}$

On notera souvent $\mathcal{T} = \mathcal{T}_B$, appelée topologie engendrée par B .

De m. une ss-base S de $\mathcal{T}$ détermine entièrement $\mathcal{T}$ via:

$\mathcal{T} = \{\text{unions d'intersect. finies d'éléments de } S\}$

On note $\mathcal{T} = \mathcal{T}_S$, la topo engendrée par S

Ex: 1) Soit $(X, \mathcal{T}_{disc})$, il admet une base $B = \{\{x\} \mid x \in X\}$

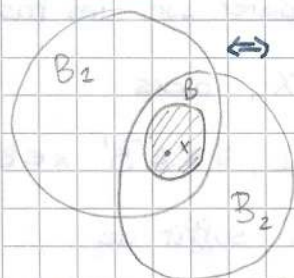
"une sorte de base minimale"

2) $(X, \mathcal{T}_{triv})$, admet la base $B = \{X\}$

Ex:

3) $(X, \mathcal{P}_X)$ admet la ss-base $\mathcal{S} = \{X \setminus \{x\} \mid x \in X\}$ 4) Un esp. métrique (X, d) admet la base $\mathcal{B} = \{B(x, r) \mid x \in X, r > 0\}$
alors $\mathcal{T}_d$ Preuve: Soit $\mathcal{U} \in \mathcal{T}_d$, p. déf: $\forall x \in \mathcal{U}, \exists \varepsilon_x > 0$ tq $B(x, \varepsilon_x) \subset \mathcal{U}$ Affirmation: $\mathcal{U} = \bigcup_{x \in \mathcal{U}} B(x, \varepsilon_x)$ (ce qui démontre $\mathcal{B}$ une base)En effet: $\square \mid \forall x \in \mathcal{U}, B(x, \varepsilon_x) \subset \mathcal{U} \Rightarrow$ l'union aussi $\square \mid \forall x \in \mathcal{U}, x \in B(x, \varepsilon_x) \Rightarrow x$ est dans l'union des boules $\square$ P. Ex: les boules euclidiennes forment une base de $\mathcal{T}_{std}$ sur $\mathbb{R}^n$.Rem: Toute famille $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ n'est pas la base d'une topo!

Voici les conditions:

Prop. 1.6: Soit X un ens, un ss-ens $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ est la base d'une topo sur X 

$$\Leftrightarrow 1) \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B = X$$

$$2) \forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}, \forall x \in B_1 \cap B_2, \exists B \in \mathcal{B} \text{ tq } x \in B \subset B_1 \cap B_2$$

Preuve: $\Rightarrow$ Soit $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ qui est la base d'une topo, i.e. $\mathcal{T} = \{\bigcup_{i \in I} B_i \mid B_i \in \mathcal{B} \forall i \in I\}$ i) On a $X \in \mathcal{T}$ par déf, d'où $\{B_i\}_{i \in I}$ avec $B_i \in \mathcal{B} \forall i$

$$\text{et } X = \bigcup_{i \in I} B_i \Rightarrow X = \bigcup_{i \in I} B_i \subset \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B \subset X \Rightarrow X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$$

ii) Soient $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, $\mathcal{B} \subset \mathcal{T} \Rightarrow B_1, B_2 \in \mathcal{T} \Rightarrow B_1 \cap B_2 \in \mathcal{T}$

$$\Rightarrow B_1 \cap B_2 \text{ est union d'éléments de } \mathcal{B} \Rightarrow \forall x \in B_1 \cap B_2$$

$$\exists B \in \mathcal{B} \text{ tq } x \in B \subset B_1 \cap B_2, \text{ i.e. pt (ii)}$$

 $\Leftarrow$ Voir polycopié (facile) $\square$

Ex: $\{B_d(x, r) \mid x \in X, r > 0\}$ est une base de (X, d)

Cor: $S \subset \mathcal{P}(X)$ est une ss-base d'une topologie sur $X \iff X = \bigcup_{\mu \in S} \mu$

Dém: $\Rightarrow$ Trivialement $X \supset \bigcup_{\mu \in S} \mu$ et S est une ss-base d'une topologie $\mathcal{T}$, donc $\forall T \in \mathcal{T}$ est une union d'intersections finies d'éléments de S . En particulier c'est vrai pour $T = X$. Donc $X \subset \bigcup_{\mu \in S} \mu$
 $\Rightarrow X = \bigcup_{\mu \in S} \mu$

$\Leftarrow$ $S \subset \mathcal{P}(X)$ avec $\bigcup_{\mu \in S} \mu = X$, $\mathcal{B} := \{ \text{intersect finies de ss-ens de } S \}$

On a $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$, on mq $\mathcal{B}$ est une base d'un $\mathcal{T}$ sur X

par la proposition. 1) est satisfait pour $\mathcal{B}$, car il l'est pour S et $S \subset \mathcal{B}$

$$2) B_1, B_2 \in \mathcal{B}, B_1 \cap B_2 = \bigcap_{i \in I} \mu_i \cap \bigcap_{j \in J} \mu_j \quad |I|, |J| < \infty$$

$$\mu_i \in S, \mu_j \in S$$

$B_1 \cap B_2$ est aussi $\cap$ d'un # fini d'éléments de $S \Rightarrow B_1 \cap B_2 \in \mathcal{B}$
 $\square$

Rem: 1) Pour comparer 2 topologies, il suffit de les comparer sur des bases:

si $\mathcal{B}, \mathcal{B}' \subset \mathcal{P}(X)$ deux bases de topo dans X , alors

$$\mathcal{T}_{\mathcal{B}'} \supset \mathcal{T}_{\mathcal{B}} \iff \forall x \in X \text{ et } \forall B \in \mathcal{B} \text{ tq } x \in B, \exists B' \in \mathcal{B}' \text{ tq } x \in B' \subset B$$

2) Pour vérifier si $f: X \rightarrow Y$ est continue, il suffit de vérifier cela pour une ss-base.

f est continue pour $\mathcal{T}_S$ sur $Y \iff f^{-1}(\mu)$ est ouvert dans X
 $\forall \mu \in S$

Déf: On dit que $f: X \rightarrow Y$ est ouverte si $f(\mu)$ est un ouvert de Y $\forall \mu \subset X$ ouvert

3) $f: X \rightarrow Y$ est ouverte $\iff f(B)$ est ^{un} ouvert de Y $\forall B \in \mathcal{B}$
 avec $\mathcal{B}$ une base de X .

Déf: X esp. topo, $x \in X$. Une collection de voisinages de x $\mathcal{B}_x$ est dite une base de voisinage de x si $\forall V$ voisinage de $x \exists B \in \mathcal{B}_x$ tq $x \in B \subset V$

Ex: $\mathcal{B}_x = \{ B_d(x, r) \mid r > 0 \}$

Ch. 5 Topo produit et quotient

1. Produit :

Rappel: Des notions de la théorie des ensembles

1) $\{X_i\}_{i \in I}$ une collection d'ensembles, on associe à $\{X_i\}_{i \in I}$

le produit cartésien des ensembles X_i : $\prod_{i \in I} X_i$

où $\prod_{i \in I} X_i := \{ x : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} X_i \mid x(i) \in X_i \forall i \in I \}$

$\forall j \in I$ on a $\pi_j : \prod_{i \in I} X_i \rightarrow X_j$ la projection sur la j ème coordonnée
 $x \mapsto x(j) = x_j$

Alors on peut écrire $\prod_{i \in I} X_i = \{ (x_1, x_2, \dots) \mid x_i \in X_i \forall i \in I \}$
 $= \{ (x_i)_{i \in I} \mid x_i \in X_i \}$ $I = \{1, 2, \dots\}$

Ex: Produit direct de groupes vu au à voir en Algèbre II :
 produit cartésien avec structure de groupe.

Déf: On définit $S \subset \mathcal{P}(X)$ par $S = \{ \pi_j^{-1}(\mathcal{U}_j) \subset X \mid j \in J, \mathcal{U}_j \in \mathcal{C}_j \}$

$\pi_j^{-1}(\mathcal{U}_j) = \mathcal{U}_j \times \prod_{i \in I \setminus \{j\}} X_i$. S est une sous-base de X ,

d'après le cor. de ch 4. On note $\mathcal{C}_S$ la topo sur X donnée

par la sous-base S . On l'appelle la topologie produit sur $X = \prod_{i \in I} X_i$

$\mathcal{C}$ est la topo la moins fine sur X pour laquelle toutes les

projections $\pi_j : \prod_{i \in I} X_i \rightarrow X_j$ sont continues.

S sous-base $\mapsto$ base $\mathcal{B}$ de la topo produit $\mathcal{B} = \{ \prod_{i \in J} \mathcal{U}_i \times \prod_{i \in I \setminus J} X_i \mid$

$J \subset I, |J| < \infty, \mathcal{U}_i \in \mathcal{C}_i \forall i \in J \}$

$\mathcal{C} = \{ \bigcup \mathcal{U}_i : \mathcal{U}_i \in \mathcal{B} \}$

Rem: On peut aussi considérer sur $X = \prod_{i \in I} X_i$ une autre topologie naturelle appelée topologie des boîtes, définie comme suit:

$$\mathcal{P}(X) \supset \mathcal{B}' := \left\{ \prod_{i \in I} U_i \mid U_i \in \mathcal{U}_i \forall i \in I \right\} \rightsquigarrow \mathcal{U}_{\mathcal{B}'} \text{ topo des Bts}$$

alors $\mathcal{U}_{\mathcal{B}} \subset \mathcal{U}_{\mathcal{B}'}$ (+ fine)

Ex: qui mq dans $\mathcal{U}_{\mathcal{B}'}$ il y a trop d'ouvert

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \quad (\mathbb{R}, \mathcal{U}_{\text{std}}) \text{ et } (\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{U}_{\mathcal{B}'})$$

$$t \longmapsto (t, t, \dots)$$

$$\forall i \in \{1, \dots, \underset{\mathbb{N}}{\infty}\}, U_i = (-\frac{1}{i}, \frac{1}{i}) \subset \mathbb{R}; \quad U = \prod_{i \in \mathbb{N}} U_i \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$$

$$U = (-1, 1) \times (-1/2, 1/2) \times \dots$$

$$f^{-1}(U) = \left\{ t \in \mathbb{R} : t \in U, \forall i \in \mathbb{N} \right\} = \{0\}$$

$\uparrow$ $U \in \mathcal{U}_{\mathcal{B}'}$
 $\uparrow$ pas ouvert.

Donc dans la topo des boîtes, f n'est pas continue, par contre on peut voir qu'elle est continue sur la topo produit.

Rem: $\triangle$ Si on est en présence de $|I| < \infty$ alors $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$ et donc topo produit = topo des boîtes $\triangle$

(Dans $\mathbb{R}^n$ $\mathcal{U}_{\mathcal{B}} = \mathcal{U}_{\mathcal{B}'} = \mathcal{U}_{\text{std}}$ avec une base

$$A = \left\{ B_{\text{box}}(x, r) = (x_1 - r, x_1 + r) \times \dots \times (x_n - r, x_n + r) \mid r > 0, x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \right\}$$

ici: $d_{\infty}(x, y) = \max_{i=1, \dots, n} |x_i - y_i|$

2. Quotient:

Rappel: X un ensemble, $R \subset X \times X$ est une rel. d'équivalence si

$$1) (x, x) \in R \quad \text{ou} \quad x \sim x$$

$$2) x \sim y \Rightarrow y \sim x$$

$$3) x \sim y \text{ et } y \sim z \Rightarrow x \sim z$$

On considère $X/\sim$ l'ensemble quotient de X par R

$$X/\sim := \{ [x] \mid x \in X \} = \{ \text{classe d'équiv} \}$$

$$\forall x \in X \quad [x] = \{ y \in X \mid x \sim y \} \quad \text{et} \quad X = \bigsqcup_{x \in X} [x]$$

(partition de X en classe d'équivalence)

$$\pi: \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & X/\sim \\ x & \longmapsto & [x] \end{array} \quad \text{projection (ie surjective)}$$

Si $f: X \rightarrow Y$ une application tq $f(x) \sim f(y)$ si $x \sim y$

alors f passe au quotient dans le sens qu'on a une

$$\text{application } \bar{f}: X/\sim \longrightarrow Y \quad \text{bien définie}$$

$$[x] \longmapsto f(x)$$

$$\text{On a alors } f = \bar{f} \circ \pi$$

Ex: $A \subset X$ induit une rel. d'équiv: $x \sim_A y \Leftrightarrow x = y \text{ ou } x, y \in A$

$X/\sim_A$ = identifier tous les points de A en un seul pt.

$$X = [0, 1], \quad A = \{0, 1\}$$

$$f: \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & S^1 \\ t & \longmapsto & e^{2\pi i t} \end{array}$$

$$f(t) = f(t') \Leftrightarrow t \in A$$

f passe au quotient X/A : $\bar{f}: \frac{[0, 1]}{\{0, 1\}} \longrightarrow S^1$ une bijection.

Déf: Topologie quotient : X esp. topo. R rel d'équi sur X
 $U \subset X/\sim$ est ouvert si $\pi^{-1}(U)$ est ouvert dans X
 où $\pi: X \rightarrow X/\sim$ est la projection sur le quotient.

C'est la topo la moins fine sur $X/\sim$ dans laquelle la projection π est continue

$$\mathcal{C}_q = \{U \subset X/\sim \mid \pi^{-1}(U) \in \mathcal{C}_X\}$$

Alors si $f: X \rightarrow Y$ est continue tq $f(x) = f(y) \Leftrightarrow x \sim y$

alors $\bar{f}: X/\sim \rightarrow f(X)$ est une bijection continue.

$\uparrow$ $\downarrow$ $\uparrow$ $\downarrow$
 $[x] \mapsto x$ $x \mapsto [x]$
 passe au quotient

le 24.10.18

Rem: • $\bar{f}: X/\sim \rightarrow Y$ est surjective sur $f(X)$
 $[x] \mapsto x$

• $\bar{f}$ est injective si $f(x) = f(y) \Leftrightarrow x \sim y$

• On peut à partir de f tq ci-dessus définir $g: X/\sim \rightarrow f(X)$ une bijection.

• Si f est de + continue de $X \rightarrow Y$ deux esp. topo alors g est une bijection continue.

En effet: $U \subset f(X)$ ouvert, $g^{-1}(U) \subset X/\sim$ est ouvert ssi

$\pi^{-1}(g^{-1}(U)) \subset X$ ouvert or $\pi^{-1}(g^{-1}(U)) = (g \circ \pi)^{-1}(U) = f^{-1}(U)$ ouvert dans X car f continue.

$$\pi \circ g = f \quad \text{ou} \quad \bar{f} \circ \pi = f$$

Ex: 1) $X = [0,1]$, $A = \{0,1\}$ on note $x \sim y \Leftrightarrow x, y \in A$

$$X/\sim = X/A = [0,1]/\{0,1\}$$

On aq $[0,1]/\{0,1\} \simeq S^1$ cercle

soit $f: [0,1] \rightarrow S^1$ alors $f(x) = f(y) \Leftrightarrow \{x, y\} = \{0, 1\}$
 $t \mapsto e^{2\pi i t}$

donc on a une bijection $g: [0,1]/\{0,1\} \rightarrow S^1$

f est continue $\Rightarrow g$ est continue, mq g est un homéom.

Géom II:

Ex: (Suite) 1) Rappel: on a déjà un f comme homéo $(0,1) \rightarrow S^1 \setminus \{1,0\}$
 on a aussi $g: [0,1] \rightarrow S^1$ on a constaté
 que g est une bij. continue, mais g n'est pas
 un homéo car g n'est pas ouverte.

* $g([0, 1/4)) =$  n'est pas un ouvert de S^1

Si on considère $f: [0,1] \rightarrow S^1$ ce n'est pas bijectif

En quotientant par $\{0,1\}$ où f n'est pas injective
 on aurait un homéomorphisme.

On doit voir que g est ouverte.

Soit $U \subset X/\sim$ ouvert : $g(U)$ ouvert ?

$U \subset X/\sim$ ouvert $\Leftrightarrow \pi^{-1}(U) \subset (0,1)$ ouvert

$g(U) = f(\pi^{-1}(U))$ ouvert ?

Notons que f n'est pas ouverte (*), mais néanmoins

on mq $f(\pi^{-1}(U))$ est ouvert $\forall U \subset X/\sim$ ouvert.

Vérifions cela:

Soit $z \in f(\pi^{-1}(U))$ on mq z est contenu avec voisinage

ce qui est suffisant. $z = e^{2\pi i t}$ avec $t \in \pi^{-1}(U)$ alors

si $t \neq 0,1$, $\exists \varepsilon > 0$ tq $(t-\varepsilon, t+\varepsilon) \subset \pi^{-1}(U) \cap (0,1)$

alors $f(t-\varepsilon, t+\varepsilon) \subset S^1$  ouvert

or $f(t-\varepsilon, t+\varepsilon)$ est un voisinage de $z \in f(\pi^{-1}(U))$

si $t = 0,1$, $\pi^{-1}(U)$ contient forcément les pts 0 et 1

alors $\pi^{-1}(U) \supset [0, \varepsilon) \cup (1-\varepsilon, 1]$ et

$f([0, \varepsilon) \cup (1-\varepsilon, 1])$ est un voisinage de $z \in S^1 \subset f(\pi^{-1}(U))$

□

Rem: Cet exemple se généralise en toute dimension $n \geq 1$.

$$D^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$$

le rayon et le centre n'importe pas !

$$\partial D^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\} = S^{n-1}$$

De même si on prend le carré à la place du disque

$$D^1 = [-1, 1] \quad \partial D^1 = \{-1, 1\}$$

$$D^n / \partial D^n \cong S^n \quad (\text{on a mg } D^n / \partial D^n \cong S^n)$$

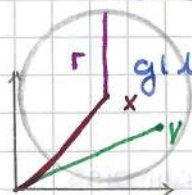
Ex: 2) $X = (\mathbb{R}^2, \mathcal{C}_{\text{std}})$ $(x_1, x_2) \sim (y_1, y_2) \Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 = y_1^2 + y_2^2$
 $x \sim y \Leftrightarrow \|x\|^2 = \|y\|^2$

$$(X/\sim, \mathcal{C}_{\text{quotient}}) \cong [0, +\infty) \text{ ou } \mathbb{R}^+ \text{ muni de } \mathcal{C} \text{ induite par } (\mathbb{R}^2, \mathcal{C}_{\text{std}})$$

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \quad x \longmapsto \|x\| \quad g: \mathbb{R}^2/\sim \longrightarrow [0, +\infty) \text{ est une bijection continue.}$$

Est-ce que g est un homéom. ? $\Leftrightarrow$ Est-ce que g^{-1} continue ? $\Leftrightarrow$ Est-ce que g ouverte ?

Si $\pi^{-1}(U)$ est ouvert de X , est-ce que $g(U)$ ouvert ?



$$g(U) = f(\pi^{-1}(U)) \text{ si } f \text{ est ouvert} \Rightarrow g \text{ ouvert} \Rightarrow g \text{ homéom.}$$

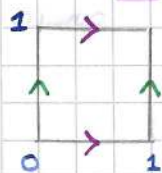
condition suffisante
mais pas nécessaire

$$\text{Vérifions cela sur une base } f(B(x, r)) = \begin{cases} (\|x\| - r, \|x\| + r) & \text{si } \|x\| \geq r \\ [0, \|x\| + r) & \text{si } \|x\| < r \end{cases}$$

$(\|x\| - r, \|x\| + r)$ et $[0, \|x\| + r)$ sont des ouverts de $[0, +\infty)$

donc f est ouverte.

3) $X = [0, 1] \times [0, 1]$ avec $(x, 0) \sim (x, 1)$ et $(0, y) \sim (1, y)$



$$X/\sim \cong S^1 \times S^1 \text{ un tore}$$

$$\text{Cela se montre en posant } f: [0, 1] \times [0, 1] / \sim \longrightarrow [0, 1] / \{0, 1\} \times [0, 1] / \{0, 1\}$$

C'est un exemple de recollement.

Chapitre 6: Suites et Limites:

Rap: Une suite d'éléments d'un ensemble X (une suite dans X)
est une applic. $\mathbb{N} \rightarrow X \quad n \mapsto x_n$ Notation: $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ou $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$

On veut définir la conv. d'une suite dans $(X, \mathcal{C})$ quelconque.

Déf: $(X, \mathcal{C})$ esp. topo, soit $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans X .
 $x \in X$ est dit "limite" de la suite $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ si $\forall \mathcal{U} \in \mathcal{C}$
tq $x \in \mathcal{U} \quad \exists N \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq N, x_n \in \mathcal{U} \quad (x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x)$

Ex: Si X est (X, d) esp. métrique on retrouve: $x_n \rightarrow x$
 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq N \quad d(x, x_n) < \varepsilon \quad x_n \in B(x, \varepsilon)$

Prop: Si $\mathcal{B}_x$ est une base de voisinage de $x \in X$, alors $x_n \rightarrow x$
 $\Leftrightarrow \forall B \in \mathcal{B}_x \quad \exists N$ tq $\forall n \geq N, x_n \in B$

Dém: $\Leftarrow$ Soit $x \in \mathcal{U} \in \mathcal{C}$, $\mathcal{B}_x$ base de vois $\Rightarrow \exists B \in \mathcal{B}_x$ tq $B \subset \mathcal{U}$
On sait que $x_n \in B \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow x_n \in \mathcal{U}$, donc $x_n \rightarrow x$
 $\Rightarrow$ Soit $\mathcal{B}_x$ une base de voisinage de x . $\forall B \in \mathcal{B}_x$ est voisinage
de $x \Rightarrow B$ contient x avec un ouvert: $\exists \mathcal{U} \in \mathcal{C}$ tq $x \in \mathcal{U} \subset B$
Car $x_n \rightarrow x, \exists N$ tq $\forall n \geq N, x_n \in \mathcal{U} \Rightarrow x_n \in B$ $\square$

Rem: Si $\mathcal{S}$ est une ss-base de topo dans X , alors $x_n \rightarrow x$ dans X
 $\Leftrightarrow \forall s \in \mathcal{S} \quad \exists N$ tq $\forall n \geq N \quad x_n \in s$

NB! La limite n'est pas forcément unique!

Ex: $(X, \mathcal{C}_{\text{triv}})$ alors $\forall \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \forall x \in X \quad x_n \rightarrow x$

Propriété topo se transmet
dans les homéom.

Déf: Un espace topologique est dit séparé (ou Hausdorff ou T_2)

si $\forall x, y \in X, x \neq y, \exists U, V \in \mathcal{C}$ tq $U \cap V = \emptyset$ et
 $x \in U$ et $y \in V$

Ex: (X, d) est séparé : U, V boules de rayon $d(x, y)/3$ autour de x et y .

$\equiv$ Hausdorff = T_2

Prop1: Si X est séparé et $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans X

$x_n \rightarrow x$ et $x_n \rightarrow y \Rightarrow x = y$ (unicité de la limite)

Preuve: Supposons $x_n \rightarrow x$ et $x \neq y$. On mq $x_n \rightarrow y$

X séparé $\Rightarrow \exists U, V \in \mathcal{C}$ tq $U \cap V = \emptyset$ $x \in U, y \in V$

$x_n \rightarrow x \Rightarrow \exists N, \forall n > N, x_n \in U$ mais $U \cap V = \emptyset$

$\Rightarrow \forall n > N, x_n \notin V \Rightarrow x_n \not\rightarrow y$

Rem: $X \cong Y$ alors X séparé $\Leftrightarrow Y$ séparé

le 31.10.18

Ex: $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ (Un esp topo séparé n'implique pas que le quotient l'est)

Observation: La réciproque de prop. 1 n'est pas vraie en général.

Ex: X ens. non-dénombrable muni de topo codénombrable

$\mathcal{C}_{\text{dén}} = \{U \subset X \mid X \setminus U \text{ dénombrable}\} \cup \{\emptyset\}$

$(X, \mathcal{C}_{\text{dén}})$ avec X non-dénombrable $\Rightarrow$ pas séparé car l'intersection
de 2 ouverts est toujours non-vide

D'autre part, cet espace a l'unicité de la limite.

En effet, soit $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans X avec $x_n \rightarrow x \in X$

$\{x_n\}$ est dénomb $\Rightarrow X \setminus \{x_n\}$ ouvert, alors $(X \setminus \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}) \cup \{x\}$
est aussi ouvert et il contient x . Par déf de convergence

$\exists N$ tq $\forall n > N, x_n \in (X \setminus \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}) \cup \{x\}$.

Donc $x_n = x \forall n > N$. Donc les seules suites convergentes dans X

sont stationnaires.

Géom II:

Rem: Autre exemple d'esp. où toute suite convergente est stationnaire
est tout $(X, \mathcal{T}_{disc})$ $x_n \rightarrow x \Rightarrow x_n = x_n = x \quad \forall n > N$

Rem: Si toute suite conv. est stationnaire, on a que la limite est unique pour toute suite conv.

On va voir encore deux notions liées :

"Être séquentiellement fermé" et "Être séquentiellement continu"

Prop 2: X esp. topo, $F \subset X$, F fermé $\Leftrightarrow$ toute limite d'une suite d'éléments de F est aussi dans F . = F séq. fermé

Déf: $A \subset X$, on dit que A est séquentiellement fermé si $A = A'$
où $A' := \{x \in X : x \text{ est limite d'une suite } \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}, x_n \in A \quad \forall n\}$

adhérence
séquentielle

- On a toujours $A \subseteq A'$ (ex: suite stationnaire)
- $A' \subseteq A$ n'est pas toujours vérifié : (ex: une boule ouverte)

Dém: Rappel: F fermé $\Leftrightarrow F = \bar{F}$ où $\bar{F} = \{x \in X : X \setminus F \text{ pas vois de } x\}$

Pour mq F fermé $\Rightarrow F$ séq. fermé, il suffit de mq

$F' \subset \bar{F}$, en effet on a tjrs que $F \subset F'$ et si on mq

$F' \subset \bar{F} = F$ car F fermé alors on a $F' = F$

Montrons la contraposé: $x \notin \bar{F} \Rightarrow x \notin F'$

$\exists X \setminus F$ voisinage de x

$\Rightarrow \exists U$ ouvert, $x \in U$ tq $U \subset X \setminus F$

si $\{x_n\}$ est une suite avec $x_n \in F \quad \forall n$, alors on a $x_n \notin U \quad \forall n$

alors $x_n \not\rightarrow x$, $x \notin F'$ □

Obs: La réciproque n'est en général pas satisfaite.

Ex: $(X, \mathcal{T}_{dén})$, X non-dénom. Car toute suite conv est stationnaire
tout $A \subset X$ est séq. fermé. Mais pas tout sous-ens de X p. 27
est fermé p.ex: $X \setminus \{x\}$ n'est pas fermé car pas dénom.

Rem: Dans la topo dénombrable les ouverts sont les compléments des ens. dénombr. et donc les fermés sont des ens. dénombrables.

Prop 3: Si $f: X \rightarrow Y$ appl. cont. entre 2 esp. topo. Alors toute suite $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dans X , avec $x_n \rightarrow x \in X$, on a $f(x_n) \rightarrow f(x)$ dans Y .
 $\Downarrow$
Séquentiellement continue

Dém: Vérifions que $f(x_n) \rightarrow f(x)$

Prenons $V \subset Y$ un ouvert, $f(x) \in V$, $f^{-1}(V)$ est un vois de x dans X .

$\exists U \in \mathcal{C}_x$ $x \in U$ tq $U \subset f^{-1}(V)$ car $x_n \rightarrow x$, $\exists N$ tq $\forall n \geq N$
 $x_n \in U \Rightarrow f(x_n) \in f(U) \subset V \quad \forall n \geq N \Rightarrow f(x_n) \rightarrow f(x)$.

Obs: La réciproque n'est en générale pas vraie.

Ex: $\text{id}: (X, \mathcal{C}_{\text{dén}}) \rightarrow (X, \mathcal{C}_{\text{dis}})$ et X -non-dénombrable.

Cette appl. est séq. continue, car les seules suites conv. dans $(X, \mathcal{C}_{\text{dén}})$ sont stationnaires.

Cette appl n'est pas cont car $\text{id}^{-1}\{x\} = \{x\}$ pas ouvert.

On va maintenant introduire une condition sur X esp topo qui assurera la réciproques de prop. 1,2,3 comme vraies.

Déf: On dit qu'un esp. topo X est à base dénombrable de voisinages ("first countable", 1^{er} axiome de dénombrabilité) si $\forall x \in X$ possède une base $\beta_x = \{B_n^x\}_{n \in \mathbb{N}}$ dénom. de voisinage.

Rem: On étudie en topo plus généralement plusieurs prop. de séparation et de dénombrabilité qui s'appellent les axiomes de sép. et les axiomes de dénom.

être séparé = 2^{ème} axiome de séparation.

Ex: 1) Ex esp à base dénombrable de voisinage

(X, d) esp métrique, $\forall x \in X$ $B_n = B(x, \frac{1}{n})$, $\{B_n\}$ base de voisinage de x dénombr.

2) Ex esp pas à base de vois dénom.

$(X, \mathcal{C}_{\text{dén}})$ avec X non-dénombrable

En effet: (absurde)

soit $x \in X$, $\mathcal{B}_x$ une base dén. de vois. de x

Supposons que $\mathcal{B}_x = \{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$

On peut supposer B_n ouvert $\forall n$, alors $X \setminus B_n$ dénombrable

Alors $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (X \setminus B_n)$ est dénombr. $\Rightarrow X \setminus A$ est ouvert et non-dénombrable.

Donc $\exists y \in X \setminus A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n \ni x$
 $\neq \{x\}$ ($X \setminus A$ ouvert et $\{x\}$ pas ouvert)

Donc on peut prendre $y \neq x$ $y \in X \setminus A$

Alors $X \setminus A \setminus \{y\}$ est vois de x mais $y \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n$

$\Rightarrow \forall n$ $X \setminus A \setminus \{y\}$ ne contient pas B_n

Donc $\{B_n\}$ n'est pas une base de vois de x

Contradiction avec hyp de départ.

Thm: Soit X esp. topo à base de voisinage dénombrable. Alors

- 1) X est séparé $\Leftrightarrow$ toute suite convergente possède une unique limite
- 2) $F \subset X$ est fermé $\Leftrightarrow F$ est séq. fermé
- 3) $f: X \rightarrow Y$ appl cont $\Leftrightarrow f$ est séq. continue

Rem: la prop. 2) nous dit que la topo d'un esp à base de vois dén. est complètement déterminée par la convergence.

En général, ce n'est pas vrai, comme on a vu avec l'ex d'un ens. X - non - dén. $(X, \mathcal{C}_{\text{dén}}) \neq (X, \mathcal{C}_{\text{disc}})$ mais les suites conv. dans les topo sont les mêmes. (Stationnaire)

Lemme: Soit X à base dén de vois. Alors $\exists$ base $\forall x \in X \mathcal{B}_x = \{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ avec B_n ouvert $B_{n+1} \subset B_n$ (base décroissante). De plus toute suite $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ avec $x_n \in B_n$ on a $x_n \rightarrow x$

Dém: (lem)

Soit $x \in X$, par condition $\exists$ une base de x $\{B'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$

$\forall B'_n$ est un vois de $x \Rightarrow \exists$ un ouvert $x \in B'_n \subset B''_n$

et on définit $B_n = \bigcap_{i=1}^n B'_i$, on a $\{B_n\}$ base de vois de x
 B_n ouvert $\forall n$, $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ décroissante.

On a vu au début de §6, si $\mathcal{B}_x$ base de x , $x_n \rightarrow x \Leftrightarrow$

$\forall B \in \mathcal{B}_x \exists N$ tq $\forall n > N, x_n \in B$.

Ici, soit $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tq $x_n \in B_n$

Car $B_n \subset B_m \forall n > m$, on a que $\forall n \in \mathbb{N} \forall k > n, x_k \in B_n$

Donc $x_n \rightarrow x$



Dém: (TAm)

- 1) $\Leftarrow$ Par contrap: Supposons X non séparé et mq $\exists \{x_n\}$ avec $x_n \rightarrow x$ et $x_n \rightarrow y$ $x_n \rightarrow x$
 X non séparé $\Leftrightarrow \exists x \neq y \in X$ tq $\forall U, V \in \mathcal{C}$ tq $x \in U, y \in V, U \cap V \neq \emptyset$
Car X est à base de vois dén, par lemme, on a $\{B_n^x\}_{n \in \mathbb{N}}$ et $\{B_n^y\}_{n \in \mathbb{N}}$
base de vois. ouvert, décroiss. Alors car X pas séparé $\forall n, B_n^x \cap B_n^y \neq \emptyset$
Donc $\exists x_n \in B_n^x \cap B_n^y \forall n \in \mathbb{N}$, par lemme, $x_n \rightarrow x$ et $x_n \rightarrow y$

- 2) $\Leftarrow$ Il suffit de mq $\bar{A} \subset A'$, soit $x \in \bar{A} \Leftrightarrow \forall U \ni x, U \cap A \neq \emptyset$, soit $\{B_n^x\}$
base de vois. de x décroiss., ouvert, par lemme.
 $x \in B_n$ ouvert $\Rightarrow B_n \cap A \neq \emptyset \Rightarrow \exists x_n \in B_n \cap A$, x_n suite de $y \in A$ et $x_n \rightarrow x$
Donc $x \in A' \Rightarrow \bar{A} \subset A'$ p. 30

Ch 7 Connexité :

Déf: X espace topo est connexe si $\forall U, V$ ouverts de X disjoints
est tq $U \cup V = X$, on a $U = \emptyset$ ou $V = \emptyset$

($\Leftrightarrow$ Pas de partition de X en 2 ouverts non-vide)

reformulations
équivalentes

$\hookrightarrow X = U \cup V$ et $U \cap V = \emptyset$

($\Leftrightarrow X$ est connexe $\Leftrightarrow$ les seuls ss-ensembles de X à la fois ouverts et fermés sont $\emptyset$ et X)

En effet : si $U \subset X$, alors $X = U \sqcup X \setminus U$

donc U ouvert $\Leftrightarrow X \setminus U$ fermé

$\Leftarrow$: Si U est fermé et ouvert, alors $X = U \sqcup X \setminus U$
est une partition en 2 ouverts et donc X
connexe $\Leftrightarrow U = X$ ou $\emptyset$.

$\Rightarrow$: Si pour toute partition $X = U \cup V$ et $U \cap V = \emptyset$
soit U soit V sont $\emptyset$ alors $X \setminus U \neq \emptyset$, X
ouvert ne peut pas être fermé sinon
 $X = U \cup X \setminus U$ contredit l'hypothèse.

Ex :

- $(X, \mathcal{E}_{\text{triv}})$ connexe
- $(X, \mathcal{E}_{\text{disc}})$ non-connexe

} $|X| > 1$

On peut parler d'un ss-esp. connexe d'un esp. topo ceci avec
la topo induite.

Rappel : $Y \subset X$, esp. topo $(Y, \mathcal{E})$, ouvert dans Y sont de la forme
 $U \cap Y$, où $U \in \mathcal{E}$

Déf: $Y \subset X$, X esp. topo, alors Y connexe $\Leftrightarrow \underline{U \cap Y \cap V = \emptyset}$
 et $Y = U \cap Y \cup V \cap Y = (U \cup V) \cap Y \Rightarrow \underline{Y \subset U \cup V}$
 par $U, V \in \mathcal{C}_X$, alors $U \cap Y = \emptyset$ ou $V \cap Y = \emptyset \Rightarrow \underline{Y \subset U}$ ou $\underline{Y \subset V}$

Ex: $[-1, 0) \cup (0, 1] \subset \mathbb{R}$ non-connexe

Prop 1: X esp. topo, $A \subset X$ est connexe. Alors $\forall B$, tq $A \subseteq B \subseteq \bar{A}$
 B est aussi connexe.

Preuve: Soit $U, V \subset X$ 2 ouverts tq $U \cap V \cap B = \emptyset$ et $B \subset U \cup V$
 à voir: $B \subset U$ ou $B \subset V$

on sait que A est connexe $A \subset B \Rightarrow$ comme $U \cap B \cap V = \emptyset$

on a $A \cap U \cap V \subset B \cap U \cap V = \emptyset \Rightarrow A \cap V \cap U = \emptyset$

D'autre part $A \subset B \subset U \cup V$ par connexité de A

$A \subset U$ ou $A \subset V$, sans perdre de généralité, il suffit de regarder
 1 seul cas. Supposons $A \subset U$ donc $A \cap V = \emptyset$.

Soit $x \in B \subset \bar{A}$. si $x \in V$ alors $x \notin \underbrace{X \setminus V}_{\text{fermé}} \supset A$

Mais $\bar{A} = \bigcap F$ tq F fermé et $A \subset F$ donc contradiction (3)

Conclusion: $x \notin V \Rightarrow x \in U \Rightarrow B \subset U$

Prop 2: Si $\{A_i\}_{i \in I}$ sont connexes, $A_i \subset X \forall i \in I$ esp. topo et si
 $\bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$ alors $\underbrace{\bigcup_{i \in I} A_i}_{= A}$ est connexe.

Preuve: Soit $x \in \bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$, Soient U, V ouverts de X tq
 $A \cap U \cap V = \emptyset$ et $A \subset U \cup V$ et on a $A \subset U$ ou $A \subset V$
 $x \in \bigcap_{i \in I} A_i \subset A \subset U \cup V \Rightarrow x \in U$ ou $x \in V$ car $A \cap U \cap V = \emptyset$
 s.p.d.g supposons $x \in U$, $\forall i \in I$ A_i est connexe, comme $A_i \subset A$
 on a $A_i \cap U \cap V = \emptyset$ et $A_i \subset U \cup V$, d'autre part $A_i \subset U$
 car $x \in A_i \subset U$, vrai $\forall i \in I \Rightarrow A \subset U$

Thm 1: $f: X \rightarrow Y$ application continue. Si X est connexe alors $f(X)$ est connexe.

Démo: (*) Si $f: X \rightarrow Y$ est continue alors $g: X \xrightarrow{x \mapsto f(x)} f(X)$ est continue

Preuve: $f(X) \subset Y$ et on le considère avec la topo induite. Alors on doit vérifier si $\forall U \subset f(X) =: Z$ ouvert $g^{-1}(U) \subset X$ ouvert dans X . $U = U' \cap Z$ où $U' \subset Y$ ouvert. $g^{-1}(U) = g^{-1}(U' \cap Z) = f^{-1}(U' \cap Z) = f^{-1}(U') \cap f^{-1}(Z)$
 $= f^{-1}(U') \cap X \Rightarrow g^{-1}(U)$ ouvert de X
 ↑ ouvert car f continue

Si $f(X)$ n'est pas connexe, alors $\exists U, V \subset Z$ 2 ouverts disjoints non-vides tq $Z = U \cup V$. g continue $\Rightarrow g^{-1}(U) \subset X$ et $g^{-1}(V) \subset X$ sont ouverts disjoints car $U \cap V = \emptyset$ et non-vide car g est surjective et $X = g^{-1}(U) \cup g^{-1}(V)$ car $Z = U \cup V$. Donc on obtient une partition de X en 2 ouverts disjoints non-vides $\Rightarrow X$ n'est pas connexe. $\square$

Remarque: A propos de prop. 2

$\{A_i\}_{i \in I}$ une famille de sous-esp. connexes tq $A_i \cap A_{i+1} \neq \emptyset$ $\forall i \in I$ alors $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ est connexe.

On le montre par récurrence avec au 1^{er} pas A_1, A_2 connexe $A_1 \cap A_2 \Rightarrow A_1 \cup A_2$ connexe par prop. 2

⚠ Prop 2 ne met pas de restriction sur $|I|$

Thm 2 : Un espace produit $X_1 \times \dots \times X_n$ est connexe ssi X_i $i=1, \dots, n$ sont connexes

- Rem :
- On montre par $n=2$ et on fait la route par récurrence
 - Le thm est aussi vrai pour $\prod_{i \in I} X_i$ avec $|I| = \infty$ mais uniquement avec topo produit.
 - Par contre $\prod_{i \in I} X_i$ avec topo des bâtes peut ne pas être connexe

Preuve : $\Rightarrow$ Pour $X_1 \times X_2$

$\Rightarrow$: $\pi_i : X \rightarrow X_i$ est continue et surjective donc par thm 1 X_i est connexe si X connexe.

$\Leftarrow$: Prenons $(a, b) \in X_1 \times X_2$

1) On a $X_1 \times \{b\} \subset X_1 \times X_2$, $X_1 \times \{b\} \cong X_1$

De même $\forall x \in X_1$, $\{x\} \times X_2 \cong X_2$

$$X_1 \times \{b\} \cap \{x\} \times X_2 = \{x\} \cap \{b\} = \{(x, b)\} \neq \emptyset$$

les 2 esp. connexes car homéo à X_1, X_2 connexes

$\Rightarrow$ prop 2 $T_x := X_1 \times \{b\} \cup \{x\} \times X_2$ est connexe $\forall x \in X_1$

$$\bigcap_{x \in X_1} T_x \ni (a, b) \stackrel{\text{prop 2}}{\Rightarrow} \bigcup_{x \in X_1} T_x = X_1 \times X_2 \text{ est connexe}$$

Ch 8 Connexité par arcs :

Thm : Tout intervalle (a, b) , $a, b \in \mathbb{R}$ est connexe.

Rem : $[a, b)$, $[a, b]$, $(a, b]$ sont connexes (ch7 prop 1) et $(-\infty, a)$, $(-\infty, a]$, $[b, +\infty)$, $(b, +\infty)$, $\mathbb{R}$ sont connexes (homéomorphisme)

Géom II:Preuve: Par l'absurdeOn suppose $\exists a, b \in \mathbb{R}$ tq (a, b) pas connexe,cela veut dire $\exists U', V' \subset \mathbb{R}$, $U' := (a, b) \cap U'$, $V' := (a, b) \cap V'$ et $(a, b) = U \cup V$, $U \cap V = \emptyset$ non-vide $\Rightarrow \exists u \in U$ $v \in V$ $v \neq u$ Sans p.d.g supposons $u < v$.

$$S := \{ s \in (a, b) : [u, s) \subset U \}$$

 $s_0 := u +$ petit majorant de S (Existe car S borné et $\mathbb{R}$ ordonné)Rap: $s \in \mathbb{R}$ est un majorant si $s' \leq s \forall s' \in \mathbb{R}$ So le + petit majorant $\Leftrightarrow S$ majorant de S alors $s_0 \leq S$ et $x > u$ D'autre part, $\forall x \in V$, x est un majorant de S , en effet,sinon on aurait $u < x < s \in S \Rightarrow x \in [u, s) \subset U$ et $x \in V$ donc contradiction.En particulier $v > u$ est majorant de S et on a donc

$$a < u \leq s_0 \leq s < b$$

En particulier, $s_0 \in (a, b) = U \cup V$, $s_0 \in U$ ou $s_0 \in V$ $\Rightarrow$ on va arriver à 1 contradiction.

$$1) s_0 \in U \Rightarrow \exists \varepsilon \text{ tq } (s_0 - \varepsilon, s_0 + \varepsilon) \subset U$$

en particulier $s_0 + \frac{\varepsilon}{2} \in S$, en contradiction avec s_0 majorant de S .

$$2) s_0 \in V \Rightarrow \exists \varepsilon \text{ tq } (s_0 - \varepsilon, s_0 + \varepsilon) \subset V$$

donc $\frac{s_0 - \varepsilon}{2} \in V \Rightarrow$ c'est un majorant $\exists$ avec s_0 le + petit majorant. $\square$ Cor: Théorème des valeurs intermédiairesSoit X connexe, $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ continue, $a, b \in X$. $\forall r \in \mathbb{R}$ entre $f(a)$ et $f(b)$ $\exists x \in X$ tq $f(x) = r$

Dém: Par absurde

$\exists r$ tq $f(a) < r < f(b)$ tq $f(x) \neq r \ \forall x \in X$ en autre termes
 $r \notin f(X)$.

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &:= f(X) \cap (-\infty, r) \\ \mathcal{V} &:= f(X) \cap (r, +\infty) \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} \mathcal{U} &:= f(X) \cap (-\infty, r) \\ \mathcal{V} &:= f(X) \cap (r, +\infty) \end{aligned}} \right\} \begin{array}{l} \text{ouverts de } f(X), \text{ disjoints, non-vide} \\ \text{et } f(X) = \mathcal{U} \cup \mathcal{V} \end{array}$$

On a $f(a) \in \mathcal{U}$ et $f(b) \in \mathcal{V}$

Donc $f(X)$ pas connexe $\rightarrow$ en contradiction avec thm 1 ch. 7
car X connexe et f continue.

1e 14. 11. 18

Déf: Soit X un espace topologique, $x, y \in X$. Un chemin de x à y
est une application continue $f: [a, b] \rightarrow X$ avec $[a, b] \subset \mathbb{R}$
où $f(a) = x$ et $f(b) = y$

Déf: Un espace topologique X est dit connexe par arcs si $\forall x, y \in X$
 $\exists$ un chemin dans X reliant x à y .

Rem: Si $X \simeq Y$ alors X connexe par arcs $\Leftrightarrow Y$ connexe par arcs

Dém: supposons X connexe par arcs, soient $y_1, y_2 \in Y$
il faut trouver un chemin de y_1 à y_2 dans Y .

$X \xrightarrow[\text{homéo}]{\varphi} Y$, X c.p.a. $\Rightarrow \exists f: [a, b] \rightarrow X$ reliant $\varphi^{-1}(y_1)$ à $\varphi^{-1}(y_2)$

$[a, b] \xrightarrow{f} X \xrightarrow{\varphi} Y$ alors $\varphi \circ f$ est un chemin dans Y

de y_1 à y_2 continue comme compo. de 2 fct continues.

Prop: X connexe par arcs $\Rightarrow X$ connexe

Dém: Absurde

X pas connexe $\Rightarrow \exists \mathcal{U}, \mathcal{V} \subset X$ ouverts non-vides, disjoints

tq $X = \mathcal{U} \cup \mathcal{V}$, $\exists x \in \mathcal{U}$, $\exists y \in \mathcal{V}$. X c.p.a. $\Rightarrow \exists$ un chemin de x à y
dans X , $f: [a, b] \rightarrow X$ $f(a) = x$ et $f(b) = y$

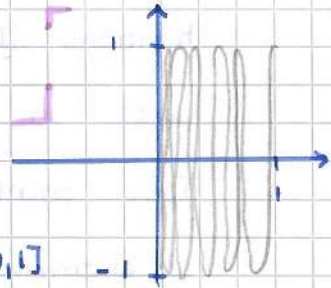
Dém: (Suite)

$$X \supset f([a,b]) = \underbrace{f([a,b]) \cap U}_{\text{ouvert de } f([a,b])} \cup \underbrace{f([a,b]) \cap V}_{\text{non-vides, disjoints}}$$

 $\Rightarrow f([a,b])$ est non-connexe $\rightarrow$ contradiction $\leadsto$

Rem: La réciproque n'est pas vrai en général

$$\text{Ex: } g: (0,1] \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t \mapsto (t, \sin \frac{1}{t})$$

le graphe de la fct réel $\sin \frac{1}{t}$ sur $(0,1]$ g est continue $\mathbb{R}^2 \ni g((0,1]) = X'$ on note $X = X' \cup \{(0,0)\} \subset \mathbb{R}^2$ X' est connexe car $(0,1]$ connexe et g continue $\overline{X'} \supset X \supset X'$ donc X est aussi connexe.

D'autre part, X n'est pas connexe par arc, car $\nexists$ chemin reliant $(0,0)$ à $(1, \sin 1)$ car la fct $\sin 1/t$ continue sur $(0,1]$ ne s'étend pas en une fct continue sur $[0,1]$.

Rem: On aurait pu prendre $\overline{X'} = X' \cup \{0\} \times [-1,1]$ comme un autre exemple ainsi que tout autre $\overline{X} \supset X \supsetneq X'$

Prop: X connexe par arcs $\Leftrightarrow X$ connexe et $\forall x \in X$ possède un voisinage connexe par arc.

Preuve: $\Rightarrow$ ok déjà fait

$\Leftarrow$ Fixons $x \in X$, considérons $U = \{y \in X : \exists \text{ chemin dans } X, \text{ de } x \text{ à } y\}$

Par mq X est c.p.a, il suffit de voir $U = X$

(En effet, si tout pt de X peut être lié à x par un chemin alors tout 2 pts peuvent être reliés entre

eux en passant par x)

Preuve: (Suite)

On montrera que U est ouvert et fermé. Alors comme X connexe, les seuls ouverts et fermés de X sont X et $\emptyset$, mais $U \neq \emptyset$ car $U \ni x$ par $f: [a,b] \rightarrow X$
 $f(t) = x \quad \forall t \in [a,b]$

Montrons U ouvert, en effet, $\forall y \in U$, lui appartient avec un voisinage de y qui est c.p.a. ($\exists$ par hypo)

Tout point d'un tel voisinage peut être lié par un chemin à y et ensuite on continue par un chemin de y à x ($\exists y \in U$)

Montrons maintenant que $X \setminus U$ ouvert (donc U fermé)

④ Tout pt $z \in X \setminus U$ est dans $X \setminus U$ avec voisinage
 $z \in X \setminus U \Leftrightarrow \nexists$ pas de chemin reliant z à x dans X .

Si ④ n'est pas vérifiée, $\exists z \in X \setminus U$ tq tout voisinage de z contient un point dans U

En particulier, un voisinage de z qui est connexe par arcs (un tel $\exists$ par hypothèse)

Notons $z' \in V \cap U$,

Alors z lié à z' par un chemin car V c.p.a.

et z' lié à x par un chemin car $z' \in U$

Alors on aurait un chemin reliant z à x (par z')

ce qui n'est pas possible car $z \in X \setminus U$

Donc U fermé

□

Cor: les seuls ss-ens. connexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles, les rayons et $\mathbb{R}$ (rayon: $[a, \infty)$)

Preuve: En effet, tout point de $\mathbb{R}$ possède un voisinage connexe par arc. ($[x-E, x+E]$) Donc un ss-ens de $\mathbb{R}$ est connexe par arc $\Leftrightarrow$ il est connexe, par la dernière proposition, car $X \subset \mathbb{R}$, alors $\forall x \in X$ possède un voisinage connexe par arc.
Les seuls ss-ens. connexes par arcs sont les intervalles, les rayons et $\mathbb{R}$ par le thm des val. intermédiaires.

Rem: Dans $\mathbb{R}^n$, les boules sont aussi connexes par arcs, mais aussi bien d'autres sous-intervalles. tout 2 pt sont reliés par un segment
Plus généralement, tout convexe ($\forall x, y \in A \quad tx + (1-t)y \in A \quad \forall t \in [0, 1]$) de $\mathbb{R}^n$ est connexe par arcs.
Il y a aussi des ss-ens non-convexe mais connexe par arcs

Ex: • $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ connexe par arc
• $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ " " " "

Cor: il n'y a pas d'homéom. (entre $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}$) $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ pour $n > 1$

Preuve: Supp $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ homéo.

Alors $f|_{\mathbb{R} \setminus \{0\}}: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{f(0)\}$ est aussi homéo

(par observation faite sur les restrictions de fct continue)

$\mathbb{R} \setminus \{0\}$ pas connexe mais $\mathbb{R}^n \setminus \{f(0)\}$ connexe $\nexists$

Rem: $\exists$ une applic. continue et surjective $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, la courbe de Peano

Cor: 2) Thm de pt fixe de Brouwer

Toute application continue d'une boule fermée à elle-même fixe un point.

$B^n \subset \mathbb{R}^n$, $f: \overline{B^n} \rightarrow \overline{B^n}$ continue, alors $\exists x \in \overline{B^n}$ tq $f(x) = x$

Démo: $n = 1$

On montre que tout $f: [0,1] \rightarrow [0,1]$ continue, $\exists x \in [0,1]$

tq $f(x) = x$. Pour cela, on définit $g(x) = f(x) - x$

On a $g(0) = f(0) - 0 = f(0) \geq 0$ sinon on a déjà $f(0) = 0$

$g(1) = f(1) - 1 \leq 0$ sinon on a déjà $f(1) = 1$

Par le thm des valeurs intermédiaires, $\exists x \in [0,1]$ tq $g(x) = 0$

$\Rightarrow f(x) = x$

□

Cor: 3) Thm

$f: S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ continue, alors $\exists x \in S^1$ tq $f(x) = f(-x)$

Démo: Définissons $g(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{\|f(x) - f(-x)\|} \in \{\pm 1\}$

$\forall x$ $g(-x) = \frac{f(-x) - f(x)}{\|f(-x) - f(x)\|} = -g(x)$ donc g est surjective sur $\{\pm 1\}$

$g: S^1 \rightarrow \{\pm 1\}$ continue, surjective $\exists$

↓
Connexe

↓
Connexe

↓

$\exists x_i$ tq $f(x_i) = f(-x_i)$ □

le 21.11.18

Rem: La caractérisation des sous-ensembles connexes de $\mathbb{R}$ (complément au Cor plus tôt)

Soit $X \subset \mathbb{R}$, toutes les assertions suivantes sont équivalentes.

1) X est un intervalle (fini ou infini)

2) X est c.p.a

3) X est connexe

Pr: 1) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 3) déjà vu, auq 3) $\Rightarrow$ 1) par contraposée supposons que

X n'est pas un intervalle alors $\exists a, b, c \in \mathbb{R}$ tq $a < c < b$ et $a, b \in X, c \notin X$

Alors on a $X = X \cap (-\infty, c) \cup X \cap (c, +\infty)$ partition en ouvert non-vide
disjoints $\Rightarrow X$ pas connexe.

Ch 9 Compacité :

Déf: X esp. topo, $\{U_i\}_{i \in I}$ est un recouvrement ouvert de X si $U_i \subset X$ sont des ouverts $\forall i \in I$ et $X = \bigcup_{i \in I} U_i$

Déf: Un esp topo X est compact si tout recouvrement de ouvert de X admet un sous-recouvrement fini.

Autrement dit: $\forall \{U_i\}_{i \in I}$ recouv. ouvert de X , $\exists n \in \mathbb{N}$ et $i_1, \dots, i_n \in I$ tq $X = U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n}$

Rem:

- 1) Si $X \ni Y$ alors X compact $\Leftrightarrow Y$ compact
- 2) X esp topo, $Y \subset X$. Alors Y est compact si $\forall \{U_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{T}_X$ tq $Y \subset \bigcup_{i \in I} U_i$, $\exists n \in \mathbb{N}$ et $i_1, \dots, i_n \in I$ tq $Y \subset U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n}$

Ex: 1) $(X, \mathcal{T}_{triv}) \Rightarrow X$ compact

2) $A \subset X$ esp topo $|A| < \infty \Rightarrow A$ compact

En effet, si $\{U_i\}_{i \in I}$ est une famille d'ouverts et $\bigcup U_i \supset A = \{a_1, \dots, a_n\}$ alors prenons $i_1 =$ indice de l'ouvert qui contient a_1
 i_2
 $i_n =$ ————— " ————— a_n

$$\Rightarrow A \subset U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n}$$

3) $(X, \mathcal{T}_{disc}) \Rightarrow A \subset X$ est compact $\Leftrightarrow |A| < \infty$ ← par 2)

⇒ En effet, si $|A| = \infty$, on ne peut pas construire un sous-recouvrement fini du recouvrement $A = \bigcup_{a \in A} \{a\}$

4) $\mathbb{R}$ n'est pas compact.

$$\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} (n-1, n+1), \quad n \in (n-1, n+1) \text{ et c'est l'unique intervalle}$$

dans notre collection qui couvre n . Donc aucune ss-famille de cette famille ne constitue un recouv de $\mathbb{R}$ p 41

⇒ $\mathbb{R}$ pas compact

Cor: $(a,b), (-\infty, a), (a, +\infty)$ ne sont pas compact (homéo à $\mathbb{R}$)

Ex: 5) $(0,1]$ n'est pas compact ^{ouvert}

$$(0,1] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (1/n, 1] \quad \text{recouv. ouvert de } (0,1]$$

$\forall$ ss-famille finie, il y aura un N tq $1/N+1$ ne sera pas couvert par la ss-famille.

$$\max n_i \quad \text{tq } \mathcal{U} = \{ (1/n, 1] \}_{n \in I} \quad |I| < \infty$$

Cor: $[a,b], [a,b), (-\infty, a], (a, +\infty)$ ne sont pas compact.

Thm 1: $[a,b]$ est compact $\forall a,b \in \mathbb{R} \quad a \leq b$

Rem: (Un autre exemple d'un ss ens de $\mathbb{R}$ infini qui est compact.

$$X = \{0\} \cup \{1/n, n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R} \quad \text{est compact}$$

Preuve: Thm

Soit $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un recouv. ouv. de $[a,b]$, $C := \{x \in [a,b] \mid \text{tq } [a,x] \text{ admet un ss-recouv. fini}\}$. $C \subset [a,b] \rightarrow C$ est borné
 $C \neq \emptyset$ car $\exists U_i$ tq $a \in U_i$ ouvert $\Rightarrow \exists \varepsilon > 0$ tq $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subset U_i$
et donc $a + \frac{\varepsilon}{2} \in C$

Donc C possède le suprénum $c := \sup C$

On mq $c \in C$. On a: $c \geq a + \frac{\varepsilon}{2}$, $c \leq b \Rightarrow \exists U_j$ tq $c \in U_j$ et car U_j ouvert, $\exists \delta > 0$ tq $(c-\delta, c+\delta) \subset U_j$
 $\exists d \in (c-\delta, c]$ tq $a + \frac{\varepsilon}{2} \leq d < b$; $d \in U_j$ alors $d \in C$
sinon d serait un majorant de C , mais $d < c$ et $c = \sup C$
le + petit maj. Donc $[a,d]$ admet un ss-recouv. fini $U_1 \cup \dots \cup U_n$
 $U_i \in \mathcal{U} \quad i=1 \dots n$. Prenons $U_1 \cup \dots \cup U_n \cup U_j$ alors c'est un
recouv. de $[a,b]$. On a mq $c \in C$, mq $c = b$, alors $b \in C$

$\Leftrightarrow [a,b]$ est recouvert par une ss-fam finie de $\mathcal{U}$ et donc
compact

Preuve: (Suite)

$$Mq \quad b = c$$

Supposons $c < b$, $c \in U_j$, $\exists \gamma > 0$ tq $[c, c+\gamma) \subset U_j$ et $c+\gamma < b$

Alors $c + \frac{\gamma}{2} \in C$ mais c'est une contradiction avec $c = \sup C$

Donc $c = b$

Thm 2: L'image d'un compact par une applic. continue est compacte:

$f: X \rightarrow Y$ cont, X compact $\Rightarrow f(X)$ compact.

Dém: $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ une famille d'ouverts de Y tq $f(X) \subset \bigcup_{i \in I} U_i$
 $\{f^{-1}(U_i)\}_{i \in I}$ est un recouvrement ouvert de X (car f est cont)
 X compact $\Rightarrow X = f^{-1}(U_{i_1}) \cup f^{-1}(U_{i_2}) \cup \dots \cup f^{-1}(U_{i_n})$ pour un certain $\{i_1, \dots, i_n\} \subset I$. Donc $f(X) \subset U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n}$. $\square$

Application:Thm: des bornes atteintes

soit $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, X esp topo compact, f continue, alors $\exists x_{\min}, x_{\max}$

$\in X$ tq $f(x_{\min}) \leq f(x) \leq f(x_{\max}) \quad \forall x \in X$

NB! vu en analyse I pour $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

Preuve: X compact, f continue $\Rightarrow f(X) \subset \mathbb{R}$ est compact

Montrons: $\exists M \in f(X)$ tq $f(x) \leq M \quad \forall x \in X$, car $M \in f(X)$

cela veut dire $\exists x \in X$ qu'on appelle $x_{\max}$ tq $f(x_{\max}) = M \geq f(x)$
 $\forall x \in X$.

Par l'absurde: $\forall M \in f(X) \quad \exists x \in X: M < f(x)$, ainsi on a $\{(-\infty, f(x_i))\}_{x \in X}$
est un recouv. ouvert de $f(X)$. $f(X)$ est compact donc on

peut avoir un ss. recouv. fini: $\exists x_1, \dots, x_n$ tq $f(X) \subset \bigcup_{i=1}^n (-\infty, f(x_i))$

Mais le pt $m = \max_{1 \leq i \leq n} f(x_i)$ n'est pas couvert $\nexists$ p 43

Preuve: (Suite)

Comme c'est une contradiction : $\exists M \in f(X)$ tq $M > f(x) \forall x \in X$
l'existence de $x_{\min}$ se montre de manière analogue. $\square$

On revient à l'étude de la compacité

Prop 1: X compact, $\mathcal{U} \subset X$ fermé $\Rightarrow \mathcal{U}$ compact.

Preuve: Soit $\{\mathcal{U}_i\}_{i \in I}$ une famille d'ouverts et $\mathcal{U} \subset \bigcup \mathcal{U}_i$;

$\mathcal{U}$ est fermé $\Rightarrow X \setminus \mathcal{U}$ ouvert alors $X = \bigcup \mathcal{U}_i \cup X \setminus \mathcal{U}$ et
 $\{\mathcal{U}_i\}_{i \in I} \cup X \setminus \mathcal{U}$ est un recouv ouvert de X .

X est compact $\Rightarrow$ on peut soustraire un ss-recouv. fini

$X = X \setminus \mathcal{U} \cup \mathcal{U}_1 \cup \dots \cup \mathcal{U}_n \Rightarrow \mathcal{U} \subset \mathcal{U}_1 \cup \dots \cup \mathcal{U}_n \Rightarrow \mathcal{U}$ compact.

Prop 2: X séparé, $\mathcal{U} \subset X$ compact $\Rightarrow \mathcal{U}$ fermé

Dém: Par cela on mq $X \setminus \mathcal{U}$ est ouvert en mq $X \setminus \mathcal{U}$ est voisinage de tous ses points.

Soit $x \in X \setminus \mathcal{U}$, trouvons $x \in \mathcal{U} \subset X \setminus \mathcal{U}$ ouvert

$\forall y \in \mathcal{U}$ et pour le x choisit, $\exists V_y, \mathcal{U}_y$ deux ouverts de X
qui les séparent : avec $y \in V_y, x \in \mathcal{U}_y, \mathcal{U}_y \cap V_y = \emptyset$
 $\{V_y\}_{y \in \mathcal{U}}$ est un recouv ouvert de $\mathcal{U}$ qui est compact $\Rightarrow$

$\exists y_1, \dots, y_n$ tq $\mathcal{U} \subset V_{y_1} \cup \dots \cup V_{y_n}$.

$\mathcal{U} := \mathcal{U}_{y_1} \cap \dots \cap \mathcal{U}_{y_n} \quad x \in \mathcal{U}$ car $x \in \mathcal{U}_{y_i} \forall y_i \in \mathcal{U}$

et $\mathcal{U} \cap \mathcal{U} = \bigcap_{i=1}^n \mathcal{U}_{y_i} \cap \bigcup_{i=1}^n V_{y_i}$ (on a $\mathcal{U}_{y_i} \cap V_{y_i} = \emptyset \forall i$)

$$\bigcap_{i=1}^n \mathcal{U}_{y_i} \cap \bigcup_{i=1}^n V_{y_i} = \emptyset$$

Donc $\mathcal{U} \subset X \setminus \mathcal{U} \Rightarrow X \setminus \mathcal{U}$ est voisinage de x $\square$

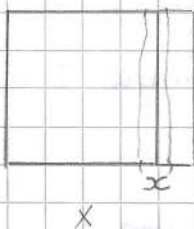
vérifier que $A \cap B \cap C \cup D \subset A \cap C \cup B \cap D$

Rem: 1) Corollaire

$$f: \underset{\text{comp}}{X} \longrightarrow \underset{\text{séparé}}{Y} \quad \text{continue, bijective} \Rightarrow f \text{ homéo}$$
Démo:On doit mq f^{-1} est continuePour cela, on vérifie, $\forall F \subset X$ fermé, $f(F) \subset Y$ fermé
 $X \text{ compact}, F \subset X \text{ fermé} \Rightarrow F \text{ compact} \xrightarrow{f \text{ cont}} f(F) \text{ compact}$
 dans Y séparé $\xrightarrow{Y \text{ séparé}} f(F) \text{ fermé}$
Rappel: ex: $[0,1] \rightarrow S^1$ biject continue mais pas homéo $\Rightarrow [0,1]$ pas comp.
 Par contre plus tard on a eu $[0,1] \setminus \{0,1\} \rightarrow S^1$ homéo
 $\downarrow$
 compact.

Conclusion: plus généralement, toute $f: \underset{\text{comp}}{X} \rightarrow \underset{\text{séparé}}{Y}$ continue induit un
 homéo entre $X/\sim$ et $f(X)$ où $\sim$ est définie par
 $x \sim x' \Leftrightarrow f(x) = f(x')$

le 28.11.18

Thm 3: $X_1, \dots, X_n$ esp. topa compacts $\Leftrightarrow X_1 \times \dots \times X_n$ compactPreuve:
 $\Leftarrow$: suit du fait que $\pi_i: X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow X_i$ est une appli continue
 $\forall i=1, \dots, n$ par thm 2.
 $\Rightarrow$: On montre pour $n=2$ et ensuite par induction.Soient X, Y espace compact, $X \times Y$ compact?Soit $\mathcal{W} = \{W_i\}_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de $X \times Y$ $\forall x \in X$ fixé $\mathcal{W}$ fournit un rec. ouv. de $\{x\} \times Y \cong Y$ compactDonc $\{x\} \times Y \subset W_{i_1(x)} \times \dots \times W_{i_n(x)} \quad (\exists i_1(x), \dots, i_n(x) \in I) \Rightarrow N(x)$ $N(x) \subset X \times Y$ 

Lemme: du Tube

Soit X esp. topo et Y esp. topo compact, si N est un ouvert de $X \times Y$ contenant $\{x_0\} \times Y$ avec $x_0 \in X$, alors $\exists U \subset X$ tq $N \supset U \times Y$

Preuve: (Suite)

En admettant le lemme à $N(X)$, on déduit $\exists U \subset X$ tq $U \times Y \subset N(X)$ et donc $\{U(x)\}_{x \in X}$ est un recouv. ouv de X .

X comp $\Rightarrow \exists x_1, \dots, x_m \in X$ tq $X = U(x_1) \cup \dots \cup U(x_m)$

$$\text{alors } X \times Y = \bigcup_{k=1}^m U(x_k) \times Y \subset \bigcup_{k=1}^m N(x_k)$$

$$= W_{i_1}(x_1) \cup \dots \cup W_{i_n}(x_1) \cup \dots \cup W_{i_1}(x_m) \cup \dots \cup W_{i_n}(x_m)$$

Donc W admet un ss-recouvrement fini de $X \times Y$ et donc

$X \times Y$ est compact

Preuve: (Lemme du Tube)

N est un ouvert contenant $\{x_0\} \times Y$, donc c'est un voisinage de tout point $(x_0, y) \in X \times Y$ avec $y \in Y$.

Par déf de topo produit, $\exists$ des ouverts $U_y \subset X$ et $V_y \subset Y$ avec $(x_0, y) \in U_y \times V_y \subset N$

Y compact $\Rightarrow \exists y_1, \dots, y_n$ tq $Y \subset V_{y_1} \cup \dots \cup V_{y_n}$

$U := U_{y_1} \cap \dots \cap U_{y_n}$ (ouverts # fini) $\Rightarrow U$ ouvert de X .

$$U \times Y = \bigcap_{i=1}^n U_{y_i} \times Y \subset \bigcap_{i=1}^n U_{y_i} \times \bigcup_{i=1}^n V_{y_i} \subset \bigcup_{i=1}^n (U_{y_i} \times V_{y_i}) \subset N$$

Rem: Le théorème est vrai pour des produits $\prod_{i \in I} X_i$ avec I quelconque il s'agit du thm de Tychonoff Δ Pas vrai avec topo des bts "

Ex: L'espace de tous les ss-ensembles d'un ensemble I donné est un espace compact.

Soit I un ensemble, alors un ss-ens de I est une

fonction $I \rightarrow \{0,1\}$, l'ens. des ss-ens de I est le produit $\{0,1\}^I$

pour

Tychonoff compact

Ch 10. Compacité dans Espaces Métriques.

Thm: (Compact dans $\mathbb{R}^n$)

Un ss-ens de $\mathbb{R}^n$ avec $\mathcal{J}_{std}$ est compact $\Leftrightarrow$ il est fermé et borné dans la métrique euclidienne

Démo: $\Rightarrow$: Supp $A \subset \mathbb{R}^n$ compact, $\mathbb{R}^n$ séparé $\Rightarrow A$ fermé Prop 2

Considérons le recouv. ouv. par des boules ouvertes centrées en $O \in \mathbb{R}^n$, de rayon $r > 0$.

A comp $\Rightarrow \exists r_1, \dots, r_n$ tq $A \subset B(O, r_1) \cup \dots \cup B(O, r_n)$

$R := \max_{i=1, \dots, n} r_i \Rightarrow A \subset B(R, O)$ ce qui veut dire A borné.

$\Leftarrow$: $A \subset \mathbb{R}^n$ fermé et borné, A borné $\Rightarrow A \in [-R, R]^n$ pour $R \in \mathbb{R}$, compact par thm 1 et 3 § 9.

Donc au a A fermé, $A \subset [-R, R]^n$ compact $\Rightarrow A$ compact. ///

Rem: La partie $\Rightarrow$ est vraie $\forall$ espace métrique, pas l'autre.

Ex: § 3, métrique sur $\mathbb{R}^n$ tq $\mathbb{R}^n$ est borné

$\bar{d} = d/(1+d)$ à d = métrique euclidienne.

par ailleurs $\mathbb{R}^n$ pas compact.

? Cor: $B(O, 1) \not\subset \overline{B(O, 1)}$ car une boule fermée est compact et une boule ouverte non.

Un résultat important:

Lemme: du nombre de Lebesgue

Soit $\mathcal{U}$ un recouvrement ouvert d'un esp. métrique (X, d)

Si X est compact, alors $\exists \delta > 0$ (un tel δ est le nbr de Lebesgue de recouv. $\mathcal{U}$)

tq tout sous-ens de X de $\text{diam} < \delta$ est contenu dans un ouvert

$U \in \mathcal{U}$

Rappel: Ici le diamètre d'un sous-ens $A \subset (X, d)$ est $\text{diam } A = \sup_{x, x' \in A} d(x, x')$

Rem: La condition de compacité est nécessaire dans ce lemme

Ex: $(0, 1) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (1/n+2, 1/n)$ $\mathcal{U} = \{(1/n+2, 1/n)\}_{n \in \mathbb{N}}$

$\forall \delta > 0$ le sous-ens $(0, \delta/2)$ est de $\text{diam} < \delta$ mais n'est contenu dans aucun $U \in \mathcal{U}$

Démo: du lemme

Soit $\mathcal{U}$ comme dans l'énoncé, $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$, on suppose $U_i \neq X \forall i$ sinon le lemme est trivialement vérifié.

X compact $\Rightarrow \exists i_1, \dots, i_n$ tq $X = U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n}$ $F_k = X \setminus U_{i_k}$ ↑ fermé

on définit une application $f: X \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n d(x, F_k)$

f est continue voir série II, ici $d(x, A) = \inf_{y \in A} d(x, y)$

De plus $f > 0$, en effet $\forall x \exists i_j$ tq $x \in U_{i_j}$ ouvert.

Et donc $\exists \varepsilon > 0$ tq $B(x, \varepsilon) \subset U_{i_j} \Rightarrow d(x, F_j) > \varepsilon$.

Ainsi $f: X \rightarrow (0, \infty) \Rightarrow$ par le thm bornes atteintes $\exists \delta > 0$

tq $f(x) \geq \delta \forall x \in X$. Ce δ satisfait le thm.

En effet, $A \subset X$, $\text{diam}(A) < \delta$, par déf du diam,

$\forall x \in A$ $B(x, \delta) \supset A$, de plus on peut choisir j_* tq

$$d(x, F_{j_*}) = \max_{j=1 \dots n} d(x, F_j) \text{ et alors on a } \delta \leq f(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n d(x, F_k) \leq d(x, F_{j_*})$$

$$\Rightarrow B(x, \delta) \subseteq X \setminus F_{j_*} = U_{i_{j_*}}$$

Et donc $A \subset B(x, \delta) \subset U_{i_{j_*}} \in \mathcal{U}$ □

Ici on va voir une applic. du lemme de Lebesgue:

Déf: $f: (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$ est uniformément continue $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0,$

$$\forall x, x' \in X, d_X(x, x') < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon.$$

Géom II:

Thm: Si $f: X \rightarrow Y$ est une applic continue entre 2 esp. métriques et si X est compact, alors f est unif continue.

Démo: Prenons $\varepsilon > 0$, et $\{B(y, \varepsilon/2)\}_{y \in Y}$ recouvrement ouvert de Y comme f continue $\Rightarrow \mathcal{U} = \{f^{-1}(B(y, \varepsilon/2))\}_{y \in Y}$ est un recouvrement ouvert de X . Comme X compact $\Rightarrow$ on lui applique le lemme du nbr de Lebesgue et on a δ , le nbr de Lebesgue du rec. ouv $\mathcal{U}$.

En particulier, $\forall x, x' \in X$ tq $d_X(x, x') < \delta \quad \exists y \in Y$ tq $x, x' \in f^{-1}(B(y, \varepsilon/2))$.

Alors $f(x), f(x') \in B(y, \varepsilon/2)$ et par inégalité Δ $d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon$

Notion pas demandée à l'examen.

le 05.12.18

Déf: X esp topo est dit séquentiellement compact si $\forall$ suite dans X admet une ss-suite convergente.

En fait, tous les exemples d'esp. compactes discutés au §9-10 sont séq. compacts.

Mais en général : compacité séq. $\not\Rightarrow$ compacité

NB! A fermé $\Rightarrow A$ séq. fermé
 $\not\Leftarrow$ contre-ex de la longue droite

Mais comme avec les autres propriétés "séquentielles", on peut formuler des conditions sur X ss. lesquelles elles deviennent équiv.

Thm: Soit X un esp. topo

1) Si X est un esp à base dénombr. de voisinage, alors X compact $\Rightarrow X$ séq. comp.

2) Si X est un esp métrique, alors X séq comp $\Rightarrow X$ compact

NB! X métrique $\Rightarrow X$ à base dénombr. de vois.

Cor: Si X est un esp métrisable, alors X compact $\Leftrightarrow X$ seq. compact
En particulier, c'est vrai $\forall A \subset \mathbb{R}^n$

Rem: 1) Une autre condition suffisante pour que X comp ssi X seq. comp est d'être à base dénombrable. (2^{ème} axiome de dénombrabilité)
2) Dans des esp métriques, il y a une 3^{ème} cond. utile équivalente à compacité et comp. seq. :

Tout ss-ensemble infini de X possède un point d'accumulation, c-à-d un tel point tq tout son voisinage contient une infinité de point de A .

(c'est-à-dire $\forall A \subset X, |A| = \infty, \exists a \in X$ tq $\forall$ voisinage de a contient une infinité de point de A) $\Rightarrow$ il y a tjs des pts dedans

Démo: du thm p. 49

1) $\{x_n\}$ une suite dans X compact, il faut mq $\{x_n\}$ admet une ss-suite convergente.

i) On montre d'abord X comp $\Rightarrow$ tout ss-ens infini admet un pt d'accum.

ii) On applique ce résultat à $\{x_n\}$ que l'on suppose infini en tant que ss-ens de X , car sinon $\{x_n\}$ contient une ss-suite stationnaire qui est convergente et 1) est démontré.

Mq i). En effet, si ce n'est pas le cas $\{x_n\}$ n'admet pas de pt d'accumulation, ie $\forall y \in X \exists$ voisinage U_y qui ne contient qu'un nbr fini de point de $\{x_n\}$

$\{U_y\}_{y \in X}$ est un recouv ouvert de X , compact, $\Rightarrow \exists y_1, \dots, y_n \in X$

tq $X = U_{y_1} \cup \dots \cup U_{y_n}$ à chaque U_{y_i} contient un nbr fini

de points de $\{x_n\}$, $\sum (\{x_n\}_n$ en tant que ss-ens de X est infini)

Donc on a mq si X compact, alors tout $\{x_n\}_n$ admet un pt d'accumul.

Démon: (Suite)

1) Maintenant, trouvons une ss-suite conv. en utilisant que X est à base dénombrable de vois.

(On va trouver une ss-suite qui conv. vers $y = \text{point d'ac de } \{x_n\}$)

Comme vu dans l'lemme au § 6, si X est à base dénombrable de vois

$\forall y \in X$, alors il possède aussi $\forall y \in X$ possède une base dénombrable décroissante de vois. ouverts.

Prenons $y = \text{le pt d'ac de } \{x_n\} \Rightarrow \forall \text{ voisinage de } y$ possède un nbr infini de pt de $\{x_n\}$.

Choisissons une base de voisinages ouverts de y , dénombrable et décroissante $\{B_i\}$. On choisit alors une ss-suite de $\{x_n\}$ en prenant $x_{n_i} \in B_i \quad \forall i \in \mathbb{N}$.

Comme montré au § 6, $x_{n_i} \xrightarrow{i \rightarrow \infty} y$

On a trouvé une ss-suite conv.

2) voir dans le polycopié (pas examen)

Ch. II : Notion de Variétés :

objets centraux de géomé analytique
d'analyse, de math-phys, de phys
(description de l'univers)

Déf: Une variété de dimension $n, n \geq 1$, est un esp. topo X séparé, à base dénombrable et tq $\forall x \in X$ admet un voisinage ouvert homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Variétés dim 1 = courbes

— " — dim 2 = surfaces

But: Classification des variétés à homéom. près.

Rem: Une variété de dim m n'est jamais homéom. à une variété de dim n si $m \neq n$. Cela suit de $\mathbb{R}^m \neq \mathbb{R}^n$ si $n \neq m$

Pour tout n , on aimerait classifier à homéo près des variétés de dim n .

Thm 1: $n = 1$

Toute courbe connexe est homéomorphe soit à $\mathbb{R}$ (pas compact)
soit à S^1 (compact)

On va voir aussi la classification des surfaces ($n = 2$)

Ce probl très complexe est résolu en dim 3 (Conj de Poincaré)

$n \geq 4 \rightarrow$ problème ouvert.

Ex: 1) $\mathbb{R}^n$, tout ouvert de $\mathbb{R}^n$ est une variété

2) S^1 est une variété de dim 1.

tout $x \in S^1 \setminus \{(1,0)\}$, $S^1 \setminus \{(1,0)\}$ est un voisinage ouvert de x
homéo à $(0,1)$. Pour $x = (1,0)$ on prend $S^1 \setminus \{(-1,0)\}$ ($S^1 \subset \mathbb{R}^2$)

3)  pas une variété

4)  pas une variété

5) $S^m \subset \mathbb{R}^{m+1}$ est une variété de dim m , $m \geq 1$ (Série 12)

Ex: (Suite)

$$6) \mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1 \text{ tore,}$$

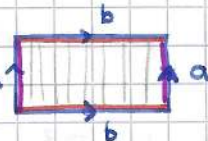
Plus généralement, $X \times Y$ est une variété de dim $m+n$

si X et Y sont des variétés de dim m et n

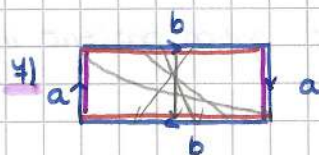
$\mathbb{T}^2$ est une variété de dim 2 pas homéo à S^2

Une manière de construire le tore :

par recollement d'un rectangle



$$[-1,1] \times [-1,1] / \begin{matrix} (x,1) \sim (x,-1) \\ (1,y) \sim (-1,y) \end{matrix} = \mathbb{T}^2$$



$$[-1,1] \times [-1,1] / \begin{matrix} (x,1) \sim (-x,-1) \\ (1,y) \sim (-1,y) \end{matrix} = \text{surface (var. dim 2)}$$

qui s'appelle la bouteille de Klein

[ne peut pas être plongée (par applic. continue de sorte à être homéo à l'image) dans $\mathbb{R}^3$]

le 12.12.18

Nous construisons des surfaces par le procédé de recollement.

Topologiquement, ce sont des espaces avec la topologie quotient.

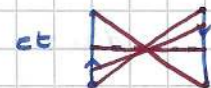
On commence avec un rectangle fermé $\subset \mathbb{R}^2$ muni de la topo. induite par la topo. standard sur $\mathbb{R}^2$.



également

Plus généralement, on va considérer des polygones $\subset \mathbb{R}^2$

Le processus de factorisation se fait en identifiant des points sur les côtés (le bord) du polygône. Deux manières :



Ex:



$$[-1,1] \times [-1,1] / (1,y) \sim (-1,y)$$

= cylindre



$$[-1,1] \times [-1,1] / (1,y) \sim (-1,-y)$$



= ruban de Möbius

ligne de recollement



pas surface selon déf p. 52

Déf: Une surface à bord est un esp. topo qui satisfait les conditions 1) et 2) d'une variété et la condition 3) est modifiée comme suit :

tout point $x \in X$ possède un voisinage homéomorphe soit à un ouvert de $\mathbb{R}^2$, soit à $\mathbb{R} \times [0, \infty)$

De même, on définit une variété de dim $\mathbb{R}^n$ à bord :

les points ont des voisinages homéom. à $\mathbb{R}^n$ ou à $\mathbb{R}^{n-1} \times [0, \infty)$

Rem: Soit $P \subset \mathbb{R}^2$ un polygone. Si on le factorise en identifiant > 2 côtés ensemble, l'espace quotient qu'on obtient n'est pas une variété.

Donc en construisant des surfaces par recollement des côtés d'un polygone, on identifie au plus 2 côtés ensemble.

Si $P \subset \mathbb{R}^2$ est un $2g$ -gone $g \geq 1$ et on identifie tous les côtés 2 à 2 (g identifications), on obtient une surface sans bord, si on identifie pas tous les côtés on obtient une surface à bords.

Ici par identification des côtés, on entend précisément les identifications selon une des manières précisées ci-dessus :

Soit on parcourt les 2 côtés dans le même sens, par rapport à une montre, soit 1 côté dans 1 sens et autre dans l'autre.

Ex:



le tore



la bouteille de Klein



la sphère



le plan projectif $\mathbb{RP}^2$



$$\rightarrow [-1, 1] \times [-1, 1] / \begin{matrix} (x, 1) \sim (x, -1) \\ (1, y) \sim (-1, -y) \end{matrix}$$

$\mathbb{RP}^2$ peut être défini comme le quotient de D^2 à $\forall$ point du bord du disque est identifié à son antipode.

Codage symbolique des recollements :

Il est naturel d'étiqueter les côtés du polygone P par des lettres, de telle sorte à ce que les paires de côtés qui seront identifiés sont notés soit



Alors dans ces notations, $S^2 \cong P / a\bar{a}'b\bar{b}'$ où P carré

$$\mathbb{P}^2 \cong P / a\bar{b}a'\bar{b}'$$

$$\text{Klein} \cong P / abab^{-1}$$

$$\mathbb{R}P^2 \cong P / abab$$

On voit sur le codage, la différence entre les surfaces dites "orientables" (dans le mot qui encode le recollement des côtés du polygone on a $\forall$ lettre la somme des exposants $= 0$) et les surfaces non-orientables

Les surfaces orientables sont des surfaces "à 2 côtés"

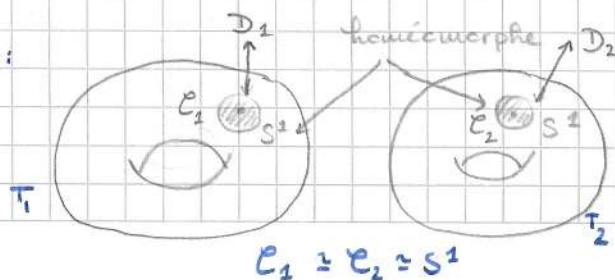
($\Leftrightarrow$ elles peuvent être plongées dans $\mathbb{R}^3$)

Les "non-orientables" "à 1 côté"

($\Leftrightarrow$ ne peuvent pas être plongées dans $\mathbb{R}^3$)

Déf: La somme connexe des deux variétés connexes de même dimension est obtenue en découpant une petite boule ouverte autour d'un point dans chacune des deux variétés et en recollant les 2 variétés par identification des deux sphères S^{n-1} créées comme résultat du découpage des petites boules

Dim 2 :



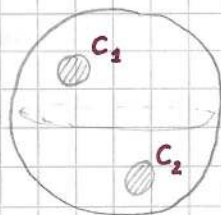
$$T_1 \# T_2 = T_1 \setminus D_1 \cup T_2 \setminus D_2 / \sim$$

$\sim$ homéomorphisme entre C_1 et C_2

$C_1 = \partial D_1$ et $C_2 = \partial D_2$

p 55

Ex :



$S^2 \setminus (B_1 \cup B_2)$

sphère avec deux trous

$S^2 \setminus (B_1 \cup B_2) \cup$

Cylindre



$C_1 \sim C_1'$
 $C_2 \sim C_2'$



la sphère avec une anse $\cong \mathbb{T}^2$

Théorème: de classification des surfaces compactes, connexes, sans bord

Toute surface compacte, connexe, sans bord est homéomorphe soit à S^2 , soit à une somme connexe de g tores (surface orient. de genre g), soit à une somme connexe de h plans projectifs (surface non-orient. de genre h) $g, h \geq 1$

Ces surfaces ne sont pas homéom. entre elles.

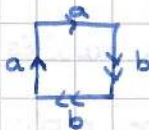
se démontre en associant à chaque surface un invariant algébrique "groupe fondamental", eg $\pi_1(\mathbb{T}^2) = \langle aba^{-1}b^{-1} \rangle \cong \mathbb{Z}^2$
 $\pi_1(S^2) = \langle aba^{-1}b^{-1} = 1 \rangle = \{1\}$

On obtient une surf. orient. de genre g en recollant un $4g$ -gone avec $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}$.

On obtient une surface non-orient. de genre h en recollant un $2h$ -gone avec $a_1 a_1 a_2 a_2 \dots a_h a_h$.

Ex :

Bouteille de Klein



$\cong \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2$

Géom II:

Rappel: Thm de Classification des surfaces compactes à isom. près:

- Toute ^{surface} connexe, compact et sans bord ("close") est homéomorphe :
à S^2 , à une somme connexe de g tore, $g \geq 1$ (surf. orient. de genre g)
ou à une somme connexe de h plan proj., $h \geq 1$ (surf. non-orient. de genre h)
- Les surfaces ne sont pas homéomorphe 2-à-2

Pour distinguer les surfaces, on applique l'invariant algébrique :

"le groupe fondamental"

Ex:

$$\pi_1(\text{cercle}) = \langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1} = 1 \rangle = \mathbb{Z}^2$$

$$\pi_1(S^2) = \{1\} = \text{(on peut toujours contracter un cercle)} = \langle \phi \mid \phi \rangle$$

$$S^2 = \begin{array}{c} \xrightarrow{a^{-1}} \\ \uparrow a \quad \downarrow b^{-1} \\ \square \\ \downarrow b \quad \uparrow a^{-1} \end{array} = \begin{array}{c} \xrightarrow{a} \\ \text{cercle} \\ \xleftarrow{a^{-1}} \end{array}$$



$$T^2 = \begin{array}{c} \xrightarrow{b} \\ \uparrow a \quad \downarrow a^{-1} \\ \square \\ \downarrow b^{-1} \end{array}$$

D^2



f

S^2

$f: \partial D \rightarrow \{x_0\}$



Rem: Il existe des opérations sur le polygone étiqueté qui défini une surface qui ne change pas cette dernière. (liste dans Polysep.)

- Réduction: aa^{-1} ou $\bar{a}\bar{a}$ dans le mot écrit sur le bord du polygone $\rightarrow$ effacer

(Inversement on peut ajouter un sous-mot $a\bar{a}$ ou $\bar{a}a$ dans un mot)

- Découper le polygone en 2 (invers. coller)

Déf:

Avec ces opérations appliquées aux polygones qui définissent les

surfaces orientables $\underbrace{T^2 \# \dots \# T^2}_g$ et non-orient. $\underbrace{\mathbb{RP}^2 \# \dots \# \mathbb{RP}^2}_h$

on trouve la forme standard par le mot qui code les polygones fondamentaux de ces surfaces :

- $\Sigma_g := T^2 \# \dots \# T^2$: $4g$ -gone avec le bord codé par $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}$

- $N_g := \mathbb{RP}^2 \# \dots \# \mathbb{RP}^2$: $2g$ -gone avec le bord codé par $a_1 a_1 a_2 \dots a_g a_g$

Ex: Bouteille de Klein:

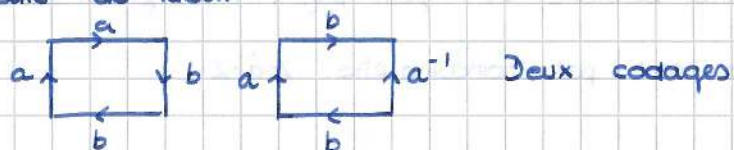


Table:

# trou	0	1	2	3	4	
Non-Orientable						

Motivation:



une sphère avec ruban de Möbius $\simeq \mathbb{RP}^2$



sphère avec une anse



Klein = $\mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2$

Caractéristique d'Euler de la sphère S^2



$$\chi(S^2) = 1 + 1 = 2$$

$$\chi(\Sigma) = \# \text{ points} - \# \text{ arêtes} + \# \text{ disques}$$