Algèbre I:

4 21.09.17

Chapitre 1: Algèbre linéaire dans $\mathbb{R}^n$

Notation:

$\mathbb{Z} = \{0; \pm 1; \pm 2; \dots\}$

$\mathbb{R}$ = nombr. réels

$\mathbb{R}^2 = \{(x_1; x_2) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$

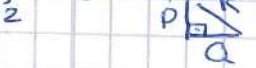
$\mathbb{R}^n = \{(x_1; x_2; \dots; x_n) \mid x_1, x_2; \dots; x_i \in \mathbb{R}\}$

1.1 Systèmes linéaires:

Les équations donnent des relations entre quantités.

Ex 1:

1. Cercle, on a le rayon et l'aire, et il y a une relation: $A = \pi r^2$
   Ceci est une équation, avec une constante.
2. Si on a 2 planètes et 2 masses (M_1, M_2) et une force entre les 2 et une distance d.
   $$F \cdot d^2 = G m_1 \cdot m_2$$
3. Dans un Δ rectangle, on peut mesurer les côtés et de cette quantité, trouver une relation: $p^2 + a^2 = R^2$



En maths, on dit plûtôt variable ou inconnue.

Souvent on cherche une solution qui consiste en des valeurs précises pour chaques variables qui satisfont l'équation.

On peut considérer l'ensemble des solutions comme objet géométrique.

Ex:

"$x^2 + y^2 = 1$" exprime une relation entre x et y et cela nous emmène à une représentation graphique de l'ensemble des solutions.



Une équation donne une relation entre quantité, appelée variable, et on en cherche la solution

BRUNNEN

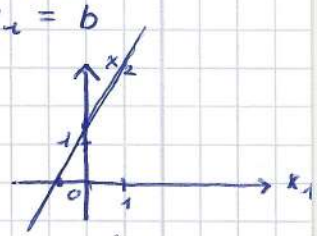
Si on change l'équation la géométrie d'un ensemble de sol. change avec.

Il est important de faire le lien entre les équations et leurs représentations géométriques.

Déf: Une équation lin à n inconnues est une équation de la forme:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = b$$

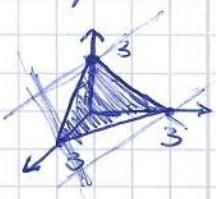
où $\underbrace{a_1 \dots a_n}_{\text{coefficient}}$, $b \in \mathbb{R}$



Ex:

$n = 2$: $5x_1 - 2x_2 = -3$

$n = 3$: $x_1 + x_2 + x_3 = 3$



Cela représente un plan, dont fait partie le Δ.

$n > 3$: est + difficile à visualiser. mais le côté algébrique ne change pas.

Remarque Si on voit des produits ou des puissances, l'équation n'est pas linéaire.

Ex: $5x_1x_2 + x_3 = 0$, $x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_1x_2 = 5$

$x + \sin(x) = 5$ => pas lin.

Problème illustratif: Il y a-t-il un cercle dans le plan qui passe par les points $(1;7)$, $(6;2)$ et $(4;6)$?

L'équation d'un $\bigcirc$ dans le plan est de la forme $x^2 + y^2 + Px + Qy + R = 0$

Si $x = 1$ et $y = 7$ est une solution on a: $1 + 49 + P + 7Q + R = 0$

d'où: $P + 7Q + R = -50$ (1)

De même $x = 6$ et $y = 2$ est sol donc: $6P + 2Q + R = -40$ (2)

De même $x = 4$ et $y = 6$ est sol. donc: $4P + 6Q + R = -52$. (3)

On peut vérifier que $P = -2$, $Q = -4$ et $R = -20$ est l'unique solution qui satisfait ces 3 équations.

Donc: $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 20 = 0$

$\iff (x-1)^2 + (y-2)^2 = 5^2$

---

n équations à n inconnues = système lin

Algèbre I :

Le 21.09.17.

Déf :

Un Système linéaire à m équation et n inconnues consiste en des équations de la forme :

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$
$$\vdots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2} + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

où les a_{ij} et b_i sont des nbrs réels.

Dans le cas $b_i = 0$ pour $i = 1, \dots m$, on appelle cela un système <u>homogène</u>.

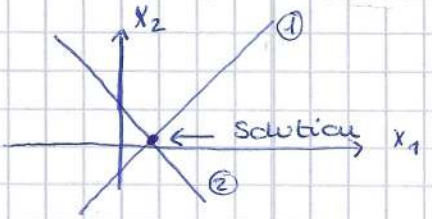
Résoudre le système, ça veut dire trouver les valeurs précises pour les variables (si elles existent) qui vérifient toutes les équations.

Géométriquement, une solution d'un système se trouve à l'intersection d'ensembles de solutions des équations individuelles.

Ex :

$m = 2$ et $n = 2$:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 1 & (1) \\ x_1 + 2x_2 = 4 & (2) \end{cases}$$

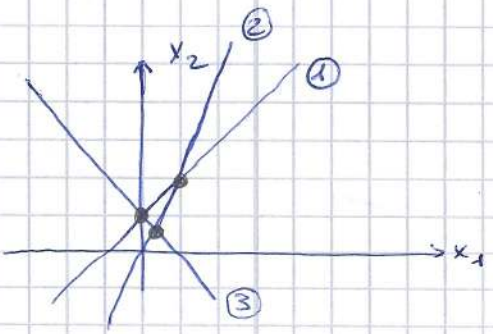


Il y a une unique solution à ce système, c'est le point d'intersection des deux droites soit $(2;1)$.

Ex :

$m = 3$ et $n = 2$:

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 = 1 & (1) \\ 2x_1 + (-x_2) = 0 & (2) \\ x_1 + x_2 = 1 & (3) \end{cases}$$



Il n'y a pas de pt en commun donc pas de solution. $S = \emptyset$.

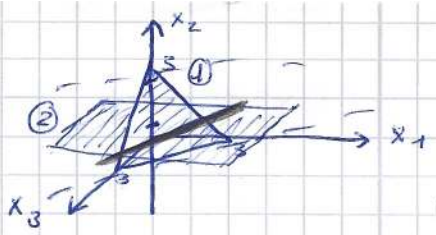
Sémantique : toutes les équ = 0

BRUNNEN

Ex: (suite)

$n = 2$ et $n = 3$:

$x_1 + x_2 + x_3 = 3$ ①
$x_3 = 1$ ②



Tout point sur la droite $x_1 + x_2 = 4$ est une solution. Donc il y a une infinité de solution. (plan ∩ plan)

1.2 La méthode du Pivot / d'élimination de Gauss

But:

Résoudre un système linéaire :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Observation:

L'ensemble des solutions ne change pas si :

(i) on change l'ordre des équations

(ii) on multiplie 1 équ. par un nbr non-nul.

(iii) on ajoute à 1 équ un multiple d'une autre.

On peut ainsi simplifier un système

Ex:

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = -8 \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = -4 \end{cases}$$

$L_2 \to L_2 - 3L_1$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = -8 \\ -4x_2 - 8x_3 = 20 \end{cases}$$

$L_2 \to -\frac{1}{4}L_2$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = -8 \\ x_2 + 2x_3 = -5 \end{cases}$$

$L_1 \to L_1 - 2L_2$

$$\begin{cases} x_1 - 3x_3 = 2 \\ x_2 + 2x_3 = -5 \end{cases}$$

$x_1 = 2 + 3t$
$x_2 = -5 - 2t$
$x_3 = t$

Les solutions ? Donner à x_3 une valeur $t \in \mathbb{R}$ alors $S = \{2+3t ; -5-2t ; t\}$

tout choix de t donne une sol. il y a ∞ de sol. à 1 paramètre.

Les solutions ne changent pas si on change l'ordre, on multiplie par $r \in \mathbb{N}^*$ ou $\mathbb{R}^*$, on ajoute un multiple d'une autre.

Algèbre I:

Le 22.09.17

Ex: (du pivot)

Résoudre le système:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 6 \\ 2x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 - x_2 = 1 \end{cases} \xrightarrow[L_3 = L_3 - L_1]{L_2 = L_2 - 2L_1} \begin{cases} x_1 - 2x_2 = 6 \\ 5x_2 = -7 \\ x_2 = -4 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{L_2 = \frac{1}{5}L_2} \begin{cases} x_1 - 2x_2 = 6 \\ x_2 = -\frac{7}{5} \\ x_2 = -4 \end{cases}$$ ↔ Problème ! $-\frac{7}{5} \neq -4$

Donc, il n'y a pas de solution
$S = \emptyset$

On ne peut pas avoir $x_2 = -\frac{7}{5}$ et $x_2 = -4$ en même temps, alors il n'y a pas de solution.
On dit que le système est incompatible.

Résumé:

On avait un système linéaire, on s'intéresse à l'ensemble de solutions et on fait une transformation pour éliminer les variables, de manière à ce que le système soit plus simple, tout en gardant ses solutions.

Algorithme:

La méthode du Pivot:

1ère Phase: 1. Choisir un coef. non-nul le + à gauche possible. C'est le pivot.

2. Diviser l'équation du pivot par la valeur du pivot. Puis échanger cette équation avec la 1ère.

3. Utiliser l'inconnue associée au pivot pour faire disparaître cette inconnue de toutes les équations + bas. (variables principales / les autres libres)

4. Ignorer la 1ère ligne et recommencer.

Si à la fin j'ai une équation de type:

$0x_1 + \dots + 0x_n = d$ ⇒ incompatible

ou $0x_1 + \dots + 0x_n = 0$

On cherche à simplifier le système pour que les solutions soient + faciles à trouver.

La méthode du Pivot.

BRUNNEN

Algorithme (suite) :

2ème Phase : 1. On choisit le dernier Pivot, utilisé, et on élimine ce pivot des autres lignes.

2. On ignore l'équation associée à ce pivot et on recommence avec le pivot de la ligne au-dessus

Lorsque toutes les inconnues / variables principales ont eu leur tour, le système est simplifié.

Il y a alors soit une solution unique, soit un ou plusieurs paramètre libre qui donne une infinité de solutions.

Les variables ne servent à rien, dans l'équation, on peut remplacer le système par un tableau des coefficients :

$$\begin{bmatrix} 5x_1 + 7x_2 = 4 \\ x_1 - 2x_2 = 3 \end{bmatrix} \qquad \left[\begin{array}{cc|c} 5 & 7 & 4 \\ 1 & -2 & 3 \end{array}\right]$$

$$\begin{matrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_{1n} \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_{mn} \end{matrix} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_{mn} \end{array}\right]$$

Ceci est la matrice augmentée.

On peut utiliser et expliquer la tech. du pivot en terme de matrice. [C.F Chamillo]

tel que : 1. échanger des lignes
2. Multiplier la ligne par le nbr non-nul
3. Ajouter le multiple d'une autre ligne.
4. Répéter

Remarque :

* des valeurs

Après phase 1 : $\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & * & \cdot \\ & \cdot & \cdot & \cdot \\ & 0 & & \cdot \end{bmatrix}$ Il y a un espèce d'escalier.
=> Matrice Echelonnée

Après phase 2 : $\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \\ & & & & & \end{array}\right]$ Dans les colonnes des pivots il n'y a que des 0.

1 = pivot

Matrice Echelonnée réduite

La méthode du Pivot s'applique très bien sur les matrices car ces dernières sont des représentations des coefficients des systèmes linéaires

Remarque:

(i) Si on a m équations et n inconnues, et que le système est compatible, alors no. variables libres = n - (nbr de Pivot)

Alors • si n = (nbr de Pivot) => Solution unique
• si n > (nbr de Pivot) => infinité de solution

(ii) Si n > m, on a
nbr de pivot ≤ m < n
et il existe une infinité de solution

(iii) On dit qu'une matrice est équivalente à une autre par transformation élémentaire si on peut les transformer de l'une à l'autre avec les transformations (i), (ii) et (iii)

1.3 Géométrie Vectorielle :

Déf: Un vecteur consiste en :
• une intensité
• une direction
Représenté graphiquement par une flèche, de longueur égale à l'intensité.

Notation : $\vec{v}$ est un vecteur.

On peut munir le plan d'un point spécial qui est l'origine et considérer les flèches qui sont basées sur ce point. (l'origine)

Avec ces vecteurs, on peut:
• les additionner
• les multiplier par un réel (λ)
• ± la même direction
• l'intensité x $|\lambda|$

Notation : $(-1)\vec{v} = -\vec{v}$

Il y a un vecteur spécial de longueur 0 : $\vec{0}$

---

une matrice équivalente, matrice qui peut être transformée en une autre par +/-/·

Les vecteurs dans le plan.

BRUNNEN

(Suite)

Si on ajoute, dans le plan, des coordonnées cartésiennes, les vecteurs d'origine $(0;0)$ correspond aux éléments de $\mathbb{R}^2$.

$\vec{v}$: ⟶ coordonnées de la pointe de la flèche.

si je prends :

$(0;0) \longleftarrow (a_1;a_2)$

flèche de $(0;0)$ à $(a_1;a_2)$

Notation :

éléments de $\mathbb{R}^2$ (a_1, a_2)
vecteurs correspondant $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$

Remarque :

Addition et multiplication par un réel avec les coordonnées.

$$\vec{v} + \vec{w} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix} \quad \lambda\vec{v} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \end{pmatrix}$$

Propriété d'un espace vectoriel

Propriétés de l'addition et la multiplication par λ.

← ici la loi est notée "+" ne pas oublier qu'elle change suivant les espaces.

A^i) L'addition est associative :
$(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z}) \quad \forall \vec{x}; \vec{y}; \vec{z}$

A^{ii}) $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x} \quad \forall \vec{x}, \vec{y}$

A^{iii}) $\vec{x} + \vec{0} = \vec{x} \quad \forall \vec{x}$

A^{iv}) $\vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{0} \quad \forall \vec{x}$

B^i) $\lambda(\mu\vec{x}) = (\lambda\mu)\vec{x} \quad \forall \vec{x}, \forall \mu; \lambda \in \mathbb{R}$

B^{ii}) $(\lambda + \mu)\vec{x} = \lambda\vec{x} + \mu\vec{x} \quad \forall \vec{x}, \forall \mu, \lambda \in \mathbb{R}$

B^{iii}) $\lambda(\vec{x} + \vec{y}) = \lambda\vec{x} + \lambda\vec{y} \quad \forall \vec{x}; \vec{y}, \forall \lambda \in \mathbb{K}$

B^{iv}) $1 \cdot \vec{x} = \vec{x} \quad \forall \vec{x}$

Pourquoi ?

Pourquoi ces propriétés ?
Il existe 2 approches, la géométrique et l'algébrique, pour vérifier ces propriétés.

Un vecteur peut s'exprimer comme ses coordonnées ou comme une matrice colonne.

Propriétés des vecteurs

Algèbre I:

Dém:

B3) Soient $\vec{x}, \vec{y}$ des vecteurs et $\lambda \in \mathbb{R}$

On peut exprimer $\vec{x}$ et $\vec{y}$ en coordonnées.

$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ $\vec{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$

Donc $\lambda(\vec{x}+\vec{y}) = \lambda\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}\right)$

$= \lambda \begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \end{pmatrix}$ 1 par la déf de + en coordonnée

$= \begin{pmatrix} \lambda(x_1+y_1) \\ \lambda(x_2+y_2) \end{pmatrix}$ 2 par la multiplication par un nbr réel

$= \begin{pmatrix} \lambda x_1 + \lambda y_1 \\ \lambda x_2 + \lambda y_1 \end{pmatrix}$ par les nbr réels et leur propriétés

$= \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda y_1 \\ \lambda y_2 \end{pmatrix}$ 1. déf de +

$= \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ 2. déf de $\cdot \lambda$

$= \lambda \vec{x} + \lambda \vec{y}$

Ex: A_{1-4} et B_{1-2} et B_4

Généralisation: Généralisation à $\mathbb{R}^n$: similaire

$\mathbb{R}^n \leftrightarrow$ vecteurs basés à $(0, 0, \ldots, 0)$

Notation: $(a_1, \ldots, a_n)$ $\vec{v} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$

Exemple: avec $n = 3$

$P(a_1; a_2; a_3)$ $\vec{v} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$

Rem: Pour $n > 3$, la géométrie devient impossible à visualiser, mais l'algèbre fonctionne. Les vecteurs satisfont les propriétés A et B. Les arguments algébriques se généralise facilement.

L'algèbre s'intéresse à la généralisation de la géométrie à $\mathbb{R}^n$.

BRUNNEN

Droites et plans:

Une droite est définie par un point et une direction.

La droite $L = \{$ tous les pts de flèches de vecteurs de la forme $\vec{a} + \lambda\vec{d}, \lambda \in \mathbb{R}\}$

Autrement dit : $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ $\vec{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}$

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \Big/ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}, \ \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Ici λ est un paramètre et on appelle

$$\begin{cases} x_1 = a_1 + \lambda d_1 \\ x_2 = a_2 + \lambda d_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ x_n = a_n + \lambda d_n \end{cases}$$

les équations paramétriques de la droite.

$n = 2$: Dans $\mathbb{R}^2$, une droite peut être définie par 1 seule équation linéaire (e.g. cartésienne).

$\frac{d_1}{d_2}\frac{x_1}{d_1} - \frac{x_2}{d_2} = \frac{a_1}{d_1} - \frac{a_2}{d_2}$.

Pourquoi ?

On a $x_1 = a_1 + \lambda b_1$

$x_2 = a_2 + \lambda b_2$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{x_2 - a_2}{b_2}$$

$n = 3$ Dans $\mathbb{R}^3$, une seule équation linéaire définit un plan : $a_1 \neq 0$

$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b \quad a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$

On applique la méthode Pivot:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a_1 & a_2 & a_3 & b \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{a_2}{a_1} & \frac{a_3}{a_1} & \frac{b}{a_1} \end{array}\right)$$

Conclusions:

On a une variable principale: x_1

deux variables libres : x_2, x_3

Chaque variable libre corresp. à un paramètre $x_2 = s \quad x_3 = t$

$x_1 = \frac{b}{a_1} - \frac{a_2}{a_1}s - \frac{a_3}{a_1}t$

Alors $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b/a_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} -a_2/a_1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -a_3/a_1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

1 Point + 2 directions = Plan.

Les équations des droites dans le plan.

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_n \end{pmatrix} \Big/ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_n \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} \right\}$$

La Formation du plan.

1.4 Matrices:

Déf: Un tableau de nombre de taille $p \times n$ s'appelle une matrice de type p,n ou simplement une matrice $p \times n$, pour $p,n \in \mathbb{N}^*$
p : nbr de lignes n : nbr colonnes

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{p1} & & a_{pn} \end{pmatrix}$$

L'ensemble des matrices de type $p \times n$ se note $M_{p,n}(\mathbb{R})$

Ex:
$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & \pi & \sqrt{2} \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 5 & 7 & 0 & \pi \end{pmatrix} \in M_{3,4}(\mathbb{R})$$

Notation: Si A est une matrice, on écrit
A_{ij} = élément de la $i^{ème}$ ligne, $j^{ème}$ colonne.
ou $A = (a_{ij})$

Remarque: $M_{n,1}(\mathbb{R})$ peut être identifié avec l'ensemble des vecteurs dans $\mathbb{R}^n$ basés à l'origine.

Opération:

Opération sur les matrices:

Soit $A, B \in M_{p,n}(\mathbb{R})$, $\lambda \in \mathbb{R}$

- Addition. $A+B$ est définie par $(A+B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$
- Multiplication par $\lambda \in \mathbb{R}$: λA est la matrice définie par $(\lambda A)_{ij} = A_{ij} \cdot \lambda$
- Multiplication: Soit $A \in M_{p,n}(\mathbb{R})$ $B \in M_{n,q}(\mathbb{R})$
leur produit $A \cdot B \in M_{p,q}(\mathbb{R})$ est définie par :
$$(AB)_{ij} = A_{i1} \cdot B_{1j} + A_{i2} \cdot B_{2j} + \dots + A_{in} \cdot B_{nj} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} \cdot B_{kj}$$ j donné.

Les matrices, les opérations définies sur les matrices.

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} \cdot B_{kj}$$ i et j donnés.

BRUNNEN

Ex:

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 \\ 4 & 6 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 & 5 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

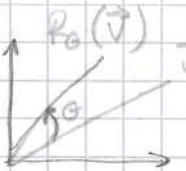
$$= \begin{pmatrix} -3 & 8 & 9 & -1 \\ 38 & -10 & 4 & 20 \end{pmatrix}$$

REM:

(i) Par tout p, u, q multiplication est une fonction :
$M_{p,u}(\mathbb{R}) \times M_{n,q}(\mathbb{R}) \longrightarrow M_{p,q}(\mathbb{R})$

(ii) Si $A \in M_{n,u}(\mathbb{R})$ et un vecteur $v \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ alors j'ai le droit de faire $A \cdot v$
$Av \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ = de nouveau un vecteur.
($n \times n$ pour obtenir la même dimension)

Ex:



Exprimer une rotation dans le plan en terme de matrice.
Soit r un vecteur dans le plan (origine $(0;0)$)
Soit R_θ, l'opération d'une rotation d'angle θ.

Si $\vec{r} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, exprimer $R_\theta(\vec{v})$ en coordonnée.

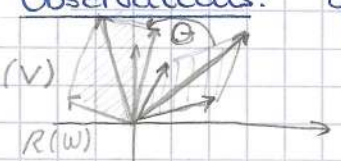
Est-ce qu'on peut trouver une matrice 2×2 telle que $R_\theta\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}\right) = A \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$

$R = R_\theta$

On peut multiplier vecteur et matrice
La rotation dans le plan sous forme de matrice.

Observations: géométrique

$R(W+V) = R(W) + R(V)$



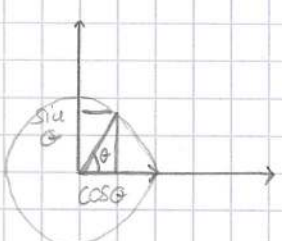
(i) $R(\vec{v} + \vec{w}) = R(\vec{v}) + R(\vec{w})$

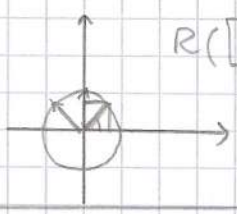
(ii) $R(\lambda \vec{v}) = \lambda R(\vec{v})$

Deux cas simples :

$$R\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix}$$

$$R\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix}$$





Dans un cas général:

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = a_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$R\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}\right) = R\left(a_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$= R\left(a_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) + R\left(a_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$= a_1 R\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) + a_2 R\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$= a_1 \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 \cos\theta - a_2 \sin\theta \\ a_1 \sin\theta + a_2 \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

=> rotation dans le plan donnée par la matrice 2x2.

Déf.

Quelques familles de matrices :

- $I_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$ matrice identité

$I_n \in M_{n,n}(\mathbb{R})$

$(I_n)_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

La matrice identité est l'élément neutre de la multiplication.

- Matrice de permutation

Déf.

$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{matrix}$ { Une bijection $\sigma : \{1,\dots,n\} \to \{1,\dots,n\}$ est appellée une permutation. }

Pour toute permutation σ, il y a la permutation inverse σ^{-1}

noté : $\sigma^{-1}(i) = j \iff i = \sigma(j)$

---

les matrices identité, de permutation (Bijection)

- Matrice de permutation :

Soit σ une permutation. La matrice permutation P_σ est la matrice obtenue à partir de I_n en appliquant la permutation à ses colonnes.

Ex : $P_\sigma = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\sigma(1)=2$ $\sigma(2)=3$ $\sigma(3)=1$

REM : (i) $(P_\sigma)_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } j=\sigma(i) \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$

(ii) Si $A \in M_{n,k}(\mathbb{R})$, $P \cdot A$ est la matrice obtenue à partir de A en appliquant σ^{-1} à ses lignes.

Ex : $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

- Matrices symétrique et anti-symétrique :

Déf : La transposée d'une Matrice $A \in M_{p,n}(\mathbb{R})$ est la matrice $A^t \in M_{n,p}(\mathbb{R})$ définie par :

$$(A^t)_{ij} = A_{ji}$$

Ex : $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$

2×3 $\quad$ 3×2

Prop :

(i) $(A^t)^t = A$

(ii) $(\lambda A)^t = \lambda A^t$

(iii) $(A+B)^t = A^t + B^t$

(iv) $(AB)^t = B^t \cdot A^t$

Matrices de permutation et matrices symétriques.

Dém:

(i) $((A^t)^t)_{ij} = (A^t)_{ji} = A_{ij}$

(ii) $((\lambda A)^t)_{ij} = (\lambda A)_{ji} = \lambda A_{ji} = \lambda (A^t)_{ij}$

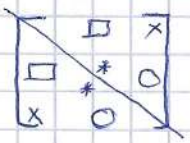
(iii) $((A+B)^t)_{ij} = (A+B)_{ji} = A_{ji} + B_{ji} = (A^t)_{ij} + (B^t)_{ij}$

(iv) voir série 2.

Déf:

- Une matrice carrée $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ est dite symétrique si $A^t = A$

  A est anti-symétrique si $A^t = -A$



ex: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & 7 & 6 \end{bmatrix}$

REM:

La diagonale principale d'une matrice anti-symétrique consiste en des 0.

Def:

- Matrices orthogonales:

$A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ est dite orthogonale si $AA^t = I_n$ et $A^tA = I_n$.

La transposée et ses axiomes.

Les matrices orthogonales. si $A \cdot A^t = I_n$ et $A^t \cdot A = I_n$

BRUNNEN

Déf:

(Axiomes des espaces vectoriels)

Propriétés des opérations matricielles:

Soit A, B, C des matrices $m \times n$ et soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

A1) $(A+B)+C = A+(B+C)$

A2) $A+B = B+A$

A3) $A+0 = A$

A4) $A+(-1)A = 0$

B1) $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$

B2) $(\lambda+\mu)A = \lambda A + \mu A$

B3) $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$

B4) $(1)\cdot A = A.$

Dém:

Vérification facile: utiliser les prop. habituelles des nbr réels.

Ex: A1) $((A+B)+C)_{ij} = (A+B)_{ij} + C_{ij} = A_{ij} + B_{ij} + C_{ij}$

$= A_{ij} + (B+C)_{ij} = (A+(B+C))_{ij}$

Proposition:

Soit A, B, C des matrices et $\lambda \in \mathbb{R}$

i) $I \cdot A = A = A \cdot I$

ii) $A \cdot (B+C) = AB + AC$

iii) $(A+B) \cdot C = AC + BC$

iv) $A \cdot (B \cdot C) = (AB) \cdot C$

v) $A(\lambda B) = \lambda AB = (\lambda A)B$

} si les tailles conviennent.

Propriétés des opérations matricielles.

DEM:

(iv) $A(BC) = (AB)C$

$A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, $B \in M_{n,p}(\mathbb{R})$, $C \in M_{p,q}(\mathbb{R})$

$$(BC)_{kj} = \sum_{l=1}^{p} B_{kl} C_{lj}$$

$$[A(BC)]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} (BC)_{kj}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{p} A_{ik} B_{kl} C_{lj}$$

toutes les valeurs sont prises en compte

$$= \sum_{l=1}^{p} \sum_{k=1}^{n} A_{ik} B_{kl} C_{lj}$$

Similaire:

$$[(AB)C]_{ij} = \sum_{l=1}^{p} \sum_{k=1}^{n} A_{ik} B_{kl} C_{lj}$$ ▨

Remarque:

Systèmes linéaires et équations matricielles:

$A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$

$x_1, \dots, x_n$ - inconnues $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{R})$

$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in M_{m,1}(\mathbb{R})$

Equation matricielle: $\underbrace{A}_{m \times n} \cdot \underbrace{X}_{n \times 1} = \underbrace{B}_{m \times 1}$

$$\begin{pmatrix} A_{i1} A_{i2} \cdots A_{in} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{i1} x_1 + \dots + a_{in} x_n \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} A_{11} x_1 + A_{12} x_2 + \dots + A_{1n} x_n \\ A_{21} x_1 + A_{22} x_2 + \dots + A_{2n} x_n \\ \vdots \\ A_{m1} x_1 + A_{m2} x_2 \cdots + A_{mn} x_n \end{aligned}\right\} \text{Système d'équation linéaire}$$

$AX = B$ (équivalent)

BRUNNEN

Ex :

$$\begin{aligned} 5x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\ 2x_2 - x_3 &= 1 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow AX = B$$

où $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

A est la matrice des coefficients.

Matrice augmentée :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \end{array}\right)$$

1.5 Application linéaire $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Déf :

Une application $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est dite linéaire ssi $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ + dans $\mathbb{R}^n$

(i) $L(x+y) = L(x) + L(y)$ + dans $\mathbb{R}^m$

(ii) $L(\lambda x) = \lambda L(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$

Ex :

$L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$L(x) = 2x$ est linéaire

(i) $L(x+y) = 2(x+y) = 2x + 2y$

$= L(x) + L(y)$

(ii) $L(\lambda x) = 2\lambda x = \lambda \cdot 2x = \lambda L(x)$

Ex :

$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x) = x^2$ n'est pas linéaire.

$x = 1$ et $y = 1$ $\quad f(1+1) = f(2) = 4$

$f(1) + f(1) = 2 \neq 4$

En général, $x^2 + y^2 \neq (x+y)^2$

Algèbre I :

Le 05.10.17

Ex : $R_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la rotation par l'angle θ

Cette application est linéaire.

$$\left.\begin{aligned} R_\theta(x+y) &= R_\theta(x) + R_\theta(y) \\ R_\theta(\lambda x) &= \lambda R_\theta(x) \end{aligned}\right\} \text{ avoir!}$$

Ex : $L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \longmapsto (x_2, x_3, x_4, x_1)$$

C'est une application linéaire.

Ex : $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \longmapsto (x_1 + x_3,\ 5x_3 - 4x_4)$$

(i) $g((x_1, x_2, x_3, x_3) + (y_1, y_2 \ldots))$

$= g[(x_1+y_1, \ldots)] = (x_1 + y_1 + x_3 + y_3,\ 5(x_3+y_3) - 4(x_4 + y_4))$

$= g(x) + g(y)$

(ii) Exo :

Ex : $\mathbb{R}^n = M_{n,1}(\mathbb{R})$

Soit $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, on définit une application $L_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ par $L_A\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}\right) = \underbrace{A}_{m \times n} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{n \times 1}$

Proposition : $\forall A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, on définit une application linéaire $L_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

L_A est linéaire

Dém : (i) $L_A(x+y) = A(x+y) = Ax + Ay = L_A(x) + L_A(y)$

(ii) $L_A(\lambda x) = A(\lambda x) = A\lambda x = \lambda A x = \lambda L_A(x)$.

BRUNNEN

Ex:

$n=4,\ m=2$

$$A=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&0&5&-4\end{pmatrix}$$

$$L_A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&0&5&-4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}x_1+x_2\\5x_3-4x_4\end{pmatrix}$$

Proposition 2:

Soit $L:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ une application linéaire, alors il existe une matrice $A\in M_{n,m}(\mathbb{R})$ tq $L=L_A$.
On dit que A représente l'application L.

Dém:

- Pour $j=1,\dots,n$ soit

$$e_j=\begin{bmatrix}0\\\vdots\\1\\\vdots\\0\end{bmatrix}\in M_{n,1}(\mathbb{R})$$

$M_{n,1}(\mathbb{R})=\mathbb{R}^n$

Le vecteur $L(e_j)\in\mathbb{R}^m=M_{m,1}(\mathbb{R})$

Notation: $L(e_j)=(L(e_j)_i)$ $i$ième ligne

- Définir A par

$$A_{ij}=L(e_j)_i \qquad A=\underset{m\times n}{\begin{bmatrix}L(e_1)&L(e_2)&\cdots&L(e_n)\\|&|&&|\end{bmatrix}}$$

On peut faire le calcul:

$$* \quad L_A(e_k)=A\cdot e_k=\begin{bmatrix}L(e_1)&\cdots&L(e_n)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\\vdots\\1\\\vdots\\0\end{bmatrix}\leftarrow k$$

(le seul élément qui survit est $L(e_k)_i$)

$$*=\begin{bmatrix}L(e_k)_1\\\vdots\\L(e_k)_m\end{bmatrix}=L(e_k)$$

- Soit $x=\begin{bmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^n$. A voir $L(x)=L_A(x)$

D'après la déf de "+" des vecteurs

$$x=\begin{bmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}=x_1\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}+\dots+x_n\begin{bmatrix}0\\\vdots\\0\\1\end{bmatrix}_n$$

$$=x_1e_1+x_2e_2+\dots+x_ne_n=\sum_{k=1}^{n}x_ke_k$$

parce que L linéaire:

Par suite $L(x)=L(\sum_{k=1}^{n}x_ke_k)=\sum_{k=1}^{n}x_kL(e_k)$

$$=\sum_{k=1}^{n}x_kL_A(e_k)^*$$

$$=L_A(\sum_{k=1}^{n}x_ke_k) \quad \text{par prop. 1.5.1}$$

$$=L_A(x)=L(x)$$

Algèbre I:

le 05.10.17.

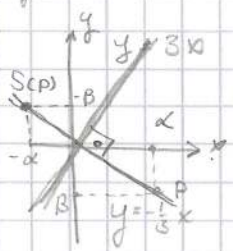
Remarque:

$M_{m,n}(\mathbb{R}) \to \{$Applications linéaires $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m\}$

$A \longmapsto L_A$

C'est une bijection.
Surjective : prop. 1.5.2
Injective : (Ex)

Ex:



Soit $S: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la réflexion dans la droite $y = 3x$

S est une application linéaire.
(argument géométrique)
Trouver la matrice qui la représente.

$$A = \left[S(e_1) \; S(e_2) \right]$$

Est-ce qu'il y a des vecteurs pour lesquels le calcul de S est facile?
Oui

① Alors pour $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ sur la droite perpendiculaire on a $S\left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -a \\ -b \end{bmatrix}$ Ex: $S\left(\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

② Pour $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ sur la droite j'ai $S\left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$

Est-ce qu'on peut écrire $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$?
On a un système linéaire:

$$\begin{aligned} 3\lambda_1 + \lambda_2 &= 1 \\ -\lambda_1 + 3\lambda_2 &= 0 \end{aligned} \qquad \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3/10 \\ 0 & 1 & 1/10 \end{array}\right]$$

Solution unique: $\lambda_1 = \frac{3}{10}$ et $\lambda_2 = \frac{1}{10}$

Donc $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = e_1 = \frac{3}{10}\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} + \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

Alors $S(e_1) = S\left(\frac{3}{10}\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} + \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}\right)$

$$= \frac{3}{10} S\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} + \frac{1}{10} S\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{3}{10}\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} -4/5 \\ 3/5 \end{bmatrix}$$

De manière similaire: $S(e_2) = \begin{pmatrix} 3/5 \\ 4/5 \end{pmatrix}$

La matrice qui représente S est:

$$A = \begin{pmatrix} -4/5 & 3/5 \\ 3/5 & 4/5 \end{pmatrix}$$

BRUNNEN

1.6 Matrices inversibles

Déf: Une matrice $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ carrée est dite inversible s'il existe $A' \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ tel que:

$$A \cdot A' = I \quad \text{et} \quad A' \cdot A = I$$

Ex: $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ inversible avec matrice inverse $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$

Dans la déf A' est la matrice inverse de A, noté A^{-1}

Algèbre I:

le 06.10.17

Ex: $A = \begin{bmatrix} -4 & 6 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$ n'est pas inversible

$$\begin{bmatrix} -4 & 6 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -4a + 6c = 1 \\ -4b + 6d = 0 \\ 2a - 3c = 0 \\ 2b - 3d = 1 \end{cases}$$

le système est incompatible, il n'y a pas de solution.

Prop:

Matrices inversibles:

Soit A et B des matrices inversibles

i) A^{-1} est unique: il existe une seule matrice qui est une solution des 2 équations $A \cdot X = I$ et $X \cdot A = I$

ii) A^{-1} est inversible avec $(A^{-1})^{-1} = A$

iii) $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} A^{-1}$ $\quad \lambda \neq 0$

iv) Le produit $A \cdot B$ est inversible, la matrice inverse $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

Dém:

i) Soit A^{-1} une solution de $A \cdot X = I$ et $X \cdot A = I$.
Soit C une deuxième solution.
$A \cdot C = C \cdot A = I$
A voir: $C = A^{-1}$
$C = C \cdot I = C \cdot (A \cdot A^{-1}) = (C \cdot A) \cdot A^{-1}$
$= I \cdot A^{-1} = A^{-1}$

ii) et iii facile à vérifier.

iv) $(A \cdot B)(B^{-1} \cdot A^{-1}) = A \cdot (B \cdot B^{-1}) \cdot A^{-1}$
$= A \cdot I \cdot A^{-1} = A \cdot A^{-1} = I$

$(B^{-1} \cdot A^{-1})(B \cdot A) = \ldots = I$
A B

BRUNNEN

Rem:

i) $AX = B$ est un système linéaire à n équation et n inconnues et A inversible alors
$$X = A^{-1} \cdot B$$

ii) Si $L_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est l'application associée à $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ et A est inversible alors:
$L_{A^{-1}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est l'application réciproque de A.
($L_B \cdot L_A = L_{BA}$) Exercices.

Proposition:

Soit $A, B, C \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ avec A inversible.
t.q. $A \cdot B = C$
Alors soit B et C sont toutes les 2 inversibles soit elles ne le sont pas.

Dém:

C'est équivalent à

C inversible $\Leftrightarrow$ B inversible.

$\Rightarrow$: On a C inversible, on va montrer que $C^{-1} \cdot A$ est matrice inverse de B.

$$(C^{-1} \cdot A) \cdot B = C^{-1}(A \cdot B) = C^{-1} \cdot C = I$$

On a $A \cdot B = C \Rightarrow A^{-1} \cdot AB = A^{-1} \cdot C$
$\Rightarrow B = A^{-1} \cdot C$

Alors $B \cdot C^{-1} \cdot A = A^{-1} \cdot C \cdot C^{-1} \cdot A = A^{-1} \cdot I \cdot A = I$

L'autre sens est similaire.

Algorithme:

Trouver l'inverse d'une matrice:

- Considérer $[A \mid I]$
- Transformer A en matrice échelonnée réduite (Méthode du pivot)
- A est inversible si on obtient une matrice de la forme $[I \mid A^{-1}]$

Exemple:

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} = A$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 5 & 1 & 0 \\ 4 & 7 & 0 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 5/3 & 1/3 & 0 \\ 4 & 7 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 5/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 & -4/3 & 1 \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 7 & -5 \\ 0 & 1 & -4 & 3 \end{array}\right) \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -5 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$$

Les matrices élémentaires:

Rappel: Les transformations élémentaires d'une matrice, échanger, multiplier, soustraire et additioner des lignes.

une matrice A et équivalente à une matrice B ($A \sim B$) si on peut utiliser les transformations élémentaires pour changer / transformer A en B.

Déf:

Matrices $n \times n$

1) $P_{k,l}$ est la matrice obtenue en échangeant les colones k et l de l'I_n.

2) $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $S_k(\lambda)$ est la matrice obtenue en multipliant la ligne k de S par λ

3) $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $M_k(L;\lambda)$ est la matrice obtenue à partir de l'identité en remplacant la ligne k par la somme de ligne k et $\lambda \cdot$ ligne l.

On appelle ces matrices, matrices élémentaires

Prop: Multiplication

$P_{k,l} \cdot A$ = échange les lignes k et l

$S_k(\lambda) \cdot A$ = multipie la ligne k de A par λ

$M_k(L;\lambda) \cdot A =$ 3)

BRUNNEN

Dém: Exercices.

Corollaires: $A, B \in M_{n,p}(\mathbb{R})$

$A \sim B \iff$ il existe des matrices élémentaires $E_1, \dots, E_k$ tq. $E_k, E_{k-1}, \dots E_1 \cdot A = B$.

Prop: une matrice élémentaire est inversible et son inverse est une matrice élém. du même type.

Dém: Vérification directe.

Prop: $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$

A est inversible $\iff$
A est équivalente à I

Dém: $\Leftarrow$: Puisque A est équivalente à I
il existe des matrices élémentaires
t.q. $E_k \dots E_1 \cdot A = I$

Définir $\underline{E} = E_k, \dots E_1$

Donc on a $\underline{E} \cdot A = I$

$\underline{E}$ est inversible car $E_k \dots E_1$
sont inversibles et élémentaires,
Le produit aussi.
La matrice I est inversible
donc A est inversible.

$\Rightarrow$: Utiliser la méthode du pivot pour transformer A en matrice échelonnée réduite B.

Toute transformation utilisée correspond à une matrice élémentaire.
Donc on peut écrire $\underline{E} \cdot A = B$
Puisque E inversible et par hypothèse A est inversible, donc B est inversible.

Regarder Série 3 Ex 6: la seule matrice échelonnée réduite et inversible est l'identité.
Alors $B = I$ $EA = I \Rightarrow A \sim I$

le 06.10.17

Corrolaire: Si $E_k \cdots E_1 \cdot A = I$, alors $A^{-1} = E_k \cdots E_1$

Explication: Algorithme pour trouver la matrice inverse:

A inversible $\Longleftrightarrow$ $A \overset{\text{Pivot}}{\rightsquigarrow} I$

$\Longleftrightarrow$ $E_k \cdots E_1 \cdot A = I$

Alors: $E_k \cdots E_1 [A \mid I]$

$= [E_k \cdots EA \mid E_k \cdots EI] = [I \mid A^{-1}]$

---

le 12.10.17

Chapitre 2: Nombres Complexes et $\mathbb{C}^n$

2.1 Nombres Complexes:

$\underbrace{x^2 + 1}_{>0} = 0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$

Définition: Il existe un ensemble $\mathbb{C}$ muni d'opérations + et · avec les propriétés suivantes:

(i) $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

(ii) $\mathbb{C}$ contient i tel que $i \notin \mathbb{R}$ et $i \cdot i = -1$

(iii) les éléments de $\mathbb{C}$, s'écrivent de façon unique, de la forme $a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$

(iv) Si $z = a + i \cdot b$, $w = c + id$

$z + w = a + c + i(b + d)$

$z \cdot w = (ac - bd) + i(ad + bc)$

Pour $z = a + ib$

a - La partie réelle de z $Re(z)$

b - la partie imaginaire $Im(z)$

$\mathbb{C}$ - l'ensemble des nombres complexes

$\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus 0 \rightsquigarrow 0 + i \cdot 0$

Ex: $(1 + 2i)(3 - i) = 3 - i + 6i + 2$

$= 5 + 5i$

BRUNNEN

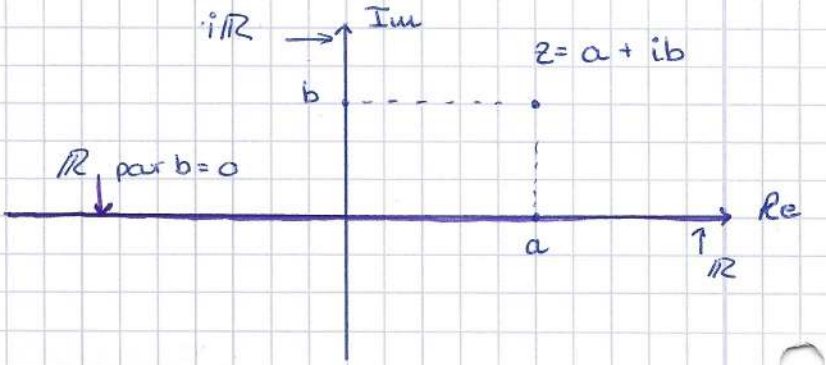
Remarque:

(i) $a + ib = c + id \iff a = c \wedge b = d$

(ii) mêmes que $\mathbb{R}$
→ addition, multiplication, distributivité.

(iii) Il y a un ordre ($\leq$) total sur $\mathbb{R}$, mais pas sur $\mathbb{C}$.

Chaque nombre complexe correspond à un point dans le plan cartésien.



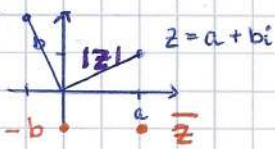
Ex:

Soit $z \in \mathbb{C}$. Dans le plan complexe iz est obtenu de z par une rotation ($\circlearrowleft$) par $\frac{\pi}{2}$

Ecrire $z = a + bi$. Alors $iz = i \cdot a + i^2 b = -b + ai$

Rappel:

$$R_{\frac{\pi}{2}}\left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a\cos\frac{\pi}{2} - b\sin\frac{\pi}{2} \\ a\sin\frac{\pi}{2} + b\sin\frac{\pi}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b \\ a \end{bmatrix}$$



Remarque:

La multiplication par i effectue une rotation par $\frac{\pi}{2}$.

Définition:

Soit $z \in \mathbb{C}$, $z = a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$

(i) Le conjugué de z, noté $\bar{z}$, est le nombre complexe $\bar{z} = a - ib$.

(ii) Le module de z est le nombre réel non-nul
$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Algèbre I: Le 12.10.17

$i\mathbb{R}$ = axe vertical

Propositions: Soit $z, z' \in \mathbb{C}$

1) $\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$
2) $Re(z) = (z+\overline{z}) : 2$
3) $i\,Im(z) = (z-\overline{z}) : 2$
4) $z \in \mathbb{R} \iff \overline{z} = z$
5) $z \in i\mathbb{R} \iff \overline{z} = -z$
6) $\overline{\overline{z}} = z$
7) $\overline{z \cdot z'} = \overline{z} \cdot \overline{z'}$

Dém: Ecrire $z = a + ib$, $z' = c + id$

1) $z + z' = a + c + i(b+d)$
$\overline{z+z'} = a + c - i(b+d)$
$\overline{z} + \overline{z'} = a - ib + c - id = a + c + i(-b-d)$
$= a + c - i(b+d)$
$= \overline{z+z'}$

2) $(z+\overline{z}) : 2 = \dfrac{a+ib+a-ib}{2} = a = Re(z)$

Propriétés: Soit $z, z' \in \mathbb{C}$

1) $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$
2) $|z| = 0 \iff z = 0$
3) $|z \cdot z'| = |z| \cdot |z'|$
4) $|\overline{z}| = |z|$
5) $|Re(z)| \leq |z|$ et $|Im(z)| \leq |z|$ (valeur absolue)

Dém: Ecrire: $z = a + ib$ et $z' = c + id$.

1) $|z|^2 = a^2 + b^2$
$z \cdot \overline{z} = (a+ib)(a-ib) = a^2 + aib - aib + b^2 = a^2 + b^2 = |z|^2$

2) $|z| = 0 \iff \underbrace{a^2 + b^2}_{\geq 0} = 0$ donc $a^2 - b^2 = 0 = a = b$ et $z = 0$

Proposition: Soit $z, w \in \mathbb{C}$

$|z+w| \leq |z| + |w|$

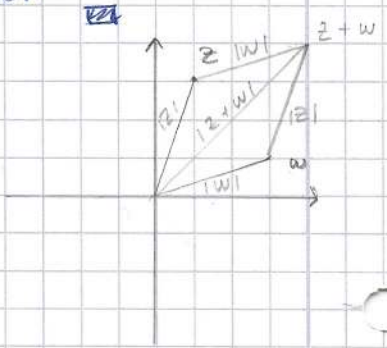
Dém:

$$\begin{aligned}|z+w|^2 &= (z+w)(\overline{z+w}) \\ &= (z+w)(\bar{z}+\bar{w}) \\ &= z\cdot\bar{z} + w\cdot\bar{w} + z\bar{w} + w\bar{z} \\ &= |z|^2 + |w|^2 + z\bar{w} + \overline{(z\bar{w})} \\ &= |z|^2 + |w|^2 + 2\mathrm{Re}(z\bar{w}) \leq |z|^2 + |w|^2 + 2|z\bar{w}| \\ &= |z|^2 + |w|^2 + 2|z||w| \\ &= (|z| + |w|)^2\end{aligned}$$

Puisque $|z+w|$ et $|z|+|w|$ sont positifs, et racine carrée est croissante, on peut conclure

$$|z+w| \leq |z| + |w|$$

∎



Remarque: **Inégalité du triangle**

$$|z+w| \leq |z| + |w|$$

Division des nbr complexes

proposition: Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$
$\exists z^{-1} \in \mathbb{C}$ t.q $z \cdot z^{-1} = 1$

Dém: Prendre $z^{-1} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2}$

Alors $z \cdot z^{-1} = z \cdot \dfrac{\bar{z}}{|z|^2} = \dfrac{|z|^2}{|z|^2} = 1$ ∎

Déf: $\dfrac{z}{w} = z \cdot w^{-1}$

Ex: $\dfrac{4-2i}{1+i} = (4-2i)(1+i)^{-1}$ où $(1+i)^{-1} = \dfrac{(1-i)}{2}$

$= (4-2i)\left(\dfrac{1-i}{2}\right)$

$= \ldots$ etc

Remarques:

i) $z/w = \dfrac{z}{w} \cdot \dfrac{\bar{w}}{\bar{w}} = \dfrac{z\cdot\bar{w}}{w\bar{w}} = \dfrac{z\cdot\bar{w}}{|w|^2}$

ii) $|z^{-1}| = \dfrac{1}{|z|}$ ($z \cdot z^{-1} = 1 \Rightarrow |z \cdot z^{-1}| = 1$
$\Rightarrow |z| \cdot |z^{-1}| = 1$)

Le 12.10.17.

2.2 Equations polynomiales d'une variable complexe

Déf. Polynôme complexe de degré d est une expression de la forme suivante :

$$a_d z^d + a_{d-1} z^{d-1} + \dots + a_1 z^1 + a_0 z^0$$

où $a_i \in \mathbb{C}$ et $a_d \neq 0$

Ex: $iz^2 - (z+i)z - 5i$

L'équation : $z^2 + 1 = 0$ à deux solutions dans $\mathbb{C}$

$z = i$ et $z = -i$

Proposition: • Soit $w \in \mathbb{C}^*$, Il existe exactement 2 solutions à l'équation $z^2 = w$

Le 13.10.17.

Notation: $\mathbb{C}_n[X]$ - l'ensemble des polynômes complexes de degré $\leq n$.

Dém: • $w = a + ib$ (a fixé, b inconnues), car $w \in \mathbb{C}$, $z = x + iy$

$z^2 = w \Rightarrow x^2 - y^2 + 2ixy = a + ib$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases} \qquad 1 \cdot x^2$$

Alors, $x^4 - x^2y^2 - x^2a = 0$

$\Rightarrow x^4 - ax^2 - \frac{b^2}{4} = 0$

Posons $t = x^2$:

$t^2 - at - \frac{b^2}{4} = 0$

$\Rightarrow t = \frac{a \pm \sqrt{a^2+b^2}}{2}$ on sait que $\frac{a - \sqrt{a^2+b^2}}{2} < 0$

et $\frac{a + \sqrt{a^2+b^2}}{2} \geq 0$

Puisque $t = x^2 \geq 0$ nous cherchons la solution $\frac{a + \sqrt{a^2+b^2}}{2}$ et donc $x = \pm \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2+b^2}}{2}}$

Si $x \neq 0$, alors $y = \frac{b}{2x}$

Si $x = 0$, alors $a < 0$ et $b = 0$

$y = \pm \sqrt{-a}$ ∎

BRUNNEN

Corollaire : $a, b, c \in \mathbb{C}$ $a \neq 0$

alors l'équation $az^2 + bz + c = 0$ admet toujours deux solutions dans $\mathbb{C}$ (possiblement confondues) :

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{\omega}}{2a} \quad \text{où } \omega = b^2 - 4ac$$

Théorème : *Théorème fondamental de l'algèbre :*

Soit $d \in \mathbb{N}^*$ et $a_0, \dots, a_d \in \mathbb{C}$
$a_d \neq 0$
alors l'équation

$$a_d z^d + a_{d-1} z^{d-1} \dots + a_0 = 0$$

admet une solution au moins.

Dém : Analyse complexe

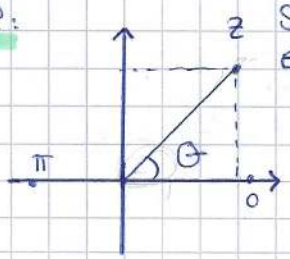
Rem :

① Une telle équation admet précisément d solutions (comptées avec répétition.)

② Si $a_0 \dots a_d \in \mathbb{R}$ et z est une solution alors $\bar{z}$ aussi.

2.3 Argument et forme polaire :

Déf : Soit $z \in \mathbb{C}$. L'*argument principal* de z est l'angle $\theta \in (-\pi ; \pi]$ noté ici :



Déf : Un *argument* de z est un nombre de la forme $\theta + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$
θ l'argument princ.

le 13.10.17

Algèbre I :

petit théorème

Lemme: Soit $z \in \mathbb{C}$. Si θ arg. principal et r module alors

$$z = r[\cos(\theta) + i \cdot \sin\theta] \qquad (r = |z|)$$

On dit <u>forme polaire</u>

Notation: $a \equiv b$ pour dire $a = b + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$

Proposition: Soient $z, z' \in \mathbb{C}$. Pour tout argument $\arg(z)$ et $\arg(z')$ de z et z'.

(i) $\arg(z \cdot z') \equiv \arg(z) + \arg(z')$

(ii) $\arg(xz) \equiv \arg(z)$ $\quad x \in \mathbb{R}^+$

(iii) $\arg(\bar{z}) \equiv -\arg(z)$

(iv) $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv \arg(z) - \arg(z')$

Dém: Exercices (utiliser pour 1) formules sommes cos et sin de 2 angles)

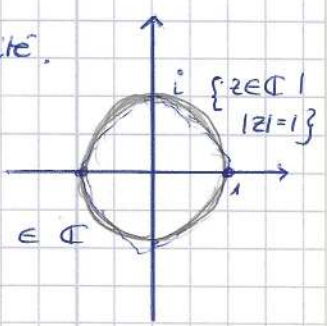
Corollaire: Si on écrit $z = r[\cos\theta + i\sin\theta]$
Alors
$$z^n = r^n[\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)]$$

Dém:
$$|z^n| = |z|^n = r^n$$
$$\arg(z^n) \equiv n \arg(z)$$

<u>Racines de l'unité</u> :

Déf: Un nombre complexe w tq $w^n = 1$ est une n-ième racine de l'unité.

Rem: si $w^n = 1$ alors $|w| = 1$



Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Pour $k = 0, 1, \ldots n-1$ définir: $U_k = \cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi k}{n}\right) \in \mathbb{C}$

Ex: $n = 2$ $\quad U_0 = 1$, $U_1 = -1$

$n = 3$ $\quad U_0 =$ $U_1 =$ $U_2 =$ (Divise le cercle en 3)

BRUNNEN

Propositiau:

(i) $U_k^n = 1$

(ii) L'ensemble de n-ème racines de l'unité $= \{U_0, U_1, \dots U_n\}$

Deu:

1) corollaire 2.3.1
2) Nous avons trouvé les n solutions et elles sont toutes différentes par l'équation $z^n = 1$. Par le théorème principal de l'algèbre, il y a au max de n solution. ▨

[Une part de cercle a un angle de $\frac{2\pi}{n}$]

2.4 Systèmes linéaires complexes:

Comme ch. 1 et on remplace $\mathbb{R}$ par $\mathbb{C}$

Ex:

$$z_1 + (2+i) z_2 + i z_3 = 1 - i$$
$$i z_1 + (3-i) z_2 + z_3 = 2 + i$$

On cherche des solutions complexes.
Pivot: exactement comme avant,

Ex:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2+i & i & 1-i \\ i & 3-i & 1 & 2+i \end{array}\right)$$
$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & 1 & \cdots & \cdots \end{array}\right)$$

z_3 est une variable libre $z_3 = t$ $t \in \mathbb{C}$

2.5 $\mathbb{C}^n$

$\mathbb{C}^2 = \{(z_1, z_2) \mid z_1, z_2 \in \mathbb{C}\}$

$\mathbb{C}^n = \{(z_1, \dots z_n) \mid z_1 \dots z_n \in \mathbb{C}$

Opérations: addition (même chose réel)
multiplier par un complexe (même)
$\lambda(z_1 \dots z_n) = (\lambda z_1, \dots \lambda z_n)$ $\lambda \in \mathbb{C}$

Ces opérations satisfont: pour $u, v, w \in \mathbb{C}^n$ et $\mu, \lambda \in \mathbb{C}$
$A_1, A_2, A_3 \dots$ comme $\mathbb{R}^n$

2.6 Matrices complexes :

$M_{p,n}(\mathbb{C})$, tableaux de nombres complexes

Rem : Les matrices $M_{p,n}(\mathbb{R}) \subset M_{p,n}(\mathbb{C})$ ($\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$)

Opérations :

Addition, multiplication : comme avant.

Ex :
$$\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Rem : On peut identifier $\mathbb{C}^n = M_{n,1}(\mathbb{C})$

Proposition :

- Voir prop. 1.4.1 et $\mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{C}$:
  $(A_1 - A_4)(B_1 - B_4)$ Pour les matrices.
- Voir prop. 1.4.2 et $\mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{C}$
  $(A(B+C)) = AB + AC$ (Ex).

Résultats sur les matrices inverses $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$

Ex :
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2i & i+1 \\ 1 & 3i & i \\ 0 & 1+i & -1 \end{bmatrix} \quad A^{-1} \text{ existe ?}$$

$[A \mid I] \to [I \mid A^{-1}]$ (pivot)

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & & 1-4i & 4i & 1-3i \\ 0 & 1 & & 1 & -1 & 1 \\ & & 1 & i+i & -i-1 & i \end{array}\right] \leftarrow A^{-1}$$

Déf : Pour $A \in M_{n,p}(\mathbb{C})$, la matrice conjuguée $\bar{A}$ est définie par :
$$(\bar{A})_{ij} = \bar{A}_{ij}.$$

Et la matrice adjointe, A^* est définie par
$$(\bar{A})^t = A^*$$

BRUNNEN

Propositions : $A \in M_{n,p}(\mathbb{C})$, $B \in M_{p,m}(\mathbb{C})$

1) si $\bar{A} = A \Rightarrow A \in M_{n,p}(\mathbb{R})$
2) $\overline{A \cdot B} = \bar{A} \cdot \bar{B}$
3) $(A^*)^* = A$
4) $(AB)^* = B^* \cdot A^*$

Dém 1-3 Exercices.

4) $(AB)^* = (\overline{AB})^T = (\bar{A} \cdot \bar{B})^T = \bar{B}^T \cdot \bar{A}^T = B^* \cdot A^*$

Algèbre I

le 19.10.17

Proposition 2.6.4 : $A \in M_{n,n}(\mathbb{C})$,

A est inversible $\Leftrightarrow$ A^* inversible

Dans ce cas : $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$

Dém : ($\Rightarrow$) A inversible, $\exists A^{-1}$ tq $A \cdot A^{-1} = I = A^{-1} \cdot A$

Alors, $(AA^{-1})^* = I^* = (A^{-1} \cdot A)^*$

donc $(A^{-1})^* \cdot A^* = I = A^* \cdot (A^{-1})^*$

$\Rightarrow A^*$ inversible et $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$ ▨

($\Leftarrow$) Utiliser $(A^*)^* = A$ (le même argument s'applique)

Deux familles intéressantes :

$A \in M_{n,n}(\mathbb{C})$

(i) A unitaire si $A \cdot A^* = A^* \cdot A = I$

unitaire $\Rightarrow$ inversible et $A^{-1} = A^*$

(ii) A hermitienne si $A^* = A$

2.7 Appliquations linéaires $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$

Déf: $L: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ est linéaire si:

(i) $L(u+v) = L(u) + L(v) \quad \forall u, v \in \mathbb{C}^n$
(ii) $L(\lambda u) = \lambda L(u) \quad \forall u \in \mathbb{C}^n, \lambda \in \mathbb{C}$

Ex: $L: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$
$z \mapsto iz$ est linéaire.

Ex: $A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$

On peut définir $L_A: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ par

$M_{n,1}(\mathbb{C})$ //

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_n \end{bmatrix} \longmapsto A \begin{bmatrix} z_1 \\ z_n \end{bmatrix}$$

Remarque: $M_{m,n}(\mathbb{C}) \longleftrightarrow \{\text{Applic. linéaire } \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n\}$

BRUNNEN

Chapitre 3: Espaces vectoriels (e.v)

3.1 Définition et exemples:

Déf: Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ consiste en un ensemble V muni de deux applications:

$V \times V \to V$
$(v_1, v_2) \longmapsto v_1 + v_2$ additions

$\mathbb{K} \times V \to V$
$(\lambda, v) \longmapsto \lambda v$ multiplications par scalaires

qui vérifient: $\forall x, y, z \in V$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$

A_1) $(x+y)+z = x+(y+z)$
A_2) $x+y = y+x$
A_3) $\exists 0_V \in V$ tq $\forall x \in V$ $x + 0_V = x$ (élément neutre)
A_4) $\forall x \in V$ $\exists -x$, élément opposé de x tq $x + (-x) = 0_V$

B_1) $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$
B_2) $(\lambda+\mu)x = \lambda x + \mu x$
B_3) $\lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y$
B_4) $1x = x$ $1 \in \mathbb{K}$ (élément neutre)

Les Axiomes d'un espace vectoriel.

Ex:

(i) a. $V = \mathbb{R}^n$ est un espace vectoriel / $\mathbb{R}$ avec opérations:
$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1+y_1, \dots, x_n+y_n)$
$\lambda(x_1, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$
$0_V = (0; 0; \dots; 0)$ $\quad -x = (-x_1, \dots, -x_n)$

Exercices vérification des axiomes

b. $V = \mathbb{C}^n$ est un espace vectoriel / $\mathbb{C}$ - mêmes opérations.

(ii) $V = M_{p,n}(\mathbb{K})$ est un e.v. sur $\mathbb{K}$
Opérations: additions matrices et multiplication par scalaire.
$0_V = [0]$ $\quad (-A)_{ij} = -(A_{ij})$ Prop. 1.4.2 ($\mathbb{R}$) 2.6... ($\mathbb{C}$)

Ex: (iii) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $V = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0\}$

Opérations: les mêmes que pour $\mathbb{R}^3$

Vérification:

D'abord, vérifier que $\oplus : V \times V \to V$

(+ est une opération close)

Soit $x, y \in V$ $\quad x = (x_1, x_2, x_3)$ et $y = (y_1, y_2, y_3)$

$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$

On a $2x_1 + 2y_1 + x_2 + y_2 + 3x_3 + 3y_3 = 0$

$2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2y_1 + y_2 + 3y_3 = 0$

$0 + 0 = 0$

Alors $x + y \in V$ et + est close

Similaire: $\mathbb{R} \times V \to V$ est close.

A_1) A_2) déduit des mêmes propriétés.

A_3) $2 \cdot 0 + 0 + 3 \cdot 0 = 0$ alors $(0,0,0) \in V$

Prendre $0_V = (0,0,0)$

A_4) Si $(x_1, x_2, x_3) \in V$

$2(-x_1) + (-x_2) + 3(-x_3) = -(2x_1 + x_2 + 3x_3) = 0$

Donc $-x = (-x_1, -x_2, -x_3) \in V$.

B_1) - B_4): propriétés directes de $\mathbb{R}^3$.

(iv) a $\mathbb{R}_n[x] = \{a_0 + a_1 x^1 + \ldots + a_n x^n \mid a_i \in \mathbb{R}\}$

est un espace vectoriel (polynôme $\deg \leq n$)

sur $\mathbb{R}$ pour les opérations

$(a_0 + a_1 x^1 + \ldots a_n x^n) + (b_0 + b_1 x^1 + \ldots b_n x^n) = (a_0 + b_0 + [a_1 + b_1]x + \ldots [a_n + b_n]x^n$

$\lambda(a_0 + \ldots + a_n x^n) = \lambda a_0 + \ldots + \lambda a_n + x_n$.

élément neutre: $0 \in \mathbb{R}_0[x] = \mathbb{R}$

Opposé: $a_0 + \ldots + a_n x^n$, $-a_0 + (-) \ldots + (-a_n x^n)$

b $\mathbb{C}_n[x]$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ pour les mêmes opérations.

Remarque: $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ $\quad \mathbb{K}[x]$ = ensemble de polynômes de tous les degrés possibles.

$\mathbb{K}[x]$ est aussi un espace vect. sur $\mathbb{K}$ de manière similaire.

BRUNNEN

Ex (v) $V = F([0,1], \mathbb{R})$ - l'ensemble de fonctions $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, pour les opérations:

- $f, g \in F([0,1], \mathbb{R})$
  $f+g : [0,1] \to \mathbb{R}$
  $x \longmapsto f(x) + g(x)$ (somme de 2 réels)
- $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f \in F([0,1], \mathbb{R})$
  $\lambda f : [0,1] \to \mathbb{R}$
  $x \longmapsto \lambda f(x)$
- élément neutre : La fonction constante nulle
- opposé de f: $-f: [0,1] \to \mathbb{R}$
  $x \longmapsto -f(x)$

(vi) $F(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ - l'ensemble de fonctions $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$
$(f+g)(z) = f(z) + g(z)$
$(\lambda f)(z) = \lambda f(z)$ $\lambda \in \mathbb{C}$

(vii) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$
Opérations :
$\oplus : V \times V \to V$
$x \oplus y = x \cdot y$
$\odot : \mathbb{R} \times V \to V$
$\lambda \odot x = x^{\lambda}$ est un espace vect. / $\mathbb{R}$
Exo: trouver l'élément neutre les opposés et les axiomes

(viii) $V = \{$ Suite de nombres $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, $x_i \in \mathbb{R}\}$ est un esp. vect sur $\mathbb{R}$
$\{x_i\} + \{y_i\} = \{x_i + y_i\}$
$\lambda \{x_i\} = \{\lambda x_i\}$

Le 19.10.17

Proposition 3.1.1 : Dans un e.v V sur $\mathbb{K}$ — Propriétés de base

i) $v + v = v \iff v = 0_V$
ii) $0_K v = 0_V \quad \forall v \in V$
iii) $\lambda 0_V = 0_V \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}$
iv) $(-\lambda)v = -(\lambda v) = \lambda(-v) \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, v \in V$
v) $\lambda v = 0_V \Rightarrow \lambda = 0$ ou $v = 0_V$
vi) $\lambda v_1 = \lambda v_2$ et $\lambda \neq 0$ alors $v_1 = v_2$
vii) $\lambda_1 v = \lambda_2 v$ et $v \neq 0_V$ alors $\lambda_1 = \lambda_2$

Dém :

i) ($\Leftarrow$) $v = 0_V \quad 0_V + 0_V = 0_V \quad A_3)\ x = 0_V$
($\Rightarrow$) $A_4)$ il existe $-v \in V$ tq $v + (-v) = 0_V$
Alors $v + v = v \Rightarrow -v + v + v = v + (-v)$
$\Rightarrow v + 0_V = 0_V \Rightarrow v = 0_V$

ii) $0v + 0v = (0+0)v = 0v$ (i)
$0v + 0v = 0v = 0_V$

Le 20.10.17

3.2 Sous-espaces :

Déf : Soit $(V, +, \cdot)$ un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Un sous-espace est un sous-ensemble non-vide $W \subseteq V$ pour lequel la restriction de $+$ et $\cdot$ à W, fait de W un espace vect.

Remarque : Pour montrer W sous-espace, il faut montrer que les opérations sont closes et que W est un esp. vect, soit.
1) $x, y \in W \Rightarrow x + y \in W$
2) $\lambda \in \mathbb{K}, x \in W \Rightarrow \lambda x \in W$
+ Axiomes $A_1 \to A_4$ et $B_1 \to B_4$

Proposition : Soit V un espace vect. Un sous ensemble $W \in V$ est un ~~sous-ensemble~~ ssi → sous espace vectoriel
1) $W \neq \emptyset$
2) $x, y \in W \to x + y \in W$
3) $\lambda \in \mathbb{K}, x \in W \to \lambda x \in W$.

$-x$ et $0_V \in W$

BRUNNEN

Dém: Puisque tout élément de W est élément de V, alors $A_1, A_2, B_1, B_2, B_3, B_4$ sont satisfaits.

A_3 (Existence de l'élément neutre)
Il faut montrer que $O_V \in W$.
Puisque $W \neq \emptyset$ il existe $x \in W$
Prop. 3.1.1(ii) $\Rightarrow$ $O_V = 0 \cdot x$ dans V
Mais par ② (ii) $0 \cdot x \in W$ parce que $\lambda = 0$
Et $0 \cdot x = O_V$ donc $O_V \in W$.

A_4 (existence d'un opposé)
Il faut Mq pour $x \in W$, son opposé dans V $-x \in W$.
On a Prop. 3.1.1 (iv) $(-1) \cdot x = -x$ et $\lambda = -1 \in \mathbb{K}$ et $x \in W$
Donc $(-1) \cdot x = -x \in W$ ▨

Ex:

1) Soit U l'ensemble de solution d'un système linéaire homogène à n inconnue(s). U est un sous-espace de $\mathbb{K}^n$.

Dém: Système compatible $\Rightarrow$ non-vide $[U \neq \emptyset]$
Un tel système linéaire homogène s'exprime : $A \cdot X = O \rightarrow$ [§]
Ensemble non-nul $\rightarrow$ j'ai toujours $x = 0$ toujours solution
(i) Soit S, S' des solutions $[A \cdot S = 0$ et $A \cdot S' = 0]$
$A[S + S'] = A \cdot S + AS' = 0 + 0 = 0$
(ii) $A[\lambda S] = A\lambda S = \lambda AS = \lambda[AS] = 0$.
$S + S'$ solution $(\in U)$
λS " $(\in U)$ ⌟

2) ⓐ $C^1([0,1], \mathbb{R})$ les fonctions différentiables/dérivables $f : [0,1] \to \mathbb{R}$
Ceci est un sous-espace de $F([0,1], \mathbb{R})$

Dém : 1) $\neq \emptyset$ ✓ il existe des fonctions
2) Grâce aux résultats d'analyse. dérivable
Si f et g dérivable alors $f+g$ aussi et même chose pour λf. ⌟

ⓑ $C^n([0,1], \mathbb{R})$ n fois dérivables
Sous-espace

C^0 = fonction continu

Ex : 3) V ev sur $\mathbb{K}$. $x \in V$ et $x \neq 0$
$W = \{ y \in V \mid y = a \cdot x \text{, pour un certain } a \in \mathbb{K} \}$

W est un sous-espace de V.

- $W \neq \emptyset$ $\quad x \in W$ pour $a = 1$
- $y_1, y_2 \in W$, alors $\exists\, a_1, a_2 \in \mathbb{K}$
  $y_1 = a_1 x$ et $y_2 = a_2 x$
  $y_1 + y_2 = \underbrace{(a_1 + a_2)}_{\in \mathbb{K}} x = a_1 x + a_2 x \in W.$
- $\lambda y_1 = \lambda a_1 x = \underbrace{\lambda a}_{\in \mathbb{K}} \cdot x \in W.$

Déf : Plus généralement :
$x_1, x_2, \dots, x_p \in V$
Le sous-espace engendré par $S = \{x_1 \dots x_p\}$ est défini par $\text{Vect}(S) = \{ y \in V \mid y = \sum_{i=1}^{p} a_i x_i,\ a_i \in \mathbb{K} \}$

Ex : 4) $A \in \Pi_{m,n}(\mathbb{K})$

$\text{Colsp}(A)$ = sous-espaces de $\mathbb{K}^m$ engendré par les colonnes de A.
$\text{Rowsp}(A)$ = sous-espaces de $\mathbb{K}^n$ engendré par les lignes de A.

Rem : $\text{colsp}(A^T) = \text{rowsp}(A)$

Ex : 5) $W = \{ f : [0,1] \to \mathbb{R} \mid f' \text{ et } f'' \text{ existent et } 2f'' - 3f' = f \}$

W est un sous-espace de $C^2([0,1], \mathbb{R})$

6) $W = \{$suites réelles convergentes$\}$ est un sous-esp de $\{$suites réelles$\}$
Si $\lim x_i = x$ et $\lim y_i = y$
Analyse : $\lim (x_i + y_i) = \lim x_i + \lim y_i = x + y$ ok
et si $\lim \lambda x = \lambda x \Rightarrow \lambda \{x_i\} \in W$.

BRUNNEN

3.3 Familles génératrices, libres et bases :

Ex : Dans $\mathbb{R}^2$, $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Déf : V - esp. vect sur $\mathbb{K}$
Soit $v_1, v_2, \dots, v_p \in V$
Un élément v de V est une combinaison linéaire de $v_1, \dots, v_p$, s'il existe des $\lambda_1, \dots \lambda_p \in \mathbb{K}$ tel que $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_p v_p$

Ex :

1) $V = \mathbb{R}_2[X]$
$v = 2x^2 - x + 2$
$v_1 = 6x^2 - 2$
$v_2 = x^2 - 2x$
$v_3 = -x + 1$ v est combinaison linéaire de v_1, v_2, v_3
$v = \frac{1}{2} v_1 - v_2 + 2 v_3$

2) $V = M_{2,2}(\mathbb{R})$

$$\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 5 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Déf : Une famille $\{v_1, \dots v_p\} \in V$ est dite génératrice si tout élément de V est une combinaison linéaire de $v_1, \dots, v_p$.

Ex :

1) $V = \mathbb{R}^2$ La famille $\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\}$ est génératrice.

2) $V = \mathbb{R}^2$ La famille $\{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}\}$ est génératrice.
Il faut mq $\forall \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ on peut trouver $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tq $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$
Il faut résoudre $\begin{cases} 2\lambda_1 - \lambda_2 = a \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 = b \end{cases}$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & a \\ 1 & 3 & b \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1/7(3a+b) \\ 0 & 1 & 1/7(2b-a) \end{array}\right]$$

le système a fjs une solution
$\lambda_1 = 1/7(3a+b)$ $\lambda_2 = 1/7(2b-a)$

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = 1/7(3a+b) \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 1/7(2b-a) \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

3) $V = \mathbb{R}^2$ la famille $\{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} -2 \\ 7 \end{bmatrix}\}$ est aussi génératrice.

4) $V = \mathbb{K}[X]$ La famille $\{1, X_2, X_3, \dots\}$ est génératrice

Algèbre I :

le 20.10.17

Déf: On dit un esp. vect V est de dimention finie, s'il existe une famille génératrice finie, autrement elle est de dimenaion infinie.

Déf: Une famille finie de $\{v_1, \dots, v_p\} \subset V$ est libre, s'il n'y a pas de composition non-triviale de 0_V. C'est-à-dire, si j'ai une combinaison linéaire

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_p v_p = 0_V \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_p = 0$$

On dit $v_1 \dots v_p$ sont linéairements indépendants

Une famille non-libre est dite liée.

---

le 26.10.17

Proposition 33.1: Soit $\{v_1; \dots; v_p\}$ une famille libre et soit $v \in V$. Si $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_p v_p$ et $v = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_p v_p$ Alors $\lambda_i = \mu_i$ pour $i = 1; \dots; p$. (unicité de la décomposition linéaire)

Dém:

$$0_V = v + (-v) = (\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_p v_p) + (-\mu_1 v_1 - \dots - \mu_p v_p)$$
$$= (\lambda_1 - \mu_1) v_1 + \dots + (\lambda_p - \mu_p) v_p \qquad \{v_1; \dots; v_p\} \text{ libre}$$

Alors puisque $\{v_1; \dots; v_p\}$ libre $\lambda_1 - \mu_1 = \dots = \lambda_p - \mu_p = 0$

Donc $\lambda_i = \mu_i$ pour $i = 1 : p$ ∎

Ex:

1) $V = \mathbb{R}^3$

$$v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} -3 \\ -4 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$\{v_1, v_2, v_3\}$ est une famille liée $v_1 - 2v_2 - v_3 = 0_V$

On cherche les solutions de l'équation:

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0_V$$
$$\iff \lambda_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} -3 \\ -4 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} -\lambda_1 + \lambda_2 - 3\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 - 4\lambda_3 = 0 \\ 4\lambda_1 - 2\lambda_2 + 8\lambda_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{forme matricielle}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & -4 & 0 \\ 4 & -2 & 8 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} \textcircled{1} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \textcircled{1} & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

(principale ; variables libres λ_3)

Toutes solutions comme $\begin{cases} \lambda_1 = -t \\ \lambda_2 = 2t \\ \lambda_3 = t \end{cases}$

$t = -1$ donne $v_1 - 2v_2 - v_3 = 0_V$

BRUNNEN

Ex : 2) $V = \mathbb{R}_2[X]$

$\{X^2 - 3X + 1 ; 4X^2 + 7X + 1 ; X - 2\}$ est une famille libre.

Supposons $\lambda_1(X^2 - 3X + 1) + \lambda_2(4X^2 + 7X + 1) + \lambda_3(X - 2) = 0$

Alors, $(\lambda_1 + 4\lambda_2)X^2 + (-3\lambda_1 + 7\lambda_2 + \lambda_3)X + \lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_3 = 0$

C'est le cas tous les coef $= 0$

Système linéaire : $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 0 & 0 \\ -3 & 7 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$

Après la méthode du pivot, on a une seule solution $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

Déf : Une <u>base</u> d'un espace vectoriel V de dimention finie est une famille libre et génératrice.

Remarque : Si $\{v_1, \dots, v_p\}$ est une base alors tout $v \in V$ peut être écrit de façon unique $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_p v_p$.

Ex : 1) $V = \mathbb{R}^n$

$\{e_1, \dots, e_n\}$ où $e_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow i$ (zéros sauf i-ème place)

Libre ? : $\lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \dots + \lambda_n \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ donc oui elle est libre.

Génératrice : $\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n \quad \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \dots + a_n e_n$

On appelle cette base, la base canonique de $\mathbb{R}^n$

2) $V = \mathbb{C}^n$ même chose

3) $V = \{(x_1; x_2; x_3) \in \mathbb{R}_3 \mid 3x_1 - 5x_2 + x_3 = 0\}$

(C'est un sous-espace de $\mathbb{R}_3$)

Résoudre le système $3x_1 - 5x_2 + x_3 = 0 \quad (\div 3)$

Poser : $x_3 = \lambda$ et $x_2 = \mu \quad x_1 - 5/3\, x_2 + 1/3\, x_3 = 0$

$x_1 = 5/3\, \mu - 1/3\, \lambda$

Donc $(x_1; x_2; x_3) \in V$ ssi $\exists \lambda, \mu$ tq $(x_1; x_2; x_3) = \lambda \begin{bmatrix} -1/3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 5/3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Famille génératrice : $\left\{\begin{bmatrix} -1/3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 5/3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$

Libre ? : $\lambda_1 \begin{bmatrix} -1/3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 5/3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} -1/3\,\lambda_1 + 5/3\,\lambda_2 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$

Alors la famille est libre $\iff \lambda_1 = \lambda_2 = 0$

et c'est une base.

Proposition 3.3.2 : Existence d'une base

Soit $V \neq \{0\}$ un esp. vect de dimention finie. Alors il existe une base pour V.

Dém :

V est de dimension finie, alors il existe une famille (finie) $G = \{v_1, \dots, v_p\}$ qui est génératrice.
Choisir $v_{i_1} \neq 0_V \in G$
Série G (une famille $\{v_i\}$ est libre si $v_i \neq 0$)
Si $\{v_{i_1}\}$ est génératrice - Nous avons trouvé une base.
Si $\{v_{i_1}\}$ n'est pas génératrice, il existe $v_{i_2} \in G \setminus \{v_{i_1}\}$ tq $\{v_{i_1}; v_{i_2}\}$ est libre.
Pourquoi ? Si $\{v_{i_1}; v_j\}$ est liée pour tout j, alors pour $j \neq i_1$, $v_j = \alpha_j v_{i_1}$
Par conséquent, pour tout $v \in V$, $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_p v_p$

$$= \sum_{k=1}^{p} \lambda_k v_k$$

$$= \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \alpha_k v_{i_1} = \left[\sum_{k=1}^{p} \lambda_k \alpha_k\right] v_{i_1}$$

sauf que v_{i_1} n'est pas génératrice
donc il existe au moins un j tq $v_j \neq \alpha_j v_{i_1}$
Si $\{v_{i_1}; v_{i_2}\}$ est génératrice, alors on a une base.
Sinon, il existe $v_{i_3} \in G \setminus \{v_{i_1}; v_{i_2}\}$ tq $\{v_{i_1}; v_{i_2}; v_{i_3}\}$ est libre
Pourquoi ? (comme avant)
Et ainsi de suite.
Cette procédure va se terminer (puisque G est une famille finie) avec une famille $\{v_{i_1}; v_{i_2}; \dots; v_{i_n}\}$ libre et génératrice. ▨

Avec les mêmes idées, on peut montrer :

Proposition 3.3.3 : Soit $V \neq \{0\}$ un espace vectoriel de dimention finie et G une famille génératrice.
Soit $\mathcal{L} \subseteq G$ libre. Alors, il existe une base B qui se trouve $\mathcal{L} \subseteq B \subseteq G$

Remarque :

1) A partir d'une famille génératrice, on peut toujours extraire une base.
2) Une famille peut être complétée pour obtenir une base.

BRUNNEN

Ex :

1) Extraire une base d'une famille génératrice

Soit $V \subset \mathbb{R}^4$, le sous-esp de $\mathbb{R}^4$ engendré par
$V_1 = (-1;3;0;2)$; $V_2 = (5;1;1;-3)$; $V_3 = (3;7;1;1)$, $V_4 = (0;1;-2;4)$ $V_5 = (7;12;0;4)$
Trouver une base de V.

Il faut étudier les relations linéaires entre les V_i.

$\lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2 + \dots + \lambda_5 V_5 = 0_V$

$\Leftrightarrow$ Système linéaire à 4 équation et 5 inconnues $(\lambda_1 \dots \lambda_5)$ a une solution.

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} -1 & 5 & 3 & 0 & 7 & 0 \\ 3 & 1 & 7 & 1 & 12 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 4 & 4 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{Pivot}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

λ_3, λ_5 variables libres

$$(*) \begin{cases} \lambda_5 = t \\ \lambda_4 = -t \\ \lambda_3 = s \\ \lambda_2 = -2t - s \\ \lambda_1 = -3t - 2s \end{cases}$$

Première conclusion :
$\{V_1, V_2, V_4\}$ est une famille libre
Pourquoi ? Si $\lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2 + \lambda_4 V_4 = 0$
alors $\lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2 + 0 V_3 + \lambda_4 V_4 + 0 V_5 = 0$
Puisque toutes solutions est données par (*)
Ici $t = \lambda_5 = 0$ et $s = \lambda_3 = 0$, donc $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_4 = 0$

Deuxième Conclusion :
V_3 et V_5 sont des combinaisons linéaires de V_1, V_2, V_4
Prendre : $s=1$ et $t=0$ $\quad -2V_1 - 2V_2 + V_3 + 0V_4 + 0V_5 = 0$
$V_3 = 2V_1 + 2V_2$
$s=0$ et $t=1$ $\quad -3V_1 - 3V_2 + 0V_3 - V_4 + V_5 = 0$
$V_5 = 3V_1 + 3V_2 + V_4$

Conclusion : $\{V_1, V_2, V_4\}$ est une base

Procédure d'extraction d'une base:

Soit $V \subseteq \mathbb{K}^n$
Pour extraire une base d'une famille génératrice $\{v_1, \dots v_p\} \subset V$.

- $\begin{bmatrix} | & | & & | \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_p \\ | & | & & | \end{bmatrix}$ appliquer le pivot.
- Si les colones $i_1, i_2, \dots i_k$ sont les colones des pivots alors $\{v_{i_1}; v_{i_2}; v_{i_3}; \dots; v_{i_k}\}$ est une base.

Ex: Compléter une famille libre à une base

$V = \mathbb{R}^3$, $\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}; \begin{bmatrix}5\\0\\2\end{bmatrix}\right\}$ famille libre.

La famille $\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}; \begin{bmatrix}5\\0\\2\end{bmatrix}; \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}; \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}; \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$ est génératrice.

Il faut ensuite extraire une base:

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{Pivot}} \begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 & 0 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

alors Base $\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}; \begin{bmatrix}5\\0\\2\end{bmatrix}; \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right\}$

Résumé:

$V \subseteq \mathbb{K}^n$ avec base $\{v_1, \dots, v_q\}$
$w = \{w_1; \dots; w_m\}$ famille libre.
Pour compléter w à une base:

1. $\{w_1, \dots; w_m; v_1; \dots; v_q\}$
2. Extraire une base.

Ch. 3.4 Dimension:

V - esp. vect. dim. finie sur $\mathbb{K}$
Idée: dimension = n_o éléments dans une base.

Proposition 3.4.1: Soit $\{v_1, \dots v_p\}$ une base pour V.
Soit $\{w_1, \dots, w_n\} \in V$. Si $n > p$ alors la famille $\{w_1, \dots; w_n\}$ est liée.

Dém: chamilo Grifone p. 17

Prop. 3.4.2 : Dans un esp. vect. sur $\mathbb{K}$ de dimention finie, toute base à le même nombre d'éléments.

Dém : Soient $\{v_1, \dots, v_p\}$ et $\{w_1, \dots, w_n\}$ bases
prop. 3.4.2 $\Rightarrow n \leq p$ sinon $\{w_1, \dots, w_n\}$ lié
pour les même raison $p \leq n$ sinon $\{v_1, \dots, v_p\}$ lié
Donc $n = p$

Définition : V esp. vect. sur $\mathbb{K}$ de dimension finie. La dimension de V sur $\mathbb{K}$ est le nombre d'éléments dans une base.

$$\dim_{\mathbb{K}}(V) = \dots$$

Ex :

1) $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n) = n$

2) $\dim_{\mathbb{R}}(\Pi_{n,p}(\mathbb{R})) = n \cdot p$

3) $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_n[X]) = n + 1$

4) $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n) = n$, $\dim_{\mathbb{C}}(\Pi_{n,p}(\mathbb{C})) = n \cdot p$, $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}_n[X]) = n+1$

4a) $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) = 1$ mais $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2$

5) Soit V l'espace vectoriel complexe engendré par

$$v_1 = \begin{bmatrix} i \\ i \\ 0 \\ i \end{bmatrix} \quad v_2 = \begin{bmatrix} -3i \\ 7 \\ 3 \\ i \end{bmatrix} \quad v_3 = \begin{bmatrix} -i \\ 9 \\ 3 \\ 3i \end{bmatrix} \quad v_4 = \begin{bmatrix} -5i \\ 5 \\ 3 \\ -i \end{bmatrix}$$

$\dim_{\mathbb{C}}(V) = ?$

$$\begin{bmatrix} i & -3i & -i & -5i \\ i & 7 & 9 & 5 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \\ i & i & 3i & -i \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{Pivot}} \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Base} = \left\{ \begin{bmatrix} i \\ i \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3i \\ 7 \\ 3 \\ i \end{bmatrix} \right\} \quad \dim_{\mathbb{C}}(V) = 2$$

6) $V = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f', f'', f''' \text{ existent et } f''' - 4f'' - 3f' + 18f = 0 \}$

Analyse $\Rightarrow$ toute fonction $f \in V$ est combinaison linéaire de $f_1(x) = e^{-2x}$, $f_2(x) = e^{3x}$ et $f_3(x) = x \cdot e^{3x}$

Alors $\{f_1, f_2, f_3\}$ est une famille génératrice.

$\{f_1, f_2, f_3\}$ libre ?

$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = 0_f$

$\Leftrightarrow \lambda_1 e^{-2x} + \lambda_2 e^{3x} + \lambda_3 x e^{3x} = 0 \quad \forall x$ (prendre 3 valeurs de x)

$\rightsquigarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

Donc la famille est libre et c'est une base.

$\dim_{\mathbb{R}}(V) = 3$

Prop 3.4.3 : Soit V un esp. vect. de dimention n.

1) Toute famille génératrice ayant n éléments est une base.
2) Toute famille libre ayant n éléments est une base.
3) Une famille avec moins de n éléments ne peut pas être génératrice.

Dém :

1) Soit G une famille génératrice à n éléments.
Prop. 3.3.3 $\Rightarrow$ il existe une base $B \subseteq G$.
Mais $\text{card}(B) = n = \text{card}(G)$. Alors $B = G$
2) Exercice
3) Soit E une famille $\text{card}(E) < n$
Supposons E génératrice.
Prop. 3.3.3 $\Rightarrow$ il existe une base $B \subseteq E$.
Alors $n = \text{card}(B) \leq \text{card}(E) < n$ ↯
Ceci est une contradiction.

Prop 3.4.4 : Soit V un esp. vect de dim p, et soit $W \subseteq V$ un sous-espace.
Alors
1) W est un esp de dim finie.
2) $\dim(W) \leq \dim(V)$
3) $\dim(W) = \dim(V) \iff W = V$

Dém :

1) On peut construire une suite de familles libres de W
$L_1 \subset L_2 \subset L_3 \subset \dots$ où L_i à exactement i éléments.
Il faut montrer qu'il existe k tq L_k est famille génératrice.
Supposons [pour ↯] que pour tout k, L_k n'est pas génératrice.
Alors pour $k > p$, L_k est une famille libre de W ayant k éléments. Mais une famille libre de W est aussi libre dans V.
Donc L_k est famille libre V ayant $k > p$ éléments. ↯
Ceci est une contradiction à Prop. 3.4.1.

2) Dem de (1) $\Rightarrow$ il existe $k \leq p$ tq $L_k \subset W$ est une famille génératrice.
Prop. 3.3.3 $\Rightarrow$ Il existe une base B de W où $B \subset L_k$.
Alors $\dim(W) = \text{card}(B) \leq k \leq p = \dim(V)$

3) Si $\dim(W) = \dim(V) = p$, il existe une base B de W ayant P éléments. Puisque $B \subseteq W \subseteq V$ alors B est une famille libre de V à p éléments.
Prop 3.4.3 (ii) $\Rightarrow B$ est une base de V.
Alors $W = V$. ∎

BRUNNEN

Rang d'une matrice:

Rappel: $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$
$\text{colsp}(A) \subseteq \mathbb{K}^m$ = esp engendré par les colonnes
$\text{rowsp}(A) \subseteq \mathbb{K}^n$ = esp engendré par les lignes.

Déf: Le rang de A est défini par $\text{rang}(A) = \dim(\text{colsp}(A))$

Rappel: extraire une base $A = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \\ | & | & & | \end{bmatrix}$ Pivot $\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & \cdot & & \cdot \\ \vdots & 1 & \ddots & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$

Corollaire: $\dim(\text{colsp}(A))$ = no pivot après méthode du Pivot sur A.

Rem: Pour calculer $\text{rang}(A)$:
1) méthode du Pivot sur A
2) compter les pivots.

Prop 3.4.5: $A, B \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ $\quad A \sim B$ $(\cdot; +; -; \lambda)$

$A \sim B \Rightarrow \text{rowsp}(A) = \text{rowsp}(B)$

Dém: Ex ▨

Corollaire: $\dim(\text{rowsp}(A))$ = nbr de ligne non-nulle dans la matrice échelonnée réduite de A.

Prop 3.4.6: $\dim(\text{rowsp}(A)) = \dim(\text{colsp}(A))$

Dém: $\dim(\text{colsp}(A))$ = nbr de pivot
nbr de pivot = nbr de ligne non-nulle dans la matrice éch. réd. de A
$= \dim(\text{rowsp}(A))$. ▨

Prop 34.7 : $\text{rang}(A^t) = \text{rang}(A)$

Dém : $\text{rang}(A) = \dim(\text{colsp}(A)) = \dim(\text{rowsp}(A^t)) = \text{rang}(A^t)$
$= \dim(\text{rowsp}(A)) = \dim(\text{colsp}(A^t))$ ∎

3.5 Quelques constructions :

Produit : V_1, V_2 - esp. vect sur $\mathbb{K}$

Rappel : L'ensemble $V_1 \times V_2 = \{(v_1; v_2) \mid v_1 \in V_1 \text{ et } v_2 \in V_2\}$

On définit : + V_1 et V_2
$(v_1; v_2) + (w_1; w_2) = (v_1 + w_1 ; v_2 + w_2)$
définit par l'équation
$\lambda \in \mathbb{K}$ $\lambda(v_1; v_2) = (\lambda v_1 ; \lambda v_2)$

Muni de ces opérations, $V_1 \times V_2$ est un esp. vect. sur $\mathbb{K}$.

Prop. 3.5 : Si V_1 et V_2 dim finie dans ce cas
$\dim(V_1 \times V_2) = \dim(V_1) + \dim(V_2)$.

Dém : Soit $B_1 = \{a_1; \dots; a_n\}$ et $B_2 = \{b_1; \dots; b_n\}$ des bases de V_1 et V_2.
La famille $B = \{(a_1; 0_{V_2}), (a_2; 0_{V_2}) \dots; (a_n; 0_{V_2}); (0_{V_1}; b_1) \dots, (0_{V_1}; b_p)\}$
est une base pour $V_1 \times V_2$.
i) Génératrice ? si $(v_1; v_2) \in V_1 \times V_2$ on a $v_1 = \sum_i \lambda_i a_i$
et $v_2 = \sum_i \mu_i b_i$. Alors : $(v_1; v_2) = (v_1; 0_{v_2}) + (0_{v_1}; v_2)$

$= (\sum \lambda_i a_i ; 0) + (0; \sum \mu_i b_i)$
$= \sum_i (\lambda_i a_i; 0) + \sum_i (0; \mu_i b_i)$
$= \sum_i \lambda_i \underbrace{(a_i; 0)}_{\in B} + \sum_i \mu_i \underbrace{(0, b_i)}_{\in B}$

ii) B est libre ?

Si $\sum \lambda_i (a_i; 0) + \sum \mu_j (0; b_j) = (0_{V_1}; 0_{V_2})$
$\Rightarrow (\sum \lambda_i a_i ; \sum \mu_j b_j) = (0_{V_1}; 0_{V_2})$

$\sum \lambda_i a_i = 0_{V_1}$ et $\sum \mu_j b_j = 0_{V_2}$

$\Rightarrow \lambda_i = \mu_j = 0$ pour $i = 1 \dots n$ et $j = 1 \dots p$
Puisque B_1 et B_2 sont des bases pour V_1 et V_2. ∎

BRUNNEN

Intersection :

Soit W un esp. vect., et $U, V \subset W$ 2 sous esp. vect.

$$U \cap V = \{ w \in W \mid w \in U, w \in V \}$$

Prop 35.2 : $U \cap V$ est un sous-esp. vect de W

Dém :

1) Non-Vide ? $0_W \in U$ et $0_W \in V \Rightarrow 0_W \in U \cap V$
Donc $U \cap V$ est non-vide.

2) (i) Soit $w, w' \in U \cap V$.
Alors, $w, w' \in U$ mais $w + w' \in U$
et $w, w' \in V$ mais $w + w' \in V$
Par conséquent, $(w + w') \in U \cap V$.
(ii) Similaire. ▨

Exemple : $W = \mathbb{R}^4$ U = esp. eng. par $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$

V = — " — $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

$U \cap V = ?$ Les éléments de U sont de la forme
$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2$
Les éléments de V sont de la forme
$\mu_1 v_1 + \mu_2 v_2$.

Alors $\forall$ élément de $U \cap V$, $\exists\ \lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$ tq

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2$$

Il faut trouver toutes solutions $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$ au système d'équations :

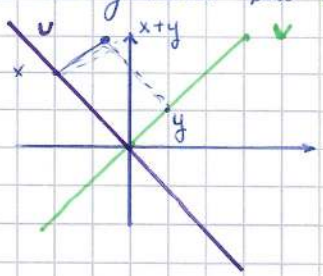
$$\begin{aligned} \lambda_1 + 2\lambda_2 - \mu_1 - 3\mu_2 &= 0 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 - \mu_1 + 4\mu_2 &= 0 \\ 3\lambda_2 - \mu_1 - 4\mu_2 &= 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 - \mu_1 - 2\mu_2 &= 0 \quad \text{(utiliser Pivot)} \end{aligned}$$

solutions : $\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$

Donc on peut écrire tout élément de $U \cap V$ sous la forme
$2tu_1 + 3tu_2 = t \cdot \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \\ 9 \\ 7 \end{bmatrix}$ → famille génér + base.

La famille d'un seul vecteur, comme le précédent, est une base de $U \cap V$.

Rem : $U \cup V$ n'est en général pas un sous-esp v.



Somme :

Déf : La somme de U et V est l'espace
$U+V = \{w \in W \mid \exists u \in U, \exists v \in V \text{ tq } w = u+v\}$

Prop. 3.5.3 : $U+V$ est un sous-esp. de W.

Ex : $W = \mathbb{C}_4[z]$ $U = \{$polynômes de la forme $az^4 + b(z^3+z^2)\}$

$V = \{$polynômes de la forme $a'z^3 + b'z^2\}$

$U+V = \{$polynômes de la forme : $az^4 + b(z^3+z^2) + a'z^3 + b'z^2\}$

$= \{$ ——— " ——— $az^4 + (b+a')z^3 + (b+b')z^2\}$

$= \{$ ——— " ——— $az^4 + cz^3 + dz^2 \mid a,c,d \in \mathbb{C}\}$

Esp. Vect	W	U	V	$U+V$	$U \cap V$ ← {polyn. de la forme : $b(z^3+z^2)$, $b \in \mathbb{C}$}
dim	5	2	2	3	1

Remarque :

(i) $3 = 2 + 2 - 1$

(ii) $\underbrace{7z^4 + 2z^3 + 2z^2}_{\in U} + \underbrace{3z^3 - 2z^2}_{\in V} = \underbrace{7z^4 + 5(z^3+z^2)}_{\in U} - \underbrace{5z^2}_{\in V}$

$\Rightarrow$ La décomposition $w \in U+V$ n'est pas nécessairement unique.

Prop 3.5.4 : $U, V \subset W$ et $\dim(W)$ finie
alors $\dim(U+V) = \dim(U) + \dim(V) - \dim(U \cap V)$

Dém : Chamilo : dim(U+V).pdf à lire

BRUNNEN

Somme directe:

Prop 3.5.5: $U, V \subset W$
La décomposition de tout élément de $U+V$ est unique ssi $U \cap V = \{0_W\}$

Dém:

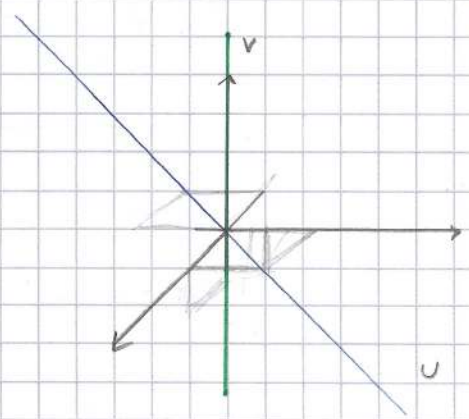
$\Rightarrow$ Soit $w \in U+V$ avec une décomposition unique $w = u+v$
Supposons (pour obtenir une contradiction) que $U \cap V \neq \{0_W\}$.
Soit $x \in U \cap V$, $x \neq 0_W$.
Alors, $u - x \in U$ et $v + x \in V$
donc $\underbrace{(u-x)}_{\in U} + \underbrace{(v+x)}_{\in V} = u + v \underbrace{-x+x}_{0} = u+v = w$ qui est une contradiction à l'unicité de la décomposition.

Alors, $U \cap V = \{0_W\}$

$\Leftarrow$ Si $w = u+v$ et $w = u'+v'$
Alors $(u+v)-(u'+v') = w - w = 0$
$\Rightarrow u - u' = v' - v$
Soit $x = u - u' = v' - v$
Puisque $u - u' \in U$ et $v' - v \in V$
alors $x \in U \cap V = \{0_W\}$ (par hypothèse)
alors, $x = 0_W$ et $u - u' = 0_W$ et $v' - v = 0_W$
et $u = u'$ et $v = v'$ ∎

Déf: $U, V \subset W$, avec $U \cap V = \{0\}$
Dans ce cas, on appelle la somme $U+V$, la <u>somme directe</u> et on la note $U \oplus V$.

Exemple: $W = \mathbb{R}^3$



Prop. 3.5.6: En dimension finie

$\dim(U \oplus V) = \dim(U) + \dim(V)$

Prop. 3.5.7: W - dim n

$U, V \subset W \qquad \dim(U) = k, \dim(V) = L$

$U \oplus V = W \iff k + L = n$

Dém: $\boxed{\Rightarrow}$ $k + L = \dim(U) + \dim(V) = \dim(U \oplus V) = \dim(W) = n$

$\boxed{\Leftarrow}$ $U \oplus V \subset W$ avec $\dim(U \oplus V) = k + L = n = \dim(W)$

donc $U \oplus V = W$.

Prop. 3.5.8: $U \subset W$ sous-espace, Alors, il existe un sous-esp. V tel que $U \oplus V = W$.

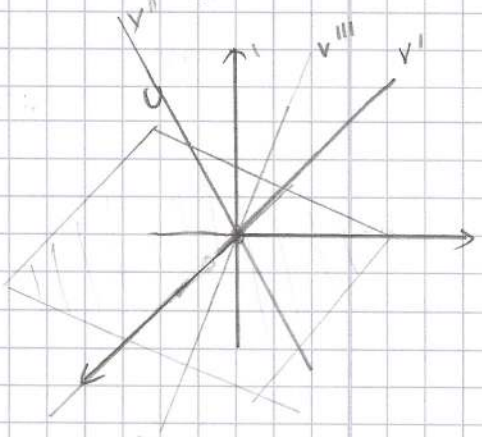
Dém: (Idée en dimension finie)

- Prendre une base $\{u_1; \dots; u_k\}$ pour U.
- Compléter $\{u_1 \dots u_k\}$ à une base pour W. $\{u_1; \dots; u_k; v_1; \dots; v_n\}$
- Prendre V = le sous-esp de W engendré par $\{v_1; \dots; v_n\}$

∎

Rem: V n'est pas unique.

Ex: $W = \mathbb{R}^3$



Ch. 4 Applications linéaires.

4.1 Définition et exemples:

Def: Soient V_1 et V_2 deux esp. vect sur $\mathbb{K}$ et soit $f: V_1 \to V_2$ une application. On dit que f est <u>linéaire</u> si

1) $f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \forall x, y \in V_1$
2) $f(\lambda x) = \lambda f(x) \quad \forall x \in V_1, \lambda \in \mathbb{K}$

Notation: $\mathcal{L}(V_1, V_2)$ - l'ensemble d'application linéaires $V_1 \to V_2$

Exemples:

1) $L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ - déjà vu

2) $V_2 = C^0([0;1], \mathbb{R}) = \{f: [0,1] \to \mathbb{R} \mid f \text{ continue}\}$
$V_1 = C^1([0;1], \mathbb{R}) = \{f: [0;1] \to \mathbb{R} \mid f' \text{ existe}\}$

Rappel: $C^0(\ldots)$; $C^1(\ldots)$ sont des esp. vect.
$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$
$(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$

On définit $D: C^1([0;1], \mathbb{R}) \longrightarrow C^0([0;1]; \mathbb{R})$
$D(f) = f'$

D est une application linéaire:
1) $D(f+g) = (f+g)' = f' + g' = D(f) + D(g)$
2) $D(\lambda f) = (\lambda f)' = \lambda f' = \lambda D f$

3) $Tr: M_{n,n}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$ est linéaire.
$A \longmapsto \sum_{i=1}^{n} A_{ii}$

1) $Tr(A+B) = \sum_{i=1}^{n} (A+B)_{ii} = \sum_{i=1}^{n} (A_{ii} + B_{ii})$
$= \sum_{i=1}^{n} A_{ii} + \sum_{i=1}^{n} B_{ii} = Tr(A) + Tr(B)$

2) $Tr(\lambda A)$ Exercice

4) $W = U \oplus V$
$pr_U: W \to U$ projection sur U
Soit $w \in W$. On peut écrire $w = u + v$, où $u \in U$ et $v \in V$ de façon unique
$pr_U(w) = u$ pr_U est une app linéaire.

Exemples:

5) $I : C^0([0;1], \mathbb{R}) \longrightarrow C^0([0;1], \mathbb{R})$
$f \longmapsto I(f)$

$I(f)(x) = \int_0^x f_t \, dt$ I est une application linéaire.

1) $I(f+g)(x) = \int_0^x (f+g)(t) \, dt = \int_0^x (f(t)+g(t)) \, dt$
$= \int_0^x f(t) dt + \int_0^x g(t) dt = I(f)(x) + I(g)(x)$

2) $I(\lambda f)(x) = \int_0^x (\lambda f)(t) \, dt$ [similaire]

Déf: Une application linéaire $f: V_1 \to V_2$ est un isomorphisme si elle est bijective. (injectif + surjectif)
On dit: V_1 et V_2 sont isomorphes
On écrit: $V_1 \cong V_2$

Ex: $g : \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$g(p(x)) = (p(0); p(1); p(-1))$

$g(3x^2 - 2x + 1) = (1; 2; 6)$

g est une application linéaire et une bijection.

Bijection :

a) g injective.
Soit $p(x), q(x) \in \mathbb{R}_2[x]$.
$g(p(x)) = g(q(x)) \Rightarrow (p(0); p(1); p(-1)) = (q(0); q(1); q(-1))$

$\Rightarrow p(0) = q(0) \wedge p(1) = q(1) \wedge p(-1) = q(-1)$

Si $p(x) = ax^2 + bx + c$
$q(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$
Alors $p(0) = q(0) \Rightarrow c = \gamma$
$p(1) = q(1) \Rightarrow c + a + b = \alpha + \gamma + \beta$ $(-c = -\gamma)$
① $a + b = \alpha + \beta$
$p(-1) = q(-1) \Rightarrow a - b + c = \alpha - \beta + \gamma$
② $a - b = \alpha - \beta$
① + ② $\Rightarrow a = \alpha$ et $b = \alpha$
Donc, $p(x) = q(x)$.

b) g surjectif:
Soit $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$
le polynôme $p(x) = \left(\frac{a_2 + a_3 - 2a_1}{2}\right) x^2 + \left(\frac{a_2 - a_3}{2}\right) x + a_1$

Ex :

Soit $A \in M_{n,n}(\mathbb{K})$ inversible
Alors $L_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$, $L_A\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}\right) = A\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$
est un isomorphisme.

- L_A linéaire ✓
- L_A injective : ✓
  $L_A(x) = L_A(y) \Rightarrow A(x) = A(y) \Rightarrow A^{-1}Ax = A^{-1}Ay$
  $\Rightarrow x = y$
- L_A surjectif : ✓
  Soit $y \in \mathbb{K}^n$. Alors si $A(A^{-1}y) = y$
  et $L_A(A^{-1}y) = y$

Déf :

On appel endomorphisme une application linéaire de $V \to V$ (Dans le même espace).
Un endomorphisme qui est un isomorphise est un automorphisme.

4.2 Le noyau d'une application linéaire:

Def. Soit $f: V_1 \to V_2$ une appl. lin. On définit le noyau de f par

$$\mathrm{Ker}(f) = \{ x \in V_1 \mid f(x) = 0_{V_2} \}$$

Rem.: Souvent le noyau $\mathrm{Ker}(f)$ a une interprétation intéressante.

Prop. 4.2.1: $f: V_1 \to V_2$ app. lin.

1) $\mathrm{Ker}(f)$ est un sous-espace de V_1.
2) $\mathrm{Ker}(f) = \{0_{V_1}\} \iff f$ est injective.

Preuve:

1) • $f(0_{V_1}) = f(0 \cdot 0_{V_1}) = 0 \cdot f(0_{V_1}) = 0_{V_2}$
$\Rightarrow 0_{V_1} \in \mathrm{Ker}(f)$ ($\mathrm{Ker}(f) \neq \emptyset$)
• $x, y \in \mathrm{Ker}(f) \Rightarrow x+y \in \mathrm{Ker}(f)$ [À voir]
$f(x) = 0_{V_2}$ et $f(y) = 0_{V_2}$
Alors $f(x+y) = f(x) + f(y) = 0_{V_2} + 0_{V_2} = 0_{V_2}$
et $x+y \in \mathrm{Ker}(f)$
• à voir $x \in \mathrm{Ker}(f)$, $\lambda \in \mathbb{K}$, mq $\lambda x \in \mathrm{Ker}(f)$ [Exo]

2) $\Leftarrow$: Déjà, on sait que $0_{V_1} \in \mathrm{Ker}(f)$, Soit $x \in \mathrm{Ker}(f)$,
alors $f(x) = 0_{V_2} = f(0_{V_1})$
Puisque f est injective, $x = 0_{V_1}$.
$\Rightarrow$: Si $f(x) = f(y)$, alors $f(x-y) = f(x) - f(y) = f(x) - f(x) = 0_{V_2}$
Donc $x - y \in \mathrm{Ker}(f) = \{0_{V_1}\}$ et $x - y = 0_{V_1}$
Alors, $x = y$. ∎

Exemples:

1) Soit $Ax = 0$, un système linéaire
($A \in \mathcal{M}_{n,m}[\mathbb{K}]$) On cherche des solutions $\{x \in \mathbb{K}^n \mid Ax = 0\}$
Si $L_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m \quad (x \mapsto Ax)$. Si L_A est l'app. linéaire associée à la matrice A, $\mathrm{Ker}(L_A) = \{x \in \mathbb{K}^n \mid L_A(x) = 0\}$
$= \{x \in \mathbb{K}^n \mid Ax = 0\}$

2) $D : C^1([0,1]; \mathbb{R}) \longrightarrow C^0([0,1], \mathbb{R})$
$f \longmapsto f'$
$\mathrm{Ker}(D) = \{ f: [0,1] \to \mathbb{R} \mid f' = 0_{C^0([0,1],\mathbb{R})} \}$
$= \{ f: [0,1] \to \mathbb{R} \mid f'(x) = 0, \forall x \in [0,1] \}$
$= \{$ fonctions constantes de $[0,1] \to \mathbb{R} \}$

3) On définit $f: \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ par
$f(A) = A - A^t$
1) f est une application linéaire.
• $f(A+B) = (A+B) - (A+B)^t = A + B - A^t - B^t$
$= A - A^t + B - B^t = f(A) + f(B)$.
• $f(\lambda A) = \lambda f(A)$
2) $\mathrm{Ker}(f) = \{A \in \mathcal{M}_{n,n}[\mathbb{K}] \mid f(A) = 0\}$
$= \{ \text{—} \,''\, \text{—} \mid A - A^t = 0 \}$
$= \{ \text{—} \,''\, \text{—} \mid A = A^t \}$
= matrices symétriques.

BRUNNEN

4) Trouver une base du noyau de $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$
$(x_1;x_2;x_3) \longmapsto (2x_1 - x_2 + x_3 ;\ x_1 - 4x_3)$

$(x_1;x_2;x_3) \in \ker(f) \iff f((x_1;x_2;x_3)) = (0;0)$
$\iff (2x_1 - x_2 + x_3 ;\ x_1 - 4x_3) = (0;0)$
$\iff \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 4x_3 = 0 \end{cases}$

Pivot: $\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -4 & 0 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -9 & 0 \end{array}\right]$

Alors : un paramètre s
$x_3 = s \quad x_2 = 9s \quad x_1 = 4s$
Ce qui montre que $(x_1;x_2;x_3) \in \ker(f) \iff (x_1;x_2;x_3) = s(4;9;1)$ pour un certain s.
La famille $\{(4;9;1)\}$ est génératrice pour $\ker(f)$ et elle est libre.
Donc la Base $= \{(4;9;1)\}$

4.3 L'image d'une application linéaire:

Déf: Soit $f: V_1 \to V_2$ une app. lin.
On définit l'image de f par:
$$Im(f) = \{ y \in V_2 \mid \exists x \in V_1 \text{ tq } f(x) = y \}$$

Prop. 4.3.1:
1) $Im(f)$ est un sous-espace vectoriel de V_2
2) $Im(f) = V_2 \iff f$ est surjective.

Dém:
1)
- $f(0.v_1) = 0_{V_2} \Rightarrow 0_{V_2} \in Im(f) \Rightarrow Im(f) \neq \emptyset$
- Si $y_1, y_2 \in Im(f)$, alors $\exists x_1, x_2 \in V_1$ tq $f(x_1) = y_1$ et $f(x_2) = y_2$
  Alors $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) = y_1 + y_2$
  $\Rightarrow y_1 + y_2 \in Im(f)$
- Si $y \in Im(f)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Il existe $x \in V_1$ tq $f(x) = y$.
  Alors $f(\lambda x) = \lambda f(x) = \lambda \cdot y \Rightarrow \lambda y \in Im(f)$

2) Exercice [Ecrire les définitions]

Déf: Si $Im(f)$ en dim. finie. Sa dimension est appelée rang de f.

Prop. 4.3.2: Soit $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. $L_A: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m \quad x \longmapsto A \cdot x$
1) $Im(L_A) = colsp(A)$
2) $rang(L_A) = Rang(A)$

Dém:
1) Série 6 question 7.
2) $rang(L_A) = dim(Im(L_A)) = dim(colsp(A)) = Rang(A)$ ▨

Prop. 4.3.3: Soit $f: V_1 \to V_2$ une application linéaire où V_1 est de dim. finie.
Soit $\{x_1; \dots; x_p\}$ une famille génératrice pour V_1.
Alors $\{f(x_1); \dots; f(x_p)\}$ est une famille génératrice pour $Im(f)$

Dém:
Soit $y \in Im(f)$. Il existe $x \in V_1$ tq $f(x) = y$
Puisque $\{x_1; \dots; x_p\}$ est génératrice, alors $x = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_p x_p$ pour $\lambda_i \in \mathbb{K}$
Donc $y = f(x) = f(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_p x_p) = \lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_p f(x_p)$
Alors tout éléments de $Im(f)$ peut-être exprimer comme combinaison linéaire de $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_p)$ ▨

Exemple :

Soit $f : \mathbb{C}_2[X] \to \mathbb{C}_2[X]$ endomorphisme défini par
$f(aX^2+bX+c) \longmapsto (4a-b+3c)X^2 + (a-2c)X + (11a-2b)$

Trouver des bases pour $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.

1) $\ker(f)$

$(aX^2+bc+c) \in \ker(f) \iff f(aX^2+bX+c) = 0$

$\iff (4a-b+3c)X^2 + (a-2c)X + (11a-2b) = 0$

$\iff \begin{cases} 4a-b+3c=0 \\ a-2c=0 \\ 11a-2b=0 \end{cases}$

résoudre $\rightsquigarrow$ paramètre t

$a = 2t$
$b = 11t$
$c = t$

Alors, $p(X) = aX^2+bX+c \in \ker(f) \iff \exists t \in \mathbb{C}$ tq $a=2t$, $b=11t$ et $c=t$

$p(X) = 2tX^2 + 11tX + t$
$= t(2X^2+11X+1)$

$\ker(f)$ a pour base $\{2X^2+11X+1\}$

2) $\mathrm{Im}(f)$

$\{2X^2+11X+1 ; X ; 1\}$ est une famille génératrice pour $\mathbb{C}_2[X]$

Prop 4.3.2 $\Rightarrow \{f(2X^2+11X+1) ; f(X) ; f(1)\}$ est une fam génératrice pour $\mathrm{Im}(f)$

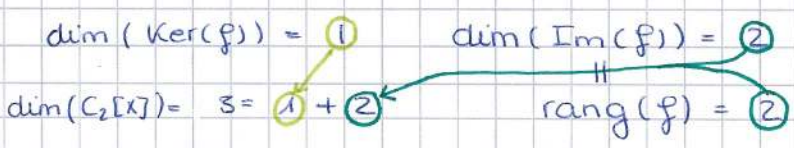
Or on a $f(2X^2+11X+1) = 0$, alors

$\{f(X) ; f(1)\} = \{-X^2-2 ; 3X^2-2X\}$ est une famille gén. de $\mathrm{Im}(f)$. Cette famille est aussi libre : $\lambda_1(-X^2-2)+\lambda_2(3X^2-2X) = 0$ alors $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

$(-\lambda_1+3\lambda_2)X^2 - 2\lambda_2 X - 2\lambda_1 = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} -\lambda_1+3\lambda_2=0 \\ -2\lambda_2=0 \\ -2\lambda_1=0 \end{cases}$ $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$

Conclusion : $\{-X^2-2 ; 3X^2-2X\}$ donne une base pour $\mathrm{Im}(f)$.



4.4 Deux résultats importants

Théorème 4.4.1 : Théorème du Rang

Soit $f: V_1 \to V_2$ une app. lin. entre esp. vect. de dim. finie sur $\mathbb{K}$.
Alors, $\dim_{\mathbb{K}}(\ker(f)) + \text{rang}(f) = \dim_{\mathbb{K}}(V_1)$

Dém :

Soit $n = \dim_{\mathbb{K}}(V_1)$

Soit $\{b_1, \dots, b_k\}$ une base pour $\ker(f)$. Puisque $\ker(f) \subset V_1$, il existe une base $\{b_1, \dots, b_k, b_{k+1}, \dots, b_n\}$ pour V_1.

Soit $\mathcal{B} = \{f(b_{k+1}), \dots, f(b_n)\}$. On va montrer que $\mathcal{B}$ est une base pour l'image.

[avec cela $\dim(\ker(f)) + \dim(\text{Im}(f)) = k + n - k = n = \dim(V_1)$]

1) $\mathcal{B}$ famille génératrice :

$\{b_1, \dots, b_n\}$ est génératrice pour V_1.

Prop 4.3.3 $\Rightarrow$ $\{f(b_1), \dots, f(b_n)\}$ est une famille génératrice de l'image. $\text{Im}(f)$

On a $f(b_1) = f(b_2) = \dots = f(b_k) = 0_{V_2}$

Alors $\mathcal{B} = \{f(b_{k+1}), \dots, f(b_n)\}$

2) $\mathcal{B}$ famille libre :

Supposons $\lambda_{k+1} f(b_{k+1}) + \dots + \lambda_n f(b_n) = 0 \quad \lambda \in \mathbb{K}$

A voir $\lambda_{k+1} = \dots = \lambda_n = 0$

Soit $v = \lambda_{k+1} b_{k+1} + \dots + \lambda_n f(b_n)$

On a $f(v) = f\left(\sum_{i=k+1} \lambda_i b_i\right)$

$= \sum_{i=k+1} \lambda_i f(b_i) = 0_{V_2}$

Donc $v \in \ker(f)$. Puisque $\{b_1, \dots, b_k\}$ est une base pour $\ker(f)$ $v = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_k b_k$, par conséquent $\underbrace{\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_k b_k}_{v} - \lambda_{k+1} b_{k+1} - \dots + \lambda_n b_n = 0_{V_1}$ Puisque $\{b_1, \dots, b_n\}$ est libre pour V_1,

$\lambda_1 = \dots = \lambda_k = \lambda_{k+1} = \dots = \lambda_n = 0$ ▨

Cor 1 :

Soit $f: V_1 \to V_2$ injective (Dim. finie)

1) $\dim(V_1) \leq \dim(V_2)$

2) Si $\{b_1, \dots, b_n\}$ est une base pour V_1 alors $\{f(b_1), \dots, f(b_n)\}$ est une base de $\text{Im}(f)$

Dém :

f injective $\Rightarrow$ le $\ker(f)$ est trivial

$\Rightarrow \dim(\ker(f)) = 0$

1) Alors, Thm 4.4.1 $\Rightarrow$ $\dim(V_1) = \text{rang}(f) = \dim(\text{Im}(f)) \leq \dim(V_2)$

2) Prop. 4.3.3 $\Rightarrow$ $\{f(b_1), \dots, f(b_n)\}$ est génératrice pour $\text{Im}(f)$ avec n élément mais $\dim(\text{Im}(f)) = \text{rang}(f) = \dim(V_1) = n$

Prop 3.4.3 $\Rightarrow$ $\{f(b_1), \dots, f(b_n)\}$ est une base. ▨

Cor 2 :

Soit N, l'espace de solution d'un système linéaire homogène $A \cdot x = 0$, $A \in \Pi_{m,n}(\mathbb{K})$. Alors

$\dim(N) = -\text{rang}(A) + n$

Dém :

Voir Série ▨

Cor 3 : $Ax = 0$, $A \in \Pi_{m,n}(\mathbb{K})$

i) $\text{rang}(A) = n \Rightarrow$ solution unique

ii) $\text{rang}(A) < n \Rightarrow$ infinité de solution.

Dém : $\text{rang}(A) \leq n \Rightarrow \dim(N) = n - \text{rang}(A) = \begin{cases} 0 & \text{rang}(A) = n \\ > 0 & \text{rang}(A) < n \end{cases}$

Cor 4 : Soit V_1 et V_2, 2 esp. vect, de dim. finie tq $\dim(V_1) = \dim(V_2)$
Soit $f : V_1 \to V_2$ une appl. lin. Alors,
f injective $\Leftrightarrow$ f surjective

Dém :
f injective $\Leftrightarrow \text{Ker}(f) = \{0_V\}$
$\Leftrightarrow \dim(\text{Ker}(f)) = 0$
$\Leftrightarrow \text{rang}(f) = \dim(\text{Im}(f)) = \dim(V_1)$
$\Leftrightarrow \dim(\text{Im}(f)) = \dim(V_2)$
$\Leftrightarrow \text{Im}(f) = V_2$ (prop. 3.4.4)
$\Leftrightarrow f$ est surjective (prop. 4.3.1)

Ex : $\varphi : \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}^{n+1}$
$p(x) \longmapsto (p(0); p(1); p(2); \dots; p(n))$
c'est un isomorphisme.

Dém : • linéaire ✓ (Exo)
• φ est injective [à voir : $\text{Ker}(\varphi)$ trivial]
Supposons $\varphi(p(x)) = (0;0;0;\dots;0)$
Alors $\varphi(p(x)) = (p(0); p(1); p(2); \dots; p(n)) = (0;0;\dots)$
Donc $0, 1, 2, \dots, n$ sont des racines de $p(x)$.
Mais $\deg(p) \leq n$ et un tel poly ($\neq 0$) a au maximum n racines. Ici on a $n+1$ racines, alors la seule possibilité est $p(x) = 0$
Alors $\text{Ker}(\varphi) = \{0\} \Rightarrow \varphi$ injective $\Rightarrow \varphi$ surjective
Puisque $\dim(\mathbb{R}_n[x]) = \dim(\mathbb{R}^{n+1})$
φ est un isomorphisme. ∎

Thm 4.4.2 : Soit V_1 et V_2 deux esp. vect de dim finie sur $\mathbb{K}$.
Alors
$$V_1 \cong V_2 \Leftrightarrow \dim(V_1) = \dim(V_2)$$

Dém :
$\Rightarrow$: Soit $f : V_1 \to V_2$ un isomorphisme
f surjective $\Rightarrow \text{Im}(f) = V_2$
f injective $\Rightarrow \text{Ker}(f) = \{0\}$ et $\dim(\text{Ker}(f)) = 0$
$\Rightarrow \dim(\text{Im}(f)) = \dim(V_1)$
$\Rightarrow \dim(V_2) = \dim(V_1)$

$\Leftarrow$: Soit $\{b_1, \dots, b_n\}$ une base pour V_1, soit $\{c_1, \dots, c_n\}$ une base de V_2.
Définir : $f : V_1 \to V_2$; $f(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i) \longmapsto \sum_{i=1}^{n} \lambda_i c_i$
• f est linéaire par sa définition
• f est injective : à voir $\text{Ker}(f)$ trivial.
Soit $v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i \in \text{Ker}(f)$ on a $\sum \lambda_i c_i = f(\sum \lambda_i b_i) = f(v) = 0_{V_2}$
Puisque $\{c_1, \dots, c_n\}$ est une base pour V_2, on a $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$
Donc $v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i = 0_{V_1}$ $\lambda_i = 0$. Conclusion : $\text{Ker}(f) = 0$ et f injective

Cor 4 : f surjective $\Rightarrow$ isomorphisme ∎

BRUNNEN

Ex : $\Pi_{m,n}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}_{n^2-1}[x]$

Ex : $\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^m$ et $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{C}^m \iff n = m$
$\iff n = m$

Algèbre I : Le 16.11.17

4.5 Matrices et Applications linéaires

Notation : $\beta = \{b_1, \dots, b_n\}$ = base pour V.
Pour tout $x \in V$, on peut décomposer de façon unique
$x = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n$

$$[x]_\beta = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} \leftarrow \text{vecteur de composantes de } x \text{ dans la base } \beta$$

Remarque : Ici β est considérée comme base ordonnée.

Ex : $V = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{E} = \{e_1, e_2\}$ $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$ vecteurs.
Base canonique : $x = 6e_1 + 4e_2$
$[x]_\mathcal{E} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix}$

$V = \mathbb{R}^2$, $\beta = \{b_1, b_2\}$ $\vec{b}_1, \vec{b}_2$ vecteurs qui sont une base de $\mathbb{R}^2$
$x = 2b_1 + 0b_2$
$[x]_\beta = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$

Déf : V_1 et V_2 - 2 esp. vects de dimention finie.
Bases : $\beta = \{b_1 \quad b_n\}$ pour V_1
$\mathcal{E} = \{c_1 \quad c_p\}$ pour V_2
$f : V_1 \longrightarrow V_2$ app. lin.

La matrice de f dans les bases β et $\mathcal{E}$, notée $m(f)$ est définie par :

$$m(f) = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ [f(b_1)]_\mathcal{E} & [f(b_2)]_\mathcal{E} & & [f(b_n)]_\mathcal{E} \\ | & | & & | \end{bmatrix}$$

il y a n colonnes et p lignes $\in \Pi_{pn}(\mathbb{R})$

Ex : $f \quad \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_1[x]$

$ax^2 + bx + c \longmapsto (3a - b + c)x + (7a + 2b - 3c)$

i) Base canonique : $\beta = \{x^2, x, 1\}$ pour $\mathbb{R}_2[x]$
$\mathcal{E} = \{x, 1\}$ pour $\mathbb{R}_1[x]$

$f(x^2) = 3x + 7 \qquad [f(x^2)]_\mathcal{E} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$

$f(x) = -x + 2 \qquad [f(x)]_\mathcal{E} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

$f(1) = x + 3 \qquad [f(1)]_\mathcal{E} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$

$$m(f) = \begin{bmatrix} | & | & | \\ F(x^2)_\mathcal{E} & F[x]_\mathcal{E} & f(1)_\mathcal{E} \\ | & | & | \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 7 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

Ex : ii) $\mathcal{B}' = \{x^2-1;\ x+3;\ x-1\}$ pour $\mathbb{R}_2[X]$
$\mathcal{C}' = \{2x+1;\ 5x+3\}$ pour $\mathbb{R}_1[X]$

$f(x^2-1) = 2x+10 = \lambda(2x+1) + \mu(5x+3)$

$\begin{cases} 2\lambda + 5\mu = 2 \\ \lambda + 3\mu = 10 \end{cases}$ $\lambda = -44$, $\mu = 18$

$[f(x^2-1)]_{\mathcal{C}'} = \begin{bmatrix} -44 \\ 18 \end{bmatrix}$

$f(x+3) = 41(2x+1) - 16(5x+3)$ $\quad [f_{(x+3)}]_{\mathcal{C}'} = \begin{bmatrix} 41 \\ -16 \end{bmatrix}$

$f(x-1) = -31(2x+1) + 12(5x+3)$ $\quad [f_{(x-1)}]_{\mathcal{C}'} = \begin{bmatrix} -31 \\ 12 \end{bmatrix}$

$$m(f) = \begin{bmatrix} -44 & 41 & -31 \\ 18 & 16 & 12 \end{bmatrix}$$

Prop 4.5.1 : $\forall x \in V_1 \quad m(f)[x]_{\mathcal{B}} = [f(x)]_{\mathcal{C}}$

Dém : Ecrire $[f(b_i)]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} a_{1i} \\ a_{pi} \end{bmatrix}$

Alors $m(f) = \begin{bmatrix} a_{11} & & \\ a_{pi} & & a_{pn} \end{bmatrix}$

Soit $x \in V_1$ puisque $\mathcal{B}$ est une base $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i$

Alors $f(x) = f(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(b_i)$

Donc $[f(x)]_{\mathcal{C}} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i [f b_i]_{\mathcal{C}} = \sum \lambda_i \begin{bmatrix} a_{1i} \\ a_{pi} \end{bmatrix} = \sum \lambda_i a_i$ pour chaque

Aussi, $m(f)[x]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{p1} & & a_{pn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_n \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \sum \lambda_i a_{i1} \\ \sum \lambda_n a_{in} \end{pmatrix}$ vecteur

Prop 4.5.2 : $f : V_1 \to V_2$ app lin
$M(f)$ - la matrice de f dans 2 bases quelconques de V_1 et V_2. Alors

$$\text{rang}(f) = \text{rang}(M(f))$$

Dém : Soit $\mathcal{B} = \{b_1 \ \ldots \ b_n\}$ une base pour V_1 et soit $\mathcal{C}$ une base pour V_2.
par prop 4.3.3 $\Rightarrow \{f(b_1), \ldots f(b_n)\}$ est famille génératrice de $\text{Im}(f)$
Aussi : $M(f) = \left([f(b_1)]_{\mathcal{C}} \mid \cdots \mid [f(b_n)]_{\mathcal{C}} \right)$

Alors $\text{Im}(f) =$ espace engendré par $\{f(b_1), \ldots f(b_n)\}$
$=$ ——— $=$ ——— les colonnes de $M(f)$
$= \text{colsp}(M(f))$

$\text{rang}(f) = \dim(\text{Im}(f)) = \dim(\text{colsp}(Mf)) = \text{rang}(M(f))$

Ex: Soit $f: \mathbb{C}_2[x] \to \mathbb{C}_2[x]$

$f(ax^2+bx+c) = (-3a+b+5c)x^2 + (2a+7b+c)x + (a-3b+2c)$

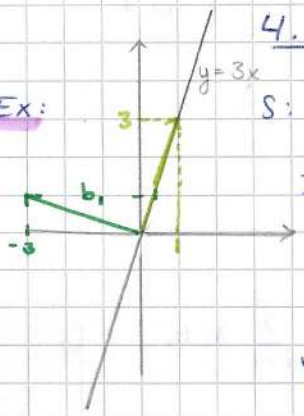
Trouver rang (f)

Dans la base $\{x^2; x; 1\}$ de $\mathbb{C}_2[x]$, on a $M(f) = \begin{bmatrix} -3 & 1? & 5? \\ 2 & 7 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$ à vérifier

Pivot : $\rightsquigarrow \begin{bmatrix} \textcircled{1} & 0 & -13 \\ 0 & \textcircled{1} & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

rang $(f) = 2$

4.6 Changement de base



Ex: $S: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ - réflexion dans la droite $y = 3x$

on cherche une description de S dans la base canonique.

Il y a une description facile dans $\mathcal{B} = \{b_1, b_2\}$

$$M(f)_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad S(b_1) = -b_1 \quad [S(b_1)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$S(b_2) = b_2 \quad [S(b_2)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

S ?

L'idée pour obtenir une description dans la base canonique

$$\begin{array}{ccccc} \text{can.} & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{S} & \mathbb{R}^2 & \text{can.} \\ \text{Changement de base} \longrightarrow & \downarrow & & \uparrow & \longleftarrow \text{changement de base} \\ & \mathbb{R}^2_{\mathcal{B}} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2_{\mathcal{B}} & \end{array}$$

Déf: *Matrices de passage:*

V - esp. vect. dim. finie. Deux bases $\mathcal{B} = \{b_1 \quad b_n\}$ ordonnées
$\mathcal{B}' = \{b_1' \quad b_n'\}$

La matrice de passage de la base $\mathcal{B}'$ à la base $\mathcal{B}$ est la matrice :

$$P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ [b_1']_{\mathcal{B}} & [b_2']_{\mathcal{B}} & \cdots & [b_n']_{\mathcal{B}} \\ | & | & & | \end{bmatrix}$$

Ex: S (ci-dessus) $\mathcal{B}'$ = base canonique $\mathbb{R}^2$ $\{e_1, e_2\}$

$$P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} | & | \\ [e_1]_{\mathcal{B}} & [e_2]_{\mathcal{B}} \\ | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{10} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} & \frac{3}{10} \end{bmatrix} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$e_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \lambda b_1 + \mu b_2 = \lambda \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = -\frac{3}{10} b_1 + \frac{1}{10} b_2$$

$$[e_2]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1/10 \\ 3/10 \end{bmatrix}$$

Prop 4.6.1: V - esp. vect dim finie Bases $\mathcal{B}, \mathcal{B}', \mathcal{B}''$

1) $\forall x \in V \quad P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}[x]_{\mathcal{B}'} = [x]_{\mathcal{B}}$

2) $P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ est inversible et $P_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} = (P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'})^{-1}$

3) $P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} \cdot P_{\mathcal{B}'\mathcal{B}''} = P_{\mathcal{B}\mathcal{B}''}$

4) Soit $f: V \to V$ endomorphisme alors

$$m(f)_{\mathcal{B}'} = \underbrace{P_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}}_{(P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'})^{-1}} m(f)_{\mathcal{B}} P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$$

Algèbre I : Le 17.11.17

Déf. Deux matrices $A, A' \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ sont semblables, s'il existe une matrice inversible $P \in \Pi_{nn}(\mathbb{K})$ tq.
$$A' = P^{-1} A P$$

Prop. 4.6.2 : V - esp. vect. dim. n
Soit $f : V \to V$ endomorphisme
Soit $\mathcal{B}$ une base de V et soit $A \in M_{n,n}(\mathbb{K})$
A représente f dans une certaine base $\iff$ A et $M(f)_{\mathcal{B}}$ sont semblables.

Dém : ($\Rightarrow$) Prop. 4.6.1 (4)
($\Leftarrow$) Soit $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$. Puisque A et $M(f)_{\mathcal{B}}$ sont semblables, il existe P, tq $A = P^{-1} M(f)_{\mathcal{B}} P$.
Il faut trouver une base $C = \{c_1, \dots, c_n\}$ tq A est $A = M(f)_C$
Pour $j = 1, \dots, n$ on définit $c_j = \sum_{i=1}^{n} P_{ij} b_i$
On peut vérifier que $C = \{c_1, \dots, c_n\}$ est une base.
On a $[c_j]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} P_{1j} \\ P_{2j} \\ \\ P_{nj} \end{bmatrix}$ Alors $P_{\mathcal{B}C} = \begin{bmatrix} [c_1]_{\mathcal{B}} & [c_2]_{\mathcal{B}} & [c_n]_{\mathcal{B}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \\ & & \\ P_{n1} & & \end{bmatrix} = P$

Finalement,
$$\begin{aligned} M(f)_C &= P_{C\mathcal{B}}\, M(f)_{\mathcal{B}}\, P_{\mathcal{B}C} \\ &= (P_{\mathcal{B}C})^{-1} M(f)_{\mathcal{B}} P_{\mathcal{B}C} \\ &= P^{-1} M(f)_{\mathcal{B}} P \\ &= A \end{aligned}$$ ▨

4.7 L'espace $\mathcal{L}(V_1; V_2)$

V_1, V_2 - esp vect. sur $\mathbb{K}$

Notation : $\mathcal{L}(V_1; V_2)$ - L'ensemble d'applications linéaires de V_1 dans V_2.

Prop 4.7.1 : L'ensemble $\mathcal{L}(V_1; V_2)$ est un esp. vect sur $\mathbb{K}$ pour les lois :
$$f + g : V_1 \to V_2, \quad x \longmapsto f(x) + g(x) \text{ dans } V_2 +$$
$$\lambda f : V_1 \to V_2, \quad \lambda \in \mathbb{K}, \quad x \longmapsto \lambda \cdot f(x) \text{ dans } V_2 \cdot$$

Dém : Exo ▨

Rem : L'élément neutre : $O : V_1 \to V_2$, $x \longmapsto O_{V_2}$

Prop. 4.7.2 : Soit V_1 dim n, base $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$ et V_2 dim p et base $C = \{c_1, \dots, c_p\}$
L'application $M : \mathcal{L}(V_1; V_2) \to \Pi_{p,n}(\mathbb{K})$, $f \longmapsto M(f)_{\mathcal{B}C}$ (matrice de f dans les bases $\mathcal{B}$ et C) est un isomorphisme.

Dém:

1) M est une app. lin.

À voir: $M(f+g) = M(f) + M(g)$

$M(\lambda f) = \lambda M(f)$

Exo: ▨

2) M est injective:

À voir $\ker(M) = 0$

$f \in \ker(M) \Rightarrow M(f) = 0 \Leftarrow$ matrice $[0]$

$\Rightarrow [f(b_i)]_C = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \end{bmatrix}$ par $i = 1, \dots, n$

$\Rightarrow f(b_i) = 0_{V_2}$ — " —

$\Rightarrow f = 0$

Prop. 3.2.1 $\Rightarrow$ M est injective ▨

3) M est surjective:

Soit $A \in M_{p,n}(\mathbb{K})$. On définit $f: V_1 \to V_2$ par $f(b_i) = \sum_{j=1}^{p} A_{ji} \cdot c_j$

$f(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i) = \sum_{i=1}^{n} f(\lambda_i b_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(b_i)$

On peut vérifier $M(f) = A$. ▨

Cor: $\dim(\mathcal{L}(V_1; V_2)) = \dim(M_{p,n}(\mathbb{K})) = n \cdot p$

$= \dim(V_1) \cdot \dim(V_2)$

Cas spécial: $V_2 = \mathbb{K}$

Déf: Soit V un ev. L'espace dual de V noté V^*, est défini par:

$V^* = \mathcal{L}(V; \mathbb{K})$

Rem:

1) Les app. lin. $f: V \to \mathbb{K}$ sont appellées formes linéaires

2) V dim finie $\Rightarrow$ V^* dim finie et $\dim(V^*) = \dim(V)$ /par Cor/

3) Thm 4.4.2 $\Rightarrow$ $V^* \cong V$ (isomorphisme)

Soit $B = \{b_1; \dots; b_n\}$ une base pour V.

On définit $\Theta_i: V \to \mathbb{K}$

$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k b_k \longmapsto \lambda_i$

Prop: 4.7.3: La famille $\{\Theta_1, \dots, \Theta_n\}$ est une base, la base duale pour V^*.

Ex: $V = \mathbb{R}_2[X]$; base $\{p_1; p_2; p_3\}$ $p_1 = x^2 + x - 1$; $p_2 = x + 1$; $p_3 = x^2 - x - 2$

Décrire la base duale:

$\boxed{\Theta_1}$ $\Theta_1(ax^2 + bx + c) = ?$

$= a\underbrace{\Theta_1(x^2)}_{\mu_2} + b\underbrace{\Theta_1(x)}_{\mu_1} + c\underbrace{\Theta_1(1)}_{\mu_0}$

On a $\Theta_1(p_1) = \Theta_1(x^2 + x - 1) = \Theta_1(x^2) + \Theta_1(x) - \Theta_1(1)$

$= \mu_2 + \mu_1 - \mu_0$

Mais $\Theta_1(p_1) = 1$ alors $\mu_2 + \mu_1 - \mu_0 = 1$

$\Theta_1(p_2) = \Theta_1(x + 1) = \Theta_1(x) + \Theta_1(1)$

$= \mu_1 + \mu_0$ $\quad \Theta_1(p_2) = 0$

alors $\mu_1 + \mu_0 = 0$

$\Theta_1(p_3)$ $\Theta_1(x^2 - x - 2) = 0 = \mu_2 - \mu_1 - 2\mu_0$

$$\begin{cases} \mu_2 + \mu_1 - \mu_0 = 1 & \mu_2 = -1 \\ \mu_1 + \mu_0 = 0 & \mu_1 = 1 \\ \mu_2 - \mu_1 - 2\mu_0 = 0 & \mu_0 = -1 \end{cases}$$

Alors $\Theta_1(ax^2 + bx + c) = -a + b - c$

Θ_2 et Θ_3 similaire.

Le 17.11.17

Algèbre I :

Prop. 4.7.7 : Soit $f, h \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$ et $g, k \in \mathcal{L}(V_2; V_3)$

1) $g \circ (f + h) = g \circ f + g \circ h$
2) $(g + k) \circ f = g \circ f + k \circ f$
3) $g \circ (\lambda f) = (\lambda g) \circ f \quad \lambda \in \mathbb{K}$
4) f bijective $\Rightarrow f^{-1} \in \mathcal{L}(V_2, V_1)$
5) $M(g \circ f) = M(g) \cdot M(f)$ produit des matrices
6) f bijective $\Rightarrow M(f)$ inversible et $M(f^{-1}) = (M(f))^{-1}$

Algèbre I :

Le 23.11.17

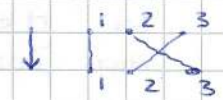
Ch. 5 Déterminants

5.1 Permutations et signature

Rappel : Une permutation est une bijection $\sigma : \{1, \dots, n\} \to \{1; \dots; n\}$

Notation : S_n := ensembles des permutations.

Ex : $n = 3 \quad \sigma(1) = 1, \sigma(2) = 3, \sigma(3) = 2$



Rem : Cardinalité de S_n : $\text{Card}(S_n) = n \cdot (n-1)(n-2) \cdots 2 \cdot 1 = n!$

On peut représenter des permutations par des "diagrammes de ficelle."



Pour un diagramme, chaque croisement de ficelle doit être simple. ✗ ✓ (✗ ; ✱)

Pour un tel diagramme, on peut conter le nombre d'intersections.

Prop 5.1.1 : Si D_1 et D_2 (diagrammes) qui représentent la même permutation, alors nb d'intersections de $D_1 \equiv$ nb d'intersections D_2 mod 2

Déf : Soit $\sigma \in S_n$ une permutation. La signature de σ, notée $\varepsilon(\sigma)$ est définie par $\varepsilon(\sigma) = (-1)^n$
n = nb d'intersections dans un diagramme de ficelle pour σ.

Ex : $\sigma \in S_4 \quad \sigma(1) = 3 ; \sigma(2) = 2 ; \sigma(3) = 4 ; \sigma(4) = 1$



$$\varepsilon(\sigma) = (-1)^4 = 1$$

5.2 Le déterminant d'une matrice

Déf: On définit une application dét: $M_{n,n}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$ par

$$Dét(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma)\, A_{\sigma(1),1}\, A_{\sigma(2),2} \cdots A_{\sigma(n),n}$$

Ex: $n = 2$ $\quad A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$ $\quad S_2 = \{\sigma, \sigma_1\}$

il y a $\sigma := [\ |\ ]$ $\quad \varepsilon(\sigma) = 1$ $\qquad \sigma_1 := \times$ $\quad \varepsilon(\sigma) = -1$

$$dét(A) = \varepsilon(\sigma) A_{\sigma(1)1} A_{\sigma(2)2} + \varepsilon(\sigma') A_{\sigma'(1)1} A_{\sigma'(2)2}$$
$$= A_{11}A_{22} - A_{21}A_{12}$$

schéma $[\cdot\,\cdot] - [\cdot\,\cdot]$

Ex: $n = 3$ $\quad [\cdot\,\cdot\,\cdot] - [\cdot\,\cdot\,\cdot] + [\cdot\,\cdot\,\cdot] - [\cdot\,\cdot\,\cdot] + [\cdot\,\cdot\,\cdot] - [\cdot\,\cdot\,\cdot]$

5.3 Propriétés du déterminant

Prop 5.3.1: Soit $A \in M_{n,n}(\mathbb{K})$ une matrice triangulaire supérieure. $\begin{bmatrix} * & \\ 0 & * \end{bmatrix}$ $*\in\mathbb{K}$
Alors $Dét(A) = A_{11} \cdot A_{22} \cdots A_{nn}$

Dém: $dét(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma)\, A_{\sigma(1)1} \cdots A_{\sigma(n)n}$

Soit $\sigma \in S_n$ $\quad A_{\sigma(1)1} \cdot A_{\sigma(2)2} \cdots A_{\sigma(n)n} \neq 0 \iff A_{\sigma(k)k} \neq 0 \ \ \forall k = 1, \dots, n$

Ici $A_{21} = 0$, $A_{31} = 0$, $\dots$ $A_{n1} = 0$
Si $\sigma(1) \neq 1$, alors $A_{\sigma(1)1} = 0$

$$dét(A) = \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma(1)=1}} \varepsilon(\sigma)\, A_{\sigma(1)1} \cdots A_{\sigma(n)n}$$

si $\sigma(1) = 1$ et $\sigma(2) \neq 2$ alors $A_{\sigma(2)2} = 0$

alors $dét(A) = \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma(1)=1\ \sigma(2)=2 \cdots \sigma(n)=n}} \varepsilon(\sigma)\, A_{\sigma(1)1} \cdots A_{\sigma(n)n}$

Donc $dét(A) = A_{11} \cdot A_{22} \cdots A_{nn} \cdot \varepsilon(id)$
$= A_{11} \cdot A_{22} \cdots A_{nn}$.

Cor: $dét(I) = 1$

Prop 5.3.2: $A \in M_{n,n}(\mathbb{K})$ avec une ligne de zéros. Alors, $Dét(A) = 0$

Dém: Ex

Prop 5.3.3: $A \in M_{n,n}(\mathbb{K})$ Trans. Élém (1. échanger 2 lignes A'
2. multiplier 1 ligne par $\lambda \neq 0$ A''
3. ajouter un multiple d'une ligne à une autre) A'''

1. $dét(A') = -dét(A)$
2. $dét(A'') = \lambda\, dét(A)$
3. $dét(A''') = dét(A)$

Dém: iii) Si on multiplie ligne L de A par λ, pour $\sigma \in S_n$

$$A'_{\sigma(k)k} = \begin{cases} \lambda A_{\sigma(k)k} & \sigma(k) = L \\ A_{\sigma(k)k} & \sigma(k) \neq L \end{cases}$$

Alors, $A'_{\sigma(1),1} A'_{\sigma(2)2} \quad A'_{\sigma(n)n} = \lambda(A_{\sigma(1)1} \cdot \quad \cdot A_{\sigma(n)n})$

donc $\det A' = \sum_{\sigma \in S_n} A'_{\sigma(1)1} \cdot \quad \cdot A'_{\sigma(n)n} \varepsilon(\sigma) = \sum_{\sigma \in S_n} \lambda(A_{\sigma(1)1} \cdot \quad \cdot A_{\sigma(n)n}) \varepsilon(\sigma)$

$= \lambda \sum \varepsilon(\sigma) A_{\sigma(1)1} \quad A_{\sigma(n)n} = \lambda \det(A)$

Cor: A inversible $\Rightarrow \det(A) \neq 0$

Dém: A inversible $\Rightarrow A \sim I$ par transf. élémentaires,

$\Rightarrow \det(A) = \pm s \det(I) \quad s \neq 0$

$= \pm s \quad s \neq 0$

$\neq 0$

$k = L \quad k = \lambda k \quad k = k + \lambda L$

Rappel: Matrices élémentaires P_{kL}, $S_k(\lambda)$, $M_k(L, \lambda)$

Prop 5.3.4:

i) $\mathrm{Det}(P_{kL}) = -1$

$\mathrm{Det}(S_k(\lambda)) = \lambda$

$\mathrm{Det}(M_k(L;\lambda)) = 1$

ii) Soit $B \in M_{n,n}(\mathbb{K})$ et E une matrice élémentaire. Alors:

$\det(EB) = \det(E) \cdot \det(B)$

iii) Soit R une matrice échelonnée réduite alors

$\det(R \cdot B) = \det(R) \cdot \det(B)$

Dém:

i) prop. 5.3.3

ii) utiliser i) et la correspondance trans. élé + matr. élé.

iii) Si $R = I_n$: $\det(R \cdot B) = \det(B) = 1 \cdot \det(B) = \det(R) \cdot \det(B)$.

Si $R \neq I_n$: alors R a au moins 1 ligne de zéro $\Rightarrow \det(R) = 0$

$R \cdot B$ a une ligne de zéro

$\det(R \cdot B) = c = 0 \cdot \det(B) = \det(R) \cdot \det(B)$

Algèbre : le 24.11.17

Prop. 5.3.5 : $A, B \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$

Dém : A est équivalente à une matrice échelonnée réduite $A \sim R$.
Il existe des matrices élémentaires $E_1, \dots, E_k$ tq $A = E_k E_{k-1} \dots E_1 R$
Alors $\det(A \cdot B) = \det(E_k \dots E_1 R \cdot B)$
$= \det(E_k) \det(E_{k-1}) \cdot \dots \cdot \det(E_1) \det(R \cdot B)$
$= \det(E_k) \cdot \dots \cdot \det(E_1) \cdot \det(R) \cdot \det(B)$
$= \det(E_k \cdot E_{k-1} \cdot \dots \cdot E_3 E_2 E_1 R) \det(B)$

$= \det(A) \cdot \det(B)$ ∎

Prop. 5.3.6 : i) A est inversible $\iff \det(A) \neq 0$
ii) Si A est inversible $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$

Dém : i) ($\Rightarrow$) ✓ p. 75
($\Leftarrow$) À voir $\det(A) \neq 0 \Rightarrow A$ inversible
il est équivalent de montrer A non-inversible
$\Rightarrow \det(A) = 0$
Pour A non-inversible, on a $A \sim R$ échelonnée réduite $R \neq I_n$.
Alors $A = E_k \cdot E_{k-1} \cdot \dots \cdot E_1 \cdot R$ $R \neq I_n$
$\det(A) = \det(E_k \cdot E_{k-1} \cdot \dots \cdot E_1 R)$
$= \det(E_k) \det(\dots) \dots \det(E_1) \cdot \det(R)$
Puisque $R \neq I_n$, R a une ligne de zéros.
Alors $\det(R) = 0$
Finalement $\det(A) = \det(E_k) \dots \det(E_1) \cdot 0$
$\det(A) = 0$ ∎
ii) $\det(A^{-1}) \cdot \det(A) = \det(A^{-1} \cdot A) = \det(I_n) = 1$
donc $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$ ∎

Cor : Soit A, A' deux matrices semblables. Alors,
$\det(A) = \det(A')$

Dém : $A' = P^{-1} \cdot A \cdot P$
alors $\det(A') = \det(P^{-1}) \det(A) \cdot \det(\ )$
$= \det(A) \cdot \det(P^{-1}) \cdot \det(P)$
$= \det(A) \cdot \frac{1}{\det(P)} \cdot \det(P)$

$= \det(A)$ ∎

Remarque : Déf : A inversible $\iff \exists B$ tq $A \cdot B = I = B \cdot A$

maintenant : $A \cdot B = I \iff \det(A) \cdot \det(B) = \det(I) = 1$
$\Rightarrow \det(A) \neq 0 \wedge \det(B) \neq 0$.

Prop. 5.3.7 : $\det(A^t) = \det(A)$

Dém : On peut montrer directement que $\det(E^t) = \det(E)$
pour une matrice élémentaire E.
cas A non-inversible : alors A^t est aussi non-inversible
$\det(A) = 0 = \det(A^t)$
cas A inversible : $A \sim I$ alors $A = E_k \cdot \dots \cdot E_1 \cdot I$ E_i élémentaire
$\det(A^t) = \det([E_k \cdot \dots \cdot E_1]^t) = \det(E_1^t \cdot \dots \cdot E_k^t) = \det(E_1^t) \cdot \dots \cdot \det(E_k^t) = \det(E_1) \cdot \dots \cdot \det(E_k) = \det(A)$ p. 76

Algèbre: Ce 24.11.17

5.4 Calcul de déterminant

$A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$
Déf: $i,j = 1, \dots, n$

Déf: $A[i;j] :=$ matrice obtenue à partir de A en supprimant la $i$ème ligne et $j$ème colonne

$A[i,j] \in \mathcal{M}_{n-1;n-1}(\mathbb{K})$

Déf: Cofacteur $:= \mathcal{C}_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A[i,j])$

Ex: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ $\mathcal{C}_{2,3} = (-1)^{2+3} \det \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$
$= (-1)(8 - 14)$
$= 6.$

Prop 5.4.1: $\det(A) = A_{p1}\mathcal{C}_{p1} + A_{p2}\mathcal{C}_{p2} + \dots + A_{pn}\mathcal{C}_{pn}$
$= \sum_{k=1}^{n} A_{pk}\mathcal{C}_{pk}$

Ex: $A = \begin{bmatrix} 3 & -7 & 5 \\ -2 & 1 & 0 \\ 4 & 8 & -9 \end{bmatrix}$ $\det(A) = 4 \cdot \det\begin{pmatrix} -7 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - 8 \det\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} - 9 \det\begin{pmatrix} 3 & -7 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$
$= 4 \cdot (-5) - 8 \cdot (10) - 9(3 - 14)$
$= -20 - 80 + 99 = -1.$

Déf: La comatrice de A notée $\mathcal{C}(A)$ est définie par $\mathcal{C}(A)_{ij} = \mathcal{C}_{ij}$

Prop 5.4.2: i) $A^t \mathcal{C}(A) = \mathcal{C}(A)^t A = \det(A) I_n$

ii) Par A inversible $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \mathcal{C}(A^t)$

Dém: i) omise ∎
ii) $\mathcal{C}(A)^t(A) = \det(A) I_n$
$\Rightarrow \mathcal{C}(A)^t A \cdot A^{-1} = \det(A) I A^{-1}$
$\Rightarrow \mathcal{C}(A)^t = \det(A) A^{-1}$ ∎

Ex: $n = 2$ $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ $\mathcal{C}(A) = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \mathcal{C}(A)$
$= \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

5.5 Déterminant d'un endomorphisme:

V - esp. vect de dim. finie
$f: V \to V$ - appl. linéaire.

Prop. 5.5.1: Soit M, M' deux matrices qui représentent f dans deux bases différentes alors:
$\det(M) = \det(M')$

Dém: Prop. 4.6.2 $\Rightarrow$ M et M' sont semblables
Prop. . . $\Rightarrow$ $\det(M) = \det(M')$

Déf: $f: V \to V$ - un endomorphisme

$\det(f) = \det(M(f)_{\mathcal{B}})$ $\mathcal{B}$: peut être n'importe quelle base

Rem: f isomorphisme $\Leftrightarrow$ $\det(f) \neq 0$

$\Updownarrow$ $\Updownarrow$

$M(f)_{\mathcal{B}}$ est inversible $\Leftrightarrow$ $\det(M(f)_{\mathcal{B}}) \neq 0$

Algèbre : le 30.11.17

Ch 6 : Applications diagonalisables, vecteurs propres et valeurs propres :

Déf: V - esp. vect de dim finie
Un endomorphisme $f: V \to V$ est diagonalisable, s'il existe une base $\mathcal{B}$ tq $M(f)_{\mathcal{B}}$ est une matrice diagonale.

Ex : $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
$(x;y) \longmapsto (-9/5\,x + 8/5\,y ; -12/5\,x + \frac{19}{5}\,y)$

Dans la base canonique $\mathcal{E}$: $m(f)_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} -9/5 & 8/5 \\ -12/5 & 19/5 \end{bmatrix}$

Dans la base $\mathcal{B} = \{b_1; b_2\}$ $b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ $b_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$
alors $M(f)_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

Rem: $M(f)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $f(b_1) = \begin{bmatrix} -9/5 & 8/5 \\ -12/5 & 19/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \ldots = \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \end{bmatrix}$

$= 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = 3 b_1$

$f(b_2) =$ —" — $\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \ldots = \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \end{bmatrix}$

$= -1 \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = -b_2$

- L'effet de f : "étirer dans ± la même direction"
- b_1 et b_2 correspondent aux "directions invariantes" sous l'action de f.

Algèbre : le 30.11.17.

6.1 Vecteurs propres et valeurs propres :

V - esp. vect sur $\mathbb{K}$

Déf : Soit $f : V \to V$ endomorphisme.
On appelle $v \in V$ un vecteur propre si :
i) $v \neq 0_V$
ii) il existe un $\lambda \in \mathbb{K}$ tq $f(v) = \lambda v$

Le scalaire λ est la valeur propre correspondante.

Rem : Un vecteur propre correspond à une direction invariante.

Ex :

i) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
$(x;y) \mapsto (2x+2y ; 3x+y)$

$f(1;1) = (2+2 ; 3+1) = (4;4) = 4(1;1)$ $\quad v = (1;1)$ $\quad \lambda = 4$
donc $(1;1)$ est vecteur propre correspondant à la valeur propre 4.

ii) $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$
$aX^2 + bX + c \mapsto (a+c)X^2 + bX + a+c$

$f(X^2+1) = 2X^2 + 2 = 2(X^2+1)$ $\quad X^2+1$ est vect. prop. et 2 val prop.

iii) $R : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ rotation par $\frac{\pi}{4}$
$(x;y) \mapsto \dots$
Il n'y a pas de direction invariante $\Rightarrow$ pas de vecteurs propres non-trivial.

iv) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
$(x;y) \mapsto (3 \cdot x ; 3y)$ conserve la direction $\forall$ vecteurs,
géométriquement, toute direction est invariante $\Rightarrow \forall v \in \mathbb{R}^2$ est vect prop.
Soit $v = (x;y) \in \mathbb{R}^2$ $\quad f(v) = f((x;y)) = (3x;3y) = 3(x;y) = 3v$
La valeur propre correspondant est 3.

Déf : Pour $f : V \to V$ un endomorphisme, le spectre de f, noté $Sp_{\mathbb{K}}(f)$, est l'ensemble des valeurs propres possibles.

Ex : $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
$(x;y) \mapsto (x+y ; -3x+5y)$ $\quad \lambda \in \mathbb{R}$ est une val. prop.
$\Leftrightarrow \exists (x;y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ tq
$f((x;y)) = \lambda(x;y)$.
$\Leftrightarrow \exists (x;y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0;0)\}$
tq $(x+y ; -3x+5y) = (\lambda x ; \lambda y)$
$\Leftrightarrow \exists$ une solution $\neq 0$ à
$\begin{cases} x+y = \lambda x \\ -3x+5y = \lambda y \end{cases}$ *

* $\Leftrightarrow$ le système
$\begin{cases} (1-\lambda)x + y = 0 \\ -3x + (5-\lambda)y = 0 \end{cases}$ possède $\neq 0$ solution.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1-\lambda & 1 & 0 \\ -3 & 5-\lambda & 0 \end{array}\right] \overset{\text{Pivot}}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \lambda - 5/3 & 0 \\ 0 & \frac{(\lambda-2)(\lambda-4)}{3} & 0 \end{array}\right]$$

Suite : $\exists$ une solution $\neq 0 \iff (\lambda-2)(\lambda-4)=0$
$\iff \lambda=2$ ou $\lambda=4$

Alors le spectre de f : $Sp_{\mathbb{R}}(f)=\{2;4\}$

Ex :

$f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$
$(w,z) \longmapsto (-z;w)$

$\lambda \in \mathbb{C}$ est une val propre
$\iff \exists$ vect. prop. $(w,z) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{(0;0)\}$
tq $f(w,z)=\lambda(w,z)$

$\iff$ ——— " ——— tq $(-z;w)=\lambda(w;z)$

$\iff \begin{cases} -z=\lambda w \\ w=\lambda z \end{cases}$ possède une solution non triviale.

$\iff \begin{cases} -z-\lambda w=0 \\ -\lambda z+w=0 \end{cases}$ - " ——— " ——— " ———

$$\left[\begin{array}{cc|c} -\lambda & -1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{Pivot}} \left[\begin{array}{cc|c} 1-\lambda & -\lambda & 0 \\ 0 & -1-\lambda^2 & 0 \end{array}\right]$$

Sol non triviale $\iff -1-\lambda^2=0$
$\iff \lambda^2=-1$
$\iff \lambda=\pm i$

alors $Sp_{\mathbb{C}}(f)=\{\pm i\}$

Rem :

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
$(x;y) \longmapsto (-y;x)$ $\quad Sp_{\mathbb{R}}(f)=\emptyset$

Ex :

$V = C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R}) := \{f \in C(\mathbb{R};\mathbb{R}) \mid$ la $n^{ème}$ dérivée existe $\forall n\}$

$D : V \to V$
$f \longmapsto f'$ $\quad Sp_{\mathbb{R}}(D)=?$

① 0 est val. propre de D
Soit $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ constante non nulle. Alors $D(c)=0=0\cdot c$ ($c = c' = 0$ dans V)
alors $c \neq 0$ est vect. propre pour la valeur propre 0.

② Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$ $\quad v=e^{\lambda x}$
$D(e^{\lambda x})=\lambda e^{\lambda x}=\lambda \cdot v$ Alors $e^{\lambda x}$ est un vect. propre pour la valeur propre λ. Donc $\lambda \in Sp_{\mathbb{R}}(D)$

(1+2) $\quad Sp_{\mathbb{R}}(D)=\mathbb{R}$

Quelques cas spéciaux : $f : V \to V$ dim. finie

Le cas $0 \in Sp_{\mathbb{K}}(f)$: $0 \in Sp_{\mathbb{K}}(f) \iff \exists v \neq 0$ tq $f(v)=0\cdot v=0_V$
$\iff \ker(f) \neq \{0_V\}$
$\iff f$ n'est pas injective

Rappel : cor du thm du rang
pour $f : V_1 \to V_2$ où $\dim(V_1)=\dim(V_2)$
f injective $\iff f$ surjective

Alors, $0 \in Sp_{\mathbb{K}}(f) \iff f$ n'est pas un isomorphisme

le 30.11.17

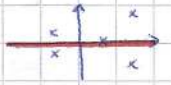
Algèbre :

Le cas $\lambda \in Sp_{\mathbb{K}}(f)$: $\lambda \in Sp_{\mathbb{K}}(f) \Leftrightarrow \exists\, v \neq 0,\ f(v) = \lambda v$

$\Leftrightarrow \exists\, v \neq 0,\ f(tv) = t \cdot \lambda v,\ \forall t \in \mathbb{K}$

$\Leftrightarrow \exists\, v \neq 0$ tq u sous-esp engendré par v consiste en des points fixes de f

Ex : Réflexion $R : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x;y) \mapsto (x;-y)$



$R\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ $\quad 1 \in Sp_{\mathbb{R}}(R)$

Prop 6.1.1 : Soit $f : V \to V$ endomorphisme et V dim finie.
f est diagonalisable $\Leftrightarrow \exists$ une base de vecteurs propres.

Dém :

$\Rightarrow$: f est diagonalisable
$\Rightarrow \exists$ une base $\beta = \{b_1, \dots, b_n\}$ pour laquelle $M(f)_\beta$ est diagonale

Si $M(f)_\beta = \begin{bmatrix} * & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & * \end{bmatrix}$ $\quad * = \lambda_i = \lambda_1; \dots; \lambda_n$

alors pour $i = 1, \dots, n$

$f(b_i) = M(f)_\beta [b_i]_\beta = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \leftarrow i\text{ème ligne} \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \lambda_i \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \lambda_i \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \lambda_i b_i$

Conclusion :
$f(b_i) = \lambda_i b_i$ b_i vect propre pour λ_i val. prop.
alors β est une base de vect. propres.

$\Leftarrow$:
Soit $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ une base pour V de vect. propres.
et soit λ_i la val. prop qui correspond à v_i.

$M(f)_\beta = \begin{bmatrix} | & & | \\ [f(v_1)]_\beta & \cdots & [f(v_n)]_\beta \\ | & & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & & \vdots \\ 0 & 0 & \lambda_3 & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$

Algèbre : le 01.12.17

Vecteurs / valeurs propre de matrices :

Déf : Soit $A \in M_{n,n}(\mathbb{K})$. On appelle $v \in \mathbb{K}^n$ un vecteur propre de A si

i) $v \neq 0$
ii) $\exists\, \lambda \in \mathbb{K}$ tq $Av = \lambda v$

λ est la valeur propre correspondante

$Sp_{\mathbb{K}}(A)$ = l'ensemble des valeurs propres.

Ex : $A = \begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{bmatrix} \in M_{2,2}(\mathbb{C})$ $\quad A\underbrace{\begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}}_{=v} = \begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} = \underbrace{2}_{=\lambda}\begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}$

Ex : $D = \begin{bmatrix} d_{11} & & 0 \\ & d_{22} & \\ 0 & & d_{nn} \end{bmatrix}$ alors $d_i \in Sp_{\mathbb{K}}(D)$

$e_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \leftarrow i \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ $\quad D e_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ d_i \leftarrow i \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = d_i \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = d_i e_i$ $\quad i = \{1, \dots, n\}$

le 01.12.17.

Rem: Soit $A \in M_{n,n}(\mathbb{R}) \subset M_{n,n}(\mathbb{C})$
En général $Sp_{\mathbb{R}}(A) \neq Sp_{\mathbb{C}}(A)$

Ex: $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ possède une solution.

$\Leftrightarrow \begin{cases} -y = \lambda x \\ x = \lambda y \end{cases}$ possède une solution

$\begin{bmatrix} 1 & -\lambda & 0 \\ \lambda & 1 & 0 \end{bmatrix}$ Pivot $\begin{bmatrix} 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1+\lambda^2 & 0 \end{bmatrix}$

$\Leftrightarrow 1 + \lambda^2 = 0$ possède une solution.

$\mathbb{R}$ pas de solution $\mathbb{C}$ 2 solutions $\pm i$ $Sp_{\mathbb{C}}(A) = \{\pm i\}$

Prop. 6.1.2: Soit A, A' des matrices carrées semblables. Alors $Sp(A) = Sp(A')$

Dém: $\exists P$ inversible tq $A' = P^{-1}AP$
Soit λ, une valeur propre de A. $\lambda \in Sp(A)$. $\exists v \neq 0$, tq
$A \cdot v = \lambda \cdot v$
On sait que $A' = P^{-1}AP \Rightarrow A'P^{-1} = P^{-1}APP^{-1}$
$\Rightarrow A'P^{-1} = P^{-1}A$
Alors, $A'(\underline{P^{-1}v}) = (A'P^{-1})v = (P^{-1}A) \cdot v = P^{-1}(Av)$
$= P^{-1}(\lambda v)$
$= \lambda(\underline{P^{-1}v})$
Puisque $P^{-1}v \neq 0$, $\lambda \in Sp(A')$
Donc $Sp(A) \subset Sp(A')$ de même on montre $Sp(A') \subset Sp(A)$ ∎

Cor: Si A, A' représentent $f: V \to V$ dans des bases différentes alors
$Sp(A) = Sp(A') = Sp(f)$

6.2 Le polynôme caractéristique:

Pour trouver les valeurs propres.

Déf: Soit $A \in M_{n,n}(\mathbb{K})$, le polynôme caractéristique de A, noté $P_A(x)$, est défini par $P_A(x) = \det(A - xI)$

Ex: $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ $A - xI = \begin{bmatrix} 3-x & 2 \\ 2 & -x \end{bmatrix}$

$\det \begin{pmatrix} 3-x & 2 \\ 2 & -x \end{pmatrix} = P_A(x) = -x(3-x) - 4 = -3x + x^2 - 4$

le 01.12.17

Algèbre :

Prop. 6.2.1 : Soit $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \in Sp_{\mathbb{K}}(A) \Leftrightarrow \lambda$ est une racine de $P_A(x)$

Ex : $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ $P_A(x) = x^2 - 3x - 4$
$= (x+1)(x-4)$

Donc $Sp_{\mathbb{K}}(A) = \{-1; 4\}$

Dém :

$\lambda \in Sp_{\mathbb{K}}(A) \Leftrightarrow \exists v \neq 0$ tq $A \cdot v = \lambda \cdot v$ (valeur propre)
$\Leftrightarrow \exists v \neq 0$ tq $(A - \lambda I)v = 0 = 0 \cdot v$
$\Leftrightarrow 0 \in Sp_{\mathbb{K}}(A - \lambda I)$
$\Leftrightarrow A - \lambda I$ n'est pas inversible
$\Leftrightarrow \det(A - \lambda I) = 0$
$\Leftrightarrow P_A(\lambda) = 0$
$\Leftrightarrow \lambda$ est une racine de $P_A(x)$

Ex : $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$P_A(x) = \det \begin{pmatrix} -x & -1 \\ 1 & -x \end{pmatrix} = x^2 + 1 = 0$

$Sp_{\mathbb{R}}(A) = \emptyset$ $\quad Sp_{\mathbb{C}}(A) = \{\pm i\}$

Pour trouver les vecteurs propres :

Si $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de la matrice A, les vecteurs propres sont des solutions non-nulles à $(A - \lambda I)v = 0$

Ex : $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ $Sp_{\mathbb{R}}(A) = \{-1; 2\}$ (à vérifier)

$\lambda = -1$ $A - (-1)I = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ $\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \end{array}\right]$ Pivot $\rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1/4 & 0 \\ 0 & 1 & 3/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

Tout vecteur de la forme $t \cdot \begin{bmatrix} 1/4 \\ -3/4 \\ 1 \end{bmatrix}$ avec $t \neq 0$ est un vecteur propre pour val propre -1.

Paramètre t
$v_1 = 1/4\, t$
$v_2 = -3/4\, t$ $\quad v = t \begin{bmatrix} 1/4 \\ -3/4 \\ 1 \end{bmatrix}$
$v_3 = t$

$\lambda = 2$ Similaire Tout vecteur de la forme $v = s \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ pour $s \neq 0$ est vect. prop pour val propre 2.

Endomorphismes :

Prop 6.2.2 : Soit $A, B \in M_{n,n}(\mathbb{K})$ des matrices semblables.
Alors $P_A(x) = P_B(x)$

Dém: $B = P^{-1}AP$

$$B - xI = P^{-1}AP - xP^{-1}P$$
$$= P^{-1}(AP - xP)$$
$$= P^{-1}((A - xI)P)$$

semblables

Alors $B - xI$ et $A - xI$ sont semblables

$$P_B = \det(B - xI) = \det(A - xI) = P_A \quad \blacksquare$$

Déf: V - esp. vect de dim finie. $f: V \to V$ Endomorphisme.
Le polynôme caractéristique de f est défini par

$$P_f(x) = P_{M(f)_B}(x)$$

où B est une base quelconque de V.

Ex: Trouver les val. propres de $f: \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$

$$ax^2 + bx + c \mapsto (2a+b)x^2 + (c-a)x + (a+3b+c)$$

Dans la base $\{x^2, x, 1\}$

$$A = M(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad P_f(x) = P_{M(f)}(x) = \det\begin{pmatrix} 2-x & 1 & 0 \\ -1 & -x & 1 \\ 1 & 3 & 1-x \end{pmatrix}$$

$$= (2-x)\det\begin{bmatrix} -x & 1 \\ 3 & 1-x \end{bmatrix} - \det\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1-x \end{pmatrix} = \ldots = -(x-2)^2(x+1)$$

$$Sp_{\mathbb{R}}(f) = Sp_{\mathbb{R}}(A) = \{-1, 2\}$$

6.3 Espaces propres

V - dim. finie $\quad f: V \to V$

Déf: Soit $\lambda \in \mathbb{K}$, l'espace propre correspondant à λ est défini par

$$E_\lambda = \{v \in V \mid f(v) = \lambda v\}$$

Rem:

i) $\lambda \notin Sp_{\mathbb{K}}(f) \Rightarrow E_\lambda = \{0_V\}$

ii) $\lambda \in Sp_{\mathbb{K}}(f) \Rightarrow E_\lambda = \{\text{vecteurs propres associés à } \lambda + 0_V\}$

iii) E_λ est un sous-espace de V. (Exo)

Algèbre : le 07.12.17.

Ex : $A = \begin{bmatrix} 11 & -8 & -8 \\ 8 & 5 & 8 \\ 4 & 4 & 7 \end{bmatrix}$ $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

$P_A(X) = (X-1)(X+3)^2$ (Exo) Alors $Sp_{\mathbb{R}}(A) = \{-3; 1\}$

$\boxed{E_{-3}}$ $v \in E_{-3} \Leftrightarrow A \cdot v = -3v$
$\Leftrightarrow (A - (-3)I)v = 0$

$A - (-3I) = \begin{bmatrix} 8 & -8 & -8 \\ 8 & 8 & 8 \\ 4 & 4 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{Pivot}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Paramètres : s et t $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ $v_1 = -t - s$ $v_2 = s$ $v_3 = t$

$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ce qui montre que la famille est génératrice et c'est une base.

E_{-3} est le sous-espace de $\mathbb{R}^n$ avec base $\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

Remarques : i) E_λ = espace de solution du système linéaire homogène $(A - \lambda I)v = 0$

ii) Pour un endomorphisme $f : V \to V$, il faut choisir une base $\mathcal{B}$, utiliser la matrice $m(f)_{\mathcal{B}}$.

Proposition 6.3.1 : Soit $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$ tq $\lambda_1 \neq \lambda_2$ et E_{λ_1} et E_{λ_2} leurs espaces propres. Alors $E_{\lambda_1} \cap E_{\lambda_2} = \{0_V\}$

Dém : Soit $v \in E_{\lambda_1} \cap E_{\lambda_2}$. Alors $v \in E_{\lambda_1} \Rightarrow F(v) = \lambda_1 v$
$v \in E_{\lambda_2} \Rightarrow F(v) = \lambda_2 v$

Donc $\lambda_1 v - \lambda_2 v = 0_V = F(v) - F(v)$
$\Rightarrow (\lambda_1 - \lambda_2)v = 0_V$
$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2$ ou $v = 0_V$ Puisque $\lambda_1 \neq \lambda_2$ on a $v = 0_V$ ∎

Rem : i) $E_{\lambda_1} + E_{\lambda_2} = E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2}$ de façon unique
ii) Tout $v \in E_{\lambda_1} + E_{\lambda_2}$ se décompose uniquement ie : $\forall ! \, v_1 + v_2$ où $v_i \in E_{\lambda_i}$

Proposition 6.3.1 bis : Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ $\lambda_i \neq \lambda_j$ $(i \neq j)$.
Tout vecteur $v \in E_{\lambda_1} + E_{\lambda_2} + \ldots + E_{\lambda_p}$ se décompose en somme :
$v = v_1 + \ldots + v_p$ où $v_i \in E_{\lambda_i}$
Autrement dit :
$E_{\lambda_1} + \ldots + E_{\lambda_p} = E_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus E_{\lambda_p}$

Corollaire : Pour $i = 1, \ldots, p$ Soit $\mathcal{B}_i$ une base de E_{λ_i}. Alors, $\bigcup \mathcal{B}_i$ est une base de la somme directe $\bigoplus E_{\lambda_i}$ des espaces propres.

Ex : $A = \begin{pmatrix} -11 & -8 & -8 \\ 8 & 5 & 8 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad Sp(A) = \{1; -3\}$

E_{-3} : base $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

E_1 : base : $\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

$E_1 \oplus E_3$ a pour base $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.
Puisque, $E_1 \oplus E_3 \subseteq \mathbb{R}^3$ et que $\dim(E_1 \oplus E_{-3}) = \dim(\mathbb{R}^3)$
$\Rightarrow E_1 \oplus E_{-3} = \mathbb{R}^3$.

Définition : $f : V \to V$ $\dim(V) < \infty$, λ une valeur propre. On dit que λ est d'ordre k si λ est une racine de multiplicité k du polynôme caractéristique

Ex : $P_A(x) = (x+1)(x-3)^2(x+2)^4$
$\lambda = 3$ est d'ordre 2
$\lambda = -1$ est d'ordre 1
$\lambda = -2$ est d'ordre 4

Définition : On dit que $P(x) \in \mathbb{K}[X]$ de degré n est scindé s'il possède n racines dans $\mathbb{K}$ en comptant toute racine avec multiplicité

Ex : $p(x) = (x-1)^2(x+3) \in \mathbb{R}[x]$ → scindé
$p(x) = (x^2+1)(x-4)^5(x+2)^{18}$ → n'est pas scindé

Remarque : Thm fondamental d'Algèbre ⇒ tout pdy. complexe est scindé

Prop 6.3.2 : $f : V \to V$, V dim. finie, λ valeur propre d'ordre k.

$$1 \leq \dim(E_\lambda) \leq k$$

Dém : Chamilo (pdf) dim-espace-propre.pdf. ∎

6.4 Caractérisation des endo. diagonalisable.

Rappel: ① V - dim finie. $f: V \to V$ diagon. $\Leftrightarrow$ $\exists$ une base $\mathcal{B}$ tq $M(f)_{\mathcal{B}}$ est diagonale.

② Prop. 6.1.1 : f diagonalisable $\Leftrightarrow$ $\exists$ une base de vecteurs propres de V

Prop. 6.4.1: V - dim finie. $f: V \to V$ endo. $Sp_{\mathbb{K}}(f) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$ $(\lambda_i \neq \lambda_j ; i \neq j)$

f est diagonalisable $\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{p} \dim(E_{\lambda_i}) = \dim(V)$

Dém: ($\Leftarrow$) On a $E_{\lambda_i} \subseteq V$ et $\dim(\bigoplus_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}) = \sum_{i=1}^{p} \dim(E_{\lambda_i}) = \dim(V)$

Puisque $\bigoplus E_{\lambda_i} \subseteq V$, on a $\bigoplus E_{\lambda_i} = V$

Soit $\mathcal{B}_i$ une base de E_{λ_i}, Alors $\mathcal{B} = \cup \mathcal{B}_i$ est une base de V. Puisque $\mathcal{B}$ consiste en vecteurs propres, prop. 6.1.1 implique que f est diagonalisable.

($\Rightarrow$) D'après prop 6.1.1, il existe une base $\mathcal{B}$ de V qui consiste en des vecteurs propres.

Soit $\mathcal{B}_i = \{b \in \mathcal{B} \mid b \in E_{\lambda_i}\}$

On montre que $\mathcal{B}_i$ est une base de E_{λ_i} (Exo)

Alors $\sum_{i=1}^{p} \dim(E_{\lambda_i}) = \sum_{i=1}^{p} \text{card}(\mathcal{B}_i) = \text{card}(\cup \mathcal{B}_i) = \text{card}(\mathcal{B}) = \dim(V)$

↑ les $\mathcal{B}_i$ sont disjoints ∎

Corollaire: $f: V \to V$ endo, $\dim(V) = n$

si f possède n valeurs propres distinctes alors f est diagonalisable

Dém: $n \geq \dim(\bigoplus_{i=1}^{n} E_{\lambda_i})$ parce que $\bigoplus E_{\lambda_i} \subseteq V$

$= \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\dim(E_{\lambda_i})}_{\geq 1} \geq n = \sum_{i=1}^{n} 1$

$n \geq \dim(\bigoplus_{i=1}^{n} E_{\lambda_i}) \geq n$

Alors $\dim(\bigoplus_{i=1}^{n} E_{\lambda_i}) = n = \dim(V) \Rightarrow f$ diagonalisable

Théorème 6.4.2:

$f: V \to V$ endo $\dim(V) = n$

f est diagonalisable $\Leftrightarrow$ 1. le poly. caract. est scindé
2. Pour tout λ val. propre d'ordre k $\dim(E_\lambda) = k$

Remarque: La condition 1. est toujours satisfaite dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Dém : ($\Leftarrow$) Soit $Sp_{\mathbb{K}}(f) = \{\lambda_1, \dots \lambda_p\}$ où λ_i est d'ordre k_i $\dim(V) = n$

$$\sum_{i=1}^{p} \dim(E_{\lambda_i}) = \sum_{i=1}^{p} k_i \text{ par } ②$$

$$= n \text{ par } ①$$

Prop. 6.4.1 $\Rightarrow$ f est diagonalisable.

($\Rightarrow$) Puisque f est diagonalisable, on a par prop. 6.4.1

$$\sum_{i=1}^{p} \dim(E_{\lambda_i}) = n$$

① poly caractéristique est scindé $\Leftrightarrow k_1 + k_2 + \dots + k_p = n$

On a $n = \sum_{i=1}^{p} \dim(E_{\lambda_i})$

$$\leq \sum_{i=1}^{p} k_i \quad \text{(Prop. 6.3.2)}$$

$$\leq n$$

Alors $\sum_{i=1}^{p} k_i = n$

② Par l'absurde, Supposons $\dim(E_{\lambda_i}) < k_i$ pour un certain i.

$$n = \sum_{i=1}^{p} \dim(E_{\lambda_i}) \; ② \; \sum_{i=1}^{p} k_i = n$$

$n < n$ Contradiction ▨

6.5 Matrices Diagonalisables :

Déf : Une matrice $A \in M_{n,n}(\mathbb{K})$ est <u>diagonalisable</u> $\Rightarrow$ ssi $\exists$ une matrice inversible $P \in M_{nn}(\mathbb{K})$ tq la matrice $D = P^{-1} A P$ est diagonale.

Prop 6.5.1 : Une matrice A est diagonalisable $\Leftrightarrow$ $L_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ (endo) est diagonalisable.

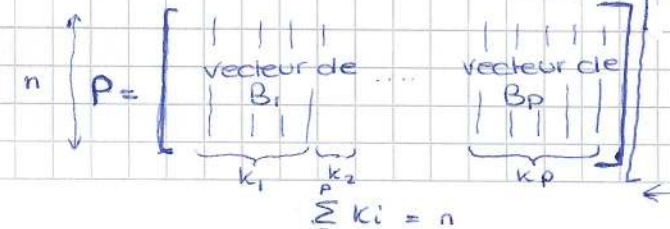
Dém : Exo ▨

Prop. 6.5.2 : A est diagonalisable $\Leftrightarrow$ ① poly. caractéristique est scindé
② Pour toute val. propre λ d'ordre k $\dim(E_\lambda) = k$

Dém : Corollaire à thm 6.4.2, Prop 6.5.1 ▨

Ex : Slides sur Chamilo.

Prop 6.5.3 : Soit $A \in M_{n,n}(\mathbb{K})$ diagonalisable.
$Sp_{\mathbb{K}}(A) = \{\lambda_1, \dots \lambda_p\}$ λ_i ordre k_i. Soit B_i une base de l'esp propre E_{λ_i}
Alors $D = P^{-1} A P$ où $D =$  et



$$\sum_{i=1}^{p} k_i = n$$

Algèbre I:

Dém: $L_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ a pour matrice dans la base canonique $\mathcal{E}$ pour $\mathbb{K}^n$:

$$M(L_A)_{\mathcal{E}} = A$$

Prop 6.1.1 et sa démonstration $\Rightarrow \exists$ une base $\mathcal{B}$ de vecteurs propres $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$ de $\mathbb{K}^n$ tq

$$D \overset{\text{déf}}{=} M(L_A)_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

où les λ_i sont les val. propres.

De plus : $M(L_A)_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B}\mathcal{E}}\, M(L_A)_{\mathcal{E}}\, P_{\mathcal{E}\mathcal{B}} \quad (P_{\mathcal{B}\mathcal{E}} = P_{\mathcal{E}\mathcal{B}}^{-1})$

$$= P_{\mathcal{E}\mathcal{B}}^{-1} A P_{\mathcal{E}\mathcal{B}}$$

par la matrice de passage :

$$P \overset{\text{déf}}{=} P_{\mathcal{E}\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} | & & | \\ [b_1]_{\mathcal{E}} & \cdots & [b_n]_{\mathcal{E}} \\ | & & | \end{bmatrix}$$

■

Ex : $A = \begin{bmatrix} -11 & -8 & -8 \\ 8 & 5 & 8 \\ 4 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad Sp_{\mathbb{R}}(A) = \{1, -3\}$

$P_A(x) = (x-1)(x+3)^2$ Bases de l'espace propre :

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

E_1 base $\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

E_{-3} base $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

À vérifier : $D = P^{-1} A P$

6.6. Quelques résultats sur la diagonalisation de matrice.

① matrices hermitiennes

Rappel: une matrice $H \in M_{n,n}(\mathbb{C})$ est dite hermitienne si $H^* = H$

Prop 6.6.1: Soit $H \in M_{n,n}(\mathbb{C})$ une matrice hermitienne. Alors, il existe $U \in M_{n,n}(\mathbb{C})$ inversible tq :

1) $D = U^{-1} H U$ est diagonale
2) U est unitaire ($U^* U = I$)

Dém: omise car trop difficile.

Prop. 6.6.2: Les valeurs propres d'une matrice hermitienne A sont tous des nombres réels.

Dém: Prop 6.6.1 $\Rightarrow \exists U$ unitaire tq $D = U^{-1} A U$ où D est une matrice diagonale, avec les valeurs propres sur cette dernière.

On a $D^* = (U^{-1} A U)^* = (U^* A U)^*$

$= U^* A^* \cdot U^{**}$

$= U^* A^* U = U^{-1} A^* U$

$= U^{-1} A U = D$

donc $D^* = D$

Alors puisque toutes les val. p. sont sur la diag de D, tous les $\lambda \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow \quad \lambda = \bar{\lambda} \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$ ■

(2) Matrices réelles symétriques:

Rappel: A symétrique $\quad A^T = A \quad A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$

Prop 6.6.3: Toute matrice réele symétrique est diagonalisable.

Dém: On a $A \in M_{n,n}(\mathbb{R}) \subset M_{n,n}(\mathbb{C})$ et $A^* = A^t = A$
La matrice A est hermitienne (grâce à la symétrie) et les val. propres sont réels.
Prop 6.6.1 $\Rightarrow \exists$ une matrice U unitaire et inversible tq $U^{-1}AU$ est diagonale.
Il faut mq la matrice $U \in M_{n,n}(\mathbb{R})$
On sait que $U = [b_1\ b_2\ \dots\ b_n]$ où $\{b_1, \dots, b_n\}$ est une base de $\mathbb{C}^n$.
On peut trouver tout b_i par la méthode du pivot à partir des matrices réelles.
Ce qui montre que b_i est vecteurs réels.
Conclusion: $U \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ ∎

Algèbre I: le 14.12.17

Trigonalisation:

Déf: $A \in M_{n,n}(\mathbb{K})$ est <u>trigonalisable</u> s'il existe une matrice inversible P et une matrice triangulaire supérieure T.
tq $\quad T = P^{-1} A P$

Prop 6.6.4: $A \in M_{n,n}(\mathbb{K})$ A trigonalisable $\Leftrightarrow P_A(x)$ est scindé

Dém: Omise ∎

Prop 6.6.5: $T \in M_{n,n}(\mathbb{K})$ triangulaire supérieure. Alors, $Sp_{\mathbb{K}}(T) = \{T_{11}, \dots, T_{nn}\}$

Dém: $P_T(x) = \det(T - xI) = (T_{11} - x)(T_{22} - x) \dots (T_{nn} - x)$
$T - xI$ est aussi matrice triangulaire supérieure.

Prop 6.6.7: $A \in M_{n,n}(\mathbb{C})$, soit $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ les racines de $P_A(x)$ avec leur multiplicité.
Alors,
i) $Tr(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n$
ii) $Det(A) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_n$

Dém: Le résultat est vrai pour les matrices triangulaires supérieures.
Prop 6.6.4 implique que A est semblable à une matrice triangulaire supérieure.
On a les résultats: B et C semblablent $\Rightarrow tr(B) = tr(C)$ et $\det(B) = \det(C)$

6.7 Décomposition de Jordan

Résultat souhaité : $\forall A \in M_{n,n}(\mathbb{K})$, il existe une matrice inversible $P \in M_{n,n}(\mathbb{K})$ tq $J = P^{-1}AP$ est "presque diagonale"

① Polynômes annulateurs :

Déf : $A \in M_{n,n}(\mathbb{K})$ soit $Q(x) \in \mathbb{K}[x]$ un polynôme. Q est un polynôme annulateur de A si $Q(A) = 0$ (↑ matrice nulle.)

Remarque : On remplace x par A et on utilise les opérations matricielles.

Ex : $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ $\quad Q(x) = x^2 - 5x + 7$

$Q(A) = A^2 - 5A + 7I = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 5 & 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 10 & -5 \\ 5 & 15 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 7 \\ 7 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Q est polynôme annulateur pour A.

Prop 6.7.1 : Soit $Q(x)$ un poly. annulateur de A. Si λ est une valeur propre de A, alors λ est une racine de $Q(x)$

Dém : Soit $Q(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i$. Soit $v \neq 0$ vecteur propre associé à la valeur propre λ.

A voir : $Q(\lambda) = 0$ $\quad$ On a $Av = \lambda v$

et par conséquent, pour $k \geq 1$ $\quad A^k v = \lambda^k v$ (par récurrence)

Alors $Q(A)v = (a_m A^m + \dots + a_0 I) \cdot v$ (une matrice)

$= a_m A^m v + \dots + a_1 Av + a_0 I \cdot v$

$= a_m \lambda^m v + \dots + a_1 \lambda v + a_0 v$

$= (a_m \lambda^m + \dots + a_1 \lambda + a_0) v$

$= Q(\lambda) \cdot v$

Puisque Q est polynôme annulateur, $Q(A) = 0$

Donc $Q(\lambda) \cdot v = 0$ mais $v \neq 0$

Puisque $v \neq 0$, $Q(\lambda) = 0$ est la seule possibilité.

Et donc λ est racine de Q. ∎

Prop 6.7.2 : Cayley - Hamilton

Le polynôme caractéristique $P_A(x)$ est polynôme annulateur de A.

$P_A(A) = 0$.

Dém : (Pour le cas A diagonalisable)

Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ valeurs propres de A. Puisque A est diagonalisable,

Il existe P inversible tq $[\lambda_i] = P^{-1}AP = D$

Soit $P_A(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$

Puisque λ_i est une valeur propre, $P_A(\lambda_i) = 0$.

On a $P_A(D) = a_n D^n + \dots + a_1 D + a_0 I = a_n \begin{bmatrix} \lambda_1^n & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^n \end{bmatrix} + \dots + a_1 \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} + I a_0$

$= \begin{bmatrix} a_n \lambda_1^n + \dots + a_1 \lambda_1 + a_0 & & \\ & a_n \lambda_2^n + a_{n-1} \lambda_2^{n-1} + \dots + a_1 \lambda_2 + a_0 & \\ & & \ddots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_A(\lambda_1) & & \\ & P_A(\lambda_2) & \\ & & P_A(\lambda_n) \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{bmatrix} = 0$ Donc P_A annulateur pour D.

Dém: (Suite) Puisque $D = P^{-1} \cdot A \cdot P$ on a $A^k = PD^kP^{-1}$ (récurrence)

$D = P^{-1}AP \Rightarrow PD = AP \Rightarrow A = PD \cdot P^{-1}$

$A^k = A \cdot A^{k-1} = A(PD^{k-1}P^{-1}) = P \cdot D^k P^{-1}$

Alors $P_A(A) = a_n A^n + \dots + a_1 A + a_0 I$.

$= a_n (PD^nP^{-1}) + \dots + a_1 PDP^{-1} + a_0 I$

$= P(a_n D^n + \dots + a_k D + a_0 I) P^{-1}$

$= P P_A(D) P^{-1} = P \cdot 0 \cdot P^{-1} = 0$

(0 : matrice nulle.)

Prop 6.7.3 : Soit $m(x)$ un polynôme annulateur de degré minimal. Alors, tout autre polynômes annulateur $Q(x)$ est de la forme $Q(x) = m(x)P(x)$ par $P(x) \in \mathbb{K}[X]$ le 15.12.17

Dém : Division de polynôme $\rightarrow Q(x) = m(x)P(x) + r(x)$ → reste où degré $r(x)$ < degré de $m(x)$

On a $r(A) = \overbrace{Q(A)}^{0} - \overbrace{m(A)}^{0} P(A) = 0$ Q et m sont poly. annulateur

Donc $r(x)$ est polynôme annulateur avec degré($r(x)$) < degré($m(x)$) ↯

Pour résoudre le problème, $r(x) = 0$. ∎

Corollaire : Si $m(x)$ et $m'(x)$ sont deux polynômes annulateurs de degré minimal alors $m'(x) = k\,m(x)$ pour $k \in \mathbb{K}$.

② Le polynôme minimal :

$\underbrace{x^n + a_{n-1}x^{n-1}}_{\text{normalisé}} + \dots + a_0$

Le polynôme minimal de A est l'unique polyn ann. normalisé de A de degré minimal.

Prop 6.7.4 : Si le polynôme caractéristique $P_A(x)$ de A est scindé et $P_A(x) = (-1)^n (x-\lambda_1)^{\alpha_1} (x-\lambda_2)^{\alpha_2} \dots (x-\lambda_p)^{\alpha_p}$ alors $m_A(x) = (x-\lambda_1)^{\beta_1} (x-\lambda_2)^{\beta_2} \dots (x-\lambda_p)^{\beta_p}$ où $1 \leq \beta_i \leq \alpha_i$

Ex : $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ $\qquad P_A(x) = -(x-1)(x+2)^2$

Prop 6.7.4 : soit $m_A'(x) = (x-1)(x+2)$ (2 possibilités)
où $m_A''(x) = (x-1)(x+2)^2$

Il faut calculer pour savoir lequel est le bon.

$$m_A'(A) = (A - I)(A + 2I) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Conclusion, le polynôme minimal $m_A(x) = (x-1)(x+2)$

Algèbre I:

③ forme de Jordan:

Déf: Un bloc de Jordan d'ordre k est une matrice carrée $k \times k$ de la forme:

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \lambda & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{bmatrix}$$

Prop 6.7.5: Soit $A \in M_{n,n}(\mathbb{K})$ un bloc de jordan.

i) $P_A(x) = (-1)^k (x-\lambda)^k$
ii) $m_A(x) = (x-\lambda)^k$
iii) $\dim(E_\lambda) = 1$

Dém: Série 13 ∎

Déf: Une matrice de la forme $\begin{bmatrix} J_1 & & 0 \\ & J_2 & \\ 0 & & J_3 \end{bmatrix}$, où les J_i sont des blocs de Jordan, est dite sous forme de Jordan.

Ex:

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -i & 1 & 0 \\ 0 & -i & 1 \\ 0 & 0 & -i \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -i & 1 \\ 0 & -i \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Dans le cas $\mathbb{C}$ J existe toujours

Prop 6.7.6: Soit $A \in M_{n,n}(\mathbb{K})$ avec poly. caractéristique scindé.

i) il existe $C \in M_{n,n}(\mathbb{K})$ inversible et $J \in M_{n,n}(\mathbb{K})$ sous forme de jordan. tq $J = C^{-1} A C$

ii) J est unique à l'ordre des blocs près.

iii) Si $P_A(x) = \pm (x-\lambda_1)^{\alpha_1} \cdots (x-\lambda_p)^{\alpha_p}$ $\lambda_i \neq \lambda_j$ $i \neq j$,
$m_A(x) = (x-\lambda_1)^{\beta_1} \cdots (x-\lambda_p)^{\beta_p}$ et $\dim(E_{\lambda_i}) = \gamma_i$
Alors: J a les propriétés suivantes:
i) il y a γ_i blocs avec λ_i sur la diagonale
ii) parmis ces blocs, il existe un bloc d'ordre β_i
iii) la somme des ordres des blocs avec λ_i sur la diagonale est α_i.

Ex: Si pour une matrice A on a:
$P_A(x) = -(x-4)^5(x-7)^2$ $\quad m_A(x) = (x-4)^3(x-7)^2$
$\dim(E_4) = 3$ $\quad \dim(E_7) = 1$

x = 2ème bloc y = 3ème bloc

$$J = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 4 & 1 & & & \\ 0 & 0 & 4 & & & \\ & & & 4 & & \\ & & & & 7 & 1 \\ & & & & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

- 3 blocs avec 4 sur la diagonale → (il y en a un d'ordre 3)
- 1 bloc avec 7 sur la diagonale → (3 + ordre x + ordre y = 5) ⇒ $x = 1$ et $y = 1$ (il est d'ordre 2)