Déf: Étude systématique des inégalités

1. Notion de base :

1.1 Logique

Déf: Une assertion mathématique est un enoncé avec une valeur logique vraie (V) ou fausse (F), mais jamais les deux à la fois.

Ex:
- "$4 > 2$" (V)
- " pour tout entier n, si $n > 4$ alors $n > 2$." (V)
- " $5 < 3$" (F)

Remarque: Pas tous les énoncés sont des assertions admissibles.

Ex:
- " Lana Del Rey est mieux que Sibelius."
- " Cet énoncé est faux." (Paradoxe du menteur)

Convention: La simple phrase "A" est une abréviation pour "A est vraie"

Opérations sur les assertions:

- La négation $\neg$, définie à l'aide de la table de vérité →

A	$\neg$A
V	F
F	V

- Opérations binaires : et ($\wedge$), ou (V), implication ($\Rightarrow$), équivalence ($\Leftrightarrow$) définis par :

A	B	A∧B	A∨B	A⇒B	A⇔B
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	F	V	V	F
F	F	F	F	V	V

Une assertion mathématique : énoncé vrai ou faux mais logique
On y applique la négation $\neg$, le et $\wedge$, le ou $\vee$
L'implication $\Rightarrow$ et l'équivalence.

BRUNNEN

Notation : On écrit souvent "," à la place de "$\wedge$".

Ex : Par exemple : "$x>2, x\leq 4$" veut dire "$(x>2)\wedge(x\leq 4)$"

Ex 2 : (activation de la déf de "$\Rightarrow$")

Pour u entier A_u = "$(u>4)\Rightarrow(u>2)$"
faux implique faux ($u=1$) ou vrai ($u=3$)
Vrai implique vrai ($u=5$) Et jamais faux

Proposition 3 : (théorème)

(i) $\neg(A\vee B) \iff (\neg A \wedge \neg B)$

(ii) $\neg(A\wedge B) \iff (\neg A \vee \neg B)$

Dém :

(i) Table de vérité :

A	B	$\neg(A\vee B)$	$\neg A\wedge\neg B$	$\neg(A\vee B)\iff(\neg A\wedge\neg B)$
V	V	F	F	V
V	F	F	F	V
F	V	F	F	V
F	F	V	V	V

■

(ii) similaire ■ [à faire]

Proposition 4 : (Raisonnement par double implication)

$(A \iff B) \iff ((A\Rightarrow B)\wedge(B\Rightarrow A))$

Dém :

A	B	$A\iff B$	$A\Rightarrow B$	$B\Rightarrow A$	$((A\Rightarrow B)\wedge(B\Rightarrow A))$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F
F	V	F	V	F	F
F	F	V	V	V	V

▨

La négation d'un et donne la négation ou la négation
Et inversement.

Proposition 5: (principe de la démonst. mathématique)

$$[(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)] \Rightarrow (A \Rightarrow C)$$

Dém: Dans les Exercices (cahier) ▨

On utilise Proposition 5 pour construire des démonst. mathé. de la forme:

hypothèse ↙ ↙ théorème.

$$A \Rightarrow B \Rightarrow C \Rightarrow \quad \Rightarrow T$$

Proposition 6: (Raisonnement par la contraposée)

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$$

Ex: Tous les corbeaux sont noirs, un objet qui n'est pas un corbeaux, il peut être noir, Si l'objet n'est pas noir alors ce n'est pas un corbeau.

Dém: Exercice ▨ Série 1

On utilise Prop. 6 dans le raisonnement par l'absurde ou démonstration indirecte.

Idée: on suppose que la négation de la conclusion est vraie et on dérive une contradiction.

Plus formel: pour montrer $A \Rightarrow B$, on montre que $A \wedge \neg B$ mène à une contradiction.
Donc $A \wedge \neg B$ est fausse, donc $\neg(A \wedge \neg B)$ est vraie donc $\neg A \vee B$ est vraie, donc $A \Rightarrow B$.

Ex: Il n'existe pas de + grand entier naturel

A = axiomes habituels des entiers $\mathbb{N}$ (à venir)
B = "$\mathbb{N}$ n'a pas de plus grd élément." Contradiction.

Dém: $\neg B \Rightarrow$ il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $m \geq n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ ↘
Mais (par A) si $m \in \mathbb{N}$ alors $(m+1) \in \mathbb{N}$ et $(m+1) > m$ ↯ ▨

Raisonnement par la contraposée; raisonnement par l'absurde.

1.2 Théorie des ensembles

Déf: Nous adoptons la notion intuitive de Cantor. Un ensemble est une collection non-ordonnée d'éléments.

Notation:
- $x \in E$ "appartient" ou "est un élément de"
- $\{a, b, \dots, z\}$ = l'ensemble des éléments $a, b, \dots, z$ (↳ fini)

Ex 8:
- $\{1; 2; 3\} = \{2; 1; 3\} = \{1; 2; 3; 2; 2; 1\}$
- $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; \dots\}$
- $\mathbb{N}^* = \{1; 2; 3; \dots\}$

Déf 9: Soient E et F deux ensembles. E est inclus dans F (E est une partie ou un sous-ensemble de F) si pour tout $x \in E$ on a $x \in F$. Noté $E \subset F$

Axiomes: Axiomes des ensembles:

(i) il existe un unique ensemble, l'ensemble vide, noté $\emptyset = \{\}$, tel que $x \notin \emptyset$ pour tout x. $(\neg(x \in \emptyset))$

(ii) Soit E un ensemble et $A(x)$ une assertion dépendante de $x \in E$. Alors il existe un unique ensemble $F \subset E$ tel que les éléments de F sont exactement les éléments $x \in E$ tels que $A(x)$ est vraie. Noté: $F = \{x \in E : A(x)\}$

(iii) Soit E un ensemble, il existe un unique ensemble dont tous les éléments sont exactement les parties de E. Noté $\mathcal{P}(E)$

---

les ensembles; l'inclusion; l'ensemble vide; avec les assertions. Ensemble d'éléments

Analyse I:

Axiome:

(iiii) Soient E et F deux ensembles.
Alors il existe un unique ensemble formé de tous les éléments de E et F.
(union de E et F) Noté : $E \cup F$

Ex 10:

- $\{u \in \mathbb{N}^* : u \text{ divise } 15\}$
  $= \{1; 3; 5; 15\}$
- $\mathcal{P}(\{1;2\}) = \{\emptyset; \{1\}; \{2\}; \{1;2\}\}$

La formulation précise de l'axiome (ii) est importante.
Par exemple; la définition :
$$F = \{\text{ensembles } x : x \notin x\}$$
est absurde. (Si $F \in F$ alors $F \notin F$, et si $F \notin F$ alors $F \in F$).
Plus prosaïque : le barbier de Séville rase tous les habitants de Séville qui ne se rasent pas eux-mêmes.

Déf 11:

Quantificateurs
Soit E un ensemble et A(x) une assertion dépendante de $x \in E$.

- Quant. universel : $\forall$ ("pour tout")
  $(\forall x \in E, A(x)) :\Leftrightarrow$ (A(x) est vrai pour tout $x \in E$)
- Quant. existentiel : $\exists$ ("il existe")
  $(\exists x \in E, A(x)) :\Leftrightarrow$ (il existe un $x \in E$ tel que A(x))
  On écrit aussi : $\exists!$ ("unique")
  $(\exists! x \in E, A(x)) :\Leftrightarrow$ (il existe un unique $x \in E$ tel que A(x))

Ex 12:

(i) $\forall n \in \mathbb{N}$, $u^2 \geq u$

(ii) $\exists u \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N}, k \leq u$ (il existe un + grd entier nat) — fausse.

(iii) $\forall u \in \mathbb{N}, \exists k \in \mathbb{N}, k > u$ (il n'existe pas de + grd de $\mathbb{N}$) — négation.

Union, $\forall$; $\exists$;

BRUNNEN

Proposition 13 :

(i) $(\neg(\forall x \in E, A(x))) \iff (\exists x \in E, \neg A(x))$

(ii) $(\neg(\exists x \in E, A(x))) \iff (\forall x \in E, \neg A(x))$

Dém :

(i) $\neg(\forall x \in E, A(x)) \iff \neg(\{x \in E : A(x)\} = E)$

$\iff \{x \in E : A(x)\} \neq E \iff \{x \in E : \neg A(x)\} \neq \emptyset$

$\iff (\exists x \in E, \neg A(x))$ ■

(ii) Dans (i) on remplace $A(x)$ par $\neg A(x)$ et on prend la négation. ■

Application :

Preuve par contre-exemple.
Pour montrer que "$\forall x, A(x)$" est fausse, on montre que $\exists x, \neg A(x)$

Ex: "$\forall x, \; x^2 + 3x + 1 = 0$" est fausse, puisque pour $x = -1$ on a $(-1)^2 + 3(-1) + 1 = -1 < 0$

Déf. 14 :

E, F ensembles.
- intersection $E \cap F := \{x \in E : x \in F\}$
- complémentaire $E \setminus F := \{x \in E : x \notin F\}$

Si E est évident du contexte, on écrit aussi: $E \setminus F = F^c$

Remarque 15 :

$X = \{x \in E : A(x)\}$

$Y = \{x \in E : B(x)\}$

alors $X \cap Y = \{x \in E : A(x) \wedge B(x)\}$

$X \cup Y = \{x \in E : A(x) \vee B(x)\}$

La négation du $\forall$ pourrait donner la nég de $\exists$ et $\neg A(x)$ et inversement.

Intersection et union d'ensemble.

Proposition 16 : Distributivité

E, F, G, ensembles.

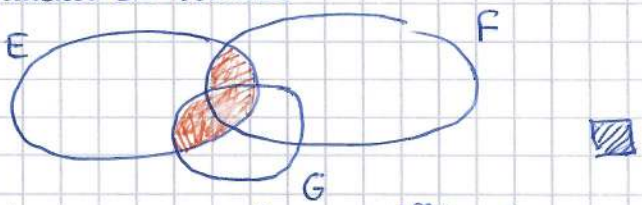
(i) $E \cap (G \cup F) = (E \cap G) \cup (E \cap F)$

(ii) $E \cup (F \cap G) = (E \cup F) \cap (E \cup G)$

Dém : (8 cas si $x \in E$, $x \notin E$, $x \in F$, $x \notin F$, $x \in G$, $x \notin G$)

Diagramme de Venn

(i)



Pour tout x, on a 8 cas différents selon si $x \in E$, $x \in F$, $x \in G$. Pour chaque cas on vérifie que $x \in E \cap (F \cup G) \iff x \in (E \cap F) \cup (E \cap G)$

(ii) similaire ▨

famille de partie.

Déf 17 : Soit E un ensemble et E_i, $i \in I$, des parties de E indexée par un ensemble I.
La réunion des E_i est

$$\bigcup_{i \in I} E_i := \{x \in E : \exists i \in I, x \in E_i\}$$

et l'intersection des E_i est

$$\bigcap_{i \in I} E_i := \{x \in E : \forall i \in I, x \in E_i\}$$

par exemple si $I = \{1; 2\}$ on a $\bigcup_{i \in I} E_i = E_1 \cup E_2$

et $\bigcap_{i \in I} E_i = E_1 \cap E_2$

La distributivité fonctionne vraiment

Union et réunion de partie

BRUNNEN

De

Proposition 18 : Lois de Morgan :

E ensemble, $E_i \in E$, $i \in I$.
Notons $F^c = E \setminus F$, on a

(i) $\left(\bigcup_{i \in I} E_i\right)^c = \bigcap_{i \in I} E_i^c$

(ii) $\left(\bigcap_{i \in I} E_i\right)^c = \bigcup_{i \in I} E_i^c$

Déw :

(i) Par tout $x \in E$ on a
$x \in \left(\bigcup_{i \in I} E_i\right)^c \iff \neg \left(x \in \bigcup_{i \in I} E_i\right)$
$\iff \neg (\exists i \in I,\ x \in E_i) \iff \forall i \in I,\ x \notin E_i$
$\iff \forall i \in I,\ x \in E_i^c \iff x \in \bigcap_{i \in I} E_i^c$

(ii) appliquer le complémentaire de (i) à E_i^c, $i \in I$. ∎

Ex 19 :

$I = \{1, 2\}$;

$(E_1 \cup E_2)^c = (E_1^c \cap E_2^c)$

$(E_1 \cap E_2)^c = (E_1^c \cup E_2^c)$

Ex 20 :

$I = E = \mathbb{R}$ pas inclu = $]-\infty, a[$

Soit $E_a := (-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} : x \in a\}$

Alors on a $E_a^c = [a, \infty)$

$\bigcup_{a \in \mathbb{R}} E_a = \mathbb{R}$, $\bigcap_{a \in \mathbb{R}} E_a = \emptyset$

Le 26.09.17

Chapitre 1.3 Fonctions :

Déf. 21 :

E, F, deux ensembles.
Un <u>couple ordonné</u> (x, y) où $x \in E$ et $y \in F$ est caractérisé par $(x, y) = (a, b) \Leftrightarrow x = a,\ y = b$.

On définit le <u>produit cartésien</u> $E \times F = \{(x; y),\ x \in E, y \in$



Déf. 22 :

(i) E, F, deux ensembles et $A \subset E \times F$, A est un <u>graphe</u> si

$$\forall x \in E,\ \exists!\ y \in F,\ (x, y) \in A$$

(ii) Une <u>fonction</u>, ou application, consiste de 2 ensembles E, F et d'un graphe $A \subset E \times F$.

Notation :

Une fonction associée à (E, F, A) est notée

$$f : \begin{array}{ccc} E & \to & F \\ x & \mapsto & f(x) = y \end{array}.$$

où $y \in F$ est l'unique élément de F tel que $(x, y) \in A$.

Deux fonctions sont égales si et seulement si elles ont le même triplet (E, F, A)

Ex 23 :

- Fonctions usuelles : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$:
  $x \mapsto e^x$, $x \mapsto x$, $x \mapsto x^2$, $x \mapsto |x|$, $x \mapsto \cos(x)$
- $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{\sin(\pi x)} \end{array}$
- $a \in E$, $\delta_a : \begin{array}{ccc} E & \to & \{0; 1\} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 1 \text{ si } x = a \\ 0 \text{ si } x \neq a \end{cases} \end{array}$

  Fonction de Dirac.
- $A \subset E$ $\chi_A : \begin{array}{ccc} E & \to & \{0; 1\} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 1 \text{ si } x \in A \\ 0 \text{ si } x \notin A \end{cases} \end{array}$

  (Fonction caractéristique de A)

BRUNNEN

Ex (suite):

- $I_E : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \mapsto & x \end{array}$

  identité sur E.

- $U : \mathbb{N} \to E$ est appelée une suite.

  Notation : $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ plutôt que $U : n \mapsto U_n$

- $x : \begin{array}{ccc} I & \to & E \\ i & \mapsto & x(i) \end{array}$ est une famille indexée par I

  Notation : $(x_i)_{i \in I}$ plutôt que $x : i \mapsto x(i)$

Défi 24:

Vocabulaire :

- $f : \begin{array}{ccc} E & \to & F \\ x & \mapsto & f(x) = y \end{array}$

E = domaine de définition
F = domaine d'arrivée
y = l'image de x } unique
x = un antécédant de y => potentiellement multiple.

- $A \subset E$, $B \subset F$: L'image directe de A est :

$$f(A) := \{ f(x) : x \in A \} \subset F.$$

(En particulier, $f : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(F)$)

L'image réciproque de B est $f^{-1}(B)$

$$f^{-1}(B) := \{ x \in E : f(x) \in B \} \subset E$$

(En particulier, $f^{-1} : \mathcal{P}(F) \to \mathcal{P}(E)$)

- F^E := L'ensemble des fonctions $E \to F$

$(\mathbb{R}^n \ni x = (x_1, \dots, x_n)$
$= (x_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$
$\{1, \dots, n\} = \mathbb{R}$
$\mathbb{R}^n$ est donc $\mathbb{R}^{\{1, \dots, n\}}$

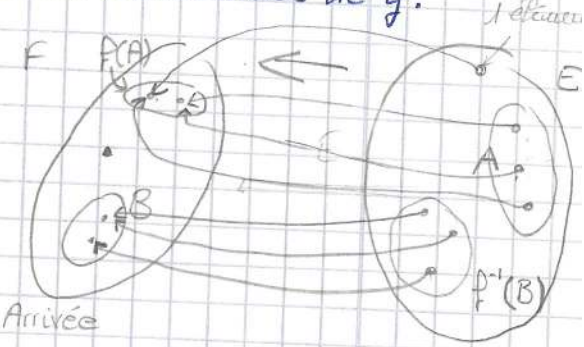
Analyse I:

Le 26.09.17.

Ex:

- $f^{-1}(\{y\}) =$

L'ensemble des antécédants de y.



L'image réciproque de l'image directe n'est pas l'ensemble de départ, il peut y avoir plus d'éléments.

Déf 25:

$f: E \to F$ fonction, $A \subset E$

$f: \begin{matrix} A \to F \\ x \mapsto f(x) \end{matrix}$ est la restriction de f à A

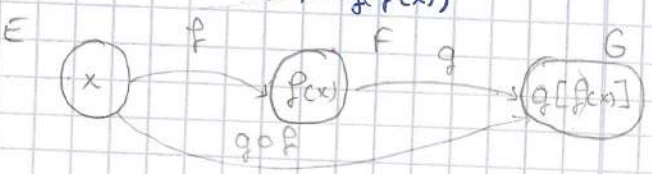
Noté : $f|_A$

Déf 26:

$f: E \to F$, $g: E \to G$

la composée de f par g est:

$g \circ f: \begin{matrix} E \to G \\ x \mapsto g(f(x)) \end{matrix}$



Proposition 27:

Associativité de $\circ$:

$f: E \to F$, $g: F \to G$, $h: G \to H$

alors $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$

BRUNNEN

Déf:

D'abord, $h \circ (g \circ f)$ et $(h \circ g) \circ f$ sont $E \to H$.

Ensuite, $\forall x \in E$,
$(h \circ (g \circ f))(x) = h((g \circ f)(x))$
$= h(g(f(x))) = (h \circ g)(f(x))$
$= ((h \circ g) \circ f)(x)$ ∎

On peut donc laisser tomber les parenthèses et écrire: $h \circ g \circ f$.

Déf 28:

$f : E \longrightarrow F$

- f est <u>injective</u> si

  $\forall x, x' \in E,\ f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$

  (l'antécédant est unique)

- f est <u>surjective</u> si

  $\forall y \in F,\ \exists x \in E,\ f(x) = y$
  (chaque y a un antécédant)

- f est <u>bijective</u>, si f injective et surjective.
  (tout $y \in F$ a exactement un antécédent)

Ex:

- $f : \begin{array}{ccc} [-1;1] & \to & [0;1] \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$

  pas injective mais ~~surjective~~ sugestive

- $f : \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$

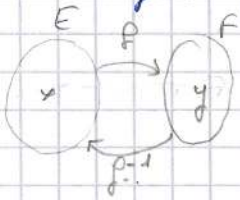
  injective mais pas ~~surjective~~ sugestive.

- $f : \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & [0,1] \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$

  bijective

Déf 30:

Soit $f: E \to F$ bijective.
La fonction inverse, ou réciproque, de f est la fonction $f^{-1}: F \to E$
$y \mapsto$ l'unique $x \in E$ tel que $f(x) = y$



Proposition 31:

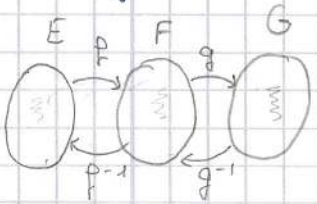
$f: E \to F$ bijective

(i) f^{-1} bijective

(ii) $(f^{-1})^{-1} = f$, $f^{-1} \circ f = I_E$, $f \circ f^{-1} = I_F$

(iii) (unicité de l'inverse) 1 seul.
Si $g: F \to E$ telle que $g \circ f = I_E$ et $f \circ g = I_F$; alors $g = f^{-1}$

(iv) (composition des inverses)
Si $g: F \to G$ bijective. Alors $g \circ f$ bijective.
$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$



Dém:

(i) f^{-1} injective: $y, y' \in F$ tel que $f^{-1}(y) = f^{-1}(y')$. Donc $f(f^{-1}(y)) = f(f^{-1}(y'))$, donc $y = y'$.

f^{-1} surjective: $x \in E$ (arrivée), alors $y := f(x) \in F$, satisfait $f^{-1}(y) = x$.

(ii) = (iii) = (iv): Exercices ∎

Ex :

- $f = I_E$, $f^{-1} = f = I_E$
- $f : \begin{array}{ccc} [0;\infty) & \to & [0;\infty) \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$, $f^{-1} : \begin{array}{ccc} [0;\infty) & \to & [0;\infty) \\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array}$
- $f : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \to & \mathcal{P}(E) \\ A & \mapsto & A^c \end{array}$ $A \in E$, $f^{-1} = f$

Ch. 1.4 Relations d'ordre :

Déf 33 :

E, un ensemble,

- Une assertion $A(x;y)$ dépendante de $x, y \in E$ est appelée relation sur E. On écrit $x \mathcal{R} y$ à la place de $A(x;y)$.

- $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre si

(i) $\forall x \in E,\ x \mathcal{R} x$ (réflexive)
(ii) $\forall x, y, z \in E,\ (x \mathcal{R} y \wedge y \mathcal{R} z) \Rightarrow x \mathcal{R} z$ (transitivité)
(iii) $\forall x, y \in E,\ (x \mathcal{R} y \wedge y \mathcal{R} x) \Rightarrow x = y$ (antisimétrique).

- La relation d'ordre totale si $\forall x, y \in E,\ x \mathcal{R} y \vee y \mathcal{R} x$.

Notation :

Si $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre on écrit souvent $x \leq y$ à la place de $x \mathcal{R} y$. $x \geq y$ signifie $y \leq x$ et $x < y$ signifie $x \leq y \wedge x \neq y$.

Ex :

34 $\mathbb{R}$ avec $\leq$ usuel, ordre totale

35 • La relation $\leq$ sur $\mathcal{P}(E)$, définie par $A \leq B \Leftrightarrow A \subset B$. $\leq$ n'est pas total (Dém : Exercice)

36 • $x \leq y \Leftrightarrow x = y$

Un ensemble E muni d'une relation d'ordre $\leq$ est dit ordonné et est noté $(E, \leq)$

Analyse I:

Le 27.09.17.

Défi 37:

$(E; \leq)$ un ensemble ordonné,
$F \subset E$, $M \in E$

- M est un **majorant** de F si $\forall x \in F, x \leq M$
- M est le **suprémum** (ou borne supérieure) de F si M est un majorant de F et pour tout majorant M' de F on a $M' \geq M$. (M est le plus petit majorant de F) $\sup F$ ↑ désastre
- M est **le maximum** de F si $M = \sup F$ et $M \in F$
  Noté: $\max F$

- Idem, en remplaçant $\leq$ par $\geq$.
  - minorant
  - **infimum** $\inf F$
  - **minimum** $\min F$

Attention: $\sup F$, $\inf F$, $\max F$, $\min F$ n'existent pas toujours, mais s'ils existent ils sont uniques. (Exercice)
Prendre 2 suprémum, 2 majorants 1 > que l'autre donc le + petit est le suprémum.

Déf 38:

$(E; \leq)$ et $(F; \lesssim)$ autre relation d'ordre des ensembles ordonnés et $f: E \to F$

- f est **croissante** si $\forall x, y \in E$, $x \leq y \Rightarrow f(x) \lesssim f(y)$
- f est **strictement croissante** si elle est croissante et injective.
- Idem pour **décroissante** ($x \geq y \Rightarrow f(x) \gtrsim f(y)$) **strictement décroissante** ou **monotone** (que croissante, que décroissante) **strictement monotone** (monotone + injective)

BRUNNEN

ch 1.5 Relation d'équivalence:

Déf 39: Une relation $\sim$ sur E est une relation d'équivalence si

(i) $\forall x \in E,\ x \sim x$ (réflexive)

(ii) $\forall x, y, z \in E,\ (x \sim y \wedge y \sim z) \Rightarrow x \sim z$ (transitivité)

(iii) $\forall x, y \in E,\ x \sim y \Rightarrow y \sim x$ (symétrie)

transitivité

Ex:

- $=$ sur E
- $\Leftrightarrow$ sur un ensemble d'assertion
- Reste modulo p.
  Soit $p \in \mathbb{N}^*$ Pour $u, u \in \mathbb{Z}$ *
  si $\exists k \in \mathbb{Z}$ $u = u + kp$
  * On écrit $u \equiv n$

Dém:

(i) $m \sim m$ en choisissant $k = 0$

(ii) $m \sim n$, $n \sim p$

$\Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ u = n + kp$
$\Rightarrow \exists j \in \mathbb{Z},\ n = l + jp.$

$\Rightarrow \exists k, j \in \mathbb{Z}$ $u = n + kp = l + (k+j)p$
$\Rightarrow m \sim p$

(iii) $m \sim n \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ u = n + kp$

$\Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z}$ $n = m + (-k)p \Rightarrow n \sim m$

Vocc: L'ensemble $[x] := \{y \in E,\ y \sim x\}$ est la classe d'équivalence de x.

Si $F = [x]$ alors x est un représentant de F.

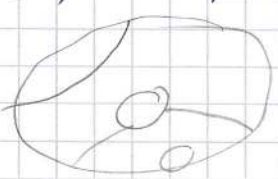
Proposition 41: Soit $\sim$ une relation d'équivalence sur E

(i) $\forall x \in E,\ \forall y \in [x],\ [y] = [x]$

(ii) $\forall x \in E,\ \forall y \in [x]^c,\ [x] \cap [y] = \emptyset$

Dém: Exercice.

ns Partition en exercice.



Le 03.10.17

Analyse I

Chapitre 2 : Les nombres réels

2.1 Les nombres élémentaires:

Rappel:

Connaissances antécédentes:

- On peut compter des objets avec des entiers naturels. Noté:
  $\mathbb{N} = \{0, 1, \dots\}$ $\mathbb{N}^* = \{1, 2, \dots\}$

  Sur $\mathbb{N}$ et $\mathbb{N}^*$, il y a l'addition "+" et la multiplication "$\cdot$", pas de moins "$-$" (Pas: $x + n = m$ n'est pas solvable)

- Dans les entiers noté $\mathbb{Z}$, on peut $+, \cdot$, et $-$.

  En effet: $\forall n \in \mathbb{Z}, \exists -n \in \mathbb{Z}$ tq $n + (-n) = 0$

  On note alors $n + (-m) = n - m$.

- $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ sont munis d'un ordre total :
  $n \leq m \iff \exists p \in \mathbb{N}$ tq $m = n + p$
  Dans $\mathbb{Z}$, on ne peut pas diviser $(x \cdot n = m)_{n \neq 0, n,m \in \mathbb{Z}}$ en général.

- On définit les nombres rationnels noté $\mathbb{Q}$ à partir de $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{N}^*$.

  Posons $\mathbb{Q} = \{(p;q) : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^*\}$
  Relation d'équivalence sur $\mathbb{Q}$:
  $(p,q) \sim (p',q') \iff pq' = p'q$ (Exercice)
  Notons $[(pq')] = \frac{p}{q}$, ainsi $\frac{p}{q} = \frac{p'}{q'} \iff pq' = qp'$
  On définit $\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^*\right\}$

  Sur $\mathbb{Q}$ on définit une addition, une multiplication et un ordre total comme suit.

  $+ : \frac{p}{q} + \frac{p'}{q'} = \frac{pq' + qp'}{qq'}$ $\cdot : \frac{p}{q} \cdot \frac{p'}{q'} = \frac{pp'}{qq'}$

  $\leq : \frac{p}{q} \leq \frac{p'}{q'} \iff pq' \leq p'q$.

  (Ex: $+, \cdot, -$ sont bien définis)

  On montre que $(\mathbb{Q}; +; \cdot; -; \leq)$ satisfait toutes les formes de calculs usuelles.

BRUNNEN

De plus, en particulier, on peut diviser, c'est à dire résoudre : $r_1 \cdot x + r_2 = r_3$
$r_1, r_2, r_3 \in \mathbb{Q}$ et $r_1 \neq 0$

De plus, pour tout $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$ avec $r_1 < r_2$, $\exists\, r \in \mathbb{Q}$ $r_1 < r < r_2$ (eg: $\frac{r_1 + r_2}{2}$).

On peut avoir l'intuition que $\mathbb{Q}$ n'a "pas de trou". C'est faux.

Proposition 1 : Il n'existe pas de $r \in \mathbb{Q}$ tq $r^2 = 2$

Dém : (absurde)

Supposons par l'absurde qu'il existe $r = \frac{p}{q}$ tel que $r^2 = 2$.

On a donc $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$, on suppose qu'ils n'ont pas de diviseur commun.

$2 = r^2 = \left(\frac{p}{q}\right)^2 = \frac{p^2}{q^2} \in \mathbb{Q} \iff p^2 = 2q^2$
$\Rightarrow p^2$ est pair $\Rightarrow p$ est pair

Donc $\exists\, s \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ tq $p = 2s$

$2q^2 = p^2 = (2s)^2 = 4s^2 \Rightarrow q^2 = 2s^2$
Donc q^2 est pair $\Rightarrow q$ est pair.

Et q sont pairs, ils ont donc un diviseur commun 2, une contradiction. ∎

Conclusion : $\mathbb{Q}$ a un trou
(on fait : $\mathbb{Q}$ est troué de trou)

Pour ne plus avoir de trou, il faut "compléter" $\mathbb{Q}$.

Cela donne les nombres réels $\mathbb{R}$, le complété de $\mathbb{Q}$.

Il existe plusieurs constructions explicites de $\mathbb{R}$: coupure de Dedekind
suite de Cauchy dans $\mathbb{Q}$.

Dans ce cours, pas de construction explicite, mais une approche axiomatique et formelle.

Le 03.10.17

2.2 Axiomes des nombres réels

Déf: Il existe un ensemble ordonné $(\mathbb{R}, \leq)$ muni de deux opérations $+ : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\cdot : \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ satisfaisant les axiomes A, M, O, D, C suivants:

Axiomes:

(A) additifs.

(Ai) $\forall x, y, z \in \mathbb{R},\ (x+y)+z = x+(y+z)$ Associativité

(Aii) $\exists\, 0 \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ x+0 = x$ élément neutre

(Aiii) $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists\, y \in \mathbb{R},\ x+y = 0$ $y = -x$ inverse

(Aiv) $\forall x, y \in \mathbb{R},\ x+y = y+x$ commutativité

Remarques:

(i) L'élément neutre est unique.

[Preuve: Soient $0, \bar{0} \in \mathbb{R}$ deux éléments neutres

$$0 \overset{A_2}{=} 0+\bar{0} \overset{A_4}{=} \bar{0}+0 \overset{A_2}{=} \bar{0} \ ]$$

(ii) Pour $x \in \mathbb{R}$ fixé, son inverse est unique

[Preuve: Soient $x \in \mathbb{R}$ fixé, et $y, z \in \mathbb{R}$ 2 inverses à voir: $y = z$

$$z \overset{A_2}{=} z+0 \overset{A_3}{=} z+(x+y) \overset{A_1}{=} (z+x)+y \overset{A_4}{=} (x+z)+y$$
$$\overset{A_3}{=} 0+y \overset{A_4}{=} y+0 \overset{A_2}{=} y \ ]$$

Terminologie: Un groupe abélien satisfait ces 4 axiomes.

BRUNNEN

Axiomes : **(M) multiplication :**

(i) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$, $(x \cdot y) \cdot z = x(y \cdot z)$

(ii) $\exists 1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \cdot 1 = x$

(iii) $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\exists y \in \mathbb{R}$, $x \cdot y = 1$ $(y = x^{-1})$

(iv) $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $x \cdot y = y \cdot x$

Remarques : (iii') l'élément neutre 1 unique

(iv') l'inverse de $x \neq 0$ est unique (preuves identiques à (i), (ii))

Axiome : **(D) distributivité :**

(i) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ $x(y+z) = x \cdot y + x \cdot z$

Remarques : (iv) $\forall x \in \mathbb{R}$ $x \cdot 0 = 0$, en particulier $\forall x \neq 0$, $x^{-1} \neq 0$.

[**Preuve :** $x \cdot 0 \overset{A_2}{=} x(0+0) \overset{D_i}{=} x \cdot 0 + x \cdot 0$: cela implique $0 = x \cdot 0 - x \cdot 0 = x \cdot 0 + \underbrace{x \cdot 0 - x \cdot 0}_{0}$

$0 = x \cdot 0$

Soit $x \neq 0$ et supposons (absurde) $x^{-1} = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow 1 = x \cdot x^{-1} = x \cdot 0 = 0$ contradiction.]

Remarques : (v) si $x \cdot y = 0$ alors $x = 0$ ou $y = 0$

[**Preuve :** Soit donc $x \neq 0 \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$ tq $x \cdot y = 0$
A voir $y = 0$

$y \overset{M_2}{=} y \cdot 1 \overset{M_3 \text{ et } x \neq 0}{=} y \cdot x \cdot x^{-1} \overset{M_1}{=} (y \cdot x) \cdot x^{-1} \overset{M_4}{=} \underbrace{(x \cdot y)}_{0} \cdot x^{-1}$

$\overset{M_4}{=} x^{-1} \cdot 0 \overset{(iv)}{=} 0$]

Terminologie : (A), (M) et (D) forment un corps.
(ils en sont les axiomes)

Analyse I :

le 02.10.17

Axiomes :

(O) ordre total :

(i) $\forall x, y, z \in \mathbb{R} \quad x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$

(ii) $\forall x, y, z \in \mathbb{R} \quad x \leq y, 0 \leq z \Rightarrow x \cdot z \leq y \cdot z$

Terminologie :

Les axiomes (A M D O) sont ceux d'un corps ordonné.

(Exercice : $\mathbb{Q}$ est un corps ordonné)
↳ il satisfait tous les axiomes mais pas le dernier (C).

Axiomes :

(C) complétude :

(i) Toute partie non-vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet un supremum.

(formalisé n'a pas de trou)

Notations :

On se fixe $a < b$ dans $\mathbb{R}$
$[a;b] := \{x \in \mathbb{R},\ a \leq x \leq b\}$
$[a;b) := \{x \in \mathbb{R},\ a \leq x < b\}$
$(a;b]$ " presque
$(a;b)$ " presque

Proposition 2 :

Soit $A \subset \mathbb{R}$ non-vide et majoré alors $\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A, a \geq \sup A - \varepsilon$

Démonstration :

Soit $A \subset \mathbb{R}$ non-vide et majoré,
Supposons par l'absurde :
$\exists \varepsilon > 0, \forall a \in A, a < \sup A - \varepsilon$

On aurait alors que $\sup A - \varepsilon$ est un * majorant de a. Mais $\sup A - \varepsilon < \sup A$ ⇒ ce qui contredit la définition du supremum.

* $\varepsilon > 0 \iff 0 < \varepsilon$ et $\varepsilon \neq 0 \Rightarrow 0 + (-\varepsilon) \leq \varepsilon + (-\varepsilon)$

$-\varepsilon \leq 0 \Rightarrow \sup A + (-\varepsilon) \leq \sup A + 0 = \sup A$
De plus si $\sup A - \varepsilon = \sup A$, alors on aura $\varepsilon = 0$ par A_3

Donc $\sup A - \varepsilon < \sup A$.

BRUNNEN

Conséquences:

Conséquences des axiomes:

(i) $\forall x \in \mathbb{R}$, $(-1)x = -x$

Preuve $x + (-1)\cdot x \overset{M_4}{=} x + x(-1) =$
$x \cdot 1 + x(-1) = x \cdot (1 + (-1))$
$= x \cdot 0 = 0$
$\Rightarrow x + (-1)x = 0$
Donc $(-1)x$ est l'inverse additif de x noté $-x$ ⌟

(ii) $(-1)\cdot(-1) = 1$

$(-1) + 1 = 1 + (-1) = 0 \Rightarrow 1$ est l'inverse additif de -1 noté $1 = -(-1)$
$1 = -(-1) = (-1)\cdot(-1)$ ⌟

(iii) $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geq 0$, $x^2 = x \cdot x \geq 0$

Soit $x \in \mathbb{R}$, Ordre total $\Rightarrow x \geq 0$ ou $x \leq 0$
(a) $x \geq 0 \Rightarrow x^2 = x \cdot x \geq 0 \cdot x = 0$
(b) $x \leq 0 \Rightarrow -x \geq 0$ On applique donc le cas (a) à $-x$
$0 \leq (-x)(-x) = (-1)x \cdot (-1)x = (-1)(-1)x^2$
$= 1x^2 = x^2$ ⌟

(iv) Définissons $2 = 1+1$, $3 = 1+1+1$, ...
On a $0 < 1 < 2 < 3 < \ldots$

$1 = 1^2 \geq 0$ et $1 \neq 0$ par $M_2 \Rightarrow 0 > 1$
par la suite, par O_1
$0 \leq 1 \Rightarrow 1 = 0+1 \leq 1+1 = 2$
et $1 \neq 2$ par A_3 et $0 \neq 1$
idem pour la suite. ⌟

(v) Pour tout $x > 0$, $x^{-1} > 0$

Par l'absurde, si ce n'était pas le cas, on aurait un $x > 0$ avec $x^{-1} \leq 0$.
$1 = x \cdot x^{-1} \leq x \cdot 0 = 0 \Rightarrow 1 \leq 0$
Ce qui contredit (iv) ⌟

(vi) $\forall x, y \geq 0,\ x \leq y \Leftrightarrow x^2 \leq y^2$

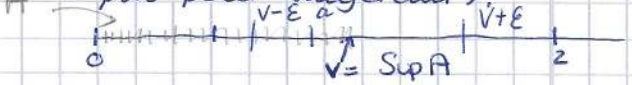
On a l'égalité suivante $\forall x, y \in \mathbb{R}$
$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$ (petit exo)
Notons également que $x, y \geq 0$
$\Rightarrow x+y \geq 0+y \geq 0$, ie: $x+y \geq 0$
De plus, si $x+y=0$, alors $x = -y \leq 0$,
$x \geq 0 \Rightarrow x = 0$ (et $y = 0$ aussi)
Dans ce cas, l'affirmation est vérifiée trivialement, on peut donc supposer $x+y>0$.

$\Rightarrow x \leq y \Rightarrow y - x \geq 0$
$\Rightarrow y^2 - x^2 = (y-x)(y+x) \geq (y+x)\cdot 0 = 0$
$\Rightarrow y^2 \geq x^2$

$\Leftarrow$ On suppose $x^2 \leq y^2$ et $y^2 - x^2 \geq 0$
Comme $y+x>0$ on a $(y+x)^{-1} > 0$
$\Rightarrow 0 \leq (y+x)^{-1} \cdot (y^2 + x^2) = (y+x)^{-1}(y+x)$
$\cdot (y-x) = y \leq x$

(vii) $\exists v > 0,\ v^2 = 2$

Soit $A = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0,\ x^2 \leq 2\} \subset \mathbb{R}$.
A est non-vide, car $0 \in A$ ($0 \cdot 0 \in A$ $0 \geq 0$) A est majoré par 2, si x est majoré par deux ($x \in A \Rightarrow x^2 \leq 2 \leq 4 = 2^2 \Rightarrow x \leq 2$).
Par (c): il existe $\sup A = v$
Reste à voir $v^2 = 2$
Notons que $v \geq 0$ (car $0 \in A$, v est un majorant de A)
et que $v \geq 2$ (car 2 majore A, et v le plus petit majorant).



Pour vérifier que $v^2 = 2$, fixons $0 < \varepsilon \leq 1$.
- Par propositions 2: $\exists a \in A,\ a \geq v - \varepsilon$
ie: $a \geq 0$, $a^2 \leq 2$, $a + \varepsilon \geq v$
$0 \leq v \leq a + \varepsilon \overset{\text{vii}}{\Rightarrow} v^2 \leq (a+\varepsilon)^2$
$\Rightarrow 2 - v^2 \geq 2 - (a+\varepsilon)^2 = \underbrace{2 - a^2}_{\geq 0} - 2a\varepsilon - \varepsilon^2$
$\geq -(2a+\varepsilon)\cdot\varepsilon \geq -5\varepsilon$ (par $a^2 \leq 2$)
- $\exists b \notin A,\ b \in [0, v+\varepsilon]$ $\varepsilon > 0$
(Sinon par l'absurde on aurait $\forall b \in A \notin [0, v+\varepsilon]$ ou par la contraposée $b \in [0, v+\varepsilon] \Rightarrow b \in A \Rightarrow v+\varepsilon \in A$ (impossible, car v maj de A.)
Ainsi, on a $b \leq v+\varepsilon$, $b^2 > 2$
$\Rightarrow b^2 > 2 \geq 1 = 1^2 \Rightarrow b > 1 \geq \varepsilon \Rightarrow b \cdot \varepsilon > 0$

BRUNNEN

Suite :

$0 \leq b \cdot \varepsilon \leq v \Rightarrow (b-\varepsilon)^2 \leq v^2$

$2 - v^2 \leq 2 - (b-\varepsilon)^2 = \underbrace{2 - b^2}_{\geq 0} + 2b\varepsilon - \varepsilon^2 \leq 2\varepsilon$

On a aussi $b \leq v + 2 \leq 2 + 1 \leq 3$

Conclusion : $\forall 0 < \varepsilon \leq 1, -6\varepsilon \leq 2 - v^2 \leq 6\varepsilon$.

Exercice : cela implique $2 - v^2 = 0$, ie $v^2 = 0$

(vii) Même argument :

$\forall u > 0, \exists v > 0, v^2 = u$, noté $v = \sqrt{u}$

Déf :

On définit l'ensemble des entiers naturels comme $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\} \subset \mathbb{R}$

$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \ldots\} \subset \mathbb{R}$

et l'ensemble $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ des entiers relatifs comme $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\} \subset \mathbb{R}$

De plus on définit $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, les nombres rationnels par

$$\mathbb{Q} = \{pq^{-1} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^*\} \subset \mathbb{R}$$

On vérifie que $\mathbb{Q}$ satisfait (A), (M), (D), (O) mais pas (C).

(Sinon on aurait un $v \in \mathbb{Q}$ tel que $v^2 = 2$ (vii) mais on sait par prop 1 que : FAUX !)

Déf 3 :

Valeur absolue :

La valeur absolue de $x \in \mathbb{R}$ est définie par :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } < 0 \end{cases}$$

Notons que $|x| \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Proposition 4:

(i) $|x| = 0 \iff x = 0$

(ii) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$

(iii) $||x| - |y|| \leq |x+y| \leq |x| + |y|$

Dém:

(iii) $\left.\begin{array}{l} x \leq |x| \\ y \leq |y| \end{array}\right\} x+y \leq |x|+|y| \Big\} |x+y| \leq |x|+|y|$

$\left.\begin{array}{l} -x \leq |x| \\ -y \leq |y| \end{array}\right\} -(x+y) \leq |x|+|y| \Big\}$

Par montrer la 1ère inégalité, on applique la 2nd à $x' = -x$ $y' = x+y$

$|y| \leq |x'+y'| \leq |x'| + |y'| = |x| + |x+y|$

$\Rightarrow |y| - |x| \leq |x+y|$

On échange les côtés de x et y, et on obtient $|x| - |y| \leq |x+y|$

Cela implique : $||x| - |y|| \leq |x+y|$

Exemples:

1. $A = (-1, 1) \in \mathbb{R}$

le supremum 1 infimum -1
mais A n'a ni maximum ni minimum.

2. $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ n'est pas majoré, n'a pas de supremum.
Par contre, on a un minimum qui est l'infimum $= 0 \in \mathbb{N}$

3. $A = \left\{ \frac{2x}{1+x^2} ; x \in \mathbb{R} \right\}$

Notons que $0 \leq (x-1)^2 = x^2 + 1 - 2x \quad \forall x \in \mathbb{R}$
$\Rightarrow 2x \leq 1 + x^2 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow A$ est majoré par 1, mais par $x = 1$ on a : $\frac{2 \cdot 1}{1+1} = 1 \in A$
$\operatorname{Sup} A \geq 1 \Rightarrow \operatorname{Sup} A = 1 = \max A$
(En fait $A = [-1, 1]$)

BRUNNEN

2.3 Les entiers naturels :

Rappel : Par définition,

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\} \subset \mathbb{R}$$

Proposition 6 : Principe d'Archimède

$\forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}, x \leq n$

Dém : Par l'absurde = négation de la conclusion

$\exists x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, x > n$

$\Rightarrow \mathbb{N}$ est majoré par x

$\overset{(C)}{\Rightarrow}$ $c := \sup \mathbb{N}$ existe

et $\forall n \in \mathbb{N}, n \leq c$. Avec $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow n+1 \in \mathbb{N}$,

On obtient $\forall n \in \mathbb{N}, n+1 \leq c \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, n \leq c-1$

$\Rightarrow c-1$ est un majorant de $\mathbb{N}$. ▨ (c supposé le + petit majorant)

Corollaire : $\forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}, 0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$

Dém : Archimède ($x = \frac{1}{\varepsilon}$) Proposition 6.

Rappel : Par définition, $\mathbb{N}$ est la plus petite partie $X \subset \mathbb{R}$ satisfaisant :

(i) $0 \in X$

(ii) $\forall x \in X, x+1 \in X$ } ← Par d'induction.

i.e : $\mathbb{N} = \bigcap_{x \subset \mathbb{R} \text{ satisfaisant (i) et (ii)}} X$

Proposition 8 : Principe de récurrence :

Soit A_n une assertion dépendante de $n \in \mathbb{N}$.

Il faut montrer

$$A_0 \wedge (\forall n \in \mathbb{N}, A_n \Rightarrow A_{n+1})$$

alors $\forall n \in \mathbb{N}, A_n$

Analyse I : le 10.10.17

Vocabulaire :

A_0 : = pas initial
$A_n \Rightarrow A_{n+1}$: = pas de récurrence
A_n : = hypothèse de récurrence

Déf :

Soit $X := \{ n \in \mathbb{N} \mid A_n \}$

A_0, donc $0 \in X$, donc X satisfait (i)
Si $n \in X$, alors A_n, donc A_{n+1} donc $n+1 \in X$
Donc X satisfait (ii). Donc $X = \mathbb{N}$ ▨

Ex 9 :

Av : $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad (A_n)$$

Pas initial : A_0 est évident $\sum_{k=0}^{0} k^2 = \frac{0}{6} = 0^2$ ✓

Pas de récurrence : $A_n \Rightarrow A_{n+1}$

$$\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \sum_{k=0}^{n} k^2 + (n+1)^2$$

$$\overset{A_n}{=} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)(2n+2)}{6}$$ ce qui est A_{n+1} ▨

Proposition 10 :

Division euclidienne :

Soient $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}^*$. Alors $\exists ! (q,r) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tel que $a = bq + r$ et $0 \leq r < b$

Déf :

Unicité :

Soit (q,r) et (q',r') deux couples comme dans la proposition.
On peut supposer que $r' \geq r$ et donc $q' \leq q$ (car $a = b \cdot q + r = b \cdot q' + r'$. On a :

$$0 \leq b(q-q') = (r'-r)$$

Donc $c \leq (q-q') < 1$, donc $q = q'$ et $r = r'$

BRUNNEN

Existence : Soit $b \in \mathbb{N}^*$ et

$$A_n = \{ \forall a \leq n, \exists (q, r) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, (a = b \cdot q + r) \wedge (0 \leq r \leq b) \}$$

Nous allons montrer A_n par récurrence pour tout n.

Pas initial est A_{b-1}, qui on montre en prenant : $q = 0$ et $r = a$

Pas de récurrence :
Soit $n \geq b-1$ et montrons $A_n \Rightarrow A_{n+1}$.
Pour montrer A_{n+1} soit $a \leq n+1$.
Si $a \leq n$ on utilise l'hypothèse A_n.
Si $a = n+1$ on considère $a - b \in [0; n]$
Par l'hypothèse A_n, on obtient $\exists (q_1; r_1) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$
$(a - b = bq_1 + r_1) \wedge (0 \leq r_1 \leq b)$,
donc $a = b(q_1 + 1) + r_1$

On pose $q = q_1 + 1$ et $r = r_1$ ∎

2.4 Notion de cardinal :

Est-ce que $\mathbb{Z}$ est plus grand que $\mathbb{N}$? non

$\mathbb{Q}$ que $\mathbb{N}$? non

$\mathbb{R}$ que $\mathbb{Q}$? oui

Déf 11 : Les ensembles E et F sont <u>équipotents</u> s'il existe $f : E \to F$ bijective

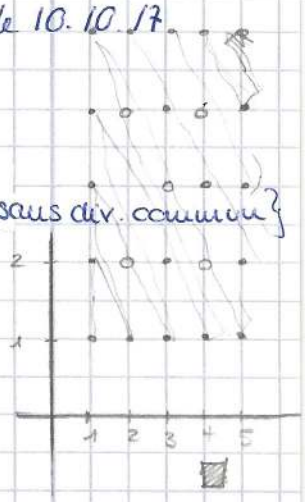
Ex 12 : $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ sont équipotents

$$f : \begin{cases} \mathbb{N} \to \mathbb{Z} \\ n \mapsto \begin{cases} n/2 & \text{si } n \text{ pair} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ impair} \end{cases} \end{cases}$$

f : 0 ↦ 0, 1 ↦ −1, 2 ↦ 1, 3 ↦ −2, 4 ↦ 2

Déf 13 : Un ensemble est <u>dénombrable</u> s'il est équipotent avec $\mathbb{N}$.

Proposition 14 : $\mathbb{Q}$ est dénombrable.



Dém: Il suffit de montrer que

$\mathbb{Q}_+ := \{ r \in \mathbb{Q} ; r > 0 \} = \{ \frac{p}{q} , p,q \in \mathbb{N}^* \text{ sans div. commun} \}$

est dénombrable.

Fonction bijective $\mathbb{N} \to \mathbb{Q}$

tableaux de nombres ▨

Par un argument similaire, on montre que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est aussi dénombrable et par récurrence que $\mathbb{N}^n = \underbrace{\mathbb{N} \times \dots \times \mathbb{N}}_{n}$ est dénombrable pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. ▨

Proposition 15: Soit E, un ensemble.
Alors il n'existe pas $f: E \to \mathcal{P}(E)$ surjective.
En particulier, E et $\mathcal{P}(E)$ ne sont pas équipotentes.

Dém: (Par l'absurde)
Soit $f: E \to \mathcal{P}(E)$ surjective.
Soit $F = \{ x \in E : x \notin f(x) \} \in \mathcal{P}(E)$
Puisque f surjective, $\exists x_0$, $f(x_0) = F$
Si $x_0 \in F$ alors par définition $x_0 \notin F$ et vice-versa.
Contradiction. ▨

Retour: En particulier, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ n'est pas dénombrable.

Proposition 16: $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable

Dém: (par l'absurde)
On utilise l'argument diagonal de Cantor.
Supposons $\exists f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ bijective.
On écrit chaque réel $f(n)$ en base 10, avec $f_1(n), f_2(n), \dots$ les chiffres après la virgule de $f(n)$.
On définit $x \in [0,1]$, de la forme $x = 0.x_1 x_2 x_3 \dots$ tel que $x_k \in \{0,1,\dots,8\} \setminus \{f_k(k)\}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
Alors $x \notin f(\mathbb{N})$; en effet, si $x = f(n)$ pour un $n \in \mathbb{N}$, alors $x_n \notin f_n(n)$ donc $x \neq f_n$. ▨

Illustration: on choisit les décimales de x comme étant différentes de la diagonale du tableau

$f_1(1)$	$f_2(1)$	$f_3(1)$	$f_4(1)$	
$f_1(2)$	$f_2(2)$	$f_3(2)$	$f_4(2)$	
$f_1(3)$	$f_2(3)$	$f_3(3)$	$f_4(3)$	
$f_1(4)$	$f_2(4)$	$f_3(4)$	$f_4(4)$	

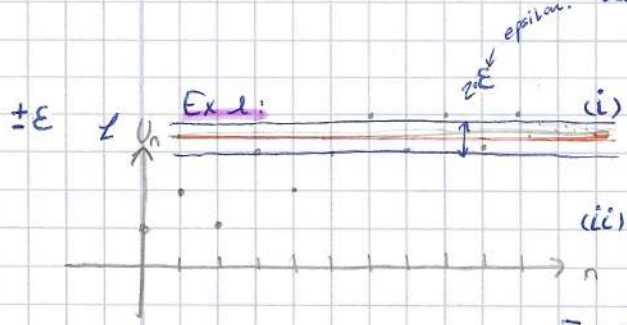
BRUNNEN

Le 11.10.17

3. Suites numériques

3.1 Convergence

Rappel: Une suite est une fonction $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ notée $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et souvent abrégée (u_n)



Ex 1:

(i) Les nombres de Fibonacci: $1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots$
$u_0 = u_1 = 1$, $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$ pour $n \geq 1$

(ii) $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}^*$
(intérêt $\frac{1}{n}$ obtenu n fois par année)

Intuitivement, (u_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ si u_n s'approche de ℓ quand n devient grand.
Plus précisément, on peut s'assurer que u_n est arbitrairement proche de ℓ en choisissant n assez grand.

[Je me donne une tolérance ε de chaque côté de ℓ tel que si n très grand alors u_n est dans l'interval]

Déf 2: Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{R}$ la suite converge vers ℓ si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ |u_n - \ell| < \varepsilon$$

Alors ℓ est appelé la limite de la suite (u_n) et on écrit $\ell = \lim_{n \to \infty} u_n$

Remarques

(i) Si (u_n) converge vers ℓ, (u_n) est convergente. Sinon elle est divergente.

(ii) On écrit aussi $u_n \xrightarrow[n \to \infty]{} \ell$ ou $\lim_n u_n = \ell$ à la place $\lim_{n \to \infty} u_n = \ell$

(iii) La limite de (u_n) est unique.

[Dém: Soient ℓ_1 et ℓ_2 deux limites
$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_1,\ \forall n \geq N_1,\ |u_n - \ell_1| < \varepsilon$
$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_2,\ \forall n \geq N_2,\ |u_n - \ell_2| < \varepsilon$
Prenons $\varepsilon > 0$ et choisissons N_1 et N_2 comme en haut. Soit $N = \max\{N_1; N_2\}$
Alors $|\ell_1 - \ell_2| = |\ell_1 - u_n - \ell_2 + u_n|$
$\leq |\ell_1 - u_n| + |\ell_2 - u_n| < 2\varepsilon$
Puisque $\varepsilon > 0$ est arbitraire, on conclut $|\ell_1 - \ell_2| = 0$]

Remarques:

(iv) Les assertions $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - L| < \varepsilon$ et $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - L| \leq \varepsilon$ sont équivalents (exercices)

(v) La notion de convergence et limite est asymptotique, dans le sens où elle ne dépend que des termes u_n pour n arbitrairement grand.

Ex 3: $u_n = \frac{1}{n}$ converge vers 0

Soit $\varepsilon > 0$. Par le principe d'Archimède (Prop. 2.6), $\exists N \in \mathbb{N}, \frac{1}{N} < \varepsilon$. Alors pour tout $n \geq N$, on a $\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon$

Ex 4: Soit $q \in (0;1)$. Alors $u_n = q^n$ converge vers 0

Soit $\delta > 0$ tel que $\frac{1}{q} = 1 + \delta$. Par tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\frac{1}{q^n} = (1+\delta)^n \geq 1 + n\delta \geq n\delta$ (distributivité)

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq q^n \leq \frac{1}{n\delta}$

Pour $\varepsilon > 0$ choisissons $N \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{N} < \varepsilon\delta$ (Principe d'Archimède)

Alors on a, $\forall n \geq N$, $0 \leq q^n \leq \frac{1}{n\delta} \leq \frac{1}{N\delta} < \varepsilon$

Ex 5: $\sqrt[n]{n}$ converge vers 1

Pour commencer, pour $a, b \geq 0$, on a $a^n - b^n = (a-b)(\underbrace{a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}}_{\geq 0})$

Donc $\forall a, b \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}, a \geq b \Leftrightarrow a^n \geq b^n$

Soit $\varepsilon > 0$ Alors $(1+\varepsilon)^n = 1 + n\varepsilon + \frac{n(n-1)}{2}\varepsilon^2 + \frac{n(n-1)n(-2)}{3!}\varepsilon^3 + \ldots + \varepsilon^n$ (formule du binôme). (Tous les termes positifs)

$> \frac{n(n-1)}{2}\varepsilon^2$

Donc si $\frac{n-1}{2}\varepsilon^2 \geq 1$ alors $(1+\varepsilon)^n > n$

Choisissons $N \geq \frac{2}{\varepsilon^2} + 1$. Alors, $\forall n \geq N$, $(1+\varepsilon)^n > n$, et on conclut

$\forall n \geq N, 1 \leq \sqrt[n]{n} \leq 1 + \varepsilon \Rightarrow \forall n \geq N$

$|\sqrt[n]{n} - 1| < \varepsilon$

BRUNNEN

Divergence :

Pour montrer que (u_n) est divergente, il faut montrer $\neg(\exists L \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - L| < \varepsilon)$

Donc $\forall L \in \mathbb{R}, \exists \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N, |u_n - L| \geq \varepsilon$

Ex 6 :

$u_n = (-1)^n$ est divergente.

Soit $L \in \mathbb{R}$, $\varepsilon = 1$, $N \in \mathbb{N}$. Alors pour $n \geq N$ on a $|u_n - u_{n+1}| = 2$ et par conséquent $|u_n - L| + |u_{n+1} - L| \geq |u_n - L - u_{n+1} + L| = 2$
$\Rightarrow |u_n - L| \geq 1 \vee |u_{n+1} - L| \geq 1$
On conclut : $\exists n \geq N, |u_n - L| \geq \varepsilon$. ⌟

Le 17.10.17.

Proposition 7 :

Soient (u_n) et (v_n) deux suites convergentes.

(i) $(u_n + v_n)$ converge et $\lim_n (u_n + v_n) = \lim_n u_n + \lim_n v_n$

(ii) $(u_n \cdot v_n)$ converge et $\lim_n (u_n \cdot v_n) = \lim_n u_n \cdot \lim_n v_n$

(iii) Si $\lim_n v_n \neq 0 \neq v_n \ \forall n \in \mathbb{N}$, alors u_n / v_n converge et $\lim_n u_n / v_n = \lim_n u_n \ / \ \lim_n v_n$

(iv) $(|u_n|)$ converge et $\lim_n |u_n| = |\lim_n u_n|$

(v) Si $u_n \leq v_n \ \forall n \in \mathbb{N}$ alors $\lim u_n \leq \lim v_n$

Dém :

Soient $u = \lim_n u_n$ et $v = \lim_n v_n$
Soit $\varepsilon > 0$

(i) $\exists N_1, \forall n \geq N_1, |u_n - u| < \varepsilon$
$\exists N_2, \forall n \geq N_1, |v_n - v| < \varepsilon$
Avec $N = \max\{N_1, N_2\}$
On a $\forall n \geq N$, $|(u_n + v_n) - (u + v)| = |(u_n - u) + (v_n - v)|$
$\leq |u_n - u| + |v_n - v| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$

[Il faut partir avec $\varepsilon/2$ si le résultat de 2ε ne vous plaît pas]

Dém:

(ii) On peut supposer que $\varepsilon \leq 1$

On a $\exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall u \geq N_1, |u_u - u| < \frac{\varepsilon}{2}$

$\exists N_2 \in \mathbb{N}, \forall u \geq N_2, |v_u - v| < \frac{\varepsilon}{2}$

$N := \max\{N_1, N_2\}$

$|u_u \cdot v_u - u \cdot v| = |u_u v_u - u v_u + u v_u - u v|$

$= |v_u(u_u - u) + u(v_u - v)| \leq |v_u| \cdot |u_u - u| + |u||v_u - v|$

$\leq (|u| + |v| + 1) \cdot \frac{\varepsilon}{2}$

(iii) avec (ii) il suffit de considérer $u_u = u = 1$

On peut aussi supposer que $\varepsilon < \frac{|v|}{2}$

alors $\exists N \in \mathbb{N}, \forall u \geq N, |v_u - v| < \varepsilon$

$\Leftrightarrow |v_u - v + v| = |v_u| \geq |v| - \underbrace{|v_u - v|}_{< \frac{|v|}{2}} \geq \frac{|v|}{2}$

Pour $u \geq N$, on conclut : $\forall u \geq N$

$$\left|\frac{1}{v_u} - \frac{1}{v}\right| = \left|\frac{v - v_u}{v \cdot v_u}\right| = \frac{|v - v_u|}{|v_u| \cdot |v|} < \frac{\varepsilon}{\frac{|v|^2}{2}}$$

(v) Par l'absurde, Si $u > v$ on choisit $\varepsilon := \frac{u - v}{2} > 0$

et on obtient $\exists N \in \mathbb{N}, \forall u \geq N$

$u < v_u + \varepsilon \leq v_u + \varepsilon < v + 2\varepsilon = u$

Contradiction !

- Dans (v), l'implication $\forall u \in \mathbb{N}, u_u < v_u \Rightarrow \lim_u u_u < \lim_u v_u$ est fausse, comme le montre le contre exemple. $u_u = 0$ $v_u = \frac{1}{u}$ $\forall u \in \mathbb{N}^*$.

Ex 8:

$$u_u = \frac{3u^4 - 7u^3 + 5}{2u^4 + 6u^2 + 3u} = \frac{3 - 7u^{-1} + 5u^{-4}}{2 + 6u^{-2} + 3u^{-4}} \longrightarrow \frac{3}{2}$$

BRUNNEN

3.2 Convergence matrice :

Déf: 9 La suite (u_n) est majorée si $\exists M \in \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq M$

ie: $\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est majorée. La suite (u_n) est minorée si $(-u_n)$ est majorée.
Si (u_n) majorée $\wedge$ minorée $\Rightarrow$ Bornée

Proposition 10: Une suite convergente est bornée

Dém: Soient $l := \lim_n u_n$ et $\varepsilon = 1$. Alors $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq N$, $|u_n - l| < 1$.
En particulier, $|u_n| \leq l + 1$ $\forall n \geq N$
on conclut que: $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n| < M$ où $M := \max\{|l|+1, |u_0|, |u_1|, \ldots |u_{N-1}|\}$ ∎

Remarque: Une suite bornée n'est pas toujours convergente.

Proposition 11: Si (u_n) est croissante et majorée, alors elle est convergente et on a : $\lim_n u_n = \sup_n u_n := \sup\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$

Dém: Soit $\varepsilon > 0$. Par prop. 2.2 $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq N$
$\sup_k u_k - \varepsilon < u_n \leq u_n \leq \sup_k u_k < \sup_k u_k + \varepsilon$ ∎

Ex 12: La Représentation décimale.
Pour $x > 0$. On écrit $x = x_0, x_1 x_2 \ldots$
$x_0 \in \mathbb{N}$, $x_1, x_2, \ldots \in \{0, 1, 2, \ldots 9\}$
Alors x définit un nbr réel à l'aide d'une suite.

$$u_n = x_0, x_1 x_2 \ldots = \sum_{k=0}^{n} x_k \cdot 10^{-k}$$

(u_n) croissante et majorée par $x_0 + 1$
par déf $x := \lim_n u_n$

Ex 13: Soient $u_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ et $v_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$.
Alors on a $\forall n \geq 2$, $2 = u_1 \leq u_{n-1} \leq u_n < v_n \leq v_{n-1} \leq v_n = 4$.

Résolution: (13) $2 = u_1$, $u_1 < v_n$, $v_1 = 4$ sont évidents.
Il suffit de mq (u_n) est croissante et (v_n) décroissante.

- $\frac{u_n}{u_{n-1}} = \left(\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n-1}}\right)^n \cdot \left(1+\frac{1}{n-1}\right)$

$= \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n \frac{n}{n-1} \geq \left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{n}{n-1} = 1$

- $\frac{v_{n-1}}{v_n} = \left(\frac{1+\frac{1}{n-1}}{1+\frac{1}{n}}\right) \cdot \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right) = \left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n \cdot \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)$

$\geq \left(1+\frac{n}{n^2-1}\right) \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \geq \left(1+\frac{n}{n^2}\right)\frac{1}{n+\frac{1}{n}} = 1$

- Avec les propositions 7(v) et 11, on conclut que $\exists u, v \in \mathbb{R}$ $2 \leq U = \lim_n u_n = \sup_n u_n \leq v = \lim_n v_n = \inf_n v_n \leq 4$.

- De plus avec prop. 7 (iii) on a.
$\frac{v}{u} = \lim_n \frac{v_n}{u_n} = \frac{\lim v_n}{\lim u_n} = \lim_n 1+\frac{1}{n} = 1$

- Donc $u = v =: e \in [2,4]$ le nombre d'Euler

BRUNNEN

Ex 14: Soit $c > 1$ (Algo. Babilonien)
Soit $U_0 = C$ et $U_{n+1} = \frac{1}{2}\left(U_n + \frac{c}{U_n}\right) = U_n + \frac{c-U_n^2}{2U_n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$
Alors $U = \lim_n U_n \in [1; c]$ existe et satisfait $U^2 = C$

Dém: On a $U_0^2 = C^2 > C$, et $\forall n \in \mathbb{N}$,
$U_{n+1}^2 = \left(U_n + \frac{c-U_n^2}{2U_n}\right)^2 = U_n^2 + (C - U_n^2) + \left(\frac{\overbrace{c-U_n^2}^{>0}}{2U_n}\right)^2$
$\geqslant C \geqslant 1$
Donc $U_n^2 \geqslant C$ $\forall n \in \mathbb{N}$
$\Rightarrow$ (U_n) décroissante et $U_n \geqslant 1$ (minorée)
On conclut : $U = \lim U_n = \inf U_n$ existe,
et satisfait $1 \leqslant U^n \leqslant U_0 = C^n$
De plus, avec Prop. 7, on trouve $U = \frac{1}{2}\left(U + \frac{c}{U}\right)$
i.e : $U^2 = C$. ∎

3.3 Valeurs d'adhérence d'une suite :

Déf 15: Soit (U_n) une suite, une sous-suite extraite de (U_n) est une suite de la forme $(U_{\varphi(n)})$, où $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est strictement croissante.

Ex: $(U_0; U_1; U_2; \dots) \longrightarrow (U_1, U_3, U_4, U_7, \dots)$
$\varphi(0) = 1$ $\varphi(1) = 3$ $\varphi(2) = 4$ $\varphi(3) = 7$. ∎

Ex 16: (i) (U_{2n}), (U_{2n+1}), (U_{2n}) sont des sous suites de U_n.

(ii) Pour la suite $U_n = (-1)^n$, les sous-suites (U_n) et (U_{2n+1}) sont des suites constantes.

Proposition 17: Toute sous-suite extraite d'une suite convergente converge vers la même limite que la suite originale.

Dém: Exercices.

Définition 18: $a \in \mathbb{R}$ est une valeur d'adhérence de (U_n) s'il existe une sous-suite extraite de (U_n) qui converge vers a.

Ex 19: La suite $U_n = (-1)^n$ a deux valeurs d'adhérence, 1 et -1.
Par prop. 17, une suite convergente possède une seule valeur d'adhérence, sa limite.

BRUNNEN

Proposition 20 : Soient $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $a \in \mathbb{R}$

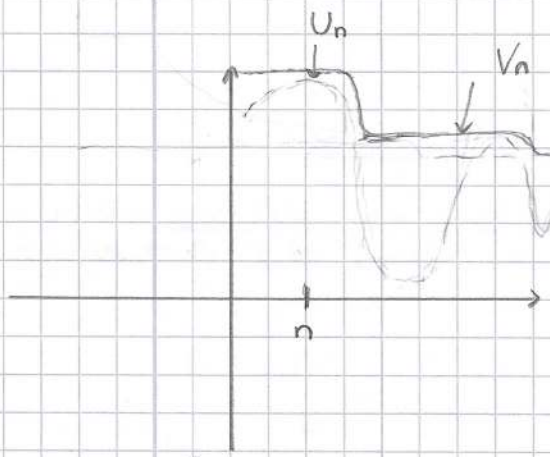
Les 2 assertions suivantes sont équivalentes.
(i) a est une valeur d'adhérence de (u_n)
(ii) $\forall \varepsilon > 0,\ \forall N \in \mathbb{N},\ \exists n \geq N,\ |u_n - a| < \varepsilon$

Dém : double implication.
(i) $\Rightarrow$ (ii) $\exists \varphi$ strictement croissante tel que $a = \lim_n u_{\varphi(n)}$. Soient $\varepsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$.

Alors $\exists N_0$ tq $\forall n' \geq N_0,\ |u_{\varphi(n')} - a| < \varepsilon$
Choisissons $n := \varphi(\max\{N, N_0\})$
Alors on a $|u_n - a| < \varepsilon$ et
$n \geq \max\{N, N_0\}$, $\varphi(k) \geq k\ \forall k \in \mathbb{N}$.
$\hookrightarrow N$ minoré par $\geq \mathbb{N}$,

(ii) $\Rightarrow$ (i) On construit une fonction $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ par récurrence.
Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $|u_k - a| < 1$ (par ii)
On pose $\varphi(0) = k$.
Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons $\varphi(0) < \varphi(1) < \dots < \varphi(n)$ sont déjà construits.
Pour $\varepsilon = \frac{1}{n+1}$ et $N := \varphi(n) + 1$
Il existe un $k \in \mathbb{N}$, $k \geq N$ tel que $|u_k - a| < \frac{1}{n+1}$
Posons $\varphi(n+1) := k$
On a donc $\varphi(n+1) > \varphi(n)$
et $|u_{\varphi(n+1)} - a| < \frac{1}{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$,
donc $|u_{\varphi(n)} - a| < \frac{1}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$(u_{\varphi(n)})$ est donc une sous-suite extraite de (u_n) qui converge vers a. ∎



Déf 21 : Soit (u_n) une suite bornée.
On définit $\limsup_{n\to\infty} u_n := \lim_{n\to\infty} \underbrace{\sup_{k \geq n} u_k}_{v_n \text{ décroissante minorée}}$

et $\liminf_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\inf_{k \geq n} u_k}_{\text{croissante majorée}}$.

Remarque : $\limsup_{n\to\infty} u_n$ existe toujours, En effet, la suite $v_n := \sup_{k \geq n} u_k$ est minorée (parce que (u_n) minorée) et décroissante.

On a toujours $\liminf_{n\to\infty} u_n \leq \limsup_{n\to\infty} u_n$.

Proposition 22: $\limsup_n u_n$ et $\liminf_n u_n$ sont des valeurs d'adhérences de (u_n).
De plus, $\limsup_n u_n$ (resp $\liminf_n u_n$) est le maximum (resp minimum) de l'ensemble des valeurs d'adhérence de (u_n).

Dém: On utilise la caractérisation de prop. 20 (ii)
Soient $\varepsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$. $(\sup_{k \geq n} v_k)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
$\Rightarrow \exists N' \in \mathbb{N}, \forall n \geq N', \limsup_k u_k \leq \sup_{k \geq n} u_k \overset{(*)}{\leq} \limsup_k u_k + \varepsilon$

En particulier, $\forall n \geq N', u_n \leq \sup_{k \geq n} u_k \overset{(*)}{\leq} \limsup_k u_k + \varepsilon$

$\Rightarrow$ toute valeur d'adhérence de (u_n) est $\leq \limsup_k u_k + \varepsilon$.
Puisque $\varepsilon > 0$ était arbitraire, toute valeur d'adhérence $\leq \limsup_k u_k$.

Vérifions que $\limsup_k u_k$ est une valeur d'adhérence.
Soit $N'' := \max\{N, N'\}$. Par prop. 2.2, on a : $\exists n \geq N''$,

$$\sup_{k \geq N''} u_k - \varepsilon \leq u_n \leq \sup_{k \geq N''} u_k$$

De plus, on a $\sup_{k \geq N''} u_k \geq \limsup_k u_k$

et $\sup_{k \geq N''} u_k \leq \limsup_k u_k + \varepsilon$ par $(*)$

On conclut $\exists n \geq N, \limsup_k u_k - \varepsilon \leq u_n \leq \limsup_k u_k + \varepsilon$

$\Rightarrow \limsup_k u_k$ est une valeur d'adhérence de (u_n), Par prop. 20 ∎

BRUNNEN

Proposition 22 : $\limsup U_n$ est la plus grande valeur d'adhérence de (U_n) ! — le 24.10.17

Corollaire immédiat :

Proposition 23 : Théorème de Bolzano-Weierstrass
Toute suite bornée possède une valeur d'adhérence.

Dém : on peut prendre limsup ▨

3.4 Suites de Cauchy

Comment vérifier qu'une suite converge sans connaître la limite à priori.

Définition 24 : Une suite (U_n) est de Cauchy
$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n,m \geq N, |U_n - U_m| < \varepsilon$.

Proposition 25 : Toute suite convergente est de Cauchy.

Dém : Soit $\varepsilon > 0$ et $L = \lim U_n$
Alors $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |U_n - L| < \frac{\varepsilon}{2}$
Donc $\forall n,m \geq N$,
$|U_n - U_m| = |U_n - L + L - U_m| \leq |U_n - L| + |U_m - L| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ ▨

Remarquablement, l'implication inverse est aussi vraie.

Proposition 26 : ($\mathbb{R}$ est un espace métrique complet)
Toute suite de Cauchy converge.

Ex : montrer que pour $\mathbb{Q}$, c'est faux

Soit (U_n) une suite de Cauchy.
Alors (U_n) est bornée
$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n,m \geq N, |U_n - U_m| < 1$
Donc $\forall n \geq N, |U_n| \leq |U_n - U_N + U_N| \leq |U_N| + 1$
On conclut $\forall n \in \mathbb{N}, |U_n| \leq \max\{|U_0|, \dots, |U_{N-1}|, |U_N| + 1\}$
Par prop 23, on obtient une sous-suite $(U_{\varphi(n)})$ extraite de (U_n) et $L \in \mathbb{R}$ tq $\lim U_{\varphi(n)} = L$
Soit $\varepsilon > 0$. Alors i) $\exists N_0, \forall n \geq N_0, |U_{\varphi(n)} - L| < \varepsilon$
ii) $\exists N_1, \forall n,m \geq N_1, |U_n - U_m| < \varepsilon$
Soit $N := \max\{\varphi(N_0), N_1\}$ et $k \geq N_0$ tq $\varphi(k) \geq N$,
Alors, on a, $\forall n \geq N$, $|U_n - L| = |U_n - U_{\varphi(k)} - (L - U_{\varphi(k)})|$
$\leq \underbrace{|U_n - U_{\varphi(k)}|}_{< \varepsilon \text{ (ii)}} + \underbrace{|U_{\varphi(k)} - L|}_{< \varepsilon \text{ (i)}} < 2\varepsilon$ ▨

Ex 27:



Soit $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

Alors (u_n) diverge

$\forall k \in \mathbb{N}$, $u_{2k} - u_k = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \dots + \frac{1}{2k} \geq k \cdot \frac{1}{2k} = \frac{1}{2}$

Pour $n \in \mathbb{N}$ soit $m = m(n) \in \mathbb{N}$ le plus grand entier naturel tq $n \geq 2^m$. On a donc:

$$u_n \geq u_{2^m} = \underbrace{u_{2^m} - u_{2^{m-1}}}_{\geq \frac{1}{2}} + u_{2^{m-1}}$$

$$\geq u_{2^{m-1}} + \frac{1}{2} \geq \dots \geq u_{2^{m-2}} + 2 \cdot \frac{1}{2} \geq \dots$$

$$\geq \frac{m}{2}$$

Puisque $m(n)$ diverge quand $n \to \infty$ on trouve que u_n diverge.

Donc (u_n) n'est pas une suite de Cauchy.

Néanmoins, $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{1}{n(n+1)} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

BRUNNEN

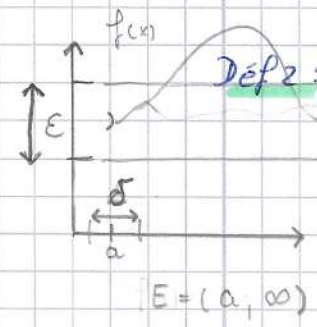
Chapitre 4. Fonctions continues

4.1 Limite d'une fonction et continuité:

Déf 1: Soit $E \subset \mathbb{R}$. La fermeture ou l'adhérence de E est

$$\overline{E} := \left\{ \lim_n u_n \ : (u_n) \in E^{\mathbb{N}} \text{ convergente} \right\}$$

Par exemple, $\overline{(0,1)} = [0,1]$; $\overline{\mathbb{R} \setminus \{0\}} = \mathbb{R}$, $\overline{\{1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \dots\}} = \{0; 1; \frac{1}{2}; \dots\}$



Déf 2: Soient $L \in \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}$, $a \in \overline{E}$
La fonction $f: E \to \mathbb{R}$ tend vers L en a si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in E, |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

On écrit $\lim_{x \to a} f(x) = L$.

Exemple 3: $E = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$ On a $\overline{E} = \mathbb{R}$, et $f(x) = x+1, \forall x \in E$
On conclut que $\lim_{x \to 1} \underbrace{x+1}_{f(x)} = 2$

Déf 4: Soient $E \subset \mathbb{R}$ et $a \in \overline{E}$. Alors $f: E \to \mathbb{R}$ est continue en a si $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Vocabulaire:
(i) si f n'est pas continue en a, elle est discontinue en a
(ii) Si f est continue en a $\forall a \in E$, alors f est continue sur E. Notations $C(E;F)$ = ensemble des fonctions continues sur E avec domaine d'arrivée F.

Proposition 5: Soient $E \subset \mathbb{R}$, $a \in E$, $f: E \to \mathbb{R}$
Les 2 assertions suivantes sont équivalentes.
(i) f est continue en a.
(ii) $\forall (u_n) \in E^{\mathbb{N}}$ convergente vers a, $\lim_n f(u_n) = f(a)$

Dém: (i) $\Rightarrow$ (ii): Soit (u_n) convergente vers a.
Soit $\varepsilon > 0$. Alors $\exists \delta > 0, \forall x \in E, |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$
Alors, $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - a| < \delta$ Donc $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N$, $|f(u_n) - f(a)| < \varepsilon$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Par la contraposée: $\neg$(i) $\Rightarrow \neg$(ii)
$\neg$(i) veut dire f discontinue en a donc $\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x = x(\delta) \in E$, $|x(\delta) - a| < \delta \wedge |f(x(\delta)) - f(a)| \geq \varepsilon$
Soit $u_n = x(\frac{1}{n})$. On a donc $|u_n - a| < \frac{1}{n}$ et $|f(u_n) - f(a)| \geq \varepsilon \ \forall n \in \mathbb{N}^*$
Donc (u_n) converge vers a et $f(u_n)$ ne converge pas vers $f(a)$ [$\neg$(ii)]

Prop. 5: Conclusion — Pour toute fonction continue f et suite convergente (u_n) on a $f[\lim_n (u_n)] = \lim_n f(u_n)$

Ex 6:

(i) $f(x) = c$ est continue sur $\mathbb{R}$

(ii) $f(x) = x$ est continue sur $\mathbb{R}$ ($\delta = \varepsilon$) — ε donné, δ choisit

(iii) $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est continue en 0.

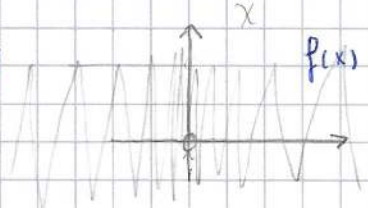


oscile de plus en plus vite.

$|f(x)| \leq x$ donc on peut prendre $\delta = \varepsilon$

Plus précisément:
il faut vérifier que
$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathbb{R}, |x - 0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(0)| < \varepsilon$

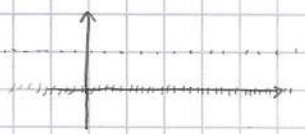
Ex 7:



$f(x) = \begin{cases} \cos \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est discontinue en 0.

Soit $(u_n) = \frac{1}{2\pi n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$
Alors $f(u_n) = 1$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et $u_n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$.
On a montré $\neg$(ii) de prop 6.

Ex 8: $\chi_{\mathbb{Q}}$ $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est discontinue partout.



Proposition 9: Soient f et g deux fonctions continues en a. Alors $f+g$ et $f \cdot g$ sont continues en a, et si $g(a) \neq 0$ alors f/g est continue en a.

Dém: En combinant Propositions 3.7 et 4.5.
Pour f/g, on utilise que si $g(a) \neq 0$ alors, puisque g est continue, $\exists \delta > 0, \forall x \in (a-\delta; a+\delta)$, $f(x) \neq 0$. ▨

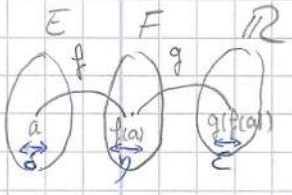
Ex 10: Les polynômes ($f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot x^k$, $n \in \mathbb{N}$, $a_k \in \mathbb{R}$) sont continus.

Ex 11: Les fonctions rationnelles ($f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, p, q polynôme, domaine de définition $E := \{x \in \mathbb{R}, q(x) \neq 0\}$ sont continues sur leur domaine de définition.

BRUNNEN

Proposition 12: (Composition de fonctions continues)

Soient $f : E \to F$ et $g : F \to \mathbb{R}$, où $E, F \subset \mathbb{R}$
Soit $a \in \mathbb{R}$. Si f est continue en a et g continue en $f(a)$, alors $g \circ f$ est continue en a.
Par conséquant, si $f \in C(E, F)$ et $g \in C(F; \mathbb{R})$ alors $g \circ f \in C(E; \mathbb{R})$



Dém:

Soit $\varepsilon > 0$.
$\exists \eta > 0, \forall y \in F, |y - f(a)| < \eta \Rightarrow |g(y) - g(f(a))| < \varepsilon$ [continuité de g]
$\exists \delta > 0, \forall x \in E, |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \eta$
On conclut $\forall x \in E, |x - a| < \delta \Rightarrow |g(f(x)) - g(f(a))| < \varepsilon$ ∎

4.2 Convergence en et vers $\pm\infty$

Définition 13:

Convergence en $\pm\infty$
Soient $a, L \in \mathbb{R}$ et $f : (a; \infty) \to \mathbb{R}$. Alors f converge vers L en $+\infty$ si $\forall \varepsilon > 0, \exists M > a, \forall x \in (a; \infty), x > M \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.

Notation:

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$ Similaire pour $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$

Définition 14:

Convergence vers $\pm\infty$
Soit $f : E \to \mathbb{R}$ et $a \in \overline{E}$. Alors f converge vers $+\infty$ en a. si $\forall M > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in E, |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > M$.

Notation:

$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ Similaire pour $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$

Pour une suite (u_n), on dit aussi que $\lim_n u_n = \pm\infty$ si $\forall M > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \pm u_n > M$.

Ex 15:

(i) $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$

Choisir $\delta = \frac{1}{\sqrt{M}}$

(ii) $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$ n'existe pas (par contre, $\lim f_\pm(x) = \pm\infty$ où $f_\pm(x) = \frac{1}{x}$, $f_\pm : \{x \in \mathbb{R}^\times ; \pm x > 0\} \to \mathbb{R}$.

(iii) $\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{1+x} = 1$

4.3 Maximum et minimum d'une fonction continue :

Définition 16 : Soient $f : E \to \mathbb{R}$ et $a \in E$. Alors
f atteint un maximum en a. si $\forall x \in E$, $f(x) \leq f(a)$
similaire pour le minimum.

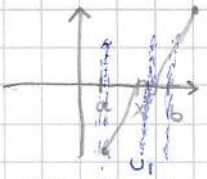
Proposition A : $f \in C([c;d], \mathbb{R})$, Alors, f atteint un maximum (et un minimum)

Dém :

Soit $A = f([c;d])$
On considère deux cas :
(i) A possède un majorant / est majoré
On pose $M := \sup A$ et on choisit $y_n \in A$ t.q. $\lim_n y_n = M$
(Par prop. 2.2)
(ii) A n'est pas majoré
On choisit une suite $y_n \in A$ t.q. $\lim y_n = +\infty$
Dans les 2 cas, $\exists (x_n) \in [c,d]^{\mathbb{N}}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(x_n) = y_n$
(x_n) est bornée. (Par prop. 3.25), $\exists$ sous-suite convergente $(x_{\varphi(n)})$ Soit $x := \lim_n x_{\varphi(n)}$.
Alors on a $f(x) = f(\lim_n x_{\varphi(n)}) \overset{f \text{ continue}}{=} \lim_n f(x_{\varphi(n)}) = \lim_n y_{\varphi(n)}$
(En particulier, (ii) cas impossible) $= M$

Donc f atteint un maximum en x. ▨

4.4. Théorème des valeurs intermédiaires



Prop. 18: (théo: des val. inter.)

Soit $f \in C([a;b], \mathbb{R})$ Si $f(a)$ et $f(b)$ ont des signes opposés (ie: $f(a) \cdot f(b) \leq 0$), alors $\exists\, x \in [a,b]$, $f(x) = 0$

Dém:

On peut supposer que $f(a) \leq 0$ et $f(b) \geq 0$. On construit par récurence deux suites $(u_n), (v_n) \in [a,b]^{\mathbb{N}}$ comme suit

Soit $u_0 = a$ et $v_0 = b$

Par $\in \mathbb{N}$, on pose:

- Si $f\left(\frac{u_n + v_n}{2}\right) \geq 0$ alors $u_{n+1} = u_n$, $v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$
- Si $f\left(\frac{u_n + v_n}{2}\right) \leq 0$ alors $u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$, $v_{n+1} = v_n$

Par récurence, on montre immédiatement, $\forall n \in \mathbb{N}$

i) $u_0 \leq u_1 \leq u_2 \leq \ldots \leq u_n \leq v_n \leq \ldots \leq v_2 \leq v_1 \leq v_0$

ii) $f(u_n) \leq 0$ et $f(v_n) \geq 0$

iii) $v_n - u_n = \frac{b-a}{2^n}$

Par monotonie, (u_n) et (v_n) convergent, et par (iii) leurs limites coïncides. Soit $x \in [a,b]$ cette limite.
Alors par ii $f(x) \leq 0$ et $f(x) \geq 0$ donc $f(x) = 0$

Corollaire 19: Soit $f \in C([a,b], \mathbb{R})$ et λ entre $f(a)$ et $f(b)$.
Alors $\exists\, x \in [a,b]$, $f(x) = \lambda$

Dém: Soit $g(x) = f(x) - \lambda$. Alors $g(a) \cdot g(b) \leq 0$
et par Prop. 18 $\exists\, x \in [a,b]$, $g(x) = 0$

Corollaire 20: Si $f \in C([a;b], \mathbb{R})$ alors $f([a,b])$ est un interval fermé.

Dém: Soit M (resp. m) le maximum (resp. minimum) de f atteint en x (resp y). (Par prop 17) Soit $\lambda \in [m, M]$.
(Par cor. 19), il existe z entre x et y. tq $f(z) = \lambda$.
Donc λ est $\lambda \in f([a;b])$
On conclut que $[m, M] \subseteq f(a,b) \subseteq [m, M]$

4.5 Inverse d'une fonction continue:

Rappel: Un interval est un ensemble de la forme $[a,b]$, $(a;b)$, $(a;b]$; $[a;b)$; $]-\infty;b]$; $(-\infty;b)$; $(a;\infty)$; $[a;\infty)$ où $a \leq b$

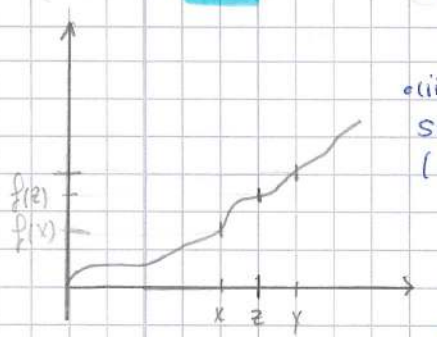
Prop. 21: Pour $I \subset \mathbb{R}$ les deux assertions suivantes sont équivalentes.
(i) I est un interval
(ii) $\forall \alpha, \beta \in I$, $\alpha \leq \beta$, $[\alpha;\beta] \subset I$

Dém: (i) $\Rightarrow$ (ii): évident
(ii) $\Rightarrow$ (i): Le cas $I = \emptyset$ est trivial.
Soit donc $I \neq \emptyset$.
On travaille uniquement le cas où I est majoré ou minoré.
Dans ce cas $a = \min I$ et $b = \sup I$ existent.
Si $a = b$, alors $I = \{a\} = [a,b]$ et la preuve est finie.
Supposons que $a < b$. Il suffit de mq. $(a,b) \subset I \subset [a,b]$

- $I \subset [a,b]$ est trivial par déf de a et b
- $(a,b) \in I$ Soit $0 < \varepsilon < \frac{b-a}{2}$. Il existe $\alpha, \beta \in I$ tq $\alpha < a + \varepsilon < b - \varepsilon < \beta$ (prop. 2.2)
  Ainsi, $[a+\varepsilon; b-\varepsilon] \subset [\alpha;\beta] \subset I$
  Puisque $\varepsilon > 0$ est arbitraire, on conclut $(a,b) \subset I$

Prop 22: Soit I, un interval et $f: I \to \mathbb{R}$ monotone et continue.
Les deux assertions suivantes sont équivalentes.
(i) f est continue
(ii) $f(I)$ est un interval

Dém:
- (i) $\Rightarrow$ (ii): Soient $\alpha \leq \beta$ dans $f(I)$
  (Par Cor 19) on a $[\alpha;\beta] \subset f(I)$ $\overset{P.21}{\Rightarrow}$ $f(I)$ est un interval.



- (ii) $\Rightarrow$ (i): Soit f croissante et $I = [a,b]$ (les autres cas sont similaires) On veut vérifier la continuité de f en $z \in (a,b)$ (les cas $z = a$ et $z = b$ sont similaires).
  Soit $\varepsilon > 0$, $f(I)$ interval, et f croissante, donc
  $\exists\, x, y$, $a \leq x < z < y \leq b$
  $f(z) - \varepsilon \leq f(x) \leq f(z) \leq f(y) \leq f(z) + \varepsilon$

[Si $f(z)+\varepsilon \geq f(b)$ on chaisit $y = b$
et sinon $f(z) + \varepsilon < f(b)$, on a $f(z) + \varepsilon \in f(I)$
et $\exists\, y \in (z;b)$, $f(y) = f(z) + \varepsilon$ ...]

Posons $\delta = \min\{z - x; y - z\}$ Alors $\forall t$, $|t - z| \leq \delta$

$\Rightarrow |f(t) - f(z)| < \varepsilon$

BRUNNEN

Prop. 23 : Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$, continue et strictement monotone. Alors $f : I \to f(I)$ est bijective.
Et $f^{-1} : f(I) \to I$ est continue.

Dém : f strictement monotone, donc f injective et donc bijective de I dans $f(I)$.
$f(I)$ est un intervalle par prop. 22
$f^{-1}(I)$ est (strictement) monotone et $f^{-1}(f(I)) \to I$ est un intervalle donc (par prop 22) f^{-1} est continue. ▨

Exemple 24 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : \begin{array}{ccc} [0;\infty) & \longrightarrow & [0;\infty) \\ x & \longmapsto & x^n \end{array}$

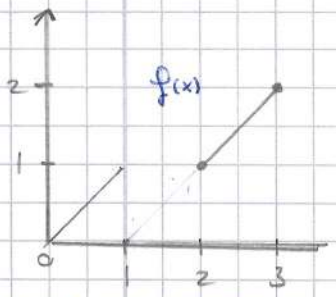
f^{-1} est strictement croissante et continue (prop. 23)
Notation : $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$
De plus, pour $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, on définit $f : \begin{array}{ccc} [0;\infty) & \longrightarrow & [0;\infty) \\ x & \longmapsto & x^r = (x^{1/q})^p \end{array}$
Donc f est continue.

Déf 25: Une fonction $f: E \to F$ est un <u>homéomorphisme</u> si f est bijective, f est continue et f^{-1} est continue.

Par prop. 23, une fonction bijective et continue sur un intervalle est un homéomorphise.

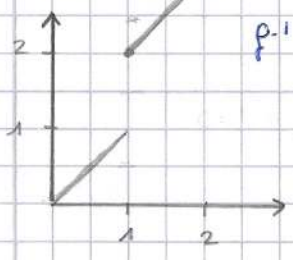
(Ex)

$$f: \begin{array}{ccc} [0,1) \cup [2,3] & \longrightarrow & [0,2] \\ x & \longmapsto & \begin{cases} x \text{ si } x \in [0,1) \\ x-1 \text{ si } x \in [2;3] \end{cases} \end{array}$$



f est bijective, continue, mais f^{-1} n'est pas continue

Exemple 26:



4.6 Continuité uniforme

Rappel: f continue sur E veut dire $\forall x \in E, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall y \in E, |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$ (interchangeable)

Déf 27: Une fonction $f: E \to \mathbb{R}$ est <u>uniformément continue</u> si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, y \in E, |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

Remarque:
- La continuité uniforme est une propriété globale, qui ne concerne pas juste (le voisinage d') un point.
- Une fonction uniformément continue est continue.

Exemple 28:

$$f: \begin{array}{ccc} [0;\infty) & \longrightarrow & [0;\infty) \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array}$$

Soit $\varepsilon > 0$, Alors on choisit $\delta = \varepsilon^2$

Pour $x < y$ on a :

$$y - x < \delta \Rightarrow \sqrt{y} - \sqrt{x} = \frac{y-x}{\sqrt{y}+\sqrt{x}} \leq \frac{y-x}{\sqrt{y}} \leq \frac{y-x}{\sqrt{y-x}}$$

$$= \sqrt{y-x} < \sqrt{\delta} = \varepsilon$$ ∎

Exemple 29: La fonction $f: E \to \mathbb{R}$ est k-Lipschitzienne si $\forall x, y \in E, |f(x) - f(y)| \leq k \cdot |x-y|$ où $k > 0$

Une fonction k-Lipschitzienne est uniformément continue.

Soit $\varepsilon > 0$ et posons $\delta = \frac{\varepsilon}{k}$, Alors $\forall x, y \in E$

$$|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq k|x-y| \leq k \cdot \delta = \varepsilon$$ ∎

BRUNNEN

Inversément, une fonction uni. cont. n'est en général pas Lipschitzienne. Pour f de l'Exemple 28, on a

$$\frac{|f(x)-f(0)|}{x-0} = \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \xrightarrow[x\to 0]{} +\infty$$

Exemple 30: $f: \mathbb{R} \to [0;+\infty)$, $x \mapsto x^2$ n'est pas uniformément cont.

Par l'absurde:
Soit $\varepsilon = 1$. Supposons qu'il existe $\delta > 0$ tq $|x-y| < \delta \Rightarrow |x^2 - y^2| < 1$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$. Prenons $y = x + \frac{\delta}{2}$, $x \geq 0$.
Alors, $|x^2 - y^2| = |(x+y)(x-y)| = (x+y)\cdot\frac{\delta}{2} \geq x \cdot \delta$ ($y \geq x$)
En posant, $x \geq \frac{1}{\delta}$, on obtient $|x^2 - y^2| \geq 1$, une contradiction.

Thm Heine

Prop 31: Soit $f \in C([a,b], \mathbb{R})$, Alors f est unif. cont.

Dém: Par l'absurde:
Soit $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continue mais pas unif. cont.
$\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x, y \in [a,b], |x-y| < \delta \wedge |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$
Donc $\exists \varepsilon > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*, \exists x_n, y_n \in [a,b], |x_n - y_n| < \frac{1}{n} \wedge |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$.
(x_n) bornée, donc $\exists$ sous-suite $(x_{\varphi(n)})$ convergente vers $x \in [a,b]$ et $(y_{\varphi(n)}) \xrightarrow[n\to\infty]{} x$
Puisque f est continue en x, $f(x_{\varphi(n)})$ et $f(y_{\varphi(n)})$ convergent vers $f(x)$. Contradiction avec $|f(x_{\varphi(n)}) - f(y_{\varphi(n)})| \geq \varepsilon$.

Ch. 5 La dérivée d'une fonction

Dans la suite, I est un intervalle ouvert non-vide $[(a;b);\ (a;+\infty);\ (-\infty;b)]$.

5.1 La dérivée en un point

Déf 1: La fonction $f: I \to \mathbb{R}$ est dérivable en $a \in I$ si la limite: $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} =: f'(a)$ existe.

La fonction I est dérivable sur I si f est dérivable en a pour tout $a \in I$.
L'ensemble des fonctions dérivables sur I est $D(I, \mathbb{R})$.
La dérivée de $f \in D(I,\mathbb{R})$ est la fonction

$$f': \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f'(x) \end{array}$$

Ex 2: • f est constante alors $f' = 0$ (constante)

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{0}{x-a} = 0$$

Ex 3: • $f(x) = x \qquad f' = 1$

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{x-a}{x-a} = 1 \xrightarrow[x\to a]{} 1$$

Ex 4: • $f(x) = x^2 \qquad f'(x) = 2x$

En posant $x = a+h$, $h \neq 0$ on a

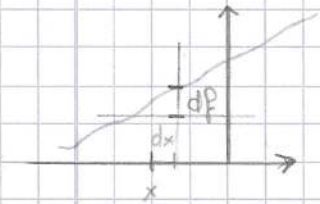
$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} = \frac{2ah+h^2}{h} = 2a + h \xrightarrow[h\to 0]{} 2a$$

Ex 5: • La fonction $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x \end{array}$ n'est pas dérivable en 0.

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \underset{a=0}{=} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{|x|}{x} = \sin x = \begin{cases} +1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

BRUNNEN

Remarque 6: (i) La dérivée $f'(a)$ en a est une notion locale. (que dans un voisinage arbitrairement petit)



(ii) La droite $y = f(a) + f'(a)(x-a)$ est la tangente au graphe de f au point $(a; f(a))$

(iii) On utilise aussi la notation $f'(x) = \frac{df}{dx}(x)$ donc $\frac{df}{dx} = f'$

(iv) La notion de dérivée s'étend immédiatement aux fonctions $f: I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ (esp des couples ordonnés)
$x \longmapsto (f_1(x); \dots; f_n(x))$
où on pose $f'(x) := (f_1'(x); \dots; f_n'(x))$, si $f_1, \dots f_n$ sont dérivables sur I.

Proposition 7: Si f est dérivable en a alors elle est continue en a.

Dém: $\lim_{x \to a} (f(x) - f(a)) = \lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} (x - a)$

$= \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \lim_{x \to a} (x - a) = f'(a) \cdot 0 = 0$ ∎

La réciproque est fausse (c.f. Exemple 5)

Proposition 8: (Opérations sur les dérivées)
Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ dérivables en $a \in I$.
Alors $f+g$, $f \cdot g$ et si $g(a) \neq 0$, f/g sont dérivables en a avec:

i) $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$
ii) $(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) g'(a)$
iii) $(f/g)'(a) = [f'(a) \cdot g(a) - f(a) g'(a)] \div g(a)^2$

Dém:

i) $\frac{(f+g)(x) - (f+g)(a)}{x - a} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} + \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \xrightarrow[x \to a]{} f'(a) + g'(a)$

ii) $\frac{(f \cdot g)(x) + (f \cdot g)(a)}{x - a} = \underbrace{\frac{f(x) - f(a)}{x - a}}_{\xrightarrow{x \to a} f'(a)} \cdot \underbrace{g(x)}_{\xrightarrow[x \to a]{} g(a)} + \underbrace{\frac{g(x) - g(a)}{x - a}}_{g'(a)} \cdot \underbrace{f(a)}_{f(a)}$.

$= f'(a) \cdot g(a) + g'(a) \cdot f(a)$.

iii) $\frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(a)}}{x - a} = \underbrace{\frac{1}{g(x) - g(a)}}_{-\frac{1}{g(a)^2}} \underbrace{\frac{g(x) - g(a)}{x - a}}_{\xrightarrow{x \to a} g'(a)}$

On conclut avec ii). ∎

Ex 9: Par $n \in \mathbb{N}^*$ et f dérivable
f^n est dérivable et $(f^n)' = n f' f^{n-1}$

En particulier, $(x^n)' = n x^{n-1}$

Par récurrence, $n=1$ évident.
$n \to n+1$: $(f^{n+1})' = (f \cdot f^n)' = f' f^n + f \cdot f^{n-1}$
$= f' \cdot f^n + f \cdot n f' f^{n-1} = (n+1) f' f^n$. ⌟

Ex 10: Soient $f_1, \dots f_n : I \to \mathbb{R}$ dérivable. Alors $f_1 \cdot \dots \cdot f_n$ est dérivable et $(f_1 \cdot f_n)' = \sum_{i=1}^{n} f_1 f_{1 \dots i} f_i' f_{i+1} \dots f_n$

Ex 11: Un polynôme $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec dérivée $f'(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot k \cdot x^{k-1}$.

Ex 12: Les fonctions rationelles sont dérivables sur leur domaine de définition.

Prop. 13: Composition de dérivées.
Soient I, J des intervalles ouverts non-vides. Soient $f : I \to J$ dérivable en $a \in I$ et $g : J \to \mathbb{R}$ dérivable en $f(a)$.
La fonction $g \circ f$ est dérivable en a et $(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$.

Dém: Idée :

$$\frac{g(f(a+h)) - g(f(a))}{h} = \frac{g(f(a+h)) + g(f(a))}{f(a+h) - f(a)} \cdot \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$= \frac{g(y) - g(b)}{y - b} \to g'(b) \quad (y - b \to 0)$$

$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \to f'(a)$; $b = f(a)$

Problème : $f(a+h) - f(a)$ peut être 0.

Démonstration correcte :

Soit $\phi(h) := \begin{cases} \frac{g(f(a+h)) - g(f(a))}{f(a+h) - f(a)} & \text{si } f(a+h) - f(a) \neq 0 \\ g'(f(a)) & \text{si } f(a+h) - f(a) = 0 \end{cases}$

Alors ϕ est continue en 0.

Soit $\varepsilon > 0$ i) g dérivable en $f(a)$ donc $\exists \eta > 0$,
$\forall k,\ 0 < |k| < \eta \Rightarrow \left| \frac{g(f(a)+k) - g(f(a))}{k} - g'(f(a)) \right| < \varepsilon$

ii) f dérivable en a, donc f continue en a, donc
$\exists \delta > 0, \forall h, |h| < \delta \Rightarrow |f(a+h) - f(a)| < \eta$

Soit h tq $|h| < \delta$ et $k = f(a+h) - f(a)$

Si $k \neq 0$ alors $\phi h = \frac{g(f(a+h)) - g(f(a))}{f(a+h) - f(a)} = \frac{g(f(a)+k) - g(f(a))}{k}$

Donc avec i) et ii) $|k| < \eta$ et $|\phi(h) - g(f(a))| < \varepsilon$

Si $k = 0$ alors $\phi(h) = g'(f(a))$ ⌟

On trouve donc $\lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{g(f(a+h)) - g(f(a))}{h} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \phi(h) \cdot \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$

$= \lim_{h \to 0} \phi(h) \cdot \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = g'(f(a)) \cdot f'(a)$ ▨

BRUNNEN

Ex 14: Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Avec $x^{-n} := \frac{1}{x^n}$, on a $\frac{d}{dx} x^{-n} = \frac{d}{dx} \frac{1}{x^n} = *$

$* = -\frac{1}{(x^n)^2} \cdot (x^n)' = -\frac{1}{x^{2n}} \cdot n x^{n-1} = (-n) \cdot x^{(-n)-1}$

Ex 15: $\frac{d}{dx} f(x^2) = f'(x^2) \cdot 2x$. (dérivée interne et externe)

Proposition 16: Dérivée de l'inverse

Soient I et J deux intervalles ouverts, $f: I \to J$ bijective et dérivable en $a \in I$ telle que $f'(a) \neq 0$. Alors f^{-1} est dérivable en $b := f(a)$ et $(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$

Dém:

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = \left(\frac{f(f^{-1}(y)) - f(f^{-1}(b))}{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)} \right)^{-1}$$

($f^{-1}(y) - f^{-1}(b) = x - a$)

- $f^{-1}(y) - f^{-1}(b) \neq 0$ si $x - a \neq 0$ (f^{-1} injective)
- $f^{-1}(y) - f^{-1}(b) \xrightarrow[y \to b]{} 0$ (f^{-1} continue (parce que f homéomorphisme)) si $y \neq b$

le 08.11.17

Analyse I:

Ex 17: Soit $f: (0;\infty) \to (0;\infty)$, $x \mapsto x^{1/n}$. La fonction inverse $f^{-1}: x \mapsto x^n$

Alors f est dérivable sur $(0;\infty)$ et on a $f'(x) = \frac{1}{f^{-1'}(f(x))} = \frac{1}{n(x^{1/n})^{n-1}}$

$= \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$

Déf: Avec la définition $x^{p/q} := (x^{1/q})^p$, on obtient $\frac{d}{dx} x^{p/q}$

$= \frac{d}{dx}(x^{1/q})^p = p(x^{1/q})^{p-1} \cdot \frac{1}{q} x^{\frac{1}{q}-1} = \frac{p}{q} x^{p/q-1}$

On conclut : $\frac{d}{dx} x^r = r x^{r-1}$ pour tout $x > 0$ et $r \in \mathbb{Q}$

5.2 Accroissements et dérivées:

Déf 18: $a \in I$, est un maximum / minimum / extremum local de $f: I \to \mathbb{R}$ si $\exists\, \delta > 0$ tq a est un max / min / max ou min de $f|_{(a-\delta; a+\delta)}$

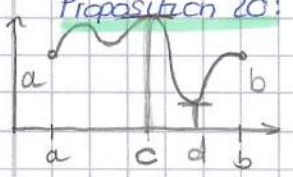
Proposition 19: Soit $f: I \to \mathbb{R}$ dérivable en $a \in I$ tq a est extremum local de f.
Alors $f'(a) = 0$ (l'implication inverse est fausse) [e.g $x \mapsto x^3$]

Dém: Soit a un maximum. On a $f(x) \leq f(a)$ pour tout $x \in (a-\delta; a+\delta)$ et donc

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \begin{cases} \leq 0 & \text{si } a < x < a+\delta \\ \geq 0 & \text{si } a-\delta < x < a \end{cases}$$

On conclut que $f'(a) \leq 0$ et $f'(a) \geq 0$ ▨

Proposition 20: (Théorème de Rolle) pour montrer prop 21.
Soit $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a;b]$ et dérivable sur (a,b)
Si $f(a) = f(b)$ alors $\exists\, c \in (a,b)$, $f'(c) = 0$



Dém: D'après corollaire 4.20, on a $f([a,b]) = [m; M]$
Si $m = M$, alors f est constante et tout $c \in (a,b)$ satisfait $f'(c) = 0$
Si $m < M$. On sait $m \leq f(a) \leq M$, on a $m < f(a)$ ou $f(a) < M$
Si $m < f(a)$ alors $\exists\, c \in (a,b)$ tq $f(c) = m$.
c est un minimum local de f. et donc $f'(c) = 0$
Idem pour $f(a) < M$. ▨

Proposition 21: (Théorème, ou égalité, des accroissements finis)
Soit $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $(a;b)$
Alors $\exists\, c \in [a,b]$, $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Dém: On applique prop 20 à $g: [a,b] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$ ▨

Corollaire 22: f continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $(a;b)$. Alors
f croissante $\iff f' \geq 0$ sur $(a;b)$

Dém: $\Rightarrow$: Soit $c \in (a,b)$. Alors $\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0$ pour $x \neq c$, donc $f'(c) \geq 0$
$\Leftarrow$: Soient $x < y$ dans $[a,b]$
Alors $\exists\, c \in (a,b)$ $\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} = f'(c) \geq 0$

Remarque 23: Par la même preuve
On obtient: f strictement croissant $\Leftarrow f' > 0$ sur (a,b)
/ La réciproque est fausse, cf: $x \mapsto x^3$

BRUNNEN

Exemple 24: $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$

$$f'(x) = \frac{2(1+x^2) - 2x(2x)}{(1+x^2)^2} = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$$

Conclusion : f est croissante $[-1;1]$ et décroissante sur $[1;\infty)$ et $(-\infty;-1]$

Corollaire 25: Soit f continue sur $[a,b]$ et dérivable sur (a,b)

f constante $\Leftrightarrow$ $f' = 0$ sur (a,b)

Dém: cor 22

Corollaire 26: Inégalité des accroissements finis.
Soit f continue sur $[a,b]$ et dérivable sur (a,b)
Si $\exists M > 0$ tq $|f'(x)| < M$ $\forall x \in (a,b)$ alors $\forall x, y \in [a,b]$,
$|f(y) - f(x)| \leq M \cdot |x-y|$

Dém: Prop. 21 ▨

5.3 Dérivées successives:

Déf 27: (i) Une fonction dérivable est 1 fois dérivable
$f: I \to \mathbb{R}$ est n-fois dérivable si f' est n-1 fois dérivables
La dérivée d'ordre n est notée: $f^{(n)}$
On a donc $f = f^{(0)}$, $f' = f^{(1)}$, $f'' = f^{(2)}$, $f''' = f^{(3)}$, ... $(f^{(n-1)})' = f^{(n)}$.

(ii) On note par $C^n(I;\mathbb{R})$, l'ensemble des fonctions n fois dérivables telles que $f^{(n)} \in C(I;\mathbb{R})$

(iii) $C^\infty(I;\mathbb{R}) := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C^n(I;\mathbb{R})$

Exemple 28: $C^1(I;\mathbb{R})$ et $\mathcal{D}(I;\mathbb{R})$ sont différents
↳ ensembles des fonctions dérivables
La fonction : $f(x) := \begin{cases} x^2 \cdot \sin\frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est dérivable,

mais ça dérivée n'est pas continue $f(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R};\mathbb{R}) \setminus C^1(\mathbb{R};\mathbb{R})$
On anticipe: $\sin \in C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$ $\sin' = \cos$
Pour $x \neq 0$ on a $f'(x) = 2x \cdot \sin\frac{1}{x} + x^2 \cos\frac{1}{x} \cdot (-\frac{1}{x^2})$
$= 2x \cdot \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$
De plus, $f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} x \cdot \sin\frac{1}{x} \to 0$ existe.
Donc $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R};\mathbb{R})$

Analyse I:

Proposition 29: Les fonctions $f+g$; $f \cdot g$; f/g; $g \circ f$; f^{-1} sont C^n sur leurs domaines de définition si f et g le sont.

Dém: Exercice par récurrence avec proposition 8, 13, 16. ∎

Exemple 30: Les polynômes et fonctions rationelles sont C^∞ sur leurs domaines de définition.

Proposition 31: Théorème de Taylor-Lagrange.

Soit $f \in C^{n+1}(I;\mathbb{R})$ et $a,b \in I$. Alors $\exists c$ entre a et b tel que $f(b) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} (f^{(k)}(a)/k!)(b-a)^k}_{\text{trivial à calculer}} + \underbrace{(f^{(n+1)}(c)/(n+1)!)(b-a)^{n+1}}_{\text{impossible à calculer}}$

Terme d'erreur

Dém: Soit $a < b$ (le cas $a > b$ similaire)
On utilise l'égalité des accroissements finis (prop 21) avec la fonction $g(x) := f(x) + f'(x)(b-x) + \frac{f''(x)}{2!}(b-x)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(b-x)^n + K - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(b-x)^k + K \cdot \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!} - f(b)$

a) K est choisi tel que $g(a) = g(b) = 0$.
(solution d'équation linéaire)
Par hypothèse, g est continue sur $[a,b]$, et dérivable sur (a,b). Par prop 21, on obtient.
$\exists c \in (a,b)$, $g'(c) = 0$
On conclut: $0 = -f'(c) + (f''(c)(b-c) - f'(c)) + \frac{f'''(c)}{2}(b-c)^2 - f''(c)(b-c) + \ldots + \left(f^{(n+1)}(c)\frac{(b-c)^n}{n!} - f^{n}(c)\cdot\frac{(b-c)^{n-1}}{(n-1)!}\right) - K\frac{(b-c)^n}{n!} = \left[f^{(n+1)}(c) - K\right]\frac{(b-c)^n}{n!}$

qui ne s'annule pas

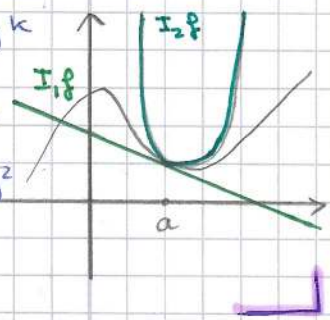
On conclut $b-c > 0$, Puisque $b-c > 0$, on calcule $K = f^{(n+1)}(c)$
On conclut en choisissant $x = a$ dans la définition de g, avec $g(a) = 0$. ∎

Déf: On définit le polynôme de Taylor d'ordre n de f en a par:

$$T_n f(x;a) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

Ex: $T_1 f(x;a) = f(a) + f^{(1)}(a)(x-a)$

$T_2 f(x;a) = f(a) + f^{(1)}(a)(x-a) + [f^{(2)}(a)/2!](x-a)^2$



BRUNNEN

Par prop. 31, pour $f \in C^{n+1}(I;\mathbb{R})$ avec $a<x$ dans I, on a l'approximation

$$|f(x) - T_n f(x;a)| \leq \sup_{c\in(x;a)} |f^{(n+1)}(c)| \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Exemple 32: Calcul de $\sqrt{2}$.

Soit $f(x) = \sqrt{x}$. On utilise $x=2$ et $a=1$.

$f(x) = \sqrt{x}$, $f'(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$, $f''(x) = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}$, $f'''(x) = \frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}}$,

$f^{(4)}(x) = -\frac{15}{16}x^{-\frac{7}{2}}$, ...

Donc $T_3 f(2,1) = f(1) + f'(1) + \frac{f''(1)}{2!} + \frac{f'''(1)}{3!} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4\cdot 2} + \frac{3}{8\cdot 6}$

$= 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{23}{16} = 1,4325$

On a $\left|\sqrt{2} - \frac{23}{16}\right| \leq \frac{15}{16}\cdot\frac{1}{4!} = 0,0391$

En fait, $\sqrt{2} = 1.4142$

Exemple 33: Calcul de $\sin 0.2$

On anticipe (ch. 7). $|\sin x| \leq 1$, $|\cos x| \leq 1$

$\sin 0 = 0$ et $\cos 0 = 1$, $\sin' = \cos$, $\cos' = -\sin$

$T_4 \sin(x;0) = x - \frac{x^3}{6}$, donc $T_4 \sin(0,2,0) = \frac{149}{150}$

On trouve $\left|\sin(0,2) - \frac{149}{150}\right| \leq 1 \cdot \frac{(1/5)^5}{5!} = 0,0000027$

5.4 Extremum locaux.

Rappel: a est un minimum local de f si $\exists\, \delta > 0$ tq $f(x) \geq f(a)$ $\forall x \in (a-\delta; a+\delta)$

si $f(x) > f(a)$ $\forall x \in (a-\delta; a+\delta)\setminus\{a\}$ le minimum local est stricte.

Si $a \in I$ est un min. local de $f \in C^1(I;\mathbb{R})$ alors $f'(a) = 0$.

Proposition 34: Soit $f \in C^n(I;\mathbb{R})$, $a \in I$, $0 = f'(a) = f^2(a) = \dots = f^{(n-1)}(a)$

i) Si n est impair et a est un minimum local de f alors $f^{(n)}(a) = 0$

ii) Si n est pair et $f^{(n)}(a) > 0$ alors a est un minimum local stricte de f.

Dém: Par prop 31, $\forall x \in I$ $\exists c$ entre a et x tq $f(x) = f(a) + f^{(n)}(c)\frac{(x-a)^n}{n!}$

i) $f^{(n)}(a) = \lim_{c\to a} f^{(n)}(c) = n! \lim_{\substack{x\to a \\ x\neq a}} \frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^n}$

le quotient est ≥ 0 pour $x > a$ et ≤ 0 pour $x < a$

ii) Pour $x \neq a$ on a $(x-a)^n > 0$. Puisque $f^{(n)}(a) = \lim_{c\to a} f^{(n)}(c)$

On conclut que $f^{(n)}(c) > 0$ dans un voisinage de a.

Donc $f^{(n)}(c)\frac{(x-a)^n}{n!} > 0$ dans un voisinage de a. ∎

Analyse I :

Déf: Méthode pour trouver les extremums locaux :

(i) Trouver les points critiques de f où f' s'annule
(ii) Analyser chaque point critique de f à l'aide de Prop 34. pour déterminer s'il s'agit d'un min ou max local ou ni l'un ni l'autre.

Ex 35 : $f(x) = x^3$

$f'(x) = 0 \iff x = 0$ $\quad f'(0) = f''(0) = 0 \quad f'''(0) = 6 \neq 0$

$3x^2$

Par Prop. 34 (i), 0 n'est ni un max ni un min local.

Ex 36 : $f(x) = x^4 - x^2 + 1$ $\quad f'(x) = 0 \iff 4x^3 - 2x = 0 \iff 2x(2x^2 - 1) = 0$

On a $f''(x) = 12x^2 - 2 = \begin{cases} -2 & \text{si } x = 0 \\ 4 & \text{si } x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$ $\iff x \in \{0; -\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\}$

Conclusion (Prop. 34) $\pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ sont des minimums locaux stricts et 0 est un maximum local strict de f

Ex 37 : (Moyenne arithmétique)
Soient $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. On cherche un nombre $a \in \mathbb{R}$ qui minimise l'erreur (méthode des moindres carré)
$f(x) = \sum_{i=1}^{n} (x - a_i)^2$
Cherchons les extremums locaux
$f'(x) = \sum^{i=1}{}^{n} 2(x - a_i) = 2nx - 2\sum_{i=1}^{n} a_i$.
donc $f'(a) = 0 \iff a = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i$
De plus $f''(x) = 2n > 0$, donc a est un min stricte local de f.

6. L'intégrale d'une fonction :

6.1 Définition de l'intégrale :



Rappel : Deux ensembles A et B sont disjoints si $A \cap B = \emptyset$.

Déf 1 : Une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est en escalier, s'il existe une décomposition $[a,b] = I_1 \cup I_2 \cup \dots \cup I_n$ en intervalles disjoints et des constantes $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ tels que
$f = \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{I_i}$

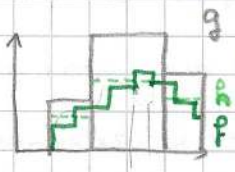
Déf 2 : L'intégrale d'une fonction en escalier $f = \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{I_i}$ est
$\int_a^b f = \int_a^b f(x)dx := \sum_{i=1}^{n} c_i |I_i|$, où $|I_i|$ est la long. de l'intervalle I_i (i.e. $|I| = b-a$ pour $I = [a,b], [a,b), (a,b], (a,b)$

Remarque 3 :

i) la fonction constante $f(x) = c$, $x \in [a,b]$ peut s'écrire comme un fonction en escalier $f = \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{I_i}$ avec $c_i = c \ \forall i = 1,\dots,n$ pour n'importe quelle décomposition $[a,b] = I_1 \cup \dots \cup I_n$. Dans ce cas on a $\int_a^b f = \sum_{i=1}^{n} c_i |I_i| = c(b-a)$

ii) De façon similaire, pour n'importe quelle fonction en escalier $f = \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{I_i}$. On peut affiner la décomposition $I_1, \dots, I_n$ en décomposant chaque $I_i = I_{i,1} \cup I_{i,2} \cup \dots \cup I_{i,k_i}$ en k_i intervalles disjoints. Avec $c_{ij} = c_i$ on a $f = \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{I_i} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k_i} c_{ij} \chi_{I_{ij}}$ et $\int_a^b f = \sum_{i=1}^{n} c_i |I_i| = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k_i} c_{ij} |I_{ij}|$

Prop 4 :



Soient $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ des fonctions en escalier telles que $f \le g$. Alors $\int_a^b f \le \int_a^b g$

g et h facile.

Dém : Soient $f = \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{I_i}$ et $g = \sum_{j=1}^{m} d_j \chi_{J_j}$. Les intervalles $I_{ij} = I_i \cap J_j$ avec $i = 1,\dots,n$ et $j = 1,\dots,m$ et on a $I_i = \bigcup_{j=1}^{m} I_{ij}$, $J_j = \bigcup_{i=1}^{n} J_{ij}$.

De $f \le g$, on déduit $\forall i = 1,\dots,n$, $j = 1,\dots,m$
$\forall x \in I_{ij}$ $c_i = f(x) \le g(x) = d_j$
Donc $c_i \le d_j$ si $I_{ij} \neq \emptyset$ (*)
Avec $|I_i| = \sum_{j=1}^{m} |I_{ij}|$ et $|J_j| = \sum_{i=1}^{n} |I_{ij}|$, on obtient
$\int_a^b f = \sum_{i=1}^{n} c_i |I_i| = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_i |I_{ij}| \underset{(*)}{\le} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} d_j |I_{ij}| = \sum_{j=1}^{m} d_j |J_j| =$

$= \int_a^b g$ ▨

Déf 5 :

Intégralle de fonction générallle (de Rieman)

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ borné. Alors il existe des fonctions en escalier $e, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ telles que $e \le f \le g$.

i) On définit les intégralles de Rieman inférieures
$\underline{\int_a^b} f = \sup \{ \int_a^b e \ , \ e \le f$ une fonction en escalier $\}$

et supérieures $\overline{\int_a^b} f = \inf \{ \int_a^b g \ , \ g \ge f$ une fonction en escalier $\}$

ii) $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est Rieman-intégrable si $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$
Dans ce cas, on appelle ce nombre l'intégralle de Rieman de f notée $\int_a^b f = \int_a^b f(x)\,dx$.

Remarque 6 :

i) Par prop. 4, on a $\underline{\int_a^b} f \le \overline{\int_a^b} f$ pour tout f borné.

Pour des fonctions en escaliers $e, g : [a,b] \to \mathbb{R}$, telles que $e \le f \le g$, on a $\int_a^b e \le \int_a^b g$ donc $\underline{\int_a^b} f = \sup \int_a^b e \le \int_a^b g$.
Ensuite, on prend l'infimum sur g.

Analyse I:

Remarque 6: ii) f est intégrable $\iff \forall \varepsilon > 0$, $\exists$ fonctions en escalier e et $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ telles que $e \le f \le g$ et $\int_a^b g - \int_a^b e < \varepsilon$

Dém: $\Rightarrow$: Soit $\varepsilon > 0$. Par prop. 2.2 ($\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A$, $a \le \sup A + \varepsilon$) $\exists\, e \le f$ et $g \ge f$ en escalier telles que

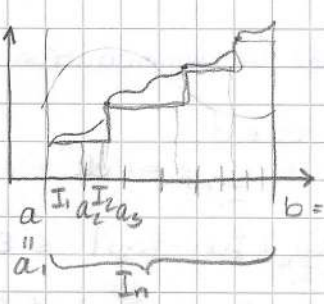
$$\int_a^b f - \int_a^b e < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{et} \quad \int_a^b g - \int_a^b f < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{(somme des } \tfrac{\varepsilon}{2}\text{)}$$

$\Leftarrow$: Avec $\int_a^b e \le \underline{\int_a^b} f \le \overline{\int_a^b} f \le \int_a^b g$.

On dé... que $0 \le \overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$

Quelles fonctions sont intégrables ?

Proposition 7: Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ monotone. Alors f est intégrable.



Dém: Soit f croissante. Soit $c = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)| = \max\{|f(a)|, |f(b)|\}$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_i := a + \frac{i-1}{n}(b-a)$, $i = 1, \dots, n+1$

Déf: $I_i := [a_i, a_{i+1})$, $i = 1, \dots, n$

Alors $|I_i| = a_{i+1} - a_i = \frac{b-a}{n}$

Définissons $c_i = \inf_{I_i} f \; (= \inf\{f(x) : x \in I_i\})$ et $d_i = \sup_{I_i} f$. Alors $e = \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{I_i}$ et $g = \sum_{j=1}^{n} d_j \chi_{I_j}$

sont des fonctions en escalier avec $e \le f \le g$.

De plus on a $d_i = \sup f \le f(a_{i+1}) \le \inf_{I_{i+1}} = c_{i+1}$ pour $i = 1, \dots, n-1$.

On conclut : $\int_a^b g - \int_a^b e = \sum_{i=1}^{n} (d_i - c_i)|I_i|$

$$= \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} (d_i - c_i) = \frac{b-a}{n} (d_n + (d_{n-1} - c_n)$$

$$+ (d_{n-2} - c_{n-1}) + \dots - c_1) \le \frac{b-a}{n} (d_n - c_1)$$

$$\le \frac{b-a}{n} 2c \xrightarrow{n \to \infty} 0$$

On conclut avec Rem 6 (ii) ▨

Proposition 8: Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue. Alors f intégrable.

Dém: Par Prop 4.17 f est bornée et par Prop 4.31 f est uniformément continue.

Soit $\varepsilon > 0$, et choisissons $\delta > 0$ tq $\forall x, y \in [a,b]$, $|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Par $n \in \mathbb{N}^*$ tq $\frac{b-a}{n} < \delta$. Soient a_i, I_i, c_i et d_i, e et g comme avant. (dém prop 7).

Alors, on a pour tout $i = 1, \dots, n$ $\sup_{x,y \in I_i} |x - y| = |I_i| < \delta$

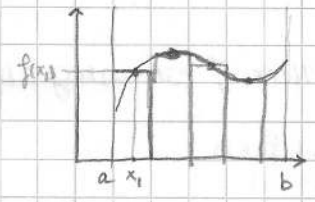
donc $d_i - c_i \leq \sup_{x,y \in I_i} |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$.

On conclut $\int_a^b g - \int_a^b e = \sum_{i=1}^{n} (d_i - c_i)|I_i| \leq \varepsilon \sum_{i=1}^{n} |I_i| = \varepsilon(b-a)$

On conclut avec Rem 6 (ii) ▨

On peut calculer l'intégrale de $f \in C([a;b], \mathbb{R})$ numériquement comme suit.

Proposition 9 :



Soit $f \in C([a,b], \mathbb{R})$. Pour $k \in \mathbb{N}$
soit $I_1^k, \dots, I_{n_k}^k$ une décomposition de $[a,b]$ en intervalles disjoints tel que. $\delta_k := \max\{|I_i| : i \leq i \leq n_k\} \xrightarrow{k \to \infty} 0$
Alors, pour n'importe quel choix de points $x_i^k \in I_i^k$, $i = 1, \dots, n_k$
on a $\sum_{i=1}^{n_k} f(x_i^k)|I_i^k| \xrightarrow{k \to \infty} \int_a^b f$

Dém : Soit $\varepsilon > 0$ et $\delta > 0$ comme dans la démonstration de Prop. 8.
Soit $K \in \mathbb{N}$, tel que $\forall k \geq K$, $\delta_k \leq \delta$.
Soit $c_i^k := \inf_{I_i^k} f \leq f(x_i^k) \leq \sup_{I_i^k} f =: d_i^k$ $i = 1, \dots, n_k$

Pour $k \geq K$ on a $d_i^k - c_i^k \leq \sup_{x,y \in I_i^k} |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$ $i = 1, \dots, n_k$

Définissons $e_k := \sum_{i=1}^{n_k} c_i^k \chi_{I_i^k} \leq f_k := \sum_{i=1}^{n_k} f(x_i^k) \chi_{I_i^k}$
$\leq g_k := \sum_{i=1}^{n_k} d_i^k \chi_{I_i^k}$

Puisque f est intégrable (Prop. 8), on conclut :

$$R_k := \int_a^b f - \sum_{i=1}^{n_k} f(x_i^k)|I_i^k| = \overline{\int_a^b} f - \int_a^b f_k$$
$$f \leq g_k,\ f_k \geq e_k \quad \leq \int_a^b g_k - \int_a^b e_k = \sum_{i=1}^{n_k} (d_i^k - c_i^k)|I_i^k|$$
$$\leq \varepsilon \sum_{i=1}^{n_k} |I_i^k| = \varepsilon(b-a) \quad \text{(majorant)}$$

Un argument similaire donne $R_k \geq -\varepsilon(b-a)$.

On conclut que $|R_k| \leq \varepsilon(a-b)$ ▨

Le 21.11.17

Exemple 10: $f = \chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$ n'est pas intégrable



Pour tout intervalle $I \subset [0;1]$ tq $|I| > 0$ on a $I \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$ et $I \setminus \mathbb{Q} \neq \emptyset$. Par conséquent, $0 = \inf_I f < \sup_I f = 1$

Pour des fonctions en escalier $e = \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{I_i} \leq f \leq g = \sum_{j=1}^{m} d_j \chi_{J_j}$

On a $\int_0^1 e = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{c_i}_{\leq 0} |I_i| \leq 0$

et $\int_0^1 g = \sum_{j=1}^{m} d_j \chi_{J_j} \geqslant \sum_{j=1}^{m} |J_j| = 1$

Donc $\underline{\int_0^1} f \leq 0 < 1 \leq \overline{\int_0^1} f$ donc $\underline{\int_0^1} f \neq \overline{\int_0^1} f$

Exemple 11: Soit $\alpha > 0$. Comment se comporte $\sum_{i=1}^{n} i^\alpha$ pour $n \to \infty$?

Le 22.11.17

On considère la décomposition $[0,1] = [0;\frac{1}{n}] \cup (\frac{1}{n};\frac{2}{n}] \cup \dots \cup [\frac{n-1}{n};\frac{n}{n}]$
$= I_1^n \cup I_2^n \cup \dots \cup I_n^n$. Avec $f(x) = x^\alpha$ et $x_i^n = \frac{i}{n}$ on a avec Prop 9.,

$$\frac{1}{n^{1+\alpha}} \sum_{i=1}^{n} i^\alpha = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{n}\right)^\alpha = \sum_{i=1}^{n} f(x_i^n)\,|I_i^n|$$

$$\xrightarrow{n\to\infty} \int_0^1 x^\alpha dx \quad \text{(On verra que } \int_0^1 x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1}\text{)}$$

Exemple 12:

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} = \frac{1}{n} \sum_{i=n+1}^{2n} \frac{1}{i/n+1} \xrightarrow[f(x)=\frac{1}{x+1}]{n\to\infty} \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx$$

(On verra que $\int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = \int_1^2 \frac{1}{x} dx = \ln(2) \approx \log 2$.)

6.2 Propriétés de base de l'intégrale et le théorème fondamental.

Proposition 13: Monotonie de l'intégrale.
Soient $f_1, f_2 : [a;b]$ bornées et intégrables si $f_1 \leq f_2$ alors $\int_a^b f_1 \leq \int_a^b f_2$

Dém: Soit $g \geqslant f_2 \geqslant f_1$ une fonction en escalier
On a $\int_a^b f_1 = \underline{\int_a^b} f_1 \leq \int_a^b g$

En prennant l'infimum sur les fonctions en escalier $g \geqslant f_2$, on obtient $\int_a^b f_1 \leq \overline{\int_a^b} f_2 = \int_a^b f_2$.

Proposition 14 : Linéarité de l'intégrale.

Soient $f, f_1, f_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ bornées et intégrables, $\alpha \in \mathbb{R}$

(i) αf est intégrable et $\int_a^b \alpha f = \alpha \int_a^b f$

(ii) $f_1 + f_2$ est intégrable et $\int_a^b f_1 + f_2 = \int_a^b f_1 + \int_a^b f_2$

Dém : (i) et (ii) sont vraies pour des fonctions en escalier.

(i) Soit $\alpha \geq 0$. En utilisant, $f \leq g \Rightarrow \alpha f \leq \alpha g$

on a $\int_a^b \alpha f \leq \inf \{ \int_a^b \alpha g : g \geq f \text{ en escalier} \}$

$$\int_a^b \alpha f \leq \inf \alpha \{ \dots \} = \alpha \inf \{ \int_a^b g : g \geq f \}$$

$$= \alpha \int_a^{\overline{b}} f = \alpha \int_{\underline{a}}^b f.$$

$$= \alpha \sup \{ \int_a^b e ; e \leq f \text{ en escalier} \}$$

$$= \sup \{ \int_a^b \alpha e ; e \leq f \text{ en escalier} \}$$

$$\leq \int_{\underline{a}}^b \alpha f.$$

Conclusion : $\int_a^{\overline{b}} \alpha f \leq \alpha \int_a^b f \leq \int_{\underline{a}}^b \alpha f \leq \int_a^{\overline{b}} \alpha f$

Pour $\alpha = 0$, on procède de la même manière.

(ii) Pour les fonctions en escalier e_1, e_2, g_1, g_2 telles que $e_i \leq f_i \leq g_i$ pour $i = 1, 2$. on a $e_1 + e_2 \leq f_1 + f_2 \leq g_1 + g_2$

On trouve $\int_a^{\overline{b}} (f_1 + f_2) \leq \inf \{ \int_a^b (g_1 + g_2) ; g_i \geq f_i \text{ en esc.} \}$

$= \int_a^b g_1 + \int_a^b g_2 = \inf \{ \int_a^b g_1 ; g_1 \geq f_i \text{ en esc} \} +$

$\inf \{ a \int^b g_2 ; g_2 \geq f_2 \text{ en esc} \} = \int_a^{\overline{b}} f_1 + \int_a^{\overline{b}} f_2$

$= \int_{\underline{a}}^b f_1 + \int_{\underline{a}}^b f_2 = \sup \{ \int_a^b e_1 : e_1 \leq f_1 \text{ esc} \} + \sup \{ \int_a^b e_2 ; e_2 \leq \}$

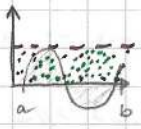
$= \sup \{ \int_a^b e_1 + \int_a^b e_2 , e_i \leq f_i \text{ en esc} \}$

$= \sup \{ \int_a^b (e_1 + e_2) ; e_i \leq f_i \text{ en esc} \}$

$\leq \int_{\underline{a}}^b (f_1 + f_2) \leq \int_{\underline{a}}^{\overline{b}} (f_1 + f_2)$

Analyse I:

Déf 15: Par $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ bornée on pose $\|f\|_\infty := \sup\{|f(x)| : x \in [a,b]\}$

Cor 16: 

Par $f : [a,b]$ bornée et intégrable on a $\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f| \leq \|f\|_\infty (b-a)$

Dém: Conséquence immédiate de Prop 15,14 et $\pm f(x) \leq |f(x)| \leq \|f\|_\infty$

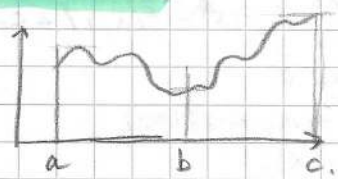
(Par exemple: $\|f\|_\infty - |f(x)| \geq 0$ donc

$$0 \leq \int_a^b (\|f\|_\infty - |f(x)|)\,dx = \int_a^b \|f\|_\infty dx - \int_a^b |f(x)|\,dx$$
$$= \|f\|_\infty (b-a)) \quad \blacksquare$$

En particulier, si $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ $n \in \mathbb{R}$ telles que $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

Alors $\int_a^b f_n \xrightarrow{n\to\infty} \int_a^b f$

$$\left|\int_a^b f_n - \int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f_n - f| \leq \|f_n - f\|_\infty (b-a)$$

Propriété 17: 

Soit $f : [a,c] \to \mathbb{R}$ bornée et intégrable et soit $b \in [a,c]$.

Alors $f|_{[a,b]}$ et $f|_{[b,c]}$ sont intégrables et

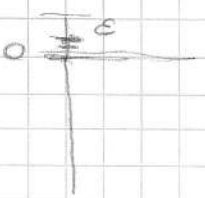
$$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f.$$

Dém:

L'assertion est clairement vraie si f est en escalier.

Pour un f général, soient $\varepsilon > 0$ et $e \leq f \leq g$ des fonctions en escalier telles que $\int_a^c g - \int_a^c e < \varepsilon$

Alors $\underbrace{\left(\int_a^b g - \int_a^b e\right)}_{\geq 0} + \underbrace{\left(\int_b^c g - \int_b^c e\right)}_{\geq 0}$
$$- \int_a^c g - \int_a^c e < \varepsilon$$



Donc $\int_a^b g - \int_a^b e < \varepsilon$ et $\int_b^c g - \int_b^c e < \varepsilon$

Par rem 6 (ii), on conclut que $f|_{[a,b]}$ et $f|_{[b,c]}$ sont intégrables. De plus:

$$A = \int_a^c f - \left(\int_a^b f - \int_b^c f\right) < \int_a^b g - \left(\int_a^b e + \int_b^c e\right)$$
$$= \int_a^c g - \int_a^c e < \varepsilon.$$

De façon similaire, on trouve $A > -\varepsilon$. donc $A = 0$ $\blacksquare$

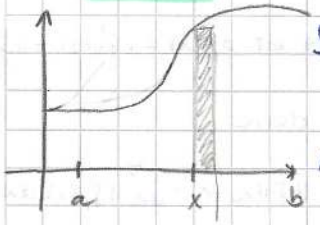
Déf 18: Si $a < b$ on définit $\int_b^a f := -\int_a^b f$

Il est alors facile de vérifier que la relation

$$\int_a^b f + \int_b^c f = \int_a^c f.$$

est vraie $\forall\, a, b, c \in \mathbb{R}$.

Prop 19: Théorème fondamental du calcul différentiel et intégral.



Soit $f \in C([a,b], \mathbb{R})$. Définissons $F: [a,b] \to \mathbb{R}$ par $F(x) := \int_a^x f$

Alors $F \in C^1((a,b); \mathbb{R})$ et $F' = f$

$F(x+h) - F(x) = \square = \int_x^{x+h} f \simeq \square = h \cdot f(x)$

Mr Turner

le 28.11.17

Analyse:

Dém: Soit $x_0 \in (a;b)$ A voir: $\lim_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(x_0)$

c'est à dire:

$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0,$ tq $|x - x_0| < \delta \Rightarrow \left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right| < \varepsilon$

Soit $\varepsilon > 0$,

Puisque f est continue en x_0, $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Alors

$\exists\, \delta > 0$ tq $\forall x \in [a;b]$ $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ *

On a $F(x) - F(x_0) = \int_a^x f - \int_a^{x_0} f \overset{\text{prop 17}}{=} \int_{x_0}^x f$

Donc $\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) = \frac{F(x) - F(x_0) - (x - x_0) f(x_0)}{x - x_0}$

$= \frac{1}{x - x_0} \left[\int_{x_0}^x f - (x - x_0) f(x_0) \right]$ $\quad = \int_{x_0}^x f(x_0) \leftarrow$ const.

On a $\left| \int_{x_0}^x f - (x - x_0) f(x_0) \right| = \left| \int_{x_0}^x (f(y) - f(x_0))\, dy \right| \leq \|f(y) - f(x)\|\, |x - x_0|$

$= \sup_{|y - x_0| < \delta} |f(y) - f(x_0)|\, |x - x_0|$

Alors $\sup_{0 < |x - x_0| < \delta} \left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right|$ par * $\leq \varepsilon \cdot |x - x_0|$

$= \sup \left| \frac{F(x_0) - F(x) - (x - x_0) f(x_0)}{x - x_0} \right| \leq \frac{1}{|x - x_0|}\, \varepsilon\, |x - x_0|$

Finalement $|x - x_0| < \delta \quad = \varepsilon$

$\Rightarrow \frac{F(x) - F(x)}{x - x_0} \cdot f(x_0) = \varepsilon$

□

Déf 20: Soit $f \in C([a,b] \to \mathbb{R})$. Une fonction $G \in C^1((a,b), \mathbb{R})$ est dite primitive si $G' = f$

Ex 21: $\frac{1}{3}x^3$ et $\frac{1}{3}x^3 + 7$ sont des primitives de x^2.

Analyse:

Prop 22: Soient F_1, F_2 deux primitives de f. Alors $F_1 - F_2$ est constante

Dém: $(F_1 - F_2)' = F_1' - F_2' = f - f = 0$
Cor 5.25 $\Rightarrow$ $F_1 - F_2$ est constante ▨

Notation: Si F est primitive de f. On écrit $F = \int f$ ou $F(x) = \int f(x)\,dx$.

Cor 23: Thm Fondamental
Soit I un intervalle ouvert, $f \in C(I; \mathbb{R})$ et F une primitive de f. Alors pour $a, b \in I$

$$\int_a^b f = F(b) - F(a)$$ ← ⚠ pas théorème ni définition.

Dém: Soit $G(x) = \int_a^b f$ thm fond $G' = f$

Puisque F est aussi une primitive de f, (fonction const.)
Prop 22 $\Rightarrow$ $F - G$ constante. $\Rightarrow \forall x \in I$, $\int_a^x f = F(x) - c$
Prenons $x = a$:
$$0 = \int_a^a f = F(a) - c \Rightarrow c = F(a)$$
Alors $\int_a^b f = F(b) - C = F(b) - F(a)$ ▨

Notation: $F|_a^b = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$
Donc :
$$\int_a^b f = f|_a^b \quad \text{où } F' = f$$

6.3 Règles de calculs:

Prop 24: Soient $f, g \in C(I; \mathbb{R})$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Alors $\int(\alpha f + \beta g) = \alpha \int f + \beta \int g$

Dém: Soit $F = \int f$ et $G = \int g$
$(\alpha F + \beta G)' = \alpha F' + \beta G' = \alpha f + \beta g$
(prop. 5.8)
Donc :
$$\int(\alpha f + \beta g) = \alpha F + \beta G = \alpha \int f + \beta \int g$$

Rem: (AlgI): $C([a;b]; \mathbb{R}) \longrightarrow C^1((a;b); \mathbb{R})$
$f \longmapsto \int_a^x f$
(esp. vect ↙) (sous esp. ↓)
Prop 25 $\Rightarrow$ cette application est linéaire.

Cor 26: Intégrailles: $\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g$ (Exo).

Prop 26: Intégration par partie.

$f, g \in C^1(I; \mathbb{R})$

$$\int f'g = fg - \int fg'$$

Dém: $(fg)' = f'g + fg'$

$f \cdot g = \int (f \cdot g)' = \int (f'g + f \cdot g') = \int f'g + \int f \cdot g'$

$f \cdot g - \int f \cdot g' = \int f' \cdot g$. ▨

Cor 27: $\int_a^b f'g = fg\,|_a^b - \int_a^b fg'$

Ex: $\int \underbrace{x}_{g} \underbrace{\sqrt{1+x}}_{f'} = \underbrace{x}_{g} \underbrace{\tfrac{2}{3}(1+x)^{3/2}}_{F} - \int \underbrace{\tfrac{2}{3}(1+x)^{3/2}}_{F}$

$= \tfrac{2}{3}(1+x)^{3/2} - \tfrac{4}{15}(1+x)^{5/2} + C$

Prop 28: Changement de variables

I, J - intervalles ouverts

$f \in C(J; \mathbb{R})$, $\varphi \in C^1(I; J)$

Pour $a, b \in I$: $\int_a^b f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(y)\,dy$ (interne) $y = \varphi(x)$

Ex 29: $\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$ Prenons $\varphi(x) = 1+x^2$, $\varphi'(x) = 2x$, $f(y) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{y}}$

$\int_0^2 f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx = \int_0^2 \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \cdot 2x\,dx = \int_0^2 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$

$\varphi(0) = 1 \quad \varphi(2) = 5$

$= \int_1^5 f(y)\,dy = \int_1^5 \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{y}}\,dy = \sqrt{y}\,|_1^5 = \sqrt{5} - \sqrt{1} = \sqrt{5} - 1$

Dém: Soit $F = \int f$ $\quad (F \circ \varphi)'(x) = f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$

alors $\int_a^b f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx = F \circ \varphi(x)\,|_a^b = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a))$

$= F(y)\,|_{\varphi(a)}^{\varphi(b)}$

$= \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(y)\,dy$ ▨

Recette: Pour trouver une primitive à l'aide du changement de variable :

1. Identifier $y = \varphi(x)$
2. Écrire (formellement) $dy = \varphi'(x)\,dx \qquad dx = \frac{dy}{\varphi'(x)}$
3. Calculer $\int [\ldots]\, dy$ comme fonction de y (aucun x ne peut apparaître)
4. Remplacer y par $\varphi(x)$ pour obtenir une fonction de x.

Ex 30: $\frac{1}{3}\int \frac{3x^2}{(1+x^3)^2}\,dx = *$ $\quad y = 1+x^3 \quad dy = 3x^2 dx \quad * = \frac{1}{3}\int \frac{1}{y^2}\,dy = -\frac{1}{3}\frac{1}{y} + c$

$= -\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+x^3}\,(+c)$

6.4 Intégrales impropres.

Notation: On écrit $\lim_{x \uparrow a} f(x)$ pour $\lim_{\substack{x \to a \\ x<a}}$ et $\lim_{x \downarrow a} f(x) = \lim_{\substack{x \to a \\ x>a}} f(x)$.

Définition 31: Soit (a,b) un intervalle ouvert, où a et b peuvent être $\pm\infty$. Soit $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ telle que f est intégrable sur $[c,d]$ $\forall c,d \in (a,b)$.
Alors f est intégrable sur (a,b) si la limite :

$$\int_a^b f := \lim_{c \downarrow a} \lim_{d \uparrow b} \int_c^d f$$

existe.

Ex 32: (i) Pour $\alpha < -1$, on a $\int_1^{+\infty} x^\alpha\,dx = \lim_{d \uparrow \infty} \int_1^d x^\alpha\,dx$

$= \lim_{d \uparrow \infty} \frac{d^{\alpha+1} - 1}{\alpha+1} = \frac{-1}{\alpha+1}$

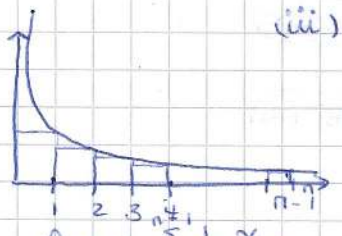
Pour $\alpha > -1$ l'intégrale impropre $\int_1^\infty x^\alpha\,dx$ n'existe pas

(ii) Pour $\alpha > -1$, on a $\int_0^1 x^\alpha\,dx = \lim_{c \downarrow 0} \int_c^1 x^\alpha\,dx$

$= \lim_{c \downarrow 0} \frac{1 - c^{\alpha+1}}{\alpha+1} = \frac{1}{\alpha+1}$

Pour $\alpha < -1$, l'intégrale impropre $\int_0^1 x^\alpha\,dx$ n'existe pas.

(iii) Pour $\alpha = -1$. Les intégralles impropres $\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx$ et $\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx$ n'existent pas.



$\int_1^n \frac{1}{x}\,dx \geq \int_1^n f = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i+1} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$ (série harmonique)

$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i+1} \chi_{[i,1+i)}(x) \leq \frac{1}{x}$

De plus :

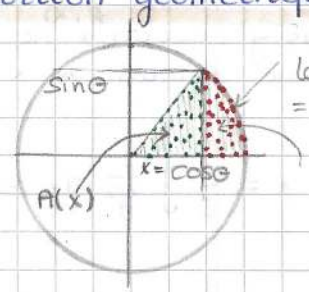
$$\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = \int_{1/n}^1 \frac{1}{x}\,dx \overset{\substack{y=\frac{1}{x} \\ dy=-\frac{1}{x^2}dx}}{=} \int_n^1 y\cdot\left(-\frac{1}{y^2}\right)dy$$

$$= \int_1^n \frac{1}{y}\,dy \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$$

7. Fonctions élémentaires:

7.1 Les fonctions trigonométriques:

Intuition géométrique: Le cercle de rayon 1 a une circonférence de 2π et une surface de π



longueur Θ = angle du secteur

surface: $\pi \cdot \frac{\Theta}{2\pi} = \frac{\Theta}{2}$

Définition 1: $\pi := 2 \cdot \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, dx$

Définition 2: $A(x)$: fonction de $\cos(\Theta)$ pour trouver la surface

Pour $x \in [-1;1]$, on définit:

$$A(x) := \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + \int_x^1 \sqrt{1-y^2}\, dy.$$

Alors $A \in C^1((-1;1); \mathbb{R})$ et on a

$$A'(x) = \frac{1}{2}\left(x \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} + \sqrt{1-x^2}\right) - \sqrt{1-x^2}$$

$$= \frac{-1}{2\sqrt{1-x^2}} < 0 \quad \text{décroissante.}$$

Par Rem 5.23 A est strictement décroissante et on a $A(-1) = \frac{\pi}{2}$ et $A(1) = 0$. Donc $A: [-1;1] \to [0; \frac{\pi}{2}]$ est bijective par le théorème des valeurs intermédiaires.

Définition 3: Pour $\Theta \in [0;\pi]$, on définit $\cos(\Theta) = A^{-1}(\frac{\Theta}{2})$ et $\sin(\Theta) = \sqrt{1-(\cos\Theta)^2}$

Prop. 4: Pour $x \in (0;\pi)$, on a $\cos'(x) = -\sin(x)$ et $\sin'(x) = \cos x$

Dém: Avec $B: 2 \cdot A$ on a $B(\cos(x)) = x$

De $A'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$ on déduit $B'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Par prop. 5.16: $\cos'(x) = (B^{-1})'(x) = \frac{1}{B'(B^{-1}(x))}$

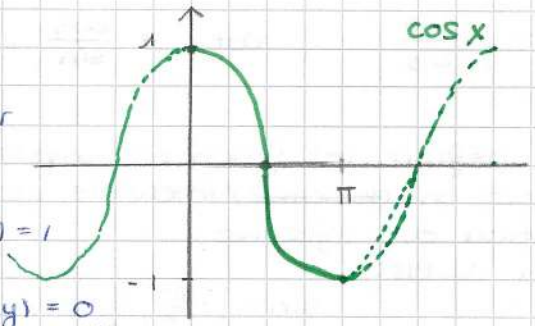
$$= \frac{1}{-\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 x}}} = -\sin x.$$

De $\sin(x) = \sqrt{1-\cos^2(x)}$ on trouve $\sin'(x) = \frac{-2\cos x \cos'(x)}{2\sqrt{1-\cos^2(x)}}$

$$= \frac{-2\cos x (-\sin x)}{2\sin x} = \cos x \qquad \blacksquare$$

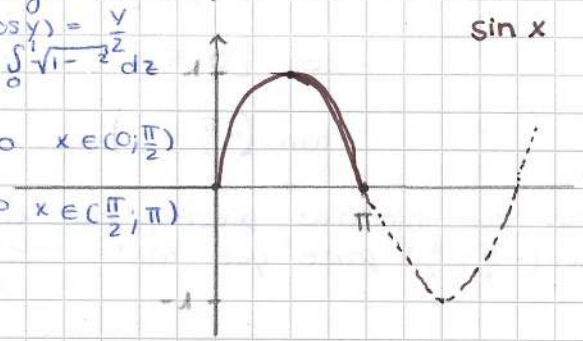
Analyse: le 29.11.17

Graphes de cos et sin:



Remarquons pour dessiner les graphes:

- Par $x \in (0;\pi)$, on a: $\cos'(x) < 0$ avec $\cos(0) = 1$ et $\cos(\pi) = -1$
  Donc $\exists! y \in (0;1), \cos(y) = 0$
  Pour trouver y: $A(\cos y) = \frac{\pi}{2}$
  et $y = 2 \cdot A(0) = 2 \cdot \int_0^1 \sqrt{1-z^2}\,dz = \frac{\pi}{2}$
- $\sin'(x) = \cos(x) \begin{cases} > 0 & x \in (0;\frac{\pi}{2}) \\ < 0 & x \in (\frac{\pi}{2};\pi) \end{cases}$



Analyse: Le 05.12.17

Définition 5: On étend les définitions de cos et sin au domaine $\mathbb{R}$ comme suit:

(i) Pour $x \in (\pi; 2\pi]$ on définit:
$\cos x := \cos(2\pi - x)$, $\sin x := -\sin(2\pi - x)$

(ii) Pour $x = 2k\pi + y$ avec $y \in [0; 2\pi]$ et $k \in \mathbb{Z}$ on définit:
$\cos(x) := \cos y$, $\sin(x) := \sin(y)$

Proposition 6: $\cos, \sin \in C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$ et on a $\cos' = -\sin$, $\sin' = \cos$ et $\cos^2 + \sin^2 = 1$.

Dém: La relation $\cos^2 + \sin^2 = 1$ est cohérente par Déf 3 et 5.
Par Prop 4 et Déf 5 on a $\cos'(x) := -\sin x$ et $\sin' x = \cos x$ pour $x \in (0;\pi) \cup (\pi; 2\pi) \cup (-2\pi; \pi) \cup \ldots = \mathbb{R} \setminus \{\pi \cdot k;\ k \in \mathbb{Z}\}$

$x \in (\pi; 2\pi)$, $(2\pi - x) \in (0;\pi)$
$\cos(x) \overset{\frac{d}{dx}}{=} \cos(2\pi - x) = -(-\sin(2\pi - x)) = -\sin(x)$ ⌟

Par $x \in k\cdot\pi$, pour $k \in \mathbb{Z}$, il suffit de montrer le résultat suivant:

Soit I une intervalle ouvert, $\alpha \in I$ f continue en α et dérivable sur $I \setminus \{\alpha\}$ Si $\lim_{x \to \alpha} f'(x)$ existe, alors $f'(\alpha)$ existe et $f'(\alpha) = \lim_{x \to \alpha} f'(x)$

Par le thm des accroissements finis; pour tout h assez proche de α, il existe un a_h entre α et $\alpha + h$ tq $f'(a_h) = \frac{f(\alpha+h) - f(\alpha)}{h}$
Donc $\lim_{x \to \alpha} f'(x) = \lim_{h \to 0} f'(a_h) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\alpha+h) - f(\alpha)}{h} = f'(\alpha)$ ⌟

le 05.12.17

Définition 7: $\sec := \frac{1}{\cos}$ $\quad \csc := \frac{1}{\sin}$

$\tan := \frac{\sin}{\cos}$ $\quad \cot := \frac{\cos}{\sin}$.

Pour définir les fonctions inverses de cos, sin, tan on choisit un ~~domaine~~ / intervalle maximale sur lequel la fonction est injective.
Choix usuels:

$$\sin : \left[-\tfrac{\pi}{2}; \tfrac{\pi}{2}\right]$$

$$\cos : [0; \pi] \qquad (*)$$

$$\tan : \left(-\tfrac{\pi}{2}; \tfrac{\pi}{2}\right)$$

(tan est injective parce qu'elle est strictement croissante sur $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$ parce que $\tan' = \frac{\cos^2 + \sin^2}{\cos^2} = \frac{1}{\cos^2} = \sec^2 > 0$)

Les fonctions inverses de cos, sin et tan sur les intervalles (*) s'appellent arccos, arcsin et arctan.
Les fonctions: $\arccos : [-1;1] \longrightarrow [0;\pi]$ sont bijectives.
$\arcsin : [-1;1] \longrightarrow [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$
$\arctan : \mathbb{R} \longrightarrow (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$

Proposition 8: Pour $x \in (-1;1)$, on a

$$\arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Et pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Dém: $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sin'(\arcsin(x))} = \frac{1}{\underbrace{\cos(\arcsin(x))}_{>0}} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin(x))}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\arccos'(x) =$ idem

on a $\arctan'(x) = \frac{1}{\tan'(\arctan x)} = \frac{1}{(\sec(\arctan x))^2} = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan x)}$

De $\cos^2 + \sin^2 = 1$ obtient $1 + \tan^2 = \sec^2 = \frac{1}{1+x^2}$ ∎

Proposition 9: $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$
$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$ Equation différentielle

Dém:

Etape 1: Soit $f \in C^2(\mathbb{R};\mathbb{R})$ tq $f'' + f = 0$, $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$

$\ulcorner (f')^2 + f^2)' = 2f'(f'' + f) = 0$, donc $(f')^2 + f^2 = \text{const.}$
De $f(0) = 0$ et $f'(0) = 0$ on déduit $c = 0$ donc $f = 0$. $\lrcorner$

Etape 2: Soit $f \in C^2(\mathbb{R};\mathbb{R})$ tq $f'' + f = 0$. Alors $f = f(0)\sin + f'(0)\cos$

$\ulcorner$ Soit $g := f - f(0)\sin - f'(0)\cos$
Alors $g' = f' - f(0)\cos + f'(0)\sin$
$g'' = f'' + f(0)\sin + f'(0)\cos$ Donc $g + g'' = 0$.

Analyse:

Dém (Suite):

Etape 2: (suite)
Donc $g'' + g = 0$ et $g(0) = 0$ et $g'(0) = 0$
Avec l'Etape 1 on conclut $g = 0$ ⊣

Etape 3: conclusion
Soit $y \in \mathbb{R}$ et $f(x) = \sin(x+y)$
Alors $f'(x) = \cos(x+y)$ et $f''(x) = -\sin(x+y)$
Donc $f'' - f = 0$, $f(0) = \sin(y)$ et $f'(0) = \cos y$
De l'Etape 2, on déduit $f(x) = f'(0)\sin x + f(0)\cos x$
Donc $f(x) = \sin(x+y) = \sin(x)\cos y + \sin y \cos x$ ▨

$\cos(x+y)$: Idem (Exo).

7.2 Le logarithme et la fonction exponentielle:

Soit $a > 0$. On a vu comment définir la fonction $f(x) = a^x \ \forall x \in \mathbb{Q}$
$a^{p/q} := (a^{1/q})^p$ où $a^{1/q}$ est l'inverse de a par l'inverse de $x \to x^q$

Notons que $f(x+y) = a^{x+y} = a^x \cdot a^y = f(x) \cdot f(y) \ \forall x, y \in \mathbb{Q}$

But: définir $f \ \forall x \in \mathbb{R}$

On cherche donc une fonction $f: \mathbb{R} \to [0;\infty)$ tq $f(x+y) = f(x)\cdot f(y)$
On exclut le cas trivial $f = 0$ en posant $f(1) = a > 0$.
Si on trouve une telle fonction f, on pourra définir $a^x := f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Cherchons $f \in C^1(\mathbb{R}; [0;\infty))$ tq $f(x+y) = f(x)\cdot f(y) \ \forall x, y \in \mathbb{R}$, $f(1) = a > 0$.
En particulier $a = f(1) = f(1+0) = f(1)\cdot f(0) = a \cdot f(0) = a \cdot 1$
donc $f(0) = 1$. De plus:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x)\cdot f(h) - f(x)}{h} = f(x) \lim_{h\to 0} \frac{f(h) - 1}{h}$$

$$= f(x) \lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = f(x) \underbrace{f'(0)}_{=\alpha} = \alpha f(x)$$

Donc $f' = \alpha f$

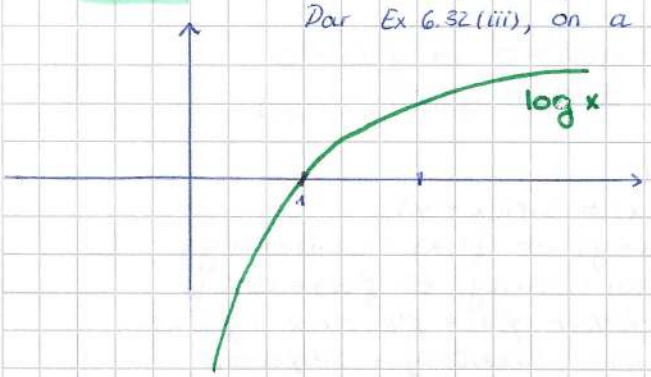
La relation $f' = \alpha f$ devient plus simple si on considère l'inverse de f.

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{\alpha f(f^{-1}(x))} = \frac{1}{\alpha x}$$

Donc f^{-1} est l'intégrale de $\frac{1}{\alpha x}$.

Déf 10: Pour $x>0$, on définit $\log x := \int_1^x \frac{1}{y}\,dy$

Par Ex 6.32(iii), on a $\lim_{x\downarrow 0} \log x = -\infty$, $\lim_{x\uparrow\infty} \log x = +\infty$



Prop 11: Pour $x,y>0$ on a $\log(x\cdot y) = \log(x) + \log(y)$

Dém: Soit $y>0$ et $f(x) = \log(x\cdot y)$. Alors $f'(x) = \frac{1}{xy}\cdot y = \frac{1}{x}$,

donc $f' = \log'$ $\Rightarrow \exists$ constante c, $f(x) = \log x + c$ $\forall x>0$,
i.e. $\log(x\cdot y) = \log(x) + c$. En choissant $x=1$ on obtient $c = \log(y)$ ∎

Remarque 12: i) Par récurrence, on trouve $\log(x^n) = n\cdot \log x$

ii) Pour $x,y>0$ on a $\log(\frac{x}{y}) = \log(x) - \log(y)$

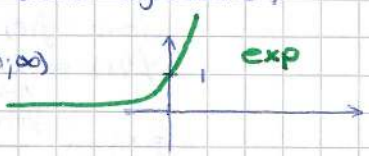
$$\log x = \log\left(\frac{x}{y}\cdot y\right) = \log\left(\frac{x}{y}\right) + \log(y)$$

A l'aide de $\log(2^n) = n\log 2$ et $\log 2>0$, on voit directement que $\lim_{x\uparrow\infty} \log x = +\infty$, même chose pour $\lim_{x\downarrow 0} \log x = -\infty$

à l'aide de $\log(\frac{1}{2^n}) = -n\log 2$.

On incwt que $\log: (0;\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ est strictement croissante, injective et donc surjective et donc bijective.

Déf 13: $\exp := \log^{-1}$ $\quad \exp: \mathbb{R} \longrightarrow (0;\infty)$



Prop. 14: $\exp' = \exp$

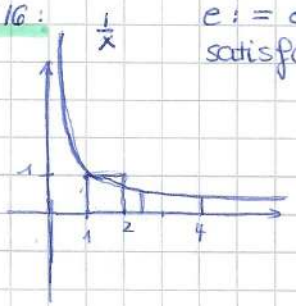
Dém: $\exp'(x) = (\log^{-1})'(x) = \frac{1}{\log'(\log^{-1}(x))} = \frac{1}{1/\exp(x)} = \exp(x)$ ∎

Prop. 15: $\forall x,y \in \mathbb{R}$, $\exp(x+y) = \exp(x)\cdot\exp(y)$

Dém: Soient $a = \exp(x)$ et $b = \exp(y)$. Alors $x+y = \log(a) + \log b$

$= \log a\cdot b$ donc $\exp(x+y) = \exp(\log a\cdot b) = \exp(x)\cdot\exp(y)$

Déf 16: $e := \exp(1)$. e est donc l'unique nombre dans $(0;\infty)$ satisfaisant $\int_1^e \frac{1}{x}\,dx = 1$



On a $\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx < 1\cdot(2-1) = 1$. Donc $e>2$

On a aussi $\int_1^4 \frac{1}{x}\,dx > \frac{1}{2}(2-1) + \frac{1}{3}(3-2) + \frac{1}{4}(4-3) > 1$
donc $e<4$

Conclusion: $2<e<4$. En fait $e = 2{,}718$

Analyse I:

Déf 16 (suite) Si $x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, alors on a $\exp(x) = \exp(p/q)\ (\exp(\frac{1}{q}))^p = ((\exp(1))^{1/q})^p$
$= (\exp(1))^{x} = e^x$

Conclusion: si $x \in \mathbb{Q}$ alors $\exp(x) = e^x$

Déf 17: Pour $x \in \mathbb{R}$ on définit $e^x := \exp(x)$

Soit $a>0$. Pour $x \in \mathbb{Q}$, on a $a^x = (\exp(\log(a)))^x = \exp(x \cdot \log(a))$
$= e^{x \cdot \log a}$

Définition 18: Pour $a>0$ et $x \in \mathbb{R}$ on définit $a^x := e^{x \log a}$

Proposition 19: Pour $a>0$ et $x, y \in \mathbb{R}$ on a $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$, $a^1 = a$
$a^{x+y} = a^x \cdot a^y$

Dém:

- $(\underbrace{a^x}_{b})^y = e^{y \log b} = e^{y \log a^x} = e^{y \cdot \log e^{x \log a}} = e^{y \cdot x \log a} = a^{x \cdot y}$
- $a^1 = e^{1 \log a} = e^{\log a} = a.$
- $a^{x+y} = e^{(x+y)\log a} = e^{x \log a + y \log a} = e^{x \log a} \cdot e^{y \log a} = a^x \cdot a^y$ ∎

Remarque: La fonction $f(x) = a^x$ est monotone :

* $\begin{cases} \cdot \text{ constante si } a=1 \\ \cdot \text{ croissante si } a>1 \\ \cdot \text{ décroissante si } a<1 \end{cases}$

$f'(x) = (e^{x \log a})' = \log a\ e^{x \log a} = \underbrace{\log a}_{\substack{<0 \text{ si } a<1 \\ >0 \text{ si } a>1}} \cdot \underbrace{a^x}_{>0}$
$\begin{cases} \cdot^{*} \text{ si } a=1 \\ <0 \text{ si } a<1 \\ >0 \text{ si } a>1 \end{cases}$ ∎

Si $a \neq 1$, $f: \begin{matrix} \mathbb{R} \longrightarrow (0;\infty) \\ x \longmapsto a^x \end{matrix}$ est bijective et possède un inverse
$f^{-1} = \log_a$ ("logarithme en base a")

Soit $y = \log_a x \iff x = a^y \iff x = e^{y \log a} \iff \log x \iff y \cdot \log a$
$\iff y = \frac{\log x}{\log a}$

Conclusion: $\log_a = \frac{\log}{\log a}.$

Notons qu'on retrouve bien la formule $(a \in \mathbb{R}; x>0)$
$\frac{d}{dx} x^a = \frac{d}{dx} e^{a \log x} = e^{a \log x} \cdot \frac{a}{x} = \frac{a}{x} \cdot x^a = a x^{a-1}$

exp croît plus rapidement que toute puissance.

Prop. 20: Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty, \text{ donc } \lim_{x \to \infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$$

Dém: Soit $f(x) = \frac{e^x}{x^n}$. Alors $f'(x) = e^x\left(\frac{1}{x^n} - n\frac{1}{x^{n+1}}\right) = f(x)\left(1 - \frac{n}{x}\right)$

Pour $x \geq 2n$, on a donc $f'(x) \geq \frac{1}{2} f(x)$

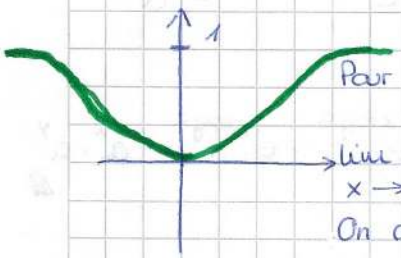
Soit $g(x) = \log f(x)$. Pour $x \geq 2n$ on a donc $g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} \geq \frac{1}{2}$

On conclut : pour $x \geq 2n$ on a $g(x) = g(2n) + \int_{2n}^{x} g' \geq g(2n) + \int_{2n}^{x} \frac{1}{2}\,dy$

$= g(2n) + \frac{x - 2n}{2} \xrightarrow[x \to \infty]{} \infty$

Donc $f(x) = e^{g(x)} \xrightarrow[x \to \infty]{} \infty$

Exemple 21: Soit $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$



Pour $x \neq 0$, on a $f'(x) = e^{-1/x^2} \cdot \frac{2}{x^3} = 2/x^3\, e^{-1/x^2}$

$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 1 \qquad \lim_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0)$.

On a $f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{e^{-1/h^2}}{h}$ $x \neq 0$ $= \lim_{h \to 0} \frac{1/h}{e^{1/h^2}}$ $x = 1/h^2$ $= \lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{x}}{e^x} = 0$

De plus $\lim_{x \to 0} f'(x) = \lim_{x \to 0} 2\frac{1/x^3}{e^{1/x^2}} = 0$

Donc $f \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$

Analyse I: Le 12.12.17

Exemple 21 (suite):

Pour $x \neq$ on a $f'(x) = e^{-1/x^2} \cdot \frac{2}{x^3} = 2/x^3 \cdot e^{-1/x^2}$

$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 1$, $\lim_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0)$

On a $f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{e^{-1/h^2}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1/h}{e^{1/h^2}}$ $x = 1/h^2$ $\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{x}}{e^x} = 0$

De plus $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} f'(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} 2 \cdot \frac{1/x^3}{e^{1/x^2}} = 0 = f'(0)$

Donc $f \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$

Continuons : $f''(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(h) - f'(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2e^{-1/h^2}}{h^4} \overset{\text{Prop 20}}{=} 0$

On conclut : $f''(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} \cdot \frac{-6}{x^4} + e^{-1/x^2} \cdot \frac{4}{x^6} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{, si } x = 0 \end{cases}$

Par le même argument (Prop 20), on a $f \in C^2(\mathbb{R}; \mathbb{R})$

Par récurrence: Exo on trouve $f \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ et $f^{(n)}(0) = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

Chapitre 8 : Primitives de fonctions élémentaires :

Le théorème fondamental réduit le calcul d'intégrales à la recherche de primitives :

$$\int_a^b f = F(b) - F(a) \quad \text{où } F \text{ est primitive de } f.$$

i.e : $F' = f$ aussi noté $F = \int f$.

Clairement, toute fonction continue f possède une primitive, $F(x) = \int_a^x f$

Dans ce chapitre : comment trouver une primitive élémentaire par des méthodes algébriques ?

Par définition, une fonction élémentaire est obtenue par addition, multiplication, division et composition de puissances des fonctions trigonométriques et leurs inverses et de log et exp.

Exemples :

- $\sqrt{x^2 + \arccos(x)}$
- $\log\left(\sin(x) + \sqrt{e^{x^2} - 2}\right)$

Clairement, si F est élémentaire alors F' est élémentaire.

Inversément, si f est élémentaire existe-t-il un F élémentaire tq $F' = f$? En général, la réponse est non !

Par exemple, $f(x) = e^{-x^2}$ n'a pas de primitive élémentaire (théorème, dont la démonstration n'est pas donnée ici)

But de ce chapitre : développer des méthodes pour trouver des primitives de fonction élémentaire quand ceci est possible.

1. On commence avec la liste des primitives connues :

- $\int x^a dx = \frac{1}{a+1} x^{a+1} \quad (a \neq -1)$
- $\int \frac{dx}{x} = \log(x)$
- $\int e^x dx = e^x$
- $\int \sin x \, dx = -\cos x$
- $\int \cos x \, dx = \sin x$
- $\int \sec^2 x \, dx = \tan x$
- $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x$
- $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x$

2. Intégration par parties :

(Rappel : $\int f \cdot g' = f \cdot g - \int f' \cdot g$)

ce qui se dérive ↓ ↑ ce qui s'intègre.

- $\int x \cdot e^x \, dx = x \cdot e^x - \int 1 \cdot e^x \, dx = x \cdot e^x - e^x$

- $\int x^2 \sin x \, dx = -x^2 \cos x - \int -2x \cos x \, dx = -x^2 \cos x + 2x \sin x - 2 \int \sin x \, dx$
  $= -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x$

- $\int \log x \, dx = \int 1 \cdot \log x \, dx = x \log x - \int x \cdot \frac{1}{x} \, dx$
  astuce
  $= x \log x - x$

- $\int \frac{1}{x} \log x \, dx = \log x \cdot \log x - \int \log x \frac{1}{x} \, dx$ astuce $\int f \cdot g' = -\int f \cdot g$

  Donc $\int \frac{1}{x} \log x \, dx = \frac{(\log x)^2}{2}$

- $\int e^x \sin x \, dx = e^x(-\cos x) - \int e^x(-\cos x) \, dx$
  $= -e^x \cos x + \int e^x \cos x \, dx$
  $= -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x \, dx$
  $= \frac{-e^x \cos x + e^x \sin x}{2} = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x)$

- $\int (\log x)^2 dx = \int \log x \log x \, dx = \log x (x \log x - x) - \int \frac{1}{x}(x \log x - x) \, dx$
  $= \log x (x \log x - x) - \int (\log x - 1) \, dx$ ($= x \log x - x - x$)
  $= x (\log x)^2 - 2x \log x + 2x$

3. Changement de variable :

(Rappel : $\int f(x) \, dx$
- on écrit $f(x) = g(f(x)) \cdot f'(x)$
- on choisit la variable $y = f(x)$ et on écrit $g(f(x)) f'(x) = g(y) \, dy$
- on calcule : $G(y) = \int g(y) \, dy$
- on conclut $\int f(x) \, dx = G(f(x))$)

- $\int (\sin x)^5 \cos x \, dx \overset{\substack{y = \sin x \\ dy = \cos x \, dx}}{=} \int y^5 \, dy = \frac{1}{6} y^6 = \frac{1}{6} (\sin x)^6$

le 12.12.17

Analyse I:

- $\int \tan x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx \overset{\substack{y=\cos x \\ dy=-\sin x\,dx}}{=} -\int \frac{1}{y} \, dy = -\log y$

$= -\log(\cos x)$

Analyse I: le 13.12.17

- $\int \frac{1}{x \log x} \, dx \overset{\substack{y=\log x \\ dy=\frac{1}{x}dx}}{=} \int \frac{1}{y} \, dy = \log y = \log(\log x)$

- $\int \frac{x}{1+x^2} \, dx \overset{\substack{y=1+x^2 \\ dy=2x\,dx}}{=} \frac{1}{2}\int \frac{1}{y} \, dy = \frac{1}{2}\log y = \frac{1}{2}\log(1+x^2)$

- $\int \arctan x \, dx = \int \underset{\uparrow}{1} \cdot \underset{\downarrow}{\arctan x} \, dx = x \arctan x - \int \frac{x}{1+x^2} \, dx$

$= x \arctan x - \frac{1}{2}\log(1+x^2)$

- $\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} \, dx \overset{\substack{y=e^x \\ dy=e^x dx}}{=} \int \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \, dy = \arcsin y = \arcsin e^x.$

- $\int \frac{1+e^x}{1-e^x} \, dx \overset{\substack{y=e^x \\ dy=e^x dx}}{=} \int \frac{1+y}{1-y} \cdot \frac{1}{y} \, dy = \int \left(\frac{2}{1-y} + \frac{1}{y}\right) dy$

$= -2\log(1-y) + \log y = -2\log(1-e^x) + x.$

Au lieu d'écrire $y = f(x)$ et $dy = f'(x)\,dx$, il est souvent plus facile d'écrire $y = f(x)$, de résoudre $x = f^{-1}(y)$ et calculer $dx = (f^{-1})'(y)\,dy$ directement. On obtient:

$$\int f(f(x)) \, dx = \int f(y)\,(f^{-1})'(y) \, dy$$

- $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}} \, dx \qquad y = \sqrt{e^x+1}, \quad x = \log(y^2-1), \quad dx = \frac{2y}{y^2-1} \, dy$

Donc $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}} \, dx = \int \frac{(y^2-1)^2}{y} \cdot \frac{2y}{y^2-1} \, dy = 2\int (y^2-1) \, dy$

$= \frac{2}{3}y^3 - 2y = \frac{2}{3}\left(\sqrt{e^x+1}\right)^3 - 2\sqrt{e^x+1}$

Parfois il est utile de remplacer x par une fonction de y.

le 13.12.17

- $\int \sqrt{1-x^2}\,dx \overset{\substack{x=\sin y \\ dx=\cos y\,dy}}{=} \int \sqrt{1-\sin^2 y}\cdot\cos y\,dy$

$= \int \sqrt{\cos^2 y}\cos y\,dy = \int \cos^2 y\,dy$

On peut évaluer $\int \cos^2 y\,dy$ de deux façons "standares."

(a) $\int \cos^2 y\,dy = \int \cos y \cdot \cos y\,dy = \cos y \sin y + \int \underbrace{\sin^2 y}_{1-\cos^2 y}\,dy$

$= \cos y \sin y + y - \int \cos^2 y$

Donc $\int \cos^2 y\,dy = \frac{1}{2}(\cos y \sin y + y)$

(b) $\int \cos^2 y\,dy = \int \frac{1+\cos 2y}{2}\,dy = \frac{y}{2} + \frac{\sin 2y}{4}$

$= \frac{y + \cos y \sin(y)}{2}$.

Conclusion : $\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\arcsin x}{2} + \frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}$

- $\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx =$

On utilise $\tan^2 + 1 = \sec^2$ avec $x = \tan y$ et $dx = \sec^2 y\,dy$

$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \int \frac{1}{\sec y}\sec^2 y\,dy = \int \sec y\,dy = \underline{\text{Exo}}\ \log(\sec y + \tan y)$

$= \log\left(\sqrt{1+x^2} + x\right)$

On peut calculer $\int \cos^n x\,dx$ avec $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$

en réduisant successivement la puissance de $\cos x$.

Par exemple : $n=4$ $\int \cos^4 x\,dx = \int \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx$

$= \int \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}(\cos(2x))^2\right]dx$

$= \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{4}\int \frac{1+\cos 4x}{2}\,dx = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{32}\sin 4x$

$= \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{1}{32}\sin(4x)$

Autre exemple : $n=3$ $\int \cos^3 x\,dx = \int (1-\sin^2 x)\cos x\,dx$

$= \sin x - \int \sin^2 x \cos x\,dx \overset{\substack{y=\sin x \\ dy=\cos x\,dx}}{=} \sin x - \int y^2\,dy$

$= \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x$

La même méthode marche pour $\int \sin^n x \cdot \cos^m x\,dx$

Analyse I:

On peut aussi trouver des formules de réduction en intégrant par partie.

$$\int \cos^n x \, dx = \int \cos^{n-1} x \cdot \cos x \, dx$$

$$= \cos^{n-1} x \cdot \sin x + \int (n-1) \cos^{n-2} x \cdot \underbrace{\sin^2 x}_{1-\cos^2 x} \, dx$$

$$= \cos^{n-1} x \cdot \sin x + (n-1) \int \cos^{n-2} x - (n-1) \int \cos^n x \, dx$$

$$\text{Donc } \int \cos^n x \, dx = \frac{1}{n} \left[\cos^{n-1} x \cdot \sin x + (n-1) \int \cos^{n-2} x \right]$$

5. Fonctions Rationelles:

On veut trouver $\int \frac{p(x)}{q(x)} dx$, où $p(x) = a_n x^n + \dots + a_0$ et $q(x) = b_m x^m + \dots + b_0$

On peut supposer que $a_n = b_m = 1$.

On peut aussi supposer que $n < m$

Sinon on **utilise** la division de polynôme (div Euclidienne)

$p(x) = s(x) \cdot q(x) + v(x)$ où s et v sont des polynômes et degré $v <$ degré q $\quad \frac{p(x)}{q(x)} = s(x) + \frac{v(x)}{q(x)}$

Par exemple:

on a $\frac{x^2}{x-1} = x + 1 + \frac{1}{x-1}$ $\qquad v(x) =$ reste.

Méthode perse:

$$\begin{array}{r|l} x^2 & x-1 \\ \hline -x^2+x & \\ \hline -x+1 & x+1 \\ \hline 1 & \end{array}$$

On admet le résultat suivant sans démonstration:

Théorème fondamental de l'algèbre:

Tout polynôme $q(x) = \sum_{k=0}^{m} b_k x^k$, $b_0, \dots, b_m \in \mathbb{C}$, $x \in \mathbb{C}$ possède une racine.

Corollaire:

avec $b_m = 1$

Par conséquent, on peut écrire $q(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2) \dots (x-\alpha_m)$ où $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{C}$.

En effet, soit α_1 une racine de q. Alors on divise q par $(x-\alpha_1)$ et on obtient $q(x) = q_1(x) \cdot (x-\alpha_1)$ avec un nouveau polynôme $q_1(x)$ de degré $m-1$.

On continue: $\exists \alpha_2, q_1(\alpha_2) = 0$ et on écrit $q_1(x) = q_2(x) \cdot (x-\alpha_2)$

donc $q(x) = q_2(x)(x-\alpha_2)(x-\alpha_1)$ etc

Note : Les racines $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ de q ne sont pas forcément distinctes.
Soient $x_1, \dots, x_L \in \mathbb{C}$ racines distinctes avec multiplicité $s_1, \dots, s_L \in \mathbb{N}^*$:

$$q(x) = \prod_{i=1}^{m} (x - \alpha_i) = \prod_{i=1}^{L} (x - x_i)^{s_i}$$

Proposition 1 :
Soient p et q des polynômes complexes sans racine commune, avec $\deg(p) < \deg(q)$ et $q(x) = \prod_{i=1}^{L} (x - x_i)^{s_i}$ avec $x_1, \dots, x_L \in \mathbb{C}$ distincts.
Alors il existe une décomposition en fractions partielles unique :

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \sum_{i=1}^{L} \sum_{k=1}^{s_i} \frac{\gamma_{ik}}{(x - x_i)^k} \quad (*) \qquad \text{avec } \gamma_{ik} \in \mathbb{C}$$

Les coefficients (γ_{ik}, $1 \le i \le L$ et $1 \le k \le s_i$) sont donnés itérativement par

$$\gamma_{ik} = \lim_{x \to x_i} \left(\frac{p(x)}{q(x)} - \sum_{j=k+1}^{s_i} \frac{\gamma_{ij}}{(x - x_i)^j} \right) (x - x_i)^k \quad (**)$$

Dém :
(i) montrons d'abord l'unicité :
Clairement $(*)$ implique $(**)$
(ii) montrons l'existence :

Le membre de droite de $(*)$ s'écrit comme $\frac{\tilde{p}(x)}{q(x)}$ (dénominateur commun)
Le numérateur $\tilde{p}(x)$ satisfait $\deg(\tilde{p}(x)) < \deg(q(x)) = m = \sum_{i=1}^{L} s_i$
La condition $\frac{p}{q} = \frac{\tilde{p}}{q}$ est équivalente à $p = \tilde{p}$

La condition $p = \tilde{p}$ est un système de m équations
(les coeff d'ordre $0, 1, \dots, m-1$ de p et $\tilde{p}$ coïncident)
Ce système d'équations dans les m variables (γ_{ik}; $1 \le i \le L$, $1 \le k \le s_i$) est linéaire, et, d'après (i), il possède au moins une solution.

(cf Algèbre)

Remarque 2 : Dans le cas où p et q sont des polynômes réels, les racines $x_i \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ sont toujours en couples avec leurs conjugués complexes $\bar{x}_i$ avec les mêmes multiplicités s_i.

Pour $x \in \mathbb{R}$, on a $\prod_{i=1}^{L} (x - x_i)^{s_i} = q(x) = \overline{q(x)} = \prod_{i=1}^{L} (x - \bar{x}_i)^{s_i}$

De plus, pour un couple de racines conjuguées $x_i = \bar{x}_{i+1}$ on a $\gamma_{ik} = \bar{\gamma}_{(i+1)k}$ pour $1 \le k \le s_i$

$$\sum_{i=1}^{L} \sum_{k=1}^{s_i} \frac{\gamma_{ik}}{(x - x_i)^k} = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{\overline{p(x)}}{\overline{q(x)}} = \sum_{i=1}^{L} \sum_{k=1}^{s_i} \frac{\bar{\gamma}_{ik}}{(x - \bar{x}_i)^k}$$

Par unicité de $(*)$, on déduit que $\gamma_{ik} = \bar{\gamma}_{(i+1)k}$ pour $x_i = \bar{x}_{i+1}$, $1 \le k \le s_i$

On peut donc combiner les termes correspondants aux deux racines x_i et $x_{i-1} = \bar{x}_i$

$$\frac{\gamma_{ik}}{(x - x_i)^k} + \frac{\gamma_{(i+1)k}}{(x - x_{i+1})^k} = \frac{\gamma_{ik}}{(x - x_i)^k} + \frac{\bar{\gamma}_{ik}}{(x - \bar{x}_i)^k} = \frac{2\,\mathrm{Re}\left[\gamma_{ik}(x - \bar{x}_i)^k\right]}{|x - x_i|^{2k}}$$

Par exemple : $\frac{1+i}{x+i} + \frac{1-i}{x-i} = 2\,\frac{x+i}{x^2+1}$

Analyse I: le 19.12.17

Ex 3: $\int \frac{dx}{1-x^4}$

1. On factorise $1-x^4 = (1-x^2)(1+x^2) = (1-x)(1+x)(1+x^2)$

Avec prop 1 et rem 2 : on a $\frac{1}{1-x^4} = \frac{a}{1-x} + \frac{b}{1+x} + \frac{c+dx}{1+x^2}$

$\left(= \frac{a}{1-x} + \frac{b}{1+x} + \frac{e}{x-i} + \frac{f}{x+i} \right)$

2. Comment résoudre, a, b, c, d ?

Méthode 1 :

$a = \lim_{x \to 1} \left[\frac{1}{1-x^4} \cdot (1-x) \right] = \lim_{x \to 1} \frac{1}{(1+x)(1+x^2)} = \frac{1}{4}$

$b = \lim_{x \to -1} \left(\frac{1}{1-x^4} (1+x) \right) = \lim_{x \to -1} \frac{1}{(1-x)(1+x^2)} = \frac{1}{4}$

$c+dx = \left(\frac{1}{1-x^4} - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} \right) \right) (1+x^2)$

$= \frac{1}{1-x^2} - \frac{1}{2} \frac{1+x^2}{1-x^2} = \frac{1}{2}$ Donc $c = \frac{1}{2}$ et $d = 0$.

Méthode 2 :

$$\frac{1}{1-x^4} = \frac{a(1+x)(1+x^2) + b(1-x)(1+x^2) + (c+dx)(1+x)(1-x)}{1-x^4}$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 = a + ax + ax^2 + ax^3 + b + bx^2 - bx - bx^3 + c - cx^2 + dx - dx^3$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 = (a+b+c) + (a-b+d)x + (a+b-c)x^2 + (a-b-d)x^3$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 1 = a+b+c \\ 0 = a-b+d \\ 0 = a+b-c \\ 0 = a-b-d \end{cases}$$

3. Conclusion : $\int \frac{dx}{1-x^4} = \frac{1}{4} \int \frac{dx}{1-x} + \frac{1}{4} \int \frac{dx}{1+x} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{1+x^2}$

$= -\frac{1}{4} \log(1-x) + \frac{1}{4} \log(1+x) + \frac{1}{2} \arctan(x)$

Ex 4: $\int \frac{x^3 - 2x + 1}{x^2+1} dx = \int \left(x + \frac{-3x+1}{x^2+1} \right) dx = \int x\,dx + \int \frac{-3x+1}{x^2+1} dx$

1. Division Euclidienne : $x^3 - 2x + 1 = x(x^2+1) - 3x + 1$

$= \frac{1}{2}x^2 + \int \frac{-3x+1}{x^2+1} dx = \frac{1}{2}x^2 - 3 \int \frac{x}{x^2+1} dx + \int \frac{1}{x^2+1} dx$

$= \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2} \log(x^2+1) + \arctan(x)$

9 Introduction aux équations différentielles

(Pas à l'examen)

Exemple 1 : $f(t) = \cos t$ satisfait $\underbrace{f'' = -f. \; ; \; f(0) = 1 \; ; \; f'(0) = 0}_{(*)}$ sur $\mathbb{R}$

f'' : équation différentielles ; $f(0)$, $f'(0)$: conditions initiales

f est une solution de (*)

Q. existence de solution, unicité, solution explicite.

Ex 2 : Désintégration radioactive.

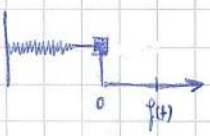
$f' = -\alpha \cdot f$, $f(0) = f_0$

Solution $g = \log f$ $g' = \frac{f'}{f} = -\alpha$

Donc $g(t) = g(0) - \alpha t$

ie : $f(t) = f_0 \cdot e^{-\alpha t}$

Ex 3 :



$$\begin{cases} m \cdot f'' = -K f \\ f(0) = x \\ f'(0) = v \end{cases}$$

Solution : $f(t) = a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)$

$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$; $a = ?$ et $b = ?$

a et b se déterminent à partir de $f(0) = x$ et $f'(0) = v$

Ex 4 : Désintégration de plusieurs isotopes radioactifs

$$\begin{cases} f_1' = -\alpha_1 f_1 \\ f_2' = \alpha_1 f_1 - \alpha_2 f_2 \\ f_3' = \alpha_2 f_2 - \alpha_3 f_3 \\ \vdots \\ f_n' = \alpha_{n-1} f_{n-1} \end{cases}$$

Avec la notation $f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \\ f_n(t) \end{pmatrix}$

et $A = \begin{pmatrix} -\alpha_1 & 0 & & \\ \alpha_1 & -\alpha_2 & \ddots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & \alpha_{n-1} & -\alpha_n \end{pmatrix}$

le système s'écrit $f' = A \cdot f$.

$A = V^{-1} \Lambda V$

$g = Vf$

$g' = \Lambda g$

Ex 3 (suite) :

Définissons $F = \begin{pmatrix} f \\ f' \end{pmatrix}$ $F' = \begin{pmatrix} f' \\ f'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f' \\ -\frac{k}{m} f \end{pmatrix}$

donc $F' = A \cdot F$ et donc $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & 0 \end{pmatrix}$

une équation de la forme $f' = Af + b$, $f(t) \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^n$ est appellée **équation différentielle linéaire**. Si $b = 0$, l'équation est **homogène**.

le 20.12.17

Analyse I :

Observation :

- L'ensemble de solutions f de l'équation linéaire homogène $f' = A \cdot f$ est un espace vectoriel (Exo)
- Si f est une solution de $f' = Af + b$ et g une solution de $g' = Ag$, alors $h := f + g$ est une solution de $h' = Ah + b$.

Prop 5 : La solution de $f' = Af + b$, $f(a) = f_0 \in \mathbb{R}^n$ existe sur $\mathbb{R}$ et elle est unique.

Exemple 6 :

$$\begin{cases} f'(t) = 2t\, f(t)^2 \quad \text{(attention ce n'est pas linéaire)} \\ f(t) > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

Séparation des variables : $\dfrac{f'(t)}{f(t)^2} = 2t \Leftrightarrow \dfrac{d}{dt}\left(-\dfrac{1}{f(t)}\right) = \dfrac{d}{dt}(t^2)$

intégration $\int \frac{1}{f^2}\,df$ et $\int 2t\,dt$

Donc $-\dfrac{1}{f(t)} = -\dfrac{1}{f(0)} + \int_0^t \left(-\frac{1}{f}\right)'$

$= \int_0^t \frac{d}{ds}(s^2)\,ds = t^2$

Donc $-\dfrac{1}{f(t)} = -1 + t^2$ i.e. $f(t) = \dfrac{1}{1-t^2}$.

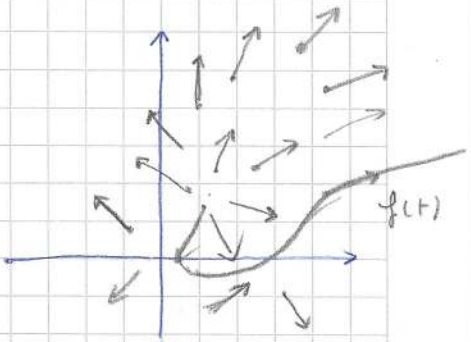
Autre notation : $\dfrac{df}{dt} = 2t f^2$ $\quad \dfrac{df}{f^2} = 2t\,dt$ donc

$$\int \frac{df}{f^2} = \int 2t\,dt$$

Quelques généralités :

- On cherche une solution de $f' = X(f(t), t)$ $f(0) = f_0$
  $f(t) \in \mathbb{R}^n$, $f_0 \in \mathbb{R}^n$ $X : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$
- Interprétation graphique : e.g. $n = 2$

Exemple : $X(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix}$



- Questions :
  1) Existence de solution ?
  2) Unicité de solution ?
  3) Solutions sur tout $t \in \mathbb{R}$? (En général, la réponse est NON !)

En général : Non !
Par (iii), cf exemple 6.

Exemple 7: (Concernant 2))

Soit $n=1$ $\quad f' = 2\sqrt{|f|}$, $f(0) = 0$

Solutions :

- $f(t) = 0 \quad \forall t$
- $f(t) = t^2$
- $f(t) = \begin{cases} (t-t_0)^2 & \text{si } t \geq t_0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Informellement, une solution existe si X est continue ; la solution est unique si X est Lipschitz.