UNIVERSITÉ DE GENÈVE

FACULTÉ DES SCIENCES

Cours donné par

Pavol Severa

Analyse I

Étudiants de première année

19 février 2020

Table des matières

1 Séries numériques

$a_1, a_2, a_3 \dots \in \mathbb{R}$ une suite

$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

1.1 Définitions

Si $a_1, a_2, \dots \in \mathbb{R}$ est une suite, alors $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} a_n$

- Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ et $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ convergent, alors $\sum_{n=1}^{\infty} a_n + b_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$
- Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ et si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda \cdot a_n = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n$
- Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, alors $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Preuve

Si $s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$, alors $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n$, mais $a_n = s_n - s_{n-1}$ et donc :

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (s_n - s_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = 0 \text{ car } \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Contre-exemple

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$ même si $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

Remarque

Si $c_1, c_2 \dots \in \mathbb{C}$ est une suite et si $c \in \mathbb{C}$, alors on dit que $\lim_{n\to\infty} c_n = c$ si et seulement si $\lim_{n\to\infty} |c_n - c| = 0$. Autrement dit, si $c_n = u_n + iv_n$ et $c = u + iv$ on veut $\lim_{n\to\infty} u_n = u$, $\lim_{n\to\infty} v_n = v$

Exemple série géométrique

Soit $q \in \mathbb{C}$, $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + q^2 + \cdots$

- si $|q| \geq 1$ alors il n'est pas vrai que $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$ (car $|q^n| \geq 1$) alors $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ diverge.
- si $|q| < 1$: $s_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{1}{1-q} - \frac{1}{1-q} \lim_{n\to\infty} q^{n+1} = \frac{1}{1-q}$

  Illustration : avec $q = \frac{1}{2}$: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots = 2$

1.2 Comparaison avec une autre série

Définition

Soit $a_1, a_2, \dots \in \mathbb{C}$ une suite. On dit que la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ <u>converge absolument</u> si $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge.

Théorème

Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolument c'est à dire si $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge, alors $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

Preuve

Rappel : une suite $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ converge si elle est de Cauchy, c'est à dire $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0, \forall m > n > n_0, |c_m - c_n| < \varepsilon$
Posons $t_n = |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|$ et $s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$.
Notre hypothèse est $\lim t_n$ converge ($= \sum |a_n|$)
à montrer : $\lim s_n$ converge ($= \sum a_n$)
t_n converge $\implies$ t_n est une suite de Cauchy c'est à dire

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0, \forall m > n > n_0, \sum_{k=n+1}^{m} |a_k| = |t_m - t_n| < \varepsilon$$

mais $|s_m - s_n| = |\sum_{k=n+1}^{m} a_k \leq \sum_{k=n+1}^{m} |a_k| < \varepsilon$
par l'inégalité triangulaire.
$\Rightarrow$ la suite $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ est de Cauchy, donc elle converge.

Observation

Si $a_n \geq 0 (a_n \in \mathbb{R}) \forall n \in \mathbb{N}$ alors $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ est une suite croissante ($s_{n+1} \geq s_n$ car $s_{n+1} - s_n = a_{n+1} \geq 0$) et donc

- soit la suite $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ est bornée $\Rightarrow$ elle converge. c'est à dire $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.
- soit $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ n'est pas bornée. c'est à dire $\lim_{n\to\infty} s_n = \infty$ c'est à dire $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$. (diverge vers $+\infty$)

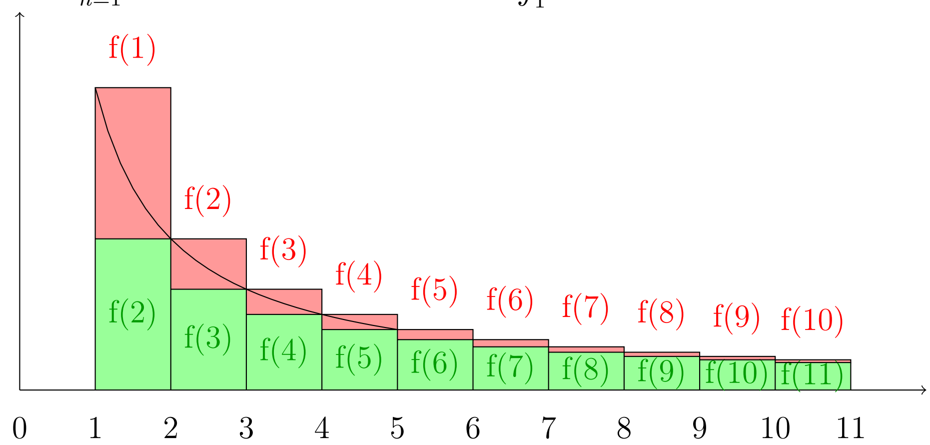
1.3 Comparaison avec une intégrale

Théorème

Soit $f : [1, \infty) \implies [0, \infty)$ une fonction décroissante. Alors $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ converge si et seulement si $\int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge.

Preuve

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \geq \int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \geq \sum_{n=2}^{\infty} f(n)$$
$$\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f(n) < \infty \text{ si et seulement si } \int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x < \infty$$



Preuve formelle

$$f(n-1) = \int_n^{n+1} f(n+1)\,\mathrm{d}x \leq \int_n^{n+1} f(X)\,\mathrm{d}x \leq \int_n^{n+1} f(n)\,\mathrm{d}x = f(n)$$
$$\sum_{n=2}^{N+1} f(n) \leq \int_1^{N+1} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \sum_{n=1}^{N} f(n)$$
$\lim_{N\to\infty}$: $\sum_{n=2}^{\infty} f(n) \leq \int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ et donc $\sum_{n=1}^{\infty} f(n) < \infty$ si et seulement si $\int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x < \infty$ $\square$

Exemple

Soit $a > 0$, $f(x) = \frac{1}{x^a}$
quand est-ce que $\int_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^a} < \infty$?
Réponse : si et seulement si a $>$ 1 car $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^a} = \begin{cases} \frac{1}{1-a} x^{1-a} & \text{si } a \neq 1 \\ log(x) & \end{cases}$
$\int_a^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^a} < \infty$ si et seulement si $a > 1$ (en particulier $\int_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x} = \infty$
On a donc :
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$ converge si et seulement si $a > 1$ en particulier, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$ (la série harmonique)
Est-ce que $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(logn)^a}$ converge ? voir la série.
Nous savons si $\sum_{n}^{\infty} q^n$ et si $\sum_{n}^{\infty} \frac{1}{n^a}$ converge, est-ce que $\sum_{n=1}^{\infty} tan(\frac{1}{n^2})$ converge ?

Proposition

Si $0 \leq a_n \leq b_n$ et si $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$, alors $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$

Preuve

$\sum_{n=1}^{N} a_n \leq \sum_{n=1}^{N} b_n$

$\lim_{N\to\infty} : \sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ $\square$

Proposition

Soient $a_n \in \mathbb{C}$ et $b_n \in (0, \infty)$ Si la suite $(\frac{a_n}{b_n})_{n=1}^{\infty}$ est bornée, c'est à dire si $\exists C > 0$ tel que $|\frac{a_n}{b_n}| \leq C, \forall n$ et si $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, alors $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolument.

Preuve

On a $|a_n| \leq C \cdot b_n$ et $\sum_{n=1}^{\infty} C \cdot b_n = C$
$\sum n = 1^{\infty} b_n < \infty$ (converge)
$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge, c'est à dire $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge absolument.

Théorème (critère de la limite)

Soient $a_n \in \mathbb{C}, b_n \in (0, \infty)$
Supposons que $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ existe.
Alors :

- Si $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, alors $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolument
- si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge, alors $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge.
- Si $a_n \in (0, \infty), b_n \in (0, \infty),$ et si $lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \neq 0,$ alors $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si et seulement si $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge (car on peut échanger les suites a_n et b_n)

Preuve du théorème :

La suite $\frac{a_n}{b_n}$ converge $\Rightarrow$ elle est bornée, c'est à dire $\exists C > 0,$ tel que $|\frac{a_n}{b_n}| \leq C$
On a donc $|a_n| \leq C \cdot b_n$
Par l'hypothèse : $\sum b_n$ converge $\implies \sum a_n$ converge $\square$

Exemples

- $\sum_{n=1}^{\infty} tan\Big(\frac{1}{n^2}\Big), tan\Big(\frac{1}{n^2}\Big) = a_n$

  $\lim_{x\to 0} \frac{tan(x)}{x} = 1$

  $\lim_{n\to\infty} \frac{tan\Big(\frac{1}{n^2}\Big)}{\frac{1}{n^2}} = 1$

  On pose $b_n = \frac{1}{n^2}$:

  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge, et donc $\sum_{n=1}^{\infty} tan\Big(\frac{1}{n^2}\Big)$ converge.

- $\sum_{n=1}^{\infty} sin\Big(\frac{1}{n}\Big)$:

  $\lim_{x\to\infty} \frac{sin(x)}{x} = 1$

  $\lim_{n\to\infty} \frac{sin\Big(\frac{1}{n}\Big)}{\frac{1}{n}} = 1$

  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge $\implies \sum_{n=1}^{\infty} sin\Big(\frac{1}{n}\Big)$ diverge.

Comparaison avec la série géométrique :

Théorème (Critère du quotient)

:
Soit $a_n \in \mathbb{C}$ une suite

- 1) Si $\lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| < 1,$ alors $\sum a_n$ converge absolument.
- 2) Si $\lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| > 1,$ alors $\sum a_n$ diverge.

Preuve :

- 1) Soit q tel que $lim_{n\to\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}| < q < 1 \implies \exists n_0$ tel que $\forall n \geq n_0,$ on a $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| < q$

  On a donc :

  $|a_{n_0+1}| < q \cdot |a_{n_0}|$

  $|a_{n_0+2}| < q \cdot |a_{n_0+1}| < q^2 \cdot |a_{n_0}|$

  $|a_{n_0+k}| < q^k \cdot |a_{n_0}|$

  Vu que $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ converge, $\sum_{k=0}^{\infty} |a_{n_0+k}|$ converge $\implies \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge, c'est à dire $\sum a_n$ converge absolument.

- 2) Soit q tel que $1 < q < \lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}|$

  $\exists n_0 \forall n \geq n_0, |\frac{a_{n+1}}{a_n}| > q$

  $\implies |a_{n_0+k}| > q^k \cdot |a_{n_0}|$

  $\implies \lim_{n\to\infty} |a_n| = \infty$

  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge □

Exemples

$x \in \mathbb{C}, x \neq 0, a_n = \frac{x^n}{n!}$

$|\frac{a_{n+1}}{a_n}| = |\frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}}| = \frac{|x|}{n+1} \to_{n\to\infty} 0 (< 1)$

$\implies \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ converge absolument.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, a_n = \frac{1}{n^2}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 = 1 \implies$ le critère ne dit rien même si $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{(\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}} = \frac{1}{2} < 1$

$\implies \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ converge.

Rappel :

- Si $a_n \in \mathbb{R}$ est une suite, alors $\lim_{n\to\infty} sup(a_n) := \lim_{n\to\infty} sup_{k\geq n} a_k \in [-\infty, \infty] =$ le plus grand point d'a
- Si $\lim_{n\to\infty} a_n$ existe, alors $\lim_{n\to\infty} sup a_n = \lim_{n\to\infty} a_n$

Théorème (critère de racine) :

Soit $a_n \in \mathbb{C}$ une suite

- 1) Si $\lim_{n\to\infty} sup \sqrt[n]{|a_n|} < 1$ alors $\sum a_n$ converge absolument
- 2) Si $\lim_{n\to\infty} sup \sqrt[n]{|a_n|} > 1$, alors $\sum a_n$ diverge

Remarque

Si $\lim sup \sqrt[n]{|a_n|} = 1$, alors le critère ne dit rien

Preuve :

- 1) $\lim_{n\to\infty} sup \sqrt[n]{|a_n|} < q < 1$ en choisissant q.

  Pour la définition de lim sup, $\exists n_0, \forall n \geq n_0,\ \sqrt[n]{|a_n|} < q,$ c'est à dire $|a_n| < q^n \implies \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge (car

- 2) $\lim_{n\to\infty} sup \sqrt[n]{|a_n|} > q > 1$

  Par la définition de lim sup, il existe une infinité de $n \in \mathbb{N}$ tel que $\sqrt[n]{|a_n|} > q,$ c'est à dire $|a_n| >$ $q^n \implies$ on ne peut pas avoir $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge $\square$

Exemples :

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

  $\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{|x|}{\sqrt[n]{n!}} \to_{n\to\infty} 0 < 1$

  $\implies \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ converge.

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$

  $\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt[n]{n} \to_{n\to\infty} \frac{1}{2} < 1$

  $\implies \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ converge.

1.4 Critères de Leibniz et de Dirichlet

2 Critères pour la convergence non-absolue.

Théorème (critère de Leibniz)

Soit $b_n \in \mathbb{R}$ est une suite décroissante tel que $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$
Alors $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n$ converge.

Preuve :

On pose $s_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} b_k$
On a $s_0 \leq s_2 \leq s_4 \leq \cdots \leq s_5 \leq s_3 \leq s_1$
$\lim_{n\to\infty} s_{2n}$ existe (s_{2n} est croissante et bornée) aussi $\lim_{n\to\infty} s_{2n+1}$ existe.
On a aussi $\lim_{n\to\infty} s_{2n} = \lim_{n\to\infty} s_{2n+1},$ car $\lim_{n\to\infty}(s_{2n+1} - s_{2n}) = \lim_{n\to\infty} b_{2n+1} = 0$ par l'hypothèse $\implies$ la suite s_n converge $\square$

Exemple :

$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\cdots(=log2)$ converge mais ne converge pas absolument ($\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ ne converge pas)

Théorème (critère de Dirichlet) :

Soit $b_n \in \mathbb{R}$ une suite décroissante tel que $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$.
Soit $a_n \in \mathbb{C}$ une suite tel que $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ est bornée (c'est à dire $\exists C > 0$ tel que $|s_n| \leq C$)
Alors la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$ converge.

Remarque :

Si $a_n = (-1)^{n-1}$, Dirichlet devient Leibniz ($s_1 = 1, s_2 = 0, s_3 = 1, s_4 = 0\cdots$)

Preuve :

L'idée : sommation par parties. $s_0 = 0, s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$
$t_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot b_k = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{(s_k - s_{k-1})}_{a_k} \cdot b_k = s_n \cdot b_n + \sum_{k=1}^{n-1} s_k \cdot (b_k - b_{k+1})$
$\lim_{n\to\infty} s_n \cdot b_n = 0,$ car $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ est bornée et $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$
Donc $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n = \lim_{n\to\infty} t_n = \sum_{k=1}^{\infty} s_k \cdot (b_k - b_{k+1})$.
On va montrer que $\sum_{k=1}^{\infty} s_k \cdot (b_k - b_{k+1})$ converge
s_k est bornée, c'est à dire $\exists C > 0,$ tel que $|s_k| \leq C$ et la série $\sum_{k=1}^{\infty}(b_k - b_{k+1})$ converge
$\sum_{k=1}^{n}(b_k - b_{k+1}) = (b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + \cdots + (b_n - b_{n+1}) = b_1 - b_{n+1} \overset{n\to\infty}{\to} b_1$
On a donc :
$\sum_{k=1}^{\infty}(b_k - b_{k+1})$ converge, $b_k - b_{k+1} \geq 0$
$|s_k| \leq C \implies \sum_{k=1}^{\infty} s_k \cdot (b_k - b_{k+1})$ converge □

Exemple

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| = 1$ et $z \neq 1$
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$:
$a_n = z^n, b_n = \frac{1}{n}$
$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = z + z^2 + z^3 + \cdots + z^n = z \cdot \frac{1 - z^n}{1 - z}$
$|s_n| = \underbrace{|z|}_{=1} \cdot \frac{|1 - z^n|}{|1 - z|} \leq \frac{|1| + |z^n|}{|1 - z|} = \frac{z}{|1 - z|} =: C$

$\implies$ la suite s_n est bornée.
$\implies \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ converge.
$z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \cdots$
$\implies$ si $z = cos\alpha + i \cdot sin\alpha$
$z^n = cos(n\alpha) + isin(n\alpha) \implies \sum_{n=1}^{\infty} \frac{cos(n\alpha)}{n}$ converge $\implies Re(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n})$

1.5 Convergence absolue et convergence non-absolue

Rappel $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolument si $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge ($\implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge)

Théorème A

Supposons que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolument.
Soit $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une bijection (ici : $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots\}$)
Alors $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$
"si une série converge absolument, alors la somme ne dépend pas de l'ordre de la sommation".

Théorème B

Supposons que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge non-absolument ($\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \infty$), et supposons que $a_n \in \mathbb{R}(\forall n)$. Alors $\forall s \in \mathbb{R}, \exists$ bijection $\sigma_s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tel que $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma_s(n)} = s$. Aussi, $\exists \sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tel que $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ diverge.

Exemple :

$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \cdots = log(2)$ converge non-absolument.
Un autre ordre :

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \cdots$$

$$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \cdots = log(2)$$

$$+\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \cdots = \frac{log(2)}{2}$$

$$\implies 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \cdots = log(2) = \frac{3}{2}log(2)$$

Contradiction

Lemme :

Supposons que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

Alors $\lim_{N\to\infty} \sum\limits_{n=N+1}^{\infty} a_n = 0$

Preuve :

$\lim_{N\to\infty} : \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n - \sum\limits_{n=N+1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{N} a_n$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n - \lim_{N\to\infty} \sum\limits_{n=N+1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$

$\implies \lim_{N\to\infty} \sum\limits_{n=N+1}^{\infty} a_n = 0$ $\square$

Preuve du théorème A :

Posons $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_n, s'_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{\sigma(n)}$

Il faut montrer que $\lim_{n\to\infty} s'_n = \lim_{n\to\infty} s_n,$ c'est à dire que $\lim_{n\to\infty}(s'_n - s_n) = 0$

Posons $A_n = \{1, 2, 3, \cdots, n\}, B_n = \{\sigma(1), \sigma(2), \sigma(3), \cdots, \sigma(n)\}$

On a donc $s_n = \sum\limits_{k\in A_n} a_k$

$$s'_n = \sum_{k\in B_n} a_k \implies s'_n - s_n$$

$$= \sum_{k\in B_n} a_k - \sum_{k\in A_n} a_k$$

$$= \sum_{k\in B_n\setminus(A_n\cap B_n)} a_k - \sum_{k\in A_n\setminus(B_n\cap A_n)} a_k$$

$$\implies |s'_n - s_n| \underbrace{\leq}_{\substack{\text{par l'inégalité}\\\text{triangulaire}}} \sum_{k\in A_n\Delta B_n} |a_k|$$

Si N est donné, alors $\forall n$ suffisamment grand, on a $\{1, 2, \cdots, N\} \subset A_n \cap B_n$ et donc $|s'_n - s_n| \leq \sum\limits_{k\in A_n\Delta B_n} |a_k| \leq \sum\limits_{k=N+1}^{\infty} |a_k|$ car $\lim_{N\to\infty} \sum\limits_{k=N+1}^{\infty} |a_k| = 0,$ on a $\lim_{n\to\infty} |s'_n - s_n| = 0$ $\square$

Preuve du théorème B (indication)

On a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ qui converge, mais $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ diverge.

Soient $b_1, b_2, b_3, \cdots$ les $a_n \geq 0$ et $c_1, c_2, c_3, \cdots$ les $a_n < 0$

On a donc $\lim_{n\to\infty} b_n = 0, \lim_{n\to\infty} c_n = 0($ car $\lim_{n\to\infty} a_n = 0)$ et $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \infty, \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n = -\infty$

Pour construire $\sigma_s(s \in \mathbb{R})$:

Quand on dépasse s, on ajoute un c_i pour revenir en arrière, puis quand on redépasse s de l'autre côté, on ajoute b_i pour revenir de l'autre côté. À l'infini, un va tendre vers s.

1.6 Produit de séries et l'exponentielle complexe

Nous savons $\forall x \in \mathbb{C}$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}$ converge.
(par exemple, par le critère du quotient)

Théorème :

Si $x \in \mathbb{R}$, alors $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!} = exp(x)$

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = sin(x)$$

$$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots = cos(x)$$

Preuve :

Taylor-Lagrange :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{f^{(n+1)}(t_n x)}{(n+1)!} x^{n+1}$$

Si $f(x) = exp(x), (e^x)' = e^x \implies f^{(k)}(0) = 1 \; exp(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{x^k}{k!} + \underbrace{\dfrac{e^{t_n c}}{(n+1)!} x^{n+1}}_{=R_n(x)}$

$$|R_n(x)| \leq \frac{e^{|x|}}{(n+1)!} |x|^{n+1} \underset{n \to \infty}{\to} 0$$

$$\lim_{n \to \infty} R_n(x) = 0$$

$$\implies exp(x) = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

Pour $sin(x)$ et $cos(x) \implies$ exercice.

Définition :

Si $x \in \mathbb{C}$, alors $exp(x) := \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}$

Proposition :

Si $x \in \mathbb{R}$, alors $exp(ix) = cos(x) + i \cdot sin(x)$

Preuve :

$exp(ix) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(ix)^n}{n!} = 1 + \dfrac{ix}{1!} - \dfrac{x^2}{2!} - \dfrac{ix^3}{3!} + \dfrac{x^4}{4!} + \cdots = \left(1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \cdots\right) + i\left(x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \cdots\right) =$
$cos(x) + i \cdot sin(x)$ $\square$

On va montrer $\forall x, y \in \mathbb{C}, exp(x) \cdot exp(y) = exp(x+y)$

Définition :

Supposons que X est un ensemble dénombrable et que on a des nombres $a_x \in \mathbb{C}(\forall x \in X)$(c'est à dire $a : X \to \mathbb{C}$)

Si $\sigma : \mathbb{N} \to X$ est une bijection alors on pose :

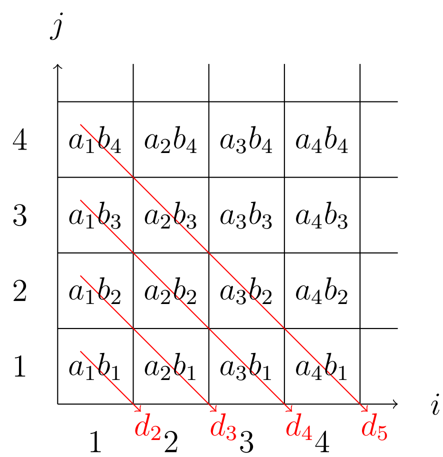
$$\sum_{x \in X} a_x = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} \text{ en supposant que } \sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} \text{ converge absolument}$$

(convergence absolue $\implies \sum\limits_{x \in X} a_x$ ne dépend pas de σ)

Théorème :

Si $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ et $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ convergent absolument, alors :

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{\infty} b_j\right) = \sum_{(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}} a_i b_j$$



Corollaire :

Si $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ et $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ convergent absolument et si $d_n := \sum\limits_{k=1}^{n-1} a_k b_{n-k}$, alors $\sum\limits_{n=1}^{\infty} d_n = \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\right)\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n\right)$

Preuve :

On sait que $\sum a_i \cdot \sum b_j = \sum\limits_{(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}} a_i \cdot b_j$ On doit choisir l'ordre de la sommation.

Exemple

Si $|x| < 1$, $\dfrac{1}{1-x} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$

Donc $\dfrac{1}{(1-x)^2} = \underbrace{\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n\right)}_{a_n = x_n} \underbrace{\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n\right)}_{b_n = x_n} \underbrace{=}_{corrolaire} \sum\limits_{n=0}^{\infty} d_n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$

$$d_n = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k = \sum_{k=0}^{n} x^{n-k} x^k = (n+1)x^n$$

Proposition

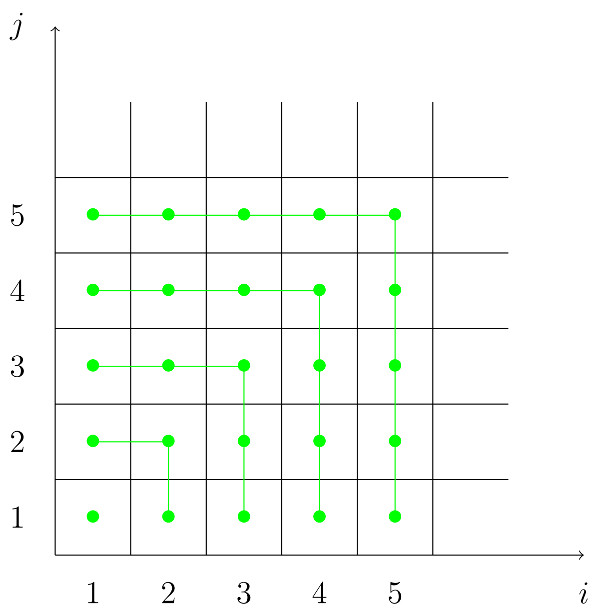
Si $x, y \in \mathbb{C},$ alors $(exp(x))(exp(y)) = exp(x+y)$
(Rappel : $exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$)

Preuve

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!}\right) (\star), a_n = \frac{x^n}{n!}, b_n = \frac{y^n}{n!}$$
$$d_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{n-k}}{(n-k)!}\frac{y^k}{k!} = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!k!} x^{n-k} y^k = \frac{1}{n!}(x+y)^n$$
Donc $(\star) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(x+y)^n = exp(x+y)$ □

Preuve du théorème

- $\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} a_i b_j$ converge absolument, c'est à dire $\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} |a_i b_j| < \infty$ On prend cet ordre de la sommation. Si $l \in \mathbb{N}$, alors la l^2-ième somme partielle est $\left(\sum_{i=1}^{l} |a_i|\right)\left(\sum_{j=1}^{l} |b_j|\right)$

  Cette somme partielle est $\leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|\right)\left(\sum_{j=1}^{\infty} |b_j|\right)$

  $\Longrightarrow$ la suite des sommes partielles (qui est croissante) converge.

- $\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{\infty} b_j\right) = \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} a_i b_j$:

On utilise le même ordre de sommation, la l^2-ième somme partielle est $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} b_j\right)$

$\lim_{l\to\infty} = \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{\infty} b_j\right)$

On a donc trouvé une sous-suite qui converge vers $\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{\infty} b_j\right)$ $(\star)$

La suite des sommes partielles converge (car on a une série qui converge même absolument) $\implies$ la limite est $(\star)$ $\square$

1.7 Résumé de la partie 1

- savoir faire : déterminer si une série converge ou pas Méthodes :
  - comparer avec $\sum q^n$ (critère du quotient et de la racine)
  - comparer avec $\sum \frac{1}{n^a}$
  - critères de Leibniz et de Dirichlet
- Théorie : $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ si la série converge absolument.
- produit de séries, $exp(x+y) = exp(x) \cdot exp(y)$

Théorème (Euler)

$\sum_{p \text{ premier}} \frac{1}{p} = \infty$

$\implies$ # des premiers est ∞, ou que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$, donc les premiers sont plus dense dans $\mathbb{N}$ que les carrés.

Preuve

L'idée :
$(*) = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots\right)\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \cdots\right)\left(1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} + \cdots\right)\cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$

$(*) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{3}} \cdots = \prod_{p \text{ premier}} \frac{1}{1-\frac{1}{p}} = \infty$

log : $\sum_{p \text{ premier}} -log(1 - \frac{1}{p}) = \infty$

ou que $\lim_{x\to 0} \frac{-2log(1-x)}{x} = 1$

on a aussi que $\sum_{p \text{ premier}} \frac{1}{p} = \infty$ avec beaucoup de travail

2 Suites et séries de fonction

Motivation : justifier les calculs

$|x| < 1, \dfrac{1}{1-x} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$

$\dfrac{1}{(1-x)^2} = \left(\dfrac{1}{1-x}\right)' = \left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n\right) =\overset{?}{=}$

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} (x^n)' = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n \cdot x^{n-1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$

$-log(1-t) = \displaystyle\int_0^t \frac{1}{1-x}\mathrm{d}x = \int_0^t \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right) \mathrm{d}x \overset{?}{=}$

$\overset{?}{=} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \displaystyle\int_0^t x^n \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n}$

2.1 Comparaison uniforme

Définition

Soient A un ensemble, et $f_n : A \implies \mathbb{R}($ ou $\mathbb{C}), n \in \mathbb{N}$ On dit que la suite $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ converge ponctuellement vers $f : A \implies \mathbb{R}($ ou $\mathbb{C})$ si $(\forall a \in A) \lim\limits_{n\to\infty} f_n(a) = f(n)$

Exemple

$F_n : \mathbb{R} \implies \mathbb{R}$

$f_n(x) = arctan(nx)$

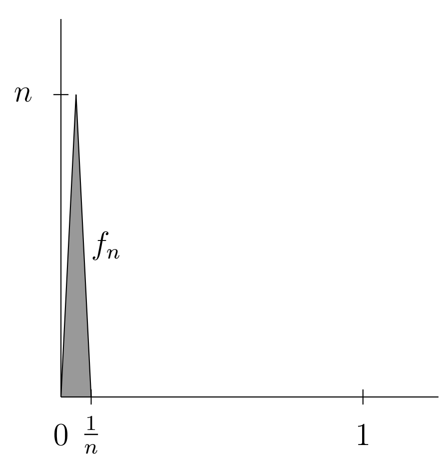
$$(*) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{matrix} \frac{\pi}{2}, x > 0 \\ 0, x = 0 \\ -\frac{\pi}{2}, x < 0 \end{matrix}$$

Alors f_n converge ponctuellement vers $f(x) = (*)$

Cette limite n'est pas continue.

Exemple

$f_n : [0,1] \implies \mathbb{R}$



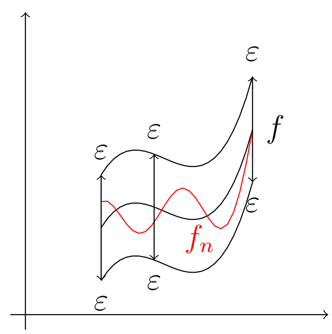
$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$
$\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$
$\implies \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \neq \int_0^1 \underbrace{\left(\lim_{n\to\infty} f(x)\right)}_{=0} \mathrm{d}x$

Notation

Pour $f : A \implies \mathbb{C}$, on pose $||f|| := sup_{a\in A} |f(x)|$ la norme de f.
Motivation : si $f, g : A \implies \mathbb{C}$, alors on va voir $||f - g||$ comme la "distance" entre f et g.

Définition

On dit que une suite de fonctions $f_n : A \implies \mathbb{C}$ converge uniformément vers $f : A \implies \mathbb{C}$ si $\lim_{n\to\infty} ||f_n - f|| = 0$
c'est à dire si :
$\forall\varepsilon > 0, \exists n_0, \forall n \geq n_0 ||f_n - f|| < \varepsilon$
Visualisation :



Proposition

Si $f_n \implies f$ uniformément, alors $f_n \implies f$ ponctuellement

Preuve

Si $a \in A$, alors $||f_n - f|| \geq |f_n(a) - f(a)|$
Donc si $\lim_{n\to\infty} ||f_n - f|| = 0$, alors aussi $\lim_{n\to\infty} |f_n(a) - f(a)| = 0$, c'est à dire $\lim_{n\to\infty} f_n(a) = f(a)$ □

Exemple

$f_n = \frac{sin(nx)}{n}, f_n : \mathbb{R} \implies \mathbb{R}$
Sait-on calculer $\lim_{n\to\infty} f_n$?
La limite ponctuelle est 0 car $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \forall x \in \mathbb{R}$
On a $f_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$ ponctuellement
Est-ce que $f_n \implies 0$ uniformément ?

$||f_n - 0|| = ||f_n|| = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\frac{sin(nx)}{n}\right| = \frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\Longrightarrow} 0$
$\Longrightarrow f_n \Longrightarrow 0$ uniformément
Image avec la fonction en triangle :
$f_n : [0,1] \Longrightarrow \mathbb{R}$
$f_n \Longrightarrow 0$ ponctuellement
$(\forall x \in [0,1]) \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ uniformément ?
$||f_n - 0|| = ||f_n|| = n \underset{n\to\infty}{\not\to}$
$\Longrightarrow$ la convergence n'est pas uniforme
$f_n(x) = arctan(nx), f_n : \mathbb{R} \Longrightarrow \mathbb{R}$
limite poncutelle :

$$f(x) = \begin{matrix} \frac{\pi}{2}, x > 0 \\ 0, x = 0 \\ \frac{-\pi}{2}, x < 0 \end{matrix}$$

$||f_n - f|| = \underbrace{x \in \mathbb{R}} sup\,|f_n(x) - f(x)| = \frac{\pi}{2}$ car la convergence n'est pas continue
$\Longrightarrow ||f_n - f|| \not\Longrightarrow 0$
$f_n \Longrightarrow f$ uniformément
$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0, \forall n \geq n_0, \forall a \in A |f_n(a) - f(a)| < \varepsilon$
convergence ponctuelle :
$\forall a \in A, \forall \varepsilon > 0, \exists n_0, \forall n \geq n_0, |f_n(a) - f(a)| < \varepsilon$ n_0 peut dépendre de a.

Théorème

Soient $A \subset \mathbb{R}($ ou $A \subset \mathbb{C})$ et $f_n : A \Longrightarrow \mathbb{R}($ ou $A \Longrightarrow \mathbb{C}), n = 1, 2, 3, \cdots$ Supposons que toute f_n est continue et que la suite $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ converge uniformément vers $f : A \Longrightarrow \mathbb{R}($ ou $A \Longrightarrow \mathbb{C})$. Alors f est continue.

Preuve

f est continue en $a \in A$ si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall a' \in A, |a' - a| < \delta \implies |f(a') - f(a)| < \varepsilon$$

$f_n \Longrightarrow f$ uniformément $\Longrightarrow \forall n$ suffisamment grand $||f_n - f|| < \frac{\varepsilon}{3}$
f_n est continue $\Longrightarrow \exists \delta > 0, \forall a' \in A, |a' - a| < \delta \implies |f_n(a') - f_n(a)| < \frac{\varepsilon}{3}(*)$
Il faut montrer : si $|a' - a| < \delta$, alors $|f(a') - f(a)| < \varepsilon$.
Mais $|f(a') - f(a)| = |(f(a') - f_n(a')) + (f_n(a') - f_n(a)) + (f_n(a) - f(a))| \underbrace{\leq}_{\text{inégalité triangulaire}}$

$\leq |f(a') - f_n(a')| + |f_n(a') - f_n(a)| + |f_n(a) - f(a)| \underbrace{\leq}_{\text{d'après }(*)} \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$ $\square$

2.2 Critères de la convergence uniforme

Théorème (Critère de Cauchy)

Toute suite de Cauchy converge uniformément.

Soit $f_n : A \implies \mathbb{C}$ une suite de fonctions tel que :

$$(\forall\varepsilon > 0), (\exists n_0), (\forall m, n \geq n_0), ||f_m - f_n|| \leq (*)\varepsilon$$

Une suite de Cauchy. Alors la suite $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ converge uniformément.

Preuve

- Convergence ponctuelle Si $a \in A$, alors $|f_m(a) - f_n(a)| \leq ||f_m - f_n||(\forall m, n)$ Vu que $(*)$, on a que la suite $(f_n(a))_{n=1}^{\infty}$ est de Cauchy.

  $$\Rightarrow (f_n(a))_{n=1}^{\infty} \text{ converge}$$

  et on pose $f(a) > \lim\limits_{n\to\infty} f_n(a)$

  On a donc une fonction $f : A \implies \mathbb{C}$ et $f_n \implies f$ ponctuellement

- $f_n \implies f$ uniformément : Nous savons que $(\exists n_0), (\forall m, n \geq n_0)||f_m - f_n|| \leq \varepsilon,$ en particulier $(\forall a)|f_m(a)$ $f_n(a)| \leq (+)\varepsilon$

  $\lim\limits_{n\to\infty} |f_m(a) - f_n(a)| = |f(a) - f_n(a)| \leq \varepsilon($ par $+$

  On a donc $(\forall a \in A), |f(a) - f_n(a)| \leq \varepsilon$ c'est à dire $||f - f_n|| \leq \varepsilon$ Cela implique que $f_n \implies f$ uniformément

Définition

Si $g_n : A \to \mathbb{C}$ on dit que $\sum\limits_{n=0}^{\infty} g_n$ converge uniformément si $\lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{n=0}^{N} g_n$ converge uniformément.

Propriété (inégalité triangulaire pour ||...||)

Si $f, g : A \to \mathbb{C}$ alors $||f + g|| \leq ||f|| + ||g||$

Preuve :

$(\forall a \in A) : |f(a) + g(a)| \leq |f(a)| + |g(a)| \leq ||f|| + ||g||$
on prend $\sup\limits_{a\in A} : ||f + g|| \leq ||f|| + ||g||$ □

Théorème (critère de Weierstrass)

Soit $g_n : A \to \mathbb{C}$ une suite de fonctions tel que $\sum\limits_{n=0}^{\infty} ||g_n|| < \infty$. Alors $\sum\limits_{n=0}^{\infty} g_n$ converge uniformément.

Preuve :

Posons $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} g_k (s_n : A \to \mathbb{C}), t_n = \sum\limits_{k=1}^{n} |g_k| (\in \mathbb{R})$

Si $m \geq n$, alors $||s_m - s_n|| = \left\| \sum\limits_{k=n+1}^{m} g_k \right\| \overset{\text{Proposition}}{\leq} \sum\limits_{k=n+1}^{m} ||g_k|| = t_m - t_n = |t_m - t_n|$

Par l'hypothèse, la suite $(t_n)_{n=1}^{\infty}$ converge.

$\implies$ elle est de Cauchy $\implies$ $|s_m - s_n| \leq |t_m - t_n|$ la suite $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ est de Cauchy $\implies$ (Critère de Cauchy) s_n converge uniformément. $\square$

Exemple :

$g_n(x) = \dfrac{sin(nx)}{n^2}$

$g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{sin(nx)}{n^2}$ converge uniformément

$||g_n|| = \sup\limits_{x \in \mathbb{R}} \left| \dfrac{sin(nx)}{n^2} \right| = \dfrac{1}{n^2}$

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} ||g_n|| = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{n^2} < \infty$

$\implies \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{sin(nx}{n^2}$ converge uniformément

$\implies f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{sin(nx)}{n^2}$ est une fonction continue

Corrolaire (forme alternative du critère de Weierstrass)

Si $g_n : A \to \mathbb{C}$ et $b_n \geq 0$ sont tel que :

$$(\forall a \in A), |g_n(a)| \leq b_n \text{ et si } \sum_{n=0}^{\infty} b_n < \infty, \text{ alors } \sum_{n=0}^{\infty} g_n \text{ converge uniformément}$$

Preuve :

$$||g_n|| \leq b_n \implies \sum_{n=0}^{\infty} ||g_n|| < \infty \square$$

2.3 Intégration et différentiation

Théorème

Soient $f_n : [a, b] \to \mathbb{C}$ des fonctions continues $(n = 1, 2, 3, \cdots)$

Si la suite des f_n converge uniformément, alors $\lim\limits_{n \to \infty} \displaystyle\int_a^b f_n(x) \mathrm{d}x = \int_a^b \lim\limits_{n \to \infty} f_n(x) \mathrm{d}x$

Version pour les séries : Si $\sum\limits_{n=0}^{\infty} g_n$ converge uniformément, alors

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b g_n(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \left(\sum_{n=0}^{\infty} g_n(x) \right) \mathrm{d}x$$

Preuve :

Posons $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$

On veut montrer $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x$

On a : $\left| \int_a^b (f(x) - f_n(x))\,\mathrm{d}x \right| \leq \int_a^b |f(x)-f_n(x)|\mathrm{d}x \leq (b-a)||f-f_n|| \underset{n\to\infty}{\to} 0($ converge uniformément $)$

$\implies \lim_{n\to\infty} \int_a^b (f(x) - f_n(x))\,\mathrm{d}x = 0$ □

Exemple

Si $|x| < 1$, alors :
$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ converge uniformément.
sur $[-q, q]$, si $0 \leq q \leq 1$, par Weierstrass, $||x^n|| \underset{\text{sur } [-q,q]}{=} q^n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$ converge.
Si $0 \leq t \leq q$:
$\int_0^t \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n \right) \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t x^n \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{n+1}}{n+1}$
$\int_0^t \frac{\mathrm{d}x}{1-x} = -log(1-t) \implies \forall t \in (-1, 1)$:
$-log(1-t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n}$

Remarque

Le même $(*)$ est vrai si $f_n \to f$ uniformément sur $[c, d]$ et $[a, b] \in [c, d]$ car la convergence uniforme sur $[c, d]$ implique la convergence uniforme sur $[a, b]$.

Question ?

Quand est-ce que :
$\lim_{n\to\infty} (f_n') = \left(\lim_{n\to\infty} f \right)'$?
La convergence uniforme n'est pas suffisante :

Exemples

- 1) $f_n(x) = \frac{sin(nx)}{n}$

  $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

  $\lim_{n\to\infty} f_n = 0$ par la convergence uniforme.

$\left(||f_n|| = \frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\to} 0\right)$

mais $f_n'(x) = cos(nx)$ ne converge pas

$\lim_{n\to\infty} f_n'$ n'existe pas

- 2) $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$

  $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

  $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\to} |x| = f(x)$ convergence uniforme.

  f n'est pas dérivable.

Théorème

Soient $f_n : [a, b] \to \mathbb{C}$ des fonctions de la classe C^1 (c'est à dire f_n' est continue).

Supposons que la suite $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ converge (ponctuellement) et que la suite $(f_n')_{n=1}^{\infty}$ converge uniformément.

Alors $\lim_{n\to\infty} f_n$ est de la classe C^1 et $\lim_{n\to\infty} (f_n') = \left(\lim_{n\to\infty} f_n\right)'$

Preuve

Posons $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ $g = \lim_{n\to\infty} f_n'$. Vu que f_n' sont continues et que $\lim_{n\to\infty} g$ converge uniformément, nous savons que g est continue.

Il faut montrer que $g = f'$.

Soient $t_0, t_1 \in [a, b]$

Alors $\int_{t_0}^{t_1} g(x)\mathrm{d}x = \int_{t_0}^{t_1} \lim_{n\to\infty} f_n'(x)\mathrm{d}x =$

$= \lim_{n\to\infty} \int_{t_0}^{t_1} f_n'(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} (f_n(t_1) - f_n(t_0))$

$= f(t_1) - f(t_0) \implies f$ est une fonction primitive de g, c'est à dire $f' = g$ $\square$

Pour les séries :

$\sum_{n=1}^{\infty} g_n' = \left(\sum_{n=1}^{\infty} g_n\right)'$

Si $\sum_{n=1}^{\infty} g_n$ converge et si $\sum_{n=1}^{\infty} g_n'$ converge uniformément.

Exemple

Si $x \in (-1, 1)$ alors $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$

On pose $g_n(x) = x^n, g_n'(x) = n \cdot x^{n-1}$

Est-ce que $\sum_{n=1}^{\infty} g_n' = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^{n-1}$ converge uniformément ?

Avec Weierstrass : soit q tel que $0 < q < 1$

Sur $[-q, q]$ on a :

$|n \cdot x^{n-1}| \leq n \cdot q^{n-1}$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} n \cdot q^{n-1}$ converge par le critère du quotient :
$\left(\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)q^n}{n \cdot q^{n-1}} = q \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{n} = q < 1\right)$
$\underset{\text{Weierstrass}}{\Longrightarrow} \sum\limits_{n=1}^{\infty} n \cdot x^{n-1}$ converge uniformément sur $[-q, q]$.
$\Longrightarrow \left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n\right)' = \sum\limits_{n=0}^{\infty} n \cdot x^{n-1}$
$(\forall x) \in [-q, q]$
$\Longrightarrow$ vrai $\forall x \in (-1, 1)$
$\dfrac{1}{(1-x)^2} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n \cdot x^{n-1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (n-1)x^n$

2.4 Séries entières

Série entière : série de la forme $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$

Par exemple :

- $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n = \dfrac{1}{1-x} \forall x$ tel que $|x| < 1$
- $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = exp(x) \forall x$
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n} = -log(1-x)$

Proposition

Soit $x_n \in \mathbb{C}$ tel que $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ converge.

Alors $\forall x \in \mathbb{C}$ tel que $|x| < |x_0|$ la série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ converge et la convergence est uniforme sur le disque.

$D_q := \{x \in \mathbb{C} \Big| |x| \leq q\}$ pour tout q tel que $q < |x_0|$

Preuve

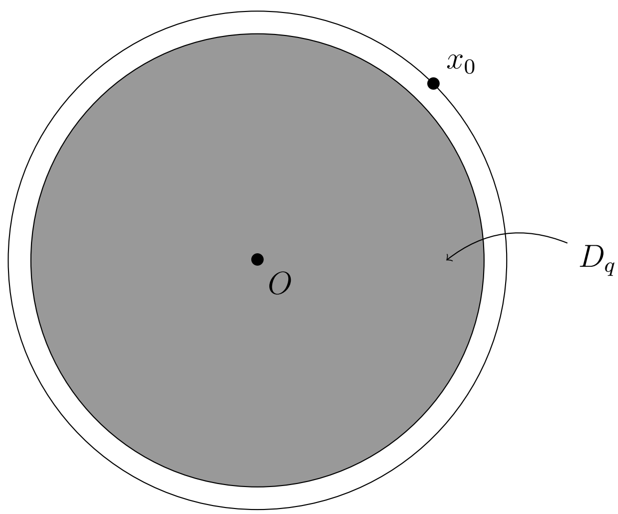
$\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x_0^n$ converge
$\Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} c_n x_0^n = 0$
$\Longrightarrow \exists C > 0$ tel que $|c_n x_0^n| \leq C \quad \forall n$
Si $|x| < |x_0|$, alors
$|c_n \cdot x^n| = |c_n \cdot x_0^n| \cdot |\dfrac{x}{x_0}|^n \underset{(*)}{\leq} C \cdot \left|\dfrac{x}{x_0}\right|^n, \left|\dfrac{x}{x_0}\right| < 1$
$\Longrightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left|\dfrac{x}{x_0}\right| < \infty$
$\underset{par(*)}{\Longrightarrow} \sum\limits_{n=0}^{\infty} |c_n x^n| < \infty$

c'est à dire $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ converge absolument par la convergence uniforme. On utilise Weierstrass :
$\sup_{x \in D_q} |c_n x^n| = |c_n| \cdot |x|^n = |c_n| \cdot q^n$
$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| \cdot q^n < \infty$ (car $q < |x_0|$)
et donc $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ converge uniformément sur D_q $\square$

Théorème

Si $c_0, c_1, c_2, \dots \in \mathbb{C}$, alors $R \in [0, \infty]$ tel que $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ $\begin{matrix} \text{converge absolument si } |x| < R \\ \text{diverge si } |x| > R \end{matrix}$

Si $q < R$, alors $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ converge uniformément sur D_q.



Preuve

On pose $R = \sup\{x \in \mathbb{C} \Big| \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \text{ converge }\}$ et on utilise la proposition précédente $\square$.

R est le <u>rayon de la convergence</u> de la série $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$

Théorème

- (1) $R = \dfrac{1}{\limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|C_n|}}$
- (2) $R = \lim_{n \to \infty} \left| \dfrac{c_n}{c_{n+1}} \right|$ si cette limite existe.

Preuve

- Critère de la racine :

  Posons $a_n = c_n x^n$. Par :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad \begin{array}{c} \text{converge si } \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n x^n|} < 1 \\ \text{diverge si } \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n x^n|} > 1 \end{array}$$

Mais $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n x^n|} = |x| \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}$

Et donc si $|x| < \dfrac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}}$ la série converge et si $|x| > \dfrac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}} \to$ diverge

- Avec le critère du quotient : Si $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|c_{n+1}x^{n+1}|}{|c_n x^n|} < 1$ alors $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ converge.

  Si $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|c_{n+1}x^{n+1}|}{|c_n x^n|} > 1$ alors $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ diverge.

  Car $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|c_{n+1}x^{n+1}|}{|c_n x^n|} = |x| \lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{c_{n+1}}{c_n}\right|$

On a donc :
$|x| \lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{c_{n+1}}{c_n}\right| < 1 \implies$ converge
$|x| \lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{c_{n+1}}{c_n}\right| > 1 \implies$ diverge
c'est à dire $|x| < \lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{c_n}{c_{n+1}}\right| \implies$ converge
$|x| > \lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{c_n}{c_{n+1}}\right| \implies$ diverge

Exemple

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} n^2 x^n$
$c_n = n^2$
$R = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{c_n}{c_{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{(n+1)^2} = 1$
À partir de maintenant : $x \in \mathbb{R}$:

Théorème

Si la rayon de la convergence de $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ est R, alors le rayon de la convergence $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n \cdot n \cdot x^{n-1}$ est aussi R.
et $\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n\right)' = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n \cdot n \cdot x^{n-1} \forall x \in (-R, R)$

Preuve

La fonction $f : (-R, R) \to \mathbb{C}, f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$

et f est infiniment dérivable (C^∞) et $c_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$

Preuve

La rayon R' de la convergence de $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n \cdot n \cdot x^{n-1}$ est le même que pour $x \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n \cdot n \cdot x^{n-1} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n \cdot n \cdot x^n$ et donc :

$$R' = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n \cdot n|}} = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}} = 1$$
$$= \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}} = R$$

c'est à dire $R' = R$

Rappel

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} (g_n') = \left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} g_n\right)'$ si

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} (g_n')$ converge uniformément et si $\sum\limits_{n=0}^{\infty} g_n$ converge.

On pose $g_n(x) = c_n x^n, g_n'(x) = n \cdot c_n \cdot x^{n-1}$

Choisissons q tel que $0 \leq q \leq R$

$\implies \sum\limits_{n=0}^{\infty} g_n'$ et $\sum\limits_{n=0}^{\infty} g_n$ converge uniformément sur $[-q, q]$

$\implies \sum\limits_{n=0}^{\infty} g_n' = \left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} g_n\right)'$ sur $[-q.q] (\forall q < R)$

$\implies \sum\limits_{n=0}^{\infty} g_n' = \left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} g_n\right)'$ sur $(-R, R)$

On a donc $\forall x \in (-R, R)$:

$\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n\right)' = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n \cdot n \cdot x^{n-1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_{n+1} \cdot (n+1) \cdot x^n \leftarrow$ une série entière avec le même rayon de convergence. R.

$\implies \left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_{n+1} \cdot (n+1) \cdot x^n\right)' = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_{n+2} \cdot (n+2) \cdot (n+1) \cdot x^n$ et c.

$\implies f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ est C^{∞} sur $(-R, R)$

Si on calcule :

$f^{(n)}(0) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \left(c_k x^k\right)^{(n)} |_{x=0} = c_n \cdot (x^n)^{(n)} |_{x=0} = c_n \cdot n!$

$\implies c_n = \dfrac{f^{(n)}(n)}{n!}$ □

Théorème

Si $t \in (-R, R)$, alors

$$\int_0^t \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n\right) \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \int_0^t x^n \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{t^{n+1}}{n+1}$$

Preuve

Convergence uniforme $\square$

Exemples

- $exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ $R = \infty$

  $\left(\frac{x^n}{n!}\right)' = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$

  $\implies (exp(x))' = exp(x)$

  $x \in \mathbb{C}$

  $exp(\lambda x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n x^n}{n!}$

  $\left(\frac{\lambda^n x^n}{n!}\right)' = \frac{\lambda^n x^{n-1}}{(n-1)!} = \lambda \frac{\lambda^{n-1} x^{n-1}}{(n-1)!}$

  $\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n x^n}{n!}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda \frac{\lambda^{n-1} x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda \frac{\lambda^n x^n}{n!} = \lambda exp(\lambda x) = (exp(\lambda x))'$

- $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, R = 1$

  $t \in (-R, R) = (-1, 1)$

  $-log(1-t) = \int_0^t \frac{\mathrm{d}x}{1-x} = \int_0^t \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right) \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t x^n \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n} = -log(1-t) \forall t \in (-1, 1)$

Remarque

Pour $t = -1$, on n'a rien démontré mais
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ converge, en fait $= -log(2)$.
C'est vrai par le critère de Leibniz, mais il faut le montrer.
$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \cdots$
Cette série converge si et seulement si $|x| < 1 \implies R = 1$
$\forall t \in (-1, 1)$
$= (arctan(t)) = \int_0^t \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} + \cdots (*)$
La série $(*)$ converge aussi pour $t = 1$ (et $t = -1$)
$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$ (par Leibniz)
En fait, c'est égal à $arctan(1) = \frac{\pi}{4}$ mais il faut le montrer car $1 \notin (-1, 1)$

Théorème (Abel)

Supposons que
$(*) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ converge pour $x = x_0 \in \mathbb{R}$
Alors la convergence de $(*)$ est uniforme sur $[0, x_0]$(si $x_0 \geq 0$) ou sur $[x_0, 0]$(si $x_0 \leq 0$)
En particulier, la fonction $(*)$ est continue sur $[0, x_0]$ (ou sur $[x_0, 0]$ si $x_0 \leq 0$) et donc :
$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \lim_{x \to x_0} \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$

Exemples

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -log(1-x) \forall |x| < 1$
$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \overset{Abel}{=} \lim_{\to -1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \lim_{x \to -1} -log(1-x) = -log(2)$
Pareil $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \lim_{x \to 1} arctan(x) = arctan(1) = \frac{\pi}{4}$

Preuve du théorème de Abel

Quelques simplifications :
Sans perte de généralité, on peut supposer que :

- $x_0 = 1$ car $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot x_0^n \left(\frac{x}{x_0}\right)^n$
- Si $x_0 = 1$, on peut supposer que $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = 0$ $\left(\text{ pour cela, on remplace } c_0 \text{ par } -\sum_{n=1}^{\infty} c_n\right)$

L'idée de la preuve : sommation par parties.
On pose $s_n = \sum_{k=0}^{n} c_k$(et $s_{-1} = 0$
Donc $c_n = s_n - s_{n-1}$, $\lim_{n \to \infty} s_n = 0$
On a $\sum_{k=0}^{n} c_k x^k = \sum_{k=0}^{n} (s_k - s_{k-1}) x^k = s_n x^n + \sum_{k=0}^{n-1} s_k (x^k - x^{k+1})$
Vu que si $\underset{n \to \infty}{\to}$, on a
$s_n x^n \to 0$ uniformément sur [0,1] car $||s_n x^n|| = |s_n| \to 0$
Donc il faut montrer que
$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} s_k (x^k x^{k+1})$ est unifome sur [0,1), c'est à dire que :
$\sum_{k=0}^{\infty} s_k (x^k - x^{k+1})$ converge uniformément
À montrer :
$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} s_k x^k (1-x) \underset{n \to \infty}{\to} \sum_{k=0}^{\infty} s_k x^k (1-x) = f(x)$ uniformément sur [0,1] en utilisant que $\lim_{k \to \infty} s_k = 0$
Il faut donc montrer que $\lim_{n \to \infty} ||f - f_n|| = 0$

$$|f(x) - f_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} s_k x^k (1-x)\right| = |1-x| \cdot \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} s_k x^k\right| \leq |1-x| \cdot \underset{k\geq n+1}{sup} |s_k| \cdot \sum_{k=n+1}^{\infty} x^k =$$
$$(1-x) \cdot \underset{k\geq n+1}{sup} |s_k| \frac{x^{n+1}}{1-x} = x^{n+1} \cdot \underset{k\geq n+1}{sup} |s_k| \leq \underset{k\geq n+1}{sup} |s_k|$$

Donc $\forall x \in [0,1]$, on a $|f(x) - f_n(x)| \leq \underset{k\geq n+1}{sup} |s_k|$

C'est à dire $||f - f_n|| \leq \underset{k\geq n+1}{sup} |s_k|$

Finalement,

$\lim\limits_{n\to\infty} \underset{k\geq n+1}{sup} |s_k| = \limsup\limits_{n\to\infty} |s_k| = \lim\limits_{n\to\infty} |s_k| = 0$

$\implies ||f - f_n|| \underset{n\to\infty}{\to} 0$ $\square$

2.5 Séries de Taylor

Rappel

Si R est le rayon de convergence de $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, alors f est C^∞ sur $(-R, R)$ et $c_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$

Définitions

Soit $f : (-a, a) \to \mathbb{R}($ ou $\to \mathbb{C})$ une fonction C^∞. Alors la série de Taylor de f est la série entière :

$(*) \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$

Question

Est-ce que $(*)$ converge vers f ? Pour quels $x \in (-a, a)$?

Contre-exemples

- $\exists f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} C^\infty$ tel que sa série de Taylor ne converge que pour $x = 0$ (c'est à dire le rayon de convergence est 0).
- $f(x) = \begin{cases} exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$ $\quad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$est C^∞ et $f^{(n)}(0) = 0 \forall n$ (exercice)

  $\implies$ la série de Taylor est $0 \neq f(x)$ pour le comprendre : Analyse Complexe.

Exemples positifs

$\dfrac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad \forall x \in (-1, 1)$

$exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!} \forall x$

Résumé de la partie 2

Déterminer si une suite ou une série de fonctions converge uniformémement ou pas.
Méthodes :

- de la définition
- critère de Weierstrass

À quoi ça sert :

- montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} f_n$ est continue
- $\left(\lim\limits_{n\to\infty} f_n\right)' = \lim\limits_{n\to\infty} f_n'$
- $\displaystyle\int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x$

Cas particuliers, séries entières :

- rayon de la convergence
- on peut échanger $\sum$ avec la dérivée ou avec l'intégrale

3 Espaces métriques

Motivation

- préparation pour les fonctions à plusieurs variables
- mieux comprendre la convergence uniforme
- "une grande généralisation"

3.1 Métriques et normes

Définition

Si X est un ensemble, alors une métrique sur X est une fonction de $X \times X \to [0, \infty)$ tel que $\forall x, y, z \in X$:

- $d(x, y) = 0$ si $x = y$
- $d(x, y) = d(y, x)$
- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

Un espace métrique est un ensemble avec une métrique.

Exemples

- si (X, d) est un espace métrique, et si $Y \subset X$, alors $(Y, d|_{Y \times Y})$ est aussi un espace métrique.
- $X = \mathbb{R}, d(x, y) = |x - y|$ $(x, y \in \mathbb{R})$
- $X = \mathbb{C}, d(x, y) = |x - y|$
- $X = \mathbb{R}^n, d(x, y) = \sqrt{(x - y) \cdot (x - y)}$où $\cdot$ représente le produit scalaire.

Définition

Soit V un espace vectoriel réel (ou complexe). Une norme sur V est une fonction $|| \cdot || : V \to [0, \infty)$ tel que $\forall u, v \in V, \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad ($ ou $\mathbb{C})$:

- $||v|| = 0$ si et seulement si $v = 0$
- $||\lambda v|| = |\lambda| \quad ||v||$
- $||u + v|| \leq ||u|| + ||v||$

Exemple

$V = \mathbb{R}^n, ||v|| = \sqrt{v \cdot v}$

Proposition

Si $|| \cdot ||$ est une norme sur V, alors $d(u, v) = ||u - v||$ est une métrique sur V.

Preuve

$d(u,v) = ||u-v|| = 0$ si et seulement si $u - v = 0$ si et seulement si $u = v$
$d(u,v) = ||v-u|| = ||(-1)(u-v)|| = ||u-v|| = d(u.v)$
$d(u,w) = ||u-w|| = ||(u-v)+(v-w)|| \leq ||u-v|| + ||v-w|| = d(u,v) + d(v,w)$ $\square$

Terminologie

Un espace vectoriel muni d'une norme est appelé un espace normé.

Exemples

- $V = \mathbb{R}^n, v = (v_1, \cdots, v_n)$ $||v||_2 := \sqrt{v \cdot v} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} v_i^2}$
- $V = \mathbb{R}^n$
  $||v||_1 = \sum_{i=1}^{n} |v_i|$
- $V = \mathbb{R}^n$
  $||v||_\infty = \underset{i=1,\cdots n}{max} ||v_i||$
- si A est un ensemble,
  $V = B(A) : \{f : a \rightarrow \underset{(\text{ ou } \mathbb{C})}{\mathbb{R}} | f \text{ est bornée } \}$
  si $f \in V$, on pose :
  $||f||_\infty = \underset{a \in A}{sup} |f(a)|$ (on utilise la norme dans la convergence uniforme).
  $a < b \in \mathbb{R}$
  $V = C([a.b])$
  $||f||_\infty = \underset{x \in [a,b]}{max} |f(x)|$
  $||f||_1 = \int_a^b |f(x)| \mathrm{d}x$
  $||f||_2 = \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2 \mathrm{d}x}$

3.2 Fonctions continues

Définition

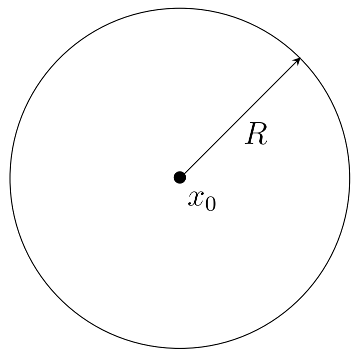
Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) des espaces métriques.
Une application $f : X \rightarrow Y$ est continue en $x_0 \in X$ si :
$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in X, (d_X(x, x_0) < \delta \implies d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$

Définition

Si (X, d) est un espace métrique, $x_0 \in X, R \in (0, \infty)$, alors la boule ouverte de rayon R centrée en x_0 est $B_X(x_0, R) := \{x \in X | d(x, x_0) < R\}$

Exemples

- $X = \mathbb{R}, x_0 \in \mathbb{R}$
  $B_{\mathbb{R}}(x_0, R) = (x_0 - R, x_0 + R)$
- $X = \mathbb{R}^2$

$B_{\mathbb{R}^2}(x_0, R) =$ 

On a donc $f : X \to Y$ est continue en $x_0 \in X$ si et seulement si :
$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, (f(B_X(x_0, \delta)) \subset B_Y(f(x_0), \varepsilon))$ + dessin

Théorème

Si $f : X \to Y$ est continue et si $g : Y \to Z$ est continu, alors $g \circ f : X \to Z$ est aussi continue.

Preuve

Soit $x_0 \in X$,on pose $y_0 := f(x_0), z_0 := g(y_0)$
Par l'hypothèse : g est continue, donc : $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, g(B_Y(Y_0, \delta)) < 0 \subset B_Z(z_0, \varepsilon)$.
Mais f est aussi continue, donc : $\forall \delta' > 0, f(B_X(x_0, \delta')) \subset B_Y(y_0, \delta)$
Donc $g(f(B_X(x_0, \delta'))) \subset B_Z(z_0, \varepsilon)$
$\implies g \circ f$ est continue. $\square$

Remarque

Si $f, g : X \to \mathbb{R}$ sont continues, alors $f + g, fg : X \to \mathbb{R}$ sont continues.

Preuve

Voir semestre 1 $\square$

Définition

Une fonction $f : X \to Y$ est Lipschitzienne si $\exists C > 0$ tel que $\forall x, x' \in X$ on a $d_Y(f(x), f(x')) \leq C d_X(x, x')$

Proposition

Si f est Lipschitzienne , alors elle est continue.

Preuve

On peut poser $\delta = \dfrac{\varepsilon}{C}$ $\square$

Remarque

Si V, W sont des espaces métriques normés et $f : V \to W$ est linéaire, alors f est Lipschitzienne si et seulement si $\exists C > 0$, tel que $\forall v \in V$, $||f(v)||_W \leq C||v||$

Preuve

$v_1, v_2 \in V$ et $v = v_1 + v_2$
$d_W(f(v_1), f(v_2)) = ||f(v_1) - f(v_2)||_W = ||f(v_1 - v_2)||_W \leq C||v_1 - v_2||_V$ $\square$

Exemples

- $p_i : \begin{cases} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ (x_1, \cdots, x_n) \to \underset{(1 \leq i \leq n)}{x_i} \end{cases}$

  $p_i$est linéaire et

  $||p_i(x)|| = |x_i| \leq \sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2}$, c'est à dire p_i est Lipschitzienne avec $C = 1$

  $\implies p_i$ est continue

- (si on utilise la proposition $f + g, fg$), tout polynôme est une fonction continue de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.

  par exemple : $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

  $(x_1, x_2, x_3) \to 3x_1x_2 + x_3^2$

- (on peut composer des fonctions continues)

  par exemple : $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

  $f(x_1, x_2, x_3) = sin\left(x_1x_2 + e^{x_1 + x_2^2}\right)$

- $X = C([a, b])$ avec $|| \cdot ||_\infty$

  $I : X \to \mathbb{R}$, $I(f) = \displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

  I est une fonction linéaire et elle est Lipschitzienne :

  $|I(f)| = \left|\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leq \displaystyle\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x \leq (b-a)\underset{x\in[a,b]}{max}|f(x)| \underset{C=b-a}{=} (b-a) \cdot ||f||_\infty$

  $\implies I$ est continue

Quelle norme à utiliser sur $\mathbb{R}^n$?
(n'importe quelle)

Définition

Deux normes $||\cdot||$ et $||*||$ sur V sont <u>équivalentes</u> si $\exists C_1, C_2 > 0$ tel que $\forall v \in V, ||v|| = C_1||*||$ et $||*|| \leq C_2||v||$
i.e : $||\cdot||$et $||*||$ sont équivalentes si et seulement si $id_V : (V, ||\cdot||) \to (V, ||*||)$
$id_V : (V, ||*||) \to (V, ||\cdot||)$ sont Lipschitzienne.

Proposition

Des normes équivalentes donnent les mêmes notions de la continuité, c'est à dire. Si $||\cdot||$ et $||*||$ sur V équivalentes, si X est un espace métrique, et si
$f : X \to V$ et $g : V \to X$ sont des fonctions, alors f est continue $X \to (V, ||\cdot||)$ si et seulement si f est continue $X \to (V, ||*||)$. Similairement pour g.

Preuve

$X \stackrel{f \text{ continue}}{\to} (V, ||\cdot||) \stackrel{id_V \text{ continue}}{\to} (V, ||*||)$ et la composition de fonctions continues est continue.
$\square$
Plus tard, on va montrer : toutes les normes sur $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes.

Proposition

Les normes $||\cdot||_1, ||\cdot||_2, \cdots, ||\cdot||_\infty$ sur $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes.

Preuve

Si $x \in \mathbb{R}^n, x = (x_1, \cdots, x_n)$
$||x||_1 = \sum |x_i|, ||x||_2 = \left(\sum x_i^2) \frac{1}{2} \right)$
$||x||_\infty = \underset{1 \leq i \leq n}{max} |x_i|$

- $||x||_\infty \leq ||x||_1$ évident
- $||x||_\infty \leq ||x||_2$ évident
- $||x||_1 \leq n||x||_\infty$
- $||x||_2 \leq \sqrt{n}||x||_\infty$

$\square$

3.3 Limites de suites

Définition

Si $(X, 1)$ est un espace métrique, si $(x_1)_{n=1}\infty$ est une suite d'éléments de X, et si $x \in X$, alors on dit que :

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x$$

si et seulement si $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$

Exemples

- $X = R$, $d(x, y) = |x - y|$ La définition classique de la limite
- A un ensemble, $X = B(A) = \{f : A \to \mathbb{R} | f \text{ est bornée } \}$, d donnée par $|| \cdot ||_\infty (||f||_\infty = {}_{a\in A}|f(a)|)$
  Si $f_n \in B(A), (n = 1, 2, 3, \cdots), f \in B(A)$ alors $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ si et seulement si $\lim\limits_{n\to\infty} ||f - f_n||_\infty = 0$ et ça c'est si et seulement si $f_n \to f$ uniformément.

Proposition

Soient X, Y des espaces métriques et $f : X \to Y$ une application. Alors f est continue en $x \in X$ si et seulement si $\forall$ suite $(x_n)_{n=1}^\infty$ dans X tel que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, on a :

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$$

Preuve

Voir semestre 1 $\square$

Exemple

$X = C([a, b])$ avec $|| \cdot ||_\infty, Y = R$, on a vu que $\begin{matrix} I : X \to \mathbb{R} \\ I(f) := \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \end{matrix}$ est continue $\implies$ si $f_n \to f$ dans X, c'est à dire si $f_n \to f$ uniformément, alors $\lim\limits_{n\to\infty} I(f_n) = I(f)$

Rappel

$|| \cdot ||$ et $|| * ||$ sur V sont équivalentes si $\exists C_1, C_2 > 0$ tel que $||v||^\cdot \leq C_1 ||v||^*$ et $||v||^* \leq C_2 ||v||^\cdot$

Proposition

Si $|| \cdot ||$ et $|| * ||$ sur V sont équivalentes et si x_n est une suite dans V, alors :

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x(1)$$

par rapport à $|| \cdot ||$ si et seulement si

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x(2)$$

par rapport à $||*||$.

Preuve

$$(1) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} ||x_n - x||^{\cdot} = 0$$

$$\Longleftrightarrow \text{ par la définition d'équivalence de normes}$$

$$(2) \Longleftrightarrow ||x_n - x||^{*} = 0$$

$\square$

Rappel

Les normes $||\cdot||_1, ||\cdot||_2, \cdot, ||\cdot||_\infty$ sont équivalentes sur $\mathbb{R}^n$

Proposition

Soit $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ une suite dans $\mathbb{R}^k, x_n = (x_{n_1}, x_{n_2}, \cdots, x_n n_k), (x_{n_i} \in \mathbb{R})$.Alors :

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \in \mathbb{R}^k$$

$a = (a_1, a_2, \cdots, a_k)$ si et seulement si :

$$\lim_{n\to\infty} x_{n_i} = a_i \quad \forall i = 1, 2 \cdots, k$$

Preuve

Utilisons la norme $||\cdot||_1$
$\left(||a||_1 = \sum_{k=1}^{n} |a_i|\right)$ On a donc $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ si et seulement si $\lim_{n\to\infty} ||x_n - a|| = 0$ si et seulement si $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} |x_{n_i} - a_i| = 0$ si et seulement si $\forall i, \lim_{n\to\infty} |x_{n_i} - a_i| = 0$ $\square$

Proposition

Soit X un espace métrique et $f : X \to \mathbb{R}^k$ une fonction.
Autrement dit, on a k fonctions $f_1, \cdots, f_k : X \to \mathbb{R}(f(x) = (f_1(X), \cdots, f_k(x))\forall x \in X$
Alors f est continue si et seulement si f_i est continue $\forall i = 1, 2, \cdots, k$

Preuve

f est continue si et seulement si $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to\infty} x_n)$ (pour toute suite $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ convergente dans X)

$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x) \quad (x = \lim_{n\to\infty} x_n)$ si et seulement si $\lim_{n\to\infty} f_i(x_n) = f_i(x)$(par la proposition précédente) si et seulement si les f_i sont continues. $\square$

3.4 Sous-ensembles ouverts et fermés

Rappel

- X est un espace métrique
- $x \in X$ est un élément de l'espace métrique
- $R > 0$ est le rayon de la boule

La boule ouverte $B_X(x, R) := \{y \in X | d(x, y) < R\}$

Définition

Soit X un espace métrique. Alors un sous-ensemble $U \subset X$ est <u>ouvert</u> si :

$$\forall x \in U, \exists \varepsilon > 0, B_X(x, \varepsilon) \subset U.$$

On dit que $U \subset X$ set <u>fermé</u> si $X \backslash U \subset X$ est ouvert.

Exemples

- $X = \mathbb{R}^2$, un triangle $T \subset\in \mathbb{R}^2$ est un fermé, mais pas ouvert.
- $X = R$, $x \in (a, b) \subset \mathbb{R}$ est ouvert mais pas fermé.
- $[a, b] \subset \mathbb{R}$ est fermé mais pas ouvert.
- $(-\infty, a] \subset \mathbb{R}$ est fermé car son complément (a, ∞) est ouvert.
- $(-\infty, \infty) = \mathbb{R} \subset \mathbb{R}$ est ouvert mais aussi fermé car son complément $\mathbb{R}\backslash\mathbb{R} = \emptyset \subset \mathbb{R}$ est ouvert et fermé également.
- $(a, b]$ est ni ouvert ni fermé.

Proposition

Si $x \in X$, $R > 0$, alors $B(x, R) \subset X$ est un sous-espace ouvert.

Preuve

Si $x' \in B(x, R)$ alors $d(x, x') < R$. Montrons que $y \in B(x', R - d(x, x')) \subset B(x, R)$ si et seulement si $d(y, x') < R - d(x, x')$. Il faut montrer que $d(x, y) < R$.

On a $d(x, y) \leq d(x, x') + d(x', y) < d(x, x') + R - d(x, x') = R$ $\square$

Théorème

$f : x \to Y$ est continue si et seulement si $\forall U \subset Y$ ouvert la préimage $f^{-1}(U) \subset X$ est ouvert

Notation

$f^{(-1)}(U) := \{x \in X | f(x) \in U\}$

Preuve

Rappel : f est continue en $x\ inX$ si et seulement si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, f(B_X(x,\delta) \subset B_Y(f_x), \varepsilon) \Longleftrightarrow B_X(x,\delta) \subset f^{(-1)}(B_Y(f(x),\varepsilon)$

$\Longrightarrow$: Supposons que f est continue. Soit $U \subset Y$ un sous-ensemble ouvert. Il faut montrer que $f^{(-1)}(U) \subset X$ est ouvert, c'est à dire : $\forall x \in f^{(-1)}(U), \exists \delta > 0$ tel que $B_X(x,\delta) \subset f^{(-1)}(U)$

Mais : $U \subset Y$ est ouvert.

$\Longrightarrow\ \exists \varepsilon > 0$ tel que $B_Y(f(x),\varepsilon) \subset U$

Car f est continu, $\exists \delta > 0$, tel que $B_X(x,\delta) \subset f^{(-1)}(B_Y/f(x),\varepsilon) \subset f^{(-1)}(U)$

$\Longleftarrow$: Supposons $\forall U \subset Y$ ouvert.

$f^{(1)}(U) \subset X$ est ouvert. Il faut montrer que f est continue.

Si $x \in X, y := f(x) \subset Y$ Si $\varepsilon > 0$, alors $B_Y(y,\varepsilon) =: U$ est ouvert.

Donc $f^{(-1)}(B_Y(y,\varepsilon)) \subset X$ est ouvert, donc $\exists \delta > 0$, tel que $B_X(x,\delta) \subset f^{(-1)}(B_Y(y,\varepsilon))$ donc f est continue. $\square$

Corrollaire

$f : X \to Y$ continue si et seulement si $\forall S \subset Y$ fermé, $f^{(-1)}(S) \subset X$ est fermé.

Preuve

$f^{(-1)}(Y \backslash S) = X \backslash f^{(-1)}(S)$ $\square$

Exemples

- $\begin{array}{c} f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ (x_1,x_2,x_3) \to exp(x, sinx_2) + x_1x_3 \end{array}$ est continue.

  $(0,\infty) = U \subset \mathbb{R}$ un sous-espace ouvert. Alors $f^{(-1)}(U)$ est ouvert $\subset \mathbb{R}^3$

  $f^{(-1)}(U) = \{(x_1,x_2,x_3) | f(x_1,x_2,x_3) \begin{array}{l} > 0 \text{ ouvert} \\ \geq 0 \text{ fermé} \end{array} \}$

- $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = xy$

  $f^{(-1)} \begin{array}{l} ((-\infty,1]) = \{(x,y) | xy \leq 1\} \text{ est fermé} \\ ((-\infty,1)) = \{(x,y) | xy < 1\} \text{ est ouvert} \end{array}$

Théorème

Soit X un espace métrique, $U_\alpha \subset X$ des sous-ensembles, $\alpha \in A$ (A un ensemble, peut être infini). Alors $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \subset X$ set ouvert.

Si $U_1, \cdots, U_n \subset X$ sont ouverts, alors $U_1 \cap \cdots \cap U_n$ est ouvert.

Preuve

Si $x \in \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$, c'est à dire si $\exists \beta \in A$ tel que $x \in U_\beta$, alors $\exists \varepsilon > 0$ tel que $B(x,\varepsilon) \subset U_\beta \subset \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$ (car U_β est ouvert).

$\implies \bigcup_\alpha U_\alpha$ est ouvert.

Si $x \in U_1 \cap \cdots \cap U_n$.
Pour tout $i = 1, 2, \cdots n, \exists \varepsilon_i > 0$ tel que $B(x,\varepsilon) \subset U_i$
On pose $\varepsilon = \underset{i=1,\cdots,n}{min}\ \varepsilon$.
Alors $B(x,\varepsilon) \subset U_i (\forall i)$
Donc $B(x,\epsilon) \subset \bigcap_{i=1}^{n} U_i$ □

Corrolaire

Si $S_\alpha \subset X, x \in A$, sont fermés, alors
$displaystyle \bigcap_{\alpha \in A} S_\alpha$ est fermé.
Si $S_1, \cdots, S_n$ sont fermés, alors $S_1 \cup \cdots \cup S_n$ est fermé.

Preuve

$$\underbrace{X \setminus \bigcap_\alpha S_\alpha}_{\text{fermé}} = \underbrace{\bigcup_\alpha \underbrace{(X \setminus \underbrace{S_\alpha}_{\text{fermé}})}_{\text{ouvert}}}_{\text{ouvert}}$$

$$X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} S_i = \underbrace{\bigcap_{i=1}^{n} \underbrace{(X \setminus \underbrace{S_i}_{\text{fermé}})}_{\text{ouvert}}}_{\text{ouvert}}$$

Exemple

$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x_1 x_2 > 1, x_1 + x_2 < 2, x_1 > 0\}$ est ouvert
$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x_1 x_2 \geq 1, x_1 + x_2 \leq 2, x_1 \geq 0\}$ est fermé
l'intersection de 3 sous-ensembles ouverts / fermés

Théorème

Soit X un espace métrique. Alors un sous-ensemble $S \subset X$ est fermé si et seulement si pour toute suite $(s_n)_{n=1}^{\infty}, s_n \in S$ tel que $\lim_{n \to \infty} s_n = x \in X$ existe, on a $x \in S$

Exemple

$(0,1] \subset \mathbb{R}$
$S \subset X$
$s_n = \dfrac{1}{n} \in (0,1]$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \notin (0,1]$
$(0,1]$ n'est pas fermé.

Preuve du théorème

- Si $x \in X$, alors $\exists$ suite $(s_n)_{n=1}^{\infty}$, $s_n \in S$, tel que $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = x$ si et seulement si $\underbrace{\forall \epsilon > 0, B(x,\epsilon) \cap S \neq \emptyset}_{(*)}$

Sous-preuve

Si $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = x$, alors $\lim\limits_{n\to\infty} d(s_n, x) = 0$,
Donc $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0, \forall n \geq n_0, d(s_n, x) < \epsilon$
$s_n \in B(x,\epsilon) \cap S \implies B(x,\epsilon) \cap S \neq \emptyset$
Si $B(x, \frac{1}{n}) \cap S \neq \emptyset$, choisissons $s_n \in B(x, \frac{1}{n}) \cap S$ et on a $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = x$
Il faut montrer : S est fermé si et seulement $\forall x \in X$, x satisfait $(*)$ si et seulement si $x \in S$.
Mais : S est fermé si et seulement si $X \backslash S$ est ouvert, si et seulement si :

$$\forall x \notin S, \exists \epsilon > 0, B(x,\epsilon) \cap S \neq \emptyset$$
$$\forall x \in X \backslash S, \exists \epsilon > 0, B(x,\epsilon) \subset X \backslash S$$

si et seulement si x satisafait $(*) \iff x \in S)$ $\square$

Exemple

$X = B(A) =$ les fonctions bornées $A \to \mathbb{R}$ avec $|| \cdot ||_{\infty} (\underset{\alpha \in A}{sup} |f(a)| = ||f||_{\infty}$
$A = [c,d], S = C([c,d]) \subset B([c,d])$ une suite $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ converge dans X si et seulement si elle converge uniformément.
Si $f_n \in S$, et si $\lim\limits_{n\to\infty} f_n \in X$ existe, alors $\lim\limits_{n\to\infty} f_n \in S$ (la limite uniforme d'une suite de fonction continues est une fonction continue)
$\overset{\text{Théorème}}{\Longrightarrow}$ $S \subset X$ est fermé.

Exemple

$U_n = (-\frac{1}{n}, 1) \subset \mathbb{R}$ est un sous-ensemble ouvert.
$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} U_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} (-\frac{1}{n}, 1) = [0,1) \subset \mathbb{R}$ n'est pas ouvert.

3.5 Espaces compacts

Rappel

Si $(x_n)_{n=1}^{\infty} (x_n \in \mathbb{R})$ est une suite bornée, alors $\exists$ une sous-suite convergente.
$\implies$ si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue, alors f atteint son maximum et son minimum.

Définition

Un espace métrique X est compact si $\forall$ suite $x_n \in X, \exists$ sous-suite qui converge.

Exemple

$X = [a, b]$

Théorème

Si X est compact et $f : X \to \mathbb{R}$, continue alors f atteint son maximum et son minimum.

Preuve

(pour max) : $\exists$ suite $x_n \in X$ tel que $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \underset{x\in X}{sup} f(x) (\in (-\infty, \infty])$
Soit $y_n \in X$ une sous-suite convergente de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$.
On a donc :

$$sup f = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} f(y_n) = f(\underbrace{\lim_{n\to\infty} y_n}_{y\in X})$$

$f(y) = \underset{x\in X}{sup} f(x)$, donc f atteint son max en y.
Pour min, c'est pareil $\square$

Théorème

Un sous-ensemble $S \subset \mathbb{R}^k$ est un espace compact si et seulement si $S \subset \mathbb{R}^k$ est fermé et borné. (borné : $\exists R > 0$, tel que $S \subset B(0, R)$)

Preuve

$\Longleftarrow$: Supposons que $\subset \mathbb{R}^k$ est borné et fermé. Soit $x_n \in S, n = 1, 2, \cdots$, une suite.
$x_n = (x_{n_1}, x_{n_2}, \cdots, x_{n_k}), (x_{n_i} \in \mathbb{R})$
S est borné $\implies |x_{n_1}| < R \forall n$, c'est à dire la suite $(x_{n_1})_{n=1}^{\infty}$ est bornée.
Soit y_n une sous-suite de x_n tel que $(y_{n_1})_{n=1}^{\infty}$ converge. Soit z_n une sous-suite de y_n tel que la suite z_{n_2} converge etc. $\to$ on trouve une sous-suite w_n de x_n tel que :

$$(w_{n_1})_{n=1}^{\infty} \text{ converge } \forall i = 1, 2 \cdots, k$$

c'est à dire w_n converge dans $\mathbb{R}^k$
Mais S est fermé et $w_n \in S$, donc $\lim_{n\to\infty} w_n \in S (\implies \text{ exercice})$ $\square$

Exemple

$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | xy \geq 1 \quad \& \quad x^2 + y^2 \leq 4\}$
$S \subset \mathbb{R}^2$ est fermé et borné. $\implies S$ est compact.
Si $f : S \to \mathbb{R}, f(x, y) = sin(x + e^y) + cos(xy)$: f est continue.
$\implies \exists$ max et min de f.

Exemple

On cherche le n-gone P inscrit dans le cercle unité avec l'aire maximale.
Si P est d'aire maximale, alors tout ses côtés sont de même longueur, c'est à dire P est régulier.
$\exists P$ avec l'aire maximale :
P est doné par ses sommets qui se trouvent sur le cercle. Les sommets $\in S^1 \subset \mathbb{R}^2$
On a l'ensemble $(S^1)^n = \subset (\mathbb{R}^2)^n = \mathbb{R}^{2n}$
Fermé et borné $\implies$ compact. L'aire est une fonction continue $\implies$ max existe.

Théorème

Toutes les normes sur $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes.

Preuve

Si $N : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une norme, on va montrer que N est équivalente à $||\cdot||$, $(||v||_1 = \sum_{i=1}^{n} |v_i|\ )$

- $v = \sum_{i=1}^{n} v_i e_i, v_i \in \mathbb{R}, e_i$ la base de $\mathbb{R}^n$

  $N(v) \leq \sum_{i=1}^{n} N(v_i e_i) = \sum_{i=1}^{n} |v_i| N(e_i) \leq \underbrace{\underset{i=1,\cdots,n}{max} N(e_i)}_{C_1} \cdot ||v_i||_1$

- L'autre inégalité. Montrons que $N : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est continue.

  Si $u, v \in \mathbb{R}$:

$$|N(u) - N(v)| \underbrace{\leq}_{\text{inégalité triangulaire}} N(u-v) \leq C_1 ||u-v||_1$$

  c'est à dire $N : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est Lipschitzienne, donc continue.

  Posons $S = \{v \in \mathbb{R}^n | ||v||_1 = 1\} \subset \mathbb{R}^n$

  S est fermé et borné $\implies$ S est compact.

  $\implies \exists v_0 \in S$ tel que $N(v_0)$ est minimal, c'est à dire ;

$$\forall v \in S, N(v) \geq N(v_0)$$

  car $||v_0||_1 = 1$, on sait que $v_0 \neq 0$, donc $N(v_0) > 0$.

  Si $w \in \mathbb{R}^n, w \neq 0$, alors $\frac{w}{||w||_1} \in S$ et donc :

$$N\left(\frac{w}{||w||_1}\right) \geq N(v_0)$$

  donc

$$||w||_1 \leq \underbrace{\frac{1}{N(v_0)}}_{C_2} \cdot N(w)$$

C'est aussi vrai pour $w = 0$. □

3.6 Espaces complets

Définition

Si X est un espace métrique et si $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ est une suite dans X, alors $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ est de Cauchy si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0, \forall k, l \geq n_0, d(x_k, x_l) < \varepsilon$$

Exercice

Si une suite convergem alors elle est de Cauchy.

Définition

X est complet si toute suite de Cauchy dans X converge.

Proposition

Si X est complet et si $S \subset X$ est fermé, alors S est complet.

Preuve

Si $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ est une suite de Cauchy dans S_1, alors cette suite converge dans X (car X est complet).
Car $S \subset X$ est fermé, on a que $\lim\limits_{n\to\infty} s_n \in S$ □

Exemples

- $\mathbb{R}$
- $\mathbb{R}^k$ Preuve :

  Si $(v_n)_{n=1}^{\infty}$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}^k$, alors les suites dans $\mathbb{R}$ $(v_{n_1})_{n=1}^{\infty}(i = 1, \cdots, n)$ soit de Cauchy, donc elles convergent et donc la suite $(v_n)_{n=1}^{\infty}$ converge.
- Si X est compact, alors il est complet. (exercice)
- Si A est un ensemble,

  $$B(A) = \{f : A \to \mathbb{R} | f \text{ est bornée } \}$$

  avec la norme $|| \cdot ||_{\infty}$

  $B(A)$ est complet (le critère de Cauchy).

- $C([a,b]) \subset B([a,b])$ est un sous-ensemble fermé.
  $\implies C([a,b])$ est complet.

Résumé de la partie 3

Vocabulaire

Métrique, norme, sous-ensemble ouverts/fermés, espaces compacts et complets.

Théorèmes

- f est continue sur $f^{-1}(U)$ est ouvert $\forall U$ ouvert.
  $S \subset \mathbb{R}^n$ est compact si et seulement si S est fermé et borné.
- X est compact, $f : X \to \mathbb{R}$ continue $\implies f$ atteint son *max* et son *min*.

4 Equations différentielles ordinaires

4.1 Introduction

La vitesse du chien est :

$$w\frac{(tv,0)-(x(t),y(t))}{\sqrt{(tv-x(t))^2+y(t)^2}}=\left(\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t},\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}\right)$$

Si $(x(0),y(0))$ (position initialle) est connue, il faut trouver les fonctions $x(t),y(t)$.
Le problème : si $y(0)$ et $y'(0)$ sont connus, trouver la fonction $y(t)$.

Définition

Soit $f:\mathbb{R}^{n+1}\to\mathbb{R}^n$ une fonction continue.

Alors l'équation $y'(t)\overset{=}{(*)}f(t,y(t))$ pour une fonction $y:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$ est une équation différentielle ordinaire (d'ordre 1).

Dans les composantes : si $y(t)=(y_1(t),\cdots,y_n(t)),y_i:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ et si $f=(f_1,\cdots,f_n)$ alors $(*)$ est $y_i'(t)=f_i(t,y(t),\cdots,y_n(t))\forall=1,2,\cdots,n$ et $f_i:\mathbb{R}^{n+1}\to\mathbb{R}$

Problèmes de la valeur initialle

Trouver la fonction $y:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$ si $y(t_0)\in\mathbb{R}^n$ est donné.

Visualisation

Théorème (existence et unicité des solutions)

$$\forall c\in\mathbb{R}^n,\forall t_0\in\mathbb{R},\exists\varepsilon>0,\text{ et }\exists y(t_0-\varepsilon,t_0+\varepsilon)\to\mathbb{R}^n$$

tel que $y(t_0)=c$ et $y'(t)=f(t,y(t))\forall t\in(t_0-\varepsilon,t_0+\varepsilon)$.
Si f est localement Lipschitzienne, alors y est unique.

Preuve

Analyse II.
L'idée de la preuve :
construire une solution approximativement y_n.
Pour $h>0$ très petit :
$y_n(t_0)=c,y_n(t_0+h)=y_n(t_0)+nf(t_0,y_n(t_0))$)
$y_n(t_0+(n+1)h)=y_n(t_0+nh)nf(t_0+nh,y_n(t_0+nh))$ et on prend l'interpolation linéaire.

Il faut montrer que dans la suite $\left(y\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$, $\exists$ sous-suite convergente et que sa limite est une solution de $y'(t)=f(t,y(t))$ "$\square$"

Remarque

Une équation différentielle ordinaire d'ordre k est :

$$\frac{\mathrm{d}^k y(t)}{\mathrm{d}t^k} = f\left(t, y(t), \cdots \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}, \cdots, \frac{\mathrm{d}^{k-1}y}{dt^{k-1}}\right)$$

Le problème initial : trouver y si $y(t_0), y'(t_0), \cdots, y^{(t-1)}(t_0)$ sont donnés.

On peut transformer cette équation différentielle ordinaire d'ordre k en équation différentielle d'ordre 1. On pose $Y = (y, p_1, p_2, \cdots, p_{k-1})$

et $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t) = p_1(t), \frac{\mathrm{d}p_1(t)}{\mathrm{d}t} = p_2(t), \cdots, \frac{\mathrm{d}p_{k-2}}{\mathrm{d}t} = p_{k-1}(t)$

$$\frac{\mathrm{d}p_{k-1}(t)}{\mathrm{d}t} = f(t, y(t), p_1(t), \cdots, p_{k-1}(t))$$

On a donc trouvé une équation différentielle ordinaire $\frac{\mathrm{d}Y(t)}{\mathrm{d}t} = F(t, Y(t))$

Exemples

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t} \overset{=}{(*)} - ky - l\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$$

on pose $p(t) = y'(t)$

$(*)$ est équivalente à $\begin{array}{c} y'(t) = p(t) \\ p'(t) = -ky(t) - lp(t) \end{array}$

4.2 Méthodes de solution

4.2.1 Les équations différentielles ordinaires autonomes

Définition

Les équations différentielles ordinaires autonomes sont les équations différentielles ordinaires de la forme ;

$$y'(t) = f(y(t)), \text{ où } f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \text{ est une fonction continue donnée}$$

Pour $n = 1$:

$y'(t) \overset{(*)}{=} f(y(t))$ on suppose que $f \neq 0$

$\frac{y'(t)}{f(y(t))} = 1.$

Si H est une fonction primitive de $\frac{1}{f}$, alors $H' = \frac{1}{f}$

Alors $\frac{y'(t)}{f(y(t))} = H(y(t))'$

Donc $(*)$ est $H(y(t))' = 1$, c'est à dire $H(y(t)) = t - c$

et donc $y(t) = H^{-1}(t - c)$

$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = f(y)$

$H(y) = \int \frac{\mathrm{d}y}{f(y)} = \int \mathrm{d}t = t - c$

Si $y_0 \in \mathbb{R}$ est tel que $f(y_0) = 0$, alors la fonction constante $y(t) = y_0$ est une solution.
Visualisation :

Exemples

- $f(y) = 1 + y^2$
  $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 1 + y^2$
  $\int \frac{\mathrm{d}y}{1+y^2} = \int \mathrm{d}t$
  $arctan(y) = t - c$
  $y(t) = tan(t - c)$
  $y(t)$ est définie sur $\left(c - \frac{\pi}{2}, c + \frac{\pi}{2}\right)$
- Liberté pour les petites voitures
  $f(y) = y^{2/3}, \quad y' = y^{2/3}$
  $\int \frac{\mathrm{d}y}{y^{2/3}} = \int \mathrm{d}t$
  $= 3y^{1/3} = t - c$
  $y(t) = \left(\frac{t-c}{3}\right)^3$
  Pour $y = 0$, on a $f = 0, f(0) = 0$
  $\implies y(t) = 0$ est aussi solution.
  La solution générale :
- $a \in \mathbb{R}$
  $y' = ay$
  $\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int a\mathrm{d}t$
  $= log|y| = at + \tilde{C}$
  $y(t) = c \cdot e^{at}, c \in \mathbb{R}$

Proposition

Si $a \in \mathbb{C}$, alors les solutions $y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de $y' = ay$ sont $y(t) = c \cdot e^{at}, \quad c \in \mathbb{C}$

Preuve

Posons $z(t) = y(t) \cdot e^{-at}$, c'est à dire $y(t) = z(t) \cdot e^{at}$.
On a $y' = (z(t) \cdot e^{at})' = (z' + az)e^{at} = aze^{at}$
C'est à dire $z' = 0$
$\implies z$ est une constante. $\square$

4.2.2 Séparation des variables

On considère une équation différentielle ordinaire de la forme :

$$y'(t) = f(y(t)) \cdot g(t)$$

$f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ données
La solution est :

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = f(y) \cdot g(t)$$

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{f(y)} = \int g(t)\mathrm{d}t$$

Et ainsi, on trouve $y(t)$.

Exemple

$y' = ty \rightsquigarrow \int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int t\mathrm{d}t$
$log|y| = \frac{1}{2}t^2 + c$
$y = \pm e^{\frac{1}{2}t^2} \cdot e^c$
C'est à dire $y(t) = \tilde{C} \cdot e^{\frac{1}{2}t^2}, \quad (\tilde{C} \in \mathbb{R}$ aribitraire)

4.2.3 Équations différentielles ordinaires d'ordre 1

Si $a, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont données, on cherche les solutions de :

$$y'(t) = a(t)y(t) + b(t), \quad (y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

- Si $b = 0$, l'équation différentielle ordinaire est séparable :
  $y' = a(t)y(t)$
  $\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int a(t)\mathrm{d}t$
  $y(t) = expA(t)$ où $A'(t) = a(t)$ est une solution.
  La solution générale est :

$$y(t) = c \cdot expA(t), \quad c \in \mathbb{R}$$

- Si $b \neq 0$, on pose $z(t) = y(t) \cdot exp{-A(t)}$
  C'est à dire $y(t) = z(t)expA(t)$
  $y'(t) = z'(t)expA(t) + z(t) \cdot a(t)expA(t) = a(t)y(t) + b(t) = a(t)z(t)expA(t)$
  C'est à dire $z'(t) = b(t)exp{-A(t)}$

$$\Longrightarrow z(t) = \int b(t)exp{-}A(t)\mathrm{d}t + c$$

$$\Longrightarrow y(t) = expA(t)\left(c + \int b(t)exp{-}A(t)\mathrm{d}t\right)$$

Exemple

$$y'(t) = \underbrace{ty}_{=a} + \underbrace{t}_{=b}, \quad A(t) = \frac{t^2}{2}$$

$$\int te^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t = -e^{-\frac{t^2}{2}} + c$$

$$y(t) = -1 + \underbrace{ce^{-\frac{t^2}{2}}}_{\text{Le solution générale de } y'=yt}$$

4.2.4 Les équations différentielles ordinaires homogènes et la méthode d'une symétrie

Une équation différentielle ordinaire homogène est de la forme :

$$y't = f\left(\frac{y}{t}\right)$$

On pose $z(t) = \dfrac{y(t)}{t}$, c'est à dire $y(t) = z(t) \cdot t$

$$y'(t) = (z(t)t)' = z't + z = f(z)$$

$$t \cdot \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = f(z) - z \text{ est séparable}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}z}{f(z) - z} = \int \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

Exemple

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{y}{t} + \frac{t}{y}$$

$$t \cdot z + z = z + z^{-1}$$

$$\int z\mathrm{d}z = \int \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

$$\frac{1}{2}z^2 = log|t| + c$$

$$z(t) = \sqrt{2 \cdot log|t| + c}$$

$$y(t) = t \cdot \sqrt{2 \cdot log|t| + c}$$

Méthodes de la symétrie

Une éqaution différentielle ordinaire autonome $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = f(y)$ a une symétrie : $\begin{matrix} y \to y \\ t \to t+c \end{matrix}$

Si on a une équation différentielle ordinaire avec une autre symétrie : par exemple une équation différentielle ordinaire homogène : $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = f\left(\frac{y}{t}\right)$

La symétrie ; $(*)$ $\begin{matrix} y \to cy \\ t \to ct \end{matrix}$

On cherche des nouvelles variables $y, t \rightsquigarrow z, s$ pour que $(*)$ devienne : $\begin{matrix} & z \to z \\ s \to s+\lambda, & \lambda \text{ une constante} \end{matrix}$ $\rightsquigarrow$ une équation différentielle ordinaire autonome.

On prend $z = \frac{y}{t}, \quad s = log|t|$

$y = e^s z, \quad t = e^s$

$\rightsquigarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = f\left(\frac{y}{t}\right) \rightsquigarrow \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s} = g(z)$

Effectivement :

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}(e^s z)}{\mathrm{d}e^s} \\ &= \frac{e^s z \mathrm{d}s + e^s \mathrm{d}z}{e^s \mathrm{d}s} \\ &= \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s} + z = f(z) \\ g(z) &= f(z) - z \end{aligned}$$

Exemple

$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = t + \frac{y^2}{t^3}$

$\begin{matrix} y \to c^2 y \\ t \to ct \end{matrix}$ est une symétrie.

$z = \frac{y}{t^2}, \quad s = log|t|$

$\rightsquigarrow \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s} = g(z)$

4.2.5 Réduction d'ordre

Si $y'(t) = f(y(t)) \quad (*)$

$\begin{matrix} f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \\ y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n \end{matrix}$ est une équation différentielle ordinaire autonome.

On peut remplacer $(*)$ par une équation différentielle ordinaire non-autonome dans $\mathbb{R}^{n-1}$

L'idée : (n=2)

on cherche d'abord $y_i (i = 1, 2, \cdots, n)$

comme des fonctions de y_1 (la réduction)

Après, on va trouver $y_1(t)$ et donc aussi $y_i(t)(i = 1, 2, \cdots, n)$

$\frac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}t} = f_i(y_1, y_2, \cdots, y_n)(i = 1, 2, \cdots, n)$

$$\rightsquigarrow \frac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}y_1} = \frac{f_i(y_1, \cdots, y_n)}{f_1(y, 1 \cdots, y_n)} (i = 2, \cdots, n)$$

Exemple

$$\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}t} = y_2, \frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}t} = -y_1$$

$$\rightsquigarrow \frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}y_1} = -\frac{y_1}{y_2}$$

$$\int y_2 \mathrm{d}y_2 = -\int y_1 \mathrm{d}y_1$$

$$y_2^2 + y_1^2 = cst = R^2$$

$$y_2 = \sqrt{R^2 - y_1^2}$$

$$\rightsquigarrow \frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}t} = \sqrt{R^2 - y_1^2}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}y_1}{\sqrt{R^2 - y_1^2}} = \int \mathrm{d}t$$

$$\rightsquigarrow y_1 = Rsin(t - c), \quad y_2 = Rcos(t - c)$$

Cette méthode pour les équations différentielles ordinaires d'ordre 2

$$y'' = f(y, y') \quad (*)$$

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donnée
$y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

remplaçons $(*)$ par un système de 2 équations : $\begin{array}{c} y' = p \\ p' = f(y,p) \end{array}$ On utilise la méthode :

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} = \frac{f(y, p)}{p}$$

On cherche $p(y)$, après $y(t)$

Exemple

(pendule avec frottement)

$$y'' = -sin(y) - ky'$$

$$\rightsquigarrow \begin{array}{c} y' = p \\ p' = -sin(y) - kp \end{array}$$

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} = -\frac{sin(y) + kp}{p}$$

C'est difficile à résoudre.
Supposons que $k = 0$:

$$\int p\mathrm{d}p = -\int sin(y)\mathrm{d}y$$

$$\frac{1}{2}p^2 - cos(y) = cst = E$$

$$p = \sqrt{2(E + cos(y))} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$$

$$\rightsquigarrow \int \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{2(E + cos(y))}} = \int \mathrm{d}t = t - c$$

C'est une intégrale elliptique, et non pas une fonction élémentaire.

$$\rightsquigarrow y = g(t)$$

4.3 Les équations différentielles ordinaires linéaires à coefficients constants

Si $a_0, a_1, \cdots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$
On cherche les solutions $y_\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de

$$a^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1y' + a_0y = 0$$

Observations

$L : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$ est une application linéaire, c'est à dire :

$$L(y_1 + y_2) = Ly_1 + Ly_2$$
$$L(\alpha y) = \alpha L(y)$$

$\forall y_1, y_2, y \in C^\infty(\mathbb{R}) \forall \alpha \in \mathbb{C}$

Proposition

Les solutions y de $L(y) = 0$ forment un sous-espace vectoriel de $C^\infty(\mathbb{R})$

Preuve

- Si $L(y) = 0$, alors $y \in C^\infty(\mathbb{R})$ y est n fois différentiable $y^{(n)} = -a_{n-1}y^{(n-1)} - \cdots - a_0y$ Le côté droit est dérivable, donc $y^{(n)}$ est dérivable. On répète cet argument : $y^{(n+1)} = \underbrace{-a_{n-1}y^{(n)} - \cdots - a_0y'}_{\text{dérivable } \implies y^{(n+2)} \text{ existe}}$

  On peut continuer comme ça à l'infini.

  $\{$Les solutions de $L(y) = 0\} \subset C^\infty(\mathbb{R})$ est $= Ker(L)$, qui est un espace vectoriel. $\square$

Théorème (problème de la valeur initiale)

Si $c_0, c_1, \cdots, c_{n-1} \in \mathbb{C}$ sont donnés, alors $\exists! y$ tel que $L(y) = 0$ et $y^{(k)}(0) = c_k \forall k = 0, \cdots, n-1$

Preuve

Plus tard $\square$

Remarque

La dimension de l'espace des solutions de $L(y) = 0$ est n (car $\forall c \in \mathbb{C}^n, \exists! y$, c'est à dire on a une bijection linéaire entre $\mathbb{C}^n$ et l'espace des solutions)

Définition

Le polynôme caractéristique de L est :

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda n - 1 + \cdots + a_1\lambda + a_0$$

D'où cela vient ?

- $L(e^{\lambda t} = p(\lambda)e^{\lambda t}$
- si $D : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$ est donné par $D(y) = y'$ alors $L = p(P) = D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \cdots + a_1 D + a_0$

Observation

Si $\lambda \in \mathbb{C}$ est tel que $p(\lambda) = 0$, alors $L(e^{\lambda t}) = 0$, donc $e^{\lambda t}$ est une solution. $\implies$ si $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ sont les racines de p et si $\alpha_1, \cdots, \alpha_k \in \mathbb{C}$, alors $\alpha_1 a^{\lambda_1 t} + \cdots + \alpha_k e^{\lambda_k t}$ est une solution (car les solutions forment un espace vectoriel).

Théorème

Si $p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1} \cdots (\lambda - \lambda_k)^{n_k}$
($\lambda_i \neq \lambda_j, i \neq j$) est le polynôme caractéristique de L, alors les solutions de $L(y) = 0$ sont :

$$y(t) = q_1(t)e^{\lambda_1 t} + \cdots + q_k(t)e^{\lambda_k t}$$

où q_i est un polynôme de degré $\leq n_i - 1$.
Les polynômes q_i sont uniquement déterminés par y_i et donc

$$\{t^l e^{\lambda_i t} | 1 \leq i \leq k, 0 \leq l \leq n_i - 1\}$$

est une base de l'espace des solutions.
Si $n_i = 1 \quad \forall i$, c'est à dire si $k = n$, alors les solutions sont :

$$\alpha_1 e^{\lambda_1 t} + \cdots + \alpha_n e^{\lambda_n t}$$

Exemples

$y'' + y = 0$
$p(\lambda) = \lambda^2 + 1 = (\lambda - i)(\lambda + i)$
Ces racines sont $\pm i$ (multiplicités $= 1$)
$\implies$ les solutiosns sont $(\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C})$

$$\alpha_1 e^{it} + \alpha_2 e^{-it}$$

Rappelons : $e^{it} = cos(t) + i \cdot sin(t)$ et $e^{-it} = cos(t) - i \cdot sin(t)$
$\implies \beta_1 cos(t) + \beta_2 sin(t)$ $(=\gamma \cdot cos(t - c))$

$$y'' + ay' + y = 0, a \geq 0$$

$p(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + 1$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{a^2 - 4}}{2}$$

Si $a < 2$, $\lambda_{1,2} = \dfrac{-a \pm i\sqrt{4 - a^2}}{2}$

$$\implies y(t) = e^{-\frac{1}{2}\alpha t}\left(\alpha_1 e^{\frac{i}{2}\sqrt{4-a^2}t} + \alpha_2 e^{\frac{-i}{2}\sqrt{4-a^2}}\right)$$

$$= e^{-\frac{1}{2}\alpha t} \cdot \left(\beta_1 cos(\frac{1}{2}\sqrt{4-a^2}) + \beta_2 sin(\frac{1}{2}\sqrt{4-a^2}t)\right)$$

Si $a > 2$, alors $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ solution $\alpha_1 e^{\lambda_1 t} + \alpha_2 e^{\lambda_2 t}$
Si $a = 2$, $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda + 1)^2$
On a une racine double $\lambda = -1$
$\implies$ la solution est

$$y(t) = (\alpha + \beta t)e^{-t}$$

Proposition

Si $p(\lambda) = \lambda^n$, les solutions de $y^{(n)} = 0$ sont les polynômes de degré $\leq n - 1$

Preuve

Par récurrence :
$n = 0$ vrai
$\rightsquigarrow n + 1$:
Si $y^{(n+1)} = 0$, alors $(y')^{(n)} = 0$, $\implies y'$ est un polynôme de degré $\leq n - 1$
C'est à dire y est une fonction primitive d'un polynôme de degré $\leq n - 1$
$\implies y$ est un polynôme de degré $\leq n$ $\square$

Proposition

Si $p(\lambda) = (\lambda - c)^n, c \in \mathbb{C}$
Les solutions de $(D-c)^n y = 0$ sont :

$$q(t)e^{ct}$$

où q est un polynôme de degré $\leq n-1$

Preuve

Observons que

$$D\left(e^{-ct}y(t)\right) = \left(e^{-ct}y(t)\right)' = (y'(t) - cy(t)) = e^{-ct}(D-c)y(t)$$

$$\Longrightarrow\ D^n\left(e^{-ct}y\right) = e^{-ct}(D-c)^n y$$

Donc $(D-c)^n y = 0$ si et seulement si $D^n\left(e^{-ct}y\right) = 0$ si et seulement si

$$e^{-ct}y(t) = q(t)$$

où q est un polynôme de degré $\leq n-1$

Proposition

Si V est un espace vectoriel, $p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1} \cdots (\lambda - \lambda_k)^{n_k}$ un polynôme et $D : V \to V$ une application linéaire, alors les solutions $v \in V$ de $p(D)v = 0$ sont : $v = v_1 + \cdots + v_k$ où $(D - \lambda_i)^{n_i} v_i = 0$

De plus, les v_i sont uniquement déterminés par n_i, c'est à dire

$$ker(p(D)) = ker(D-\lambda_1)^{n-1} \oplus \cdots \oplus ker(D-\lambda_k)^{n-k}$$

Preuve

On utilise la décomposition en fractions partielles :
$\dfrac{1}{p(\lambda)} = \dfrac{s_1(\lambda)}{(\lambda-\lambda_1)^{n_1}} + \cdots + \dfrac{s_k(\lambda)}{(\lambda-\lambda_k)^{n_k}}$ où les s_i sont des polynômes de degré $\leq n_i - 1$
On multiplie par $p(\lambda)$

$$1 = \underbrace{\frac{p(\lambda)}{(\lambda-\lambda_1)^{n_1}}s_1(\lambda)}_{v_1(\lambda)} + \cdots + \underbrace{\frac{p(\lambda)}{(\lambda-\lambda_k)^{n_k}}s_k(\lambda)}_{v_k(\lambda)}$$

Les v_i sont des polynômes, $v_i(\lambda) \cdot (\lambda - \lambda_i)^{n_i} = s_i(\lambda)p(\lambda)$
et $v_1 + \cdots + v_k = 1$
Si $p(\lambda)v = 0$, alors on pose $v_i = r_i(D)v$ et $v = v_1 + \cdots + v_k$ car $r_1 + \cdots + r_k = 1$

$$(D-\lambda_i)^{n_i} v_i = (D-\lambda_i)^{n_i} v_i(D)v = s_i(D)\underbrace{p(D)v}_{0} = 0$$

Il faut encore vérifier 2 choses :

- si $v_1, \cdots, v_k \in V$ sont tel que $(D-\lambda_i)^{n_i} v_i = 0$, alors
  $p(D)(v_1 + \cdots + v_k) = 0$ mais $p(D)v_i = 0$ et donc $p(D)\sum v_i = 0$

- si $v = \sum_{i=1}^{k} v_i, (D-\lambda_i)^{n_i} = 0$, alors les v_i sont uniquement déterminés par v : en fait, $v_i = r_i(D)v$, car $r_i(D)v_j = 0$ (car $(\lambda-\lambda_j)^{n_j} | r_i(\lambda_)), i \neq j$

  et donc $r_i(D)v = r_i(D)(v_1 + \cdots + v_k) = \overbrace{r_i(D)v_i = (r_1(D) + \cdots + r_k(D))}^{1} v_i = v_i$ $\square$

Preuve du théorème

On applique la proposition précédente avec $V = C^\infty(\mathbb{R})$ $\square$

Si $b(t)$ est une fonction donnée, trouver les solutions de $L(y) = b$ (Équation différentielle Ordinaire inhomogène)

Proposition

Si $y_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est une solution de $L(y_0) = b$, alors la solution générale de $L(y) = b$ est :

$$y = y_0 + y_1 \text{ où } L(y_1) = 0$$

Preuve

$L(y) = b$ si et seulement si $L(y) = L(y_0)$ si et seulement si $L(\underbrace{y - y_0}_{y_1}) = 0$ $\square$

Comment trouver une solution de $L(y) = b$?
(méthode générale par variation de constantes plus tard)
Solution si $b(t) = R(t)e^{\alpha t}$ où $R(t)$ est un polynôme.

Méthode

- Si $p(\alpha) \neq 0$, alors $\exists$ une solution de la forme $y(t) = S(t)e^{\alpha t}$ où $S(t)$ est un polynôme et $deg(S) = deg(R)$

- Si α est une racine de p de multiplicité m, alors $\exists$ une solution de la forme : $y(t) = t^m S(t) e^{\alpha t}$ $(deg(S) = deg(R)$

Preuve

Si $p(\alpha) \neq 0$

$$\underset{(deg\leq l)}{\mathbb{C}[t]} \cdot e^{\alpha t} \xrightarrow{L} \underset{(deg\leq l)}{\mathbb{C}[t]}\ e^{\alpha t}$$

Et $R(t) \cdot e^{\alpha t} \in \underset{(deg\leq l)}{\mathbb{C}[t]}\ e^{\alpha t}$, $l = deg(R)$
Cette application est injective, $\implies$ bijective.
Si $m \neq 0$ $(p(\alpha) = 0)$

$$t^m \underset{(deg\leq l)}{\mathbb{C}[t]} e^{\alpha t} \xrightarrow{L} \underset{(deg\leq l)}{\mathbb{C}[t]} e^{\alpha t} \ni R(t)e^{\alpha t}$$

L'application est injective car, les dimensions sont identiques.
Donc bijective $\implies \exists t^m S(t)e^{\alpha(t)} \xrightarrow{L} R(t)e^{\alpha t}$

Exemples

$$y'' + y' + y = sin(t) = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$$

Trouvons une solution de $y'' + y' + y = e^{it}$
$p(\lambda) = \lambda^2 + \lambda + 1, p(i) \neq 0$
$\rightsquigarrow \exists$ une solution de la forme $ae^{it} = y(t)$
$L(y) = p(i)ae^{it} = iae^{it} \overset{!}{=} e^{it}$
$\implies a = -i$
$L(y) = e^{-it} \rightsquigarrow ie^{-it}$ est une solution.
$L(y) = \dfrac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$ une solution est : $\dfrac{-ie^{-it} - ie^{-it}}{2i}$
Les solutions de $L(y) = 0$ sont :

$$\frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \lambda_{1,2}$$

$$\underbrace{c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}}_{(*)}$$

$\implies$ la solution générale de $y'' + y' + y = sin(t)$ est

$$y(t) = -cos(t) + \overbrace{e^{-\frac{t}{2}} \cdot \left(\tilde{C}_1 cos\left(\sqrt{3}t\right) + \tilde{C}_2 sin\left(\sqrt{3}t\right)\right)}^{(*)}$$

Exemple

$$y'' + y = sin(t) = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$$

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 1 = (\lambda - i)(\lambda + i)$$

$$p(i) = 0, \text{ multiplicité} = 1\ (=m)$$

$$y'' + y = e^{it}$$

$\exists$ une solution de la forme $y = ate^{it}$, il faut déterminer a.

$$\left(ate^{it}\right)'' + ate^{it} = -ate^{it} + 2aie^{it} + ate^{it} \overset{!}{=} e^{it}$$

$$\implies a = -\frac{i}{2}$$

$$\rightsquigarrow -\frac{i}{2} + e^{it} \text{ est une solution de } L(y) = e^{it}$$

$$\frac{i}{2}te^{-it} \text{ est une solution de } \underbrace{L(y)}_{(=y''+y)} = e^{-it}$$

$$\rightsquigarrow \frac{-\frac{i}{2} + e^{it} - \frac{i}{2} + e^{-it}}{2i} = -\frac{t}{2}cos(t)$$

$$\implies -\frac{t}{2} \text{ est une solution de } y'' + y \overset{(*)}{=} sin(t)$$

Alternativement, $sin(t) = ln(e^{it})$

$$\implies ln\left(-\frac{i}{2} + e^{it}\right) \text{ est une solution de } (*) = -\frac{t}{2}cos(t)$$

La solution générale de $y'' + y = sin(t)$ est $y(t) = -\frac{t}{2}cos(t) + \underbrace{c_1cos(t) + c_2sin(t)}_{\text{solution générale de } y''+y=0}$

4.4 Systèmes d'équations différentielles ordinaires linéaires à coefficients constants

A une matrice $n \times n$ (élément $\in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).
On cherche une solution $y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$ de $y' = Ay(*)$
C'est à dire si $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, on veut :

$$y'_i = \sum_{j=1}^{n} A_{ij}y_j$$

$(y_i : \mathbb{R} \to \mathbb{C})$

Proposition

Les solutions de $(*)$ forment un espace vectoriel, c'est à dire si y et $\tilde{y}$ sont des solutions, et si $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, alors $\alpha y + \beta\tilde{y}$ est une solution.

Preuve

$$(\alpha y + \beta\tilde{y})' = \alpha y' + \beta\tilde{y}' = \alpha Ay + \beta A\tilde{y}$$

$$= A(\alpha y + \beta\tilde{y})$$

$\square$

Théorème (problème de la valeur initiale

$\forall v \in \mathbb{C}^n, \exists !$ solution y de $y' = Ay$ tel que $y(0) = v$

Preuve

Plus tard

Proposition

Si $v \in \mathbb{C}^n$ est un vecteur propre de A, $Av = \lambda v$, alors $y(t) = a^{\lambda t} v$ est une solution.

Preuve

$$y' = \left(e^{\lambda t}\right)' = \lambda y, Ay = Ae^{\lambda t} v$$

$$= e^{\lambda t} A v = e^{\lambda t} \cdot \lambda v = \lambda y$$

$$\implies y' = Ay$$

□

Proposition

Si A est diagonalisable, c'est à dire, si $\exists$ une base $v_1, \cdots, v_n$ de $\mathbb{C}^n$ tel que les v_i sont des vecteurs propres de A, alors la solution générale de $y' = Ay$ est :

$$y(t) = c_1 a^{\lambda_1 t} v_1 + \cdots + c_n e^{\lambda_n t} v_n$$

$(c_i \in \mathbb{C}, Av_i = \lambda_i v_i)$

Preuve

Si $v \in \mathbb{C}^n$, alors $\exists c_1, \cdots, c_n \in \mathbb{C}$ tel que $v = c_i v_i + \cdots + c_n v_n$
Alors $y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + \cdots + c_n e^{\lambda_n t} v_n$ est une solution, et $y(0) = v$
C'est à dire $y(t)$ est la solution (unique) de $y' = Ay$ avec la valeur absolue v. □

Exemple

$A = \begin{matrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{matrix}$
Polynôme caractéristique de A :

$$p(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda + 1)(\lambda - 2)$$

$\implies A$ est diagonalisable.
Vecteurs propres : $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 2$
$\lambda = -1 \quad A - 2 = \begin{matrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{matrix}$

$v_1 = \begin{matrix}-1\\2\end{matrix}(Av_1 = -v_1$

$\lambda_1 = 2 \quad A + 1 = \begin{matrix}2 & 1\\2 & 1\end{matrix}$

$v_2 = \begin{matrix}1\\1\end{matrix}(Av_2 = 2v_2)$

La solution générale de $y' = Ay$ est :

$$c_1 e^{-t} v_1 + c_2 e^{2t} v_2, \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{C})$$

Trouvons une solution $y(t)$ tel que $y(0) = \begin{matrix}1\\0\end{matrix}$

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = c_1 \begin{matrix}-1\\2\end{matrix} + c_2 \begin{matrix}1\\1\end{matrix}$$

$c_1 = -\frac{1}{3}, c_2 = \frac{2}{3}$

Donc

$$y(t) = -\frac{1}{3} e^{-t} \begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix} + \frac{2}{3} e^{2t} \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

Exemple

$A = \begin{matrix}0 & 1\\-1 & 0\end{matrix}$

$y = \begin{matrix}y_1\\y_2\end{matrix}$

$y_1' = y_2, \quad y_2' = -y_1$

$$\begin{pmatrix}y_1'\\y_2'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$$

Le polynôme caractéristique est :

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 1 = (\lambda - i)(\lambda + i)$$

Les valeurs propres sont $\lambda_1 = i, \lambda_2 = -i$ (A diagonalisable)

Vecteurs propres :

$\lambda_1 = i \quad A + i = \begin{pmatrix}i & 1\\-1 & i\end{pmatrix}$

$\rightsquigarrow v_1 = \begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}$

$v_2 = \begin{pmatrix}1\\-i\end{pmatrix}$

$\implies$ la solution générale est :

$$y(t) = c_1 e^{it} \begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix} + c_2 e^{-it} \begin{pmatrix}1\\-i\end{pmatrix}$$

$y(t)$ tel que $y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

$$y(t) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{it} + e^{-it} \\ ie^{it} - ie^{-it} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos(t) \\ sin(t) \end{pmatrix}$$

Dessins pour $n = 2$ (matrices 2×2)
$\lambda_1 > 0 > \lambda_2, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$
Dessin 1
$\lambda_1 > \lambda_2 > 0$:
Dessin 2
$\lambda_1 = \lambda_2 > 0$
Dessin 3
$y'(t) = Ay(t)$
A une matrice $n \times n$
$y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$
Comment résoudre cet équation si A n'est pas diagonalisable ?

Définition

Si $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{C})$, alors :

$$expA = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \underset{(*)}{\in} Mat_{n\times n}(\mathbb{C})$$

$t \in \mathbb{R}$

$$exptA = 1 + tA - \frac{t^2}{2!} - \frac{t^3}{3!}A + \frac{t^4}{4!} + \cdots$$

$$= \left(1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + \cdots\right) + A\left(t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} + \cdots\right)$$

$$= cos(t) + sin(t)A = \begin{pmatrix} cos(t) & sin(t) \\ -sin(t) & cos(t) \end{pmatrix}$$

Il faut montrer que $(*)$ converge $\forall A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{C})$
Posons $||A||_1 = \sum_{i,j} |A_{ij}|$

Proposition

$$||AB||_1 \leq ||A||_1 \cdot ||B||_1$$

Preuve

$$||AB||_1 = \sum_{i,j} |(AB)_{ij}| = \sum_{i,j} \left| \sum_k A_{ik} Bkj \right|$$
$$\underbrace{\leq}_{\text{inégalité triangulaire}} \sum_{i,j,k} |A_{ik}| \cdot |B_{kj}| \leq \sum_{i,j,k,l} |A_{ik}| \cdot |B_{lj}| = ||A||_1 \cdot ||B||_1$$

□

Théorème

$\forall A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{C})$, la série $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$ converge (dans $Mat_{n\times n}(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^{n^2}$

Preuve

Il faut montrer $\forall i, j$ que $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(A^k)_{i,j}}{k!}$ converge.
On a :

$$\left|(A^k)_{ij}\right| \leq ||A^k||_1 \overset{\leq}{\text{Proposition}} ||A||_1^k$$

Donc :

$$\frac{\left|(A^k)_{ij}\right|}{k!} \leq \frac{||A||_1^k}{k!}$$

Mais :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{||A||_1^k}{k!} = exp||A|| \text{ converge}$$

□

Propriétés de $expA$

- $exp(0) = 1$
- $exp(A + B) = exp(A) + exp(B)$ si $AB = BA$
  Preuve : voir la preuve de $exp(a + b) = exp(a) \cdot exp(b)$
  En particulier si $s, t \in \mathbb{C}$,
  Alors $exp((s + t)A) = exp(sA) \cdot exp(tA)$
  Aussi : $exp(A) = exp(-A) = 1$
- Si Q est une matrice inversible, alors $exp(QAQ^{-1}) = Qexp(A)Q^{-1}$
  parce que $(QAQ^{-1})^n = QA^nQ^{-1}$

Proposition

$$\frac{d}{\mathrm{d}t}exp(tA) = Aexp(tA)$$

Preuve

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k t^k = exp(tA)$$

est une série entière (avec variable t) qui converge vers t. On peut donc différentier terme par terme. Et donc :

$$\implies \frac{d}{\mathrm{d}t}exp(tA) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k k t^{k-1}$$

$$= A \cdot exp(tA)$$

Théorème

Si $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{C})$ et si $v \in \mathbb{C}^n$, alors $\exists! y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$ tel que $y(0) = v$ et $y'(t) = A \cdot y(t)$
En fait,

$$y(t) = exp(tA)v$$

Preuve

Montrons que : $y(t) = exp(tA)v$ est une solution :
$y(0) = n\checkmark$
$\frac{a}{\mathrm{d}t}y(t) = \frac{d}{\mathrm{d}t}exp(tA)v = A \cdot exp(tA)v = A \cdot y(t)\checkmark$
L'unicité :
Si $y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$, posons :
$z(t) = exp(-tA)y(t)$, c'est à dire $y(t) = exp(tA)z(t)$
Donc :

$$\frac{d}{\mathrm{d}t}y(t) = \underbrace{A \cdot exp(tA)z(t)}_{y(t)} + exp(tA)z'(t)$$

$$= A \cdot y(t) + exp(tA)z'(t)$$

Donc $y' = Ay$ si et seulement si $z' = 0$ si et seulement si z est constante. $\square$

Remarque

Problème de la valeur initiale.

$$a^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y = 0(*)$$

Remplaçons $(*)$ par un système d'ordre 1 :

- $y' = p_1$
- $p_1' = p_2$

  $\vdots$
- $p_{n-2}' = p_{n-1}$
- $p_{n-1}' = a_{n-1}p_{n-1} + \cdots + a_1 p_1 + a_0 y$

C'est à dire :

$$Y'(t) \overset{(+)}{=} A \cdot Y(t) \text{ où } Y = \begin{pmatrix} y \\ p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_{n-2} \\ p_{n-1} \end{pmatrix}$$

$\forall v \in \mathbb{C}^n$, le système $(+)$ a une unique solution avec $Y(0) = v$, c'est à dire si $v = (c_0, c_1, \cdots, c_{n-1})^T$, on peut dire que $(*)$ a une unique solution y tel que :

$$y^{(k)}(0) = c_k \quad \forall k = 0, \cdots, n-1$$

Sous-remarque

$$det(\lambda - A) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_0(\text{ exercice})$$

Problème : Comment calculer $exp(A)$?

- Si $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ est une matrice diagonale :

$$A^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^k \end{pmatrix} \implies exp(A) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

- Si $A = QDQ^{-1}$ où D est diagonale (c'est à dire A est diagonalisable).

$$exp(A) = exp(QDQ^{-1}) = Q \cdot exp(D) \cdot Q^{-1}$$

- Si $A = D + N$ où D est diagonale et N est nilpotente, c'est à dire que $N^n = 0$. (par exemple : forme canonique de Jordan).

  et si $N \cdot D = D \cdot N$:

$$exp(A) = exp(D+N) = exp(D) \cdot exp(N) = exp(D) \cdot \left(1 + N + \frac{N}{2} + \cdots + \frac{N^{n-1}}{(n-1)!}\right)$$

Par exemple : $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N^2 = 0$

$$exp(tA) = exp(tD) \cdot exp(tN) = \begin{pmatrix} e^{t\lambda} & 0 \\ 0 & e^{t\lambda} \end{pmatrix} \cdot (1 + tN)$$

$$= e^{\lambda t} \cdot \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Rappel (théorème de Caley-Hamilton)

Si $p(\lambda) = det(\lambda - A)$ est le polynôme caractéristique de A, alors $p(A) = 0$.

Méthode pour calculer $exp(tA)$

- 1) Si $p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1} \cdots (\lambda - \lambda_k)^{n_k}$ avec $\lambda_i \neq \lambda_j$.

  On cherche des polynômes $r_1(\lambda), \cdots, r_k(\lambda)$ tel que $r_1 + \cdots + r_k = 1$

  Et tel que $p(\lambda) | r_i(\lambda)(\lambda - \lambda_i)^{n_i}$

  Comment trouver les r_i ?

$$\frac{1}{p(\lambda)} = \frac{s_1(\lambda)}{(\lambda - \lambda_1)^{n_1}} + \cdots + \frac{s_k(\lambda)}{(\lambda - \lambda_k)^{n_k}} \text{ (décomposition en fractions partielles)}$$

  Donc $1 = \sum_{i=1}^{k} \underbrace{\frac{p(\lambda)}{(\lambda - \lambda_i)^{n_i}} s_i(\lambda)}_{r_i(\lambda)}$

- Puisque $p(A) = 0$, on a aussi :

$$(A - \lambda_i)^{n_i} r_i(A) = 0 \quad (= (p(A) s_i(A))$$

- On peut maintenant calculer :

$$exp(tA) r_i(A) = exp(t\lambda_i) \cdot exp(t(A - \lambda_i)) r_i(A)$$

$$= e^{t\lambda_i} \sum_{l=0}^{n_i - 1} \frac{t^l}{l!} (A - \lambda_i)^l \cdot r_i(A)$$

  Finalement :

$$exp(tA) = exp(tA)(r_1(A) + \cdots + r_k(A))$$

$$= \sum_{i=1}^{k} e^{t\lambda_i} \sum_{l=0}^{n_i - 1} \frac{t^l}{l!} (A - \lambda_i)^l \cdot r_i(A)$$

Remarque

$$n_i = 1 \quad (\forall i) \implies exptA = \sum_{i=1}^{n} expt\lambda_i r_i(A)$$

Exemples

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$
$p(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - 6 = (\lambda - 2)(\lambda + 3)$

$$\frac{1}{(\lambda-2)(\lambda+3)} = \frac{\frac{1}{5}}{\lambda - 2} - \frac{\frac{1}{5}}{\lambda + 3}$$

$\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -3$

$$r_1(\lambda) = \frac{1}{5}(\lambda + 3), r_2 = -\frac{1}{5}(\lambda - 2)$$

$$exptA = e^{2t} \cdot \frac{1}{5}(A + 3) - e^{-3t} \cdot \frac{1}{5}(A - 2)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$p(\lambda) = (\lambda + 1)^2$$

$\lambda_1 = -1, r_1(\lambda) = 1$

$$exptA = e^{-t} \cdot (1 + t(A + 1)) = e^t \begin{pmatrix} 1 + 2t & 2t \\ -2t & 1 - 2t \end{pmatrix}$$

(on a utilisé que $(A + 1)^2 = 0$)

Rappel

$y' = A \cdot y$, tel que $y(0) = v \in \mathbb{C}^n$
$y(t) = e^{t \cdot A} v$ est la solution
Trouvons $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_0 \end{pmatrix}$ tel que $y' = A \cdot y$ où $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et tel que $y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = v$

$$e^{t \cdot A} = \begin{pmatrix} cos(t) & sin(t) \\ -sin(t) & cos(t) \end{pmatrix}$$

$$e^{t \cdot A} v = \begin{pmatrix} cos(t) \\ sin(t) \end{pmatrix}$$

Le problème à résoudre est :

$$y'(t) = A \cdot y(t) + b(t)$$

si $b : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$ est donnée.
Méthode : variation de constantes. (déjà vu pour le cas $y'(t) = a(t)y(t) + b(t)$)

On pose : $y(t) = e^{t\cdot A}z(t), z : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$
$(z(t) = e^{-t\cdot A}y(t))$

$$y'(t) = A \cdot e^{t\cdot A}z(t) + e^{t\cdot A}z'(t)$$
$$\overset{!}{=} A \cdot y(t) + b(t)$$

$$z'(t) = e^{-t\cdot A}b(t)$$

$$\implies z(t) = \int e^{-t\cdot A}b(t)\mathrm{d}t + c \quad (c \in \mathbb{C}^n)$$

$$y(t) = e^{t\cdot A}\int e^{-t\cdot A}b(t)\mathrm{d}t + e^{t\cdot A}c$$

Remarque

Comment résoudre :
$$a^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y = b(t) \quad (*)$$
où $b : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est une fonction donnée.
On peut transformer $(*)$ en un système d'ordre 1 et on applique la variation de constantes.

4.5 Systèmes d'équations différentielles ordinaires linéaires générales

Problème

Résoudre $y'(t) \overset{(*)}{=} A(t)y(t)$ avec $A : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^{n\times n}$ est une fonction donnée et on cherche $y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$.

L'idée : on va construire une suite de fonctions $y_0, y_1, \cdots : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$ de "solutions approximatives" de $(*)$ et finalement, on trouve $y(t)$ comme étant : $\lim\limits_{n\to\infty} y_n(t)$.

Cette méthode s'appelle l'approximation de Picard.
On pose $y_0(t) = v \in \mathbb{C}$
Puis, $y_1'(t) = A(t)y_0(t)$ avec $y_1(0) = v$
C'est à dire $y_1(t) = \displaystyle\int_0^t A(s)y_0(s)\mathrm{d}s + v$

$$y_n'(t) = A(t)y_{n-1}(t) \text{ avec } y_n(0) = v$$

C'est à dire, $y_n(t) = v + \displaystyle\int_0^t A(s)y_{n-1}(s)\mathrm{d}s$
Autrement dit, on construit $M_0(t), M_1(t), \cdots$ des matrices $n \times n$ tel que $y_k(t) = M_k(t)v$
Par :
$M_0(t) = 1$
$M_1'(t) = A(t)M_(t), M_1(0) = 1$
C'est à dire : $M_1(t) = 1 + \displaystyle\int_0^t A(s)M_0(s)\mathrm{d}s$
$M_K(t) = 1 + \displaystyle\int_0^t A(s)M_{k-1}(s)\mathrm{d}s$
On va montrer que : $M(t) = \lim\limits_{k\to\infty} M_k(t)$ existe et que :
$M'(t) = A(t)M(t)$ avec $M(0) = 1$

Exemple

Si $A(t) = A$ est constante.
$M_0(t) = 1$
$M_1(t) = 1 + \int_0^t A\mathrm{d}s = 1 + t \cdot A$
$M_2(t) = 1 + \int_0^t \underbrace{A(1 + s \cdot A)}_{M_1} \mathrm{d}s = 1 + t \cdot A + \frac{t^2}{2} \cdot A^2$
$M_k(t) = 1 + t \cdot A + \frac{t^2}{2} + \cdots + \frac{t^k}{k!} A^k$
Et donc $\lim\limits_{k \to \infty} M_K(t) = e^{t \cdot A}$

Théorème

On suppose que $A : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^{n \times n}$ est continue.
La suite de fonctions $M_k : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^{n \times n}$ converge ponctuellement, et cette convergence est uniforme sur l'intervalle $[-N, N] \quad \forall N > 0$.
La limite $M(t) = \lim\limits_{k \to \infty} M_k(t)$ satisfait $M'(t) = A(t)M(t)$ et $M(0) = 1$

Preuve

(l'idée est d'utiliser le critère de Weierstrass)

$$||M_k(t) - M_{k-1}(t)||_1 = \left|\left| \int_0^t A(s) \left(M_{k-1}(s) - M_{k-2}(s)\right) \mathrm{d}s \right|\right|_1$$

$$\leq \left| \int_0^t ||A(s)||_1 \quad ||M_{k-1}(s) - M_{k-2}(s)||_1 \mathrm{d}s \right| \leq C_N$$

Sur $[-N, N]$, la fonction $||A(s)||_1$ est continue $\implies$ bornée. Posons $C_N = s \in \underset{max}{[-N, N]} ||A(s)||_1$

$$\leq C_N \left| \int_0^t ||M_{k-1}(s) - M_{k-2}(s)||_1 \mathrm{d}s \right|$$

Si $t \in [-N, N]$

$$\geq ||M_k(t) - M_{k-1}(t)||_1$$

On a $|| \underbrace{M_0(t)}_{=1} - \underbrace{M_{-1}(t)}_{=0} ||_1 = n$
$k = 1$:

$$||M_1(t) - M_0(t)||_1 \leq C_N \left| \int_0^t n\mathrm{d}s \right| = n \cdot C_N |t|$$

$k = 2$:

$$||M_2(t) - M_1(t)||_1 \leq C_N \left| \int_0^t nC_N |s| \mathrm{d}s \right| = nC_N^2 \frac{|t^2|}{2}$$

$$\vdots$$

$$||M_k(t) - M_{k-1}(t)||_1 \leq nC_N^k \frac{|t|^k}{k!} \leq n \cdot \frac{N^k}{k!} \text{ sur } [-N, N]$$

On a :

$$||M_k(t) - M_{k-1}(t)||_1 \leq n \cdot \frac{(C_N \cdot N)^k}{k!}$$

car $\sum_{k=0}^{\infty} n \frac{(C_N \cdot N)^k}{k!} = nexp(C_N \cdot N)$ converge.
Par Weierstrass, la suite M_k converge uniformément sur $[-N, N]$.
Car $\lim_{k\to\infty} = \sum_{k=0}^{\infty}(M_k - M_{k-1})$
On a donc $(\forall k) \quad M_k'(t) = A(t)M_{k-1}(t) \underset{k\to\infty}{\to} A(t)M(t)$
Donc la suite M_K' converge uniformément, donc on peut échanger lim et dérivée et on obtient :

$$M'(t) = A(t)M(t).$$

□

Théorème

$\forall v \in \mathbb{C}^n, \quad \exists! y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$ tel que $y(0) = v$ et $y'(t) = A(t)y(t)$.
On a $y(t) = M(t)v$

Preuve

Vérifions que $y(t) = M(t)v$ est une solution :
$y'(t) = M'(t)v = A(t)M(t)v = A(t)y(t)$ et $y(0) = M(0)v = 1 \cdot v = v$
L'unicité de y :
Supposons que $M(t)$ est inversible $\forall t \in \mathbb{R}$ (à montrer plus tard).
Si $y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$, on pose $z(t) = M^{-1}(t)y(t)$, c'est à dire $y(t) = M(t)z(t)$.
On a donc :
$y'(t) = M'(t)z(t) + M(t)z'(t) = A(t)\underbrace{M(t)z(t)}_{y(t)} + M(t)z'(t) \overset{!}{=} A(t)y(t)$ c'est à dire $M(t)z'(t) = 0$,
Donc $z'(t) = 0$, donc $z \in \mathbb{C}^n$ est une constante.
Pour montrer que $M(t)$ est inversible.
$M(0) = 1$ est inversible.
Supposons que $\exists t > 0$ tel que $M(t)$ n'est pas inversible et on pose :
$t_0 = \underbrace{t > 0}\, inf\{t | det(M(t)) = 0\}$
$det(M(t))$ est une fonction continue.
Dessin
Soit $\tilde{M}(t)$ une solution de $\tilde{M}(t_0) = 1, \quad \tilde{M}(t) = A(t)\tilde{M}(t)$. On sait que $\tilde{M}$ est inversible sur $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ (car $det(\tilde{M}(t))$ est continue, $=1$ en $t = t_0$)
On a sur $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$:

$$M(t) = \tilde{M}(t)K(t) \text{ où } K(t) = \tilde{M}(t)^{-1}M(t)$$

Et donc :

$$\underbrace{M'(t)}_{=A(t)M(t)} = \underbrace{\tilde{M}'(t)K(t) + \tilde{M}(t)K'(t)}_{A(t)\underbrace{\tilde{M}(t)K(t)}_{M(t)}+\tilde{M}(t)K'(t)}$$

$\implies K' = 0 \implies K$ est constant $\implies M(t)$ est soit inversible soit non-inversible sur tout $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) ABSURDE$ $\square$

Résumé de la partie 4

- EDO non-linéaire :
  - séparable
  - homogène
  - $y'' = f(y, y')$ réduction d'ordre
- EDO linéaires :
  - $y'(t) = a(t)y(t) + b(t)$ (variation de constante)
  - $p(D)y = 0 \quad (y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1} + \cdots + a_0 y = 0)$
  - système $y' = A \cdot y$ (vecteurs propres /valeurs propres ou $exp(A)$)

5 Fonctions à plusieurs variables

Problème typique :
Trouver les maximas et les minimas de :

$$f(x,y) = x^2y + xy + y^2$$

5.1 La différentielle et les dérivées partielles

On va étudier des fonctions :

$$f : \underbrace{\mathbb{R}^k}_{=V} \to \underbrace{\mathbb{R}^l}_{=W}$$

Ou plus généralement :

$$f : \underset{\underset{\text{ouvert}\subset}{V}}{\mathbb{U}} \to \mathbb{W}$$

Définition

Si $a \in \mathbb{U}, v \in \mathbb{V}$, alors la dérivée directionnelle :

$$\partial_V f(a) = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(a+tv)\right)\Bigg|_{t=0}$$

Si $x_1, \cdots, x_k$ sont les coordonnées sur $\mathbb{V} = \mathbb{R}^k$ et si $e_1, \cdots, e_k$ est la base canonique de $\mathbb{V} = \mathbb{R}^k$, alors la dérivée partielle est :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \partial_{e_i} f(a)$$

Dessin

Remarque

Comment calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$?

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \cdots, x_k) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(x_1, x_2, \cdots, x_i + t, x_{i+1}, \cdots, x_k)\Bigg|_{t=0}$$

qui est la dérivée de f par x_i si les autres variables sont vues comme des constantes.

Exemple

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$$f(x,y) = sin(x+y+xy)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = cos(x+y+xy)(1+y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = cos(x+y+xy)(1+x)$$

Remarque

Si $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$, c'est à dire $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_l \end{pmatrix}$ où $f_i : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$

Alors :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_i} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_i} \end{pmatrix}$$

Définition

$f : \underset{\subset V}{U} \to W$ est <u>différentiable</u> en $a \in U$ si il existe une fonction linéaire $d_a f : V \to W$ (appelée la <u>différentielle</u> de f en $a \in U$) tel que $(h \in V)$;

$$f(a+h) = f(a) + d_a f(h) + o(||h||)$$

Explication de $o(h)$

On a : $f(a+h) = f(a) + d_a f(h) + R(h)$
On écrit $R(h) = o(||h||)$ si "R est négligeable par rapport à $||h||$", c'est à dire si :

$$\lim_{k \to 1} \frac{R(h)}{||h||} = 0$$

C'est à dire si $R(h) = ||h||v(h)$ et $v(0) = 0, v$ est continue en 0.

Exemple

Si $V = W = \mathbb{R}$ et $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
Si $f'(a)$ existe, $(a \in \mathbb{R})$, alors $f(a+h) = f(a) + f'(a)h + o(|h|) \quad h \in \mathbb{R}$
Donc $d_a f(h) = f'(a)h$

Proposition

Si $d_a f$ existe, alors $\partial_v f(a) = d_a f(v)$

Preuve

$$\partial_V f(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{d_a f(tv) + o(|t|||v||)}{t} = d_a f(tv) \underbrace{\lim_{t \to 0} \frac{o(|t|)}{t}}_{=0}$$

□

En particulier :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = d_a f(e_i)$$

$$\text{car} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \partial_{e_i} f(a)$$

$$\partial_v f(v) = d_a f(v)$$

Proposition

Si $d_a f$ existe, alors

$$d_a f(v) = \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial f(a)}{\partial x_i} v_i$$

(ici, $v = \sum v_i e_i, v_i \in \mathbb{B}$)

Preuve

$$d_a f(v) = d_a f\left(\sum_i v_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{k} v_i d_a f(e_i) = \sum_{i=1} v_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$$

□

Si $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, alors la matrice de $d_a f$ est :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \frac{\partial f}{\partial x_2}(a), \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_k}(a)\right)$$

Si $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_k \end{pmatrix}$$

($f_j : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, alors la matrice $d_a f$ est :

$$\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a)\right)_{i,j} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_k}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_l}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_l}{\partial x_k}(a) \end{pmatrix}$$

Proposition

f est C^1 si $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots, \dfrac{\partial f}{\partial x_k}$ sont des fonctions continues.

Théorème

Si $f : \underset{\subset V}{U} \to W$, est C^1, alors f est différentiable partout, c'est à dire, $d_a f$ existe $\forall a \in U$.

Preuve

Plus tard

Proposition

Si f est différentiable en $a \in U$ (c'est à dire si $d_a f$ existe), alors f est continue en a.

Preuve

$f(a+h) = f(a) + d_a f(h) + o(||h||)$
$\lim\limits_{t \to 0} = f(a) + 0 + 0)f(a)$ $\square$

f est $C^1 \implies \underset{\implies f\text{continue}}{f\text{différentiable}} \implies \partial f$ existe $(\forall v) \implies \dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ existent.

Exemple

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad \begin{pmatrix} r \\ \Phi \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} rcos(\Phi) \\ rsin(\Phi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
La matrice de df est :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \Phi} \\ \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \Phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos(\Phi) & -rcos(\Phi) \\ \\ sin(\Phi) & rcos(\Phi) \end{pmatrix}$$

(f est $C^1 \implies f$ est différentiable)

Exemple

Si $f : V \to W$ est linéaire, alors f est différentiable, et $(\forall a \in V)$, $d_a f = f$ car $f(a+h) = f(a) + f(h) = d_a f(h)$

En particulier, les coordonnées :

$$x_i : \begin{aligned} \mathbb{R}^k &\to \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} &\to x_i \end{aligned}$$

est linéaire. $d_a x_1(h) = h_1$ où $h = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_k \end{pmatrix}$

La matrice de $d_a x^i$ est $\begin{pmatrix} 0, & 0, & \cdots & 0, & 1, & 0, & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ avec le 1 à la i-ème position.

Proposition

Si $d_a f$ existe, alors :

$$d_a f = \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) d_i x_i$$

Preuve

Il faut montrer : $\forall h \in \mathbb{R}^k$

$$d_a f(h) \stackrel{!}{=} \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \underbrace{d_i x_i(h)}_{=h_i}$$

$\square$

Exemple

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
$f(x, y) = sin(x + y + xy)$

$$\begin{aligned} \mathrm{d}f &= \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y \\ &= cos(x + y + xy)\left((1 + y)\mathrm{d}x + (1 + x)\mathrm{d}y\right) \end{aligned}$$

Défintion

Si $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ est différentiable, alors $a \in \mathbb{R}^k$ est un <u>point critique</u> si $d_a f = 0$ (c'est à dire $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0 \forall i$)

Proposition

Si a est un extremum local, de f, alors a est un point critique.

Preuve

Si a est un extremum local, et si $g(t) = f(a+tv)(v \in \mathbb{R}^k)$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, alors 0 est un extremum local de g, donc :

$$\frac{d}{dt}g(0) = 0 = \partial_v f(u)$$

On a donc $d_a f(v) \partial_v f(u) = 0 (\forall v) \implies d_a f = 0$

Théorème

Si $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$ est C^1, alors f est différentiable.

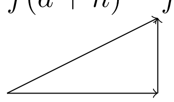
Preuve

Si $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_l \end{pmatrix}$, $f_i : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, alors il suffit de montrer le théorème pour les $f_i : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, donc on peut supposer que $l = 1$.

Pour simplifier la preuve, on suppose $k = 2$.

Soient $a \in \mathbb{R}^2$, $h\mathbb{R}^2, h = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = h_1 e_1 + h_2 e_2$

$f(a+h) - f(a) = f(a+h_1e_1) - f(a) + f(a+h) - f(a+h_1e_1)$



$h_1 e_1$

On utilise les accroissements finis :

$$g_1(t) = f(a+te_1)$$

$$f(a+h_1e_1) - f(a) = g_1(h_1) - g_1(0) = \underset{s_1 \in [0,h_1]}{h_1 g_1'(s_1)} = h_1 \cdot \frac{\partial f}{\partial x_1} \overbrace{(a+s_1e_1)}^{b_1}$$

Dessin

$$g_2(t) = f(a+h_1e_1+te_2)$$

$$f(a+h) - \underset{s_2 \in [0,h_2]}{f(a+h_1e_1)} = g_2(h_2) - g_2(0)$$

$$\overset{\text{TAF}}{=} h_2 g_2'(s_2) = h_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} \overbrace{(a+h_1e_1+s_2e_2)}^{b_2}$$

$$f(a+h) = h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(b_1) + h_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(b_2)$$

$$= h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) + h_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) + \underbrace{h_1 \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(b_1) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \right)}_{=o(||h||)} + \underbrace{h_2 \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}(b_2) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) \right)}_{=o(||h||)}$$

Mais

$$\lim_{h\to 0} \overbrace{\frac{h_1}{||h||}}^{\in[-1,1]} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(b_1) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\right) = 0$$

$$\text{car } h \to 0 \implies b_1 \to a \implies \frac{\partial f}{\partial x_1} \text{ continue}$$

□

Théorème

(régle de la chaine)

Soient : $\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^k & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^l & \xrightarrow{g} & \mathbb{R}^n \\ a & \to & b & \to & c \end{array}$

Supposons que $d_a f$ et $d_b g$ existent. Alors :

$$d_a(g \circ f) = d_b g \circ d_a f$$

(La linéarisation de la composition est la composition des linéarisations)

Preuve

$$g(f(a+h)) = g(\overbrace{f(a)}^{b} + d_a f(h) + o(||h||))$$

$$= \overbrace{g(f(a))}^{g(b)} + \underbrace{d_b g(d_a f(h))}_{d_a(g\circ f)} + \underbrace{d_b g(o(||h||))}_{o(||h||)} + \underbrace{o\left(||d_a f(h) + o(||h||)||\right)}_{o(||h||)}$$

□

Remarque

Comment calculer les dérivées partielles avec ce théorème avec la règle de la chaîne ?

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} \xrightarrow{f} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_l \end{pmatrix} \xrightarrow{y} \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_m \end{pmatrix}$$

La matrice de $d_a f$ est : $\left(\frac{\partial y_q}{\partial x_r}\right)_{q.r}$, aussi $d_b g = \left(\frac{\partial z_p}{\partial y_q}\right)$

Le théorème dit :

$$\frac{\partial z_p}{\partial x_r} = \sum_{q=1}^{l} \frac{\partial z_p}{\partial y_q} \cdot \frac{\partial y_q}{\partial x_r}$$

Exemple

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} y_1 = x_1 + x_2 \\ y_2 = x_1 x_2 \end{pmatrix} \to z = sin(y_1 + y_2)$$

$$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$sin(x_1 + x_2 + x_1 x_2)$
On a :

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = \frac{\partial z}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_1} + \frac{\partial z}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_1}$$

$$= cos(y_1 + y_2) + cos(y_1 + y_2) \cdot x_2$$

$$= cos(x_1 + x_2 + x_1 x_2) \cdot (1 + x_2)$$

Remarque

On peut écrire la règle de la chaîne aussi comme :

$$\sum_r \frac{\partial z_p}{\partial x_r} dx_r = dz_p = \sum_{q=1}^{l} \frac{\partial z_p}{\partial y_q} dy_q = \sum_{q,r} \frac{\partial z_p}{\partial y_q} \underbrace{\frac{\partial y_q}{\partial x_r} dx_r}_{dy_q}$$

$$\implies \frac{\partial z_p}{\partial x_r} = \sum_q \frac{\partial z_p}{\partial y_q}\frac{\partial y_q}{\partial x_r}$$

5.2 Dérivées partielles supérieures

Définition

$f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$ est C^n si toutes les n-ièmes dérivées partielles de f existent et elles sont continues.

Théorème

Si $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$ est C^2, alors

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

Preuve

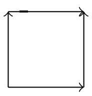
On peut supposer que $l = 1$ (si $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_l \end{pmatrix}$, il suffit de montrer le théorème pour les f_i)
L'idée est d'approximer les dérivées par des différences :
Si $v \in \mathbb{R}^k$, on pose :

$$(\Delta_v)f(x) = f(x+v) - f(x)$$
$$\Delta_v f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$$

Si $v, w \in \mathbb{R}^k$, alors :

$$\Delta_v(\Delta_w f)(x) = \Delta_w(\Delta_v f)(x)(*)$$

$$= f(a+v+w) - f(a+v) - f(a+w) + f(a)$$



On va montrer :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \lim_{t\to 0} \frac{\Delta_{te_j}\Delta_{te_i} f}{t^2}(+)$$

$$(*) + (+) \implies \text{ Théorème}$$

Pour montrer $(+)$, on utilise le théorème des acroissements finis.
Si $\tilde{f} : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, alors :
On pose $g(t) = \tilde{f}(t + te_i)$

$$\Delta_{te_i}\tilde{f}(a) = g(t) - g(0) \overset{\text{TAF}}{=} tg'(\tilde{t}) \quad \tilde{t} \in [0,t]$$
$$= t\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i}(a + \tilde{t}e_i)$$

On a donc :

$$\frac{\Delta_{te_j}\overbrace{\Delta_{te_i} f}^{\tilde{f}}(a)}{t^2}$$

$$= \frac{\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\Delta_{te_i} f\right)\left(a + \tilde{t}e_j\right)}{t}$$

$$= \frac{\Delta_{te_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}\left(a + \tilde{t}e_j)\right)}{t}$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\overbrace{\left(a + \tilde{t}e_i + \tilde{\tilde{t}}e_j\right)}^{\to a} \overset{f \text{ est } C^2}{\underset{t\to 0}{\to}} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)$$

$$\tilde{t}, \tilde{\tilde{t}} \in [0,t]$$

$\square$

Corollaire

Si f est C^n, alors les n-ièmes dérivées partielles ($\forall m \leq n$), ne dépendent pas de l'ordre.
Par exemple :

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z} = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial z} = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial z \partial x} = \frac{\partial^3 f}{\partial z \partial y \partial x}$$

Rappel

- $\displaystyle \frac{\partial z_k}{\partial x_i} = \sum_i \frac{\partial z_k}{\partial y_j} \frac{\partial y_j}{\partial x_i}$
- $\displaystyle \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ si f est C^2

Théorème

(Taylor d'ordre 2)
Si $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ est C^2, alors :

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial f(a)}{\partial x^i} h_i + \sum_{i,j=1}^{k} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i \partial x_j} h_i h_j + o(||h||^2)$$

Preuve

On définit :
$g_h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $g_h(t) = f(a+th)$
Par Taylor-Lagrange :

$$f(a+h) = g_h(1) \overset{\text{TL}}{=} g_h(0) + g_h'(0) + \frac{1}{2} g_h''(t_h) \quad (*)$$

Où $t_h \in [0,1]$
$g_h(0) = f(a)$
$g_h'(t) = \sum\limits_i \dfrac{\partial f(a+th)}{\partial x^i} h_i$ par la règle de la chaîne.

$$g_h''(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\sum_i \frac{\partial f(a+th)}{\partial x_i} h_i \right) = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f(a+th)}{\partial x_i \partial x_j} h_i h_j$$

$(*)$ nous donne :

$$f(a+h) = f(a) + \sum_i \frac{\partial f(a)}{\partial x_i} h_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f(a+t_h h)}{\partial x_i \partial x_j} h_i h_j$$

Finalement :

$$\frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f(a+t_h h)}{\partial x_i \partial x_j} h_i h_j = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i \partial x_j} h_i h_j + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \underbrace{\left(\frac{\partial^2 f(a+t_h h)}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i \partial x_j} \right)}_{\to 0 quand h \to 0 car f est C^2} h_i h_j$$

$|h_i| \leq ||h|| \quad |h_j| \leq ||h||$

$$\implies = o(||h||^2)$$

$\square$

Rappel

Si $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ a un extremum local en $a \in \mathbb{R}$, alors $\dfrac{\partial f(a)}{\partial x_i} = 0$, donc :

$$f(a+h) = f(a) + \underbrace{\frac{1}{2}\sum_{i,j} \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i \partial x_j} h_i h_j}_{\text{polynôme quadratique en } (h_1, h_2, \cdots, h_k)} + o(||h||^2)$$

5.3 Formes quadratiques

Une forme quadratique en variables $x_1, \cdots x_k$ est un polynôme quadratique homogène :

$$q(x_1, \cdots, x_k) = \sum_{i,j=1}^{k} B_{ij} x_i x_j \quad B_{ij} \in \mathbb{R}$$

On peut supposer que $B_{ij} = B_{ji}$ si B est la matrice $k \times k$ avec les éléments B_{ij} alors $q(x) = x^T B x$ où $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix}$

Exemple

$q(x_1, x_2) = x_1^2 + 6x_1x_2 + 5x_2^2$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Est-ce que $q(x_1, x_2) \geq 0 \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^2$?
On complète les carrés :

$$q(x_1, x_2) = (x_1 + 3x_2)^2 - 4x_2^2 = y_1^2 - y_2^2$$

Où $y_1 = x_1 + 3x_2$ et $y_2 = 2x_2$
La réponse est non.
(e.g $y_1 = 0, y_2 = 1, \to q = -1$)
Dessin

Théorème

Si $q(x_1, \cdots, x_n)$ est une forme quadratique, alors $\exists$ un changement de base tel que :

$$q = y_1^2 + \cdots + y_{n_+}^2 - y_{n_++1}^2 - \cdots - y_{n_++n_-}^2$$

Méthode : Compléter les carrés et $x_1x_2 = \overbrace{(y_1+y_2)}^{x_1}\overbrace{(y_1-y_2)}^{x_2} = y_1^2 - y_2^2$

Définition

Si V est une espace vectoriel réel (ou sur un corps K), alors une forme bilinéaire symétrique sur V est une application : $B : V \times V \to \mathbb{R} \quad ($ ou $K)$ tel que :

- $B(u,v) = B(v,u) \quad \forall u, v \in V$ (symétrie)
- $B(\alpha u + \beta v, w) = \alpha B(u,w) + \beta B(v,w) \quad \forall u, v, w \in V, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}($ ou $K)$

Exemple

Produit scalaire = forme symétrique bilinéaire tel que $B(u,v) > 0 \quad \forall v \neq 0$
Si $e_1, \cdots e_n$ est une base de V. On pose $B_{ij} = B(e_i, e_j) \in \mathbb{R}$
Si $u = \sum\limits_{n=0}^{n} u_i e_i, v = \sum\limits_{i=1}^{n} v_i e_i \quad u_i, v_i \in \mathbb{R}$
Alors

$$B(u,v) = B\left(\sum_{i=1}^{n} u_i e_i, \sum_{j=1}^{n} v_j, e_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} u_i v_j B(e_i, e_j) = \sum_{i,j=1}^{n} B_{ij} u_i v_j$$

Si B est la matrice avec les éléments B_{ij}, alors $B(u,v) = u^T B v$

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

Remarque

La matrice B est symétrique car $B_{ij} = B(e_i, e_j) = B(e_j, e_i) = B_{ji}$
On a donc une bijection entre les formes symétriques bilinéaires et les matrices symétriques $n \times n$ (si une base est choisie).

Définition

La forme quadratique q associée à une forme bilinéaire symétrique B est $q(v) = B(v,v)$
Avec les matrices :

$$q(v) = v^T B v = \sum_{i,j=1}^{n} B_{ij} v_i v_j$$

Exemple

Si $B(u,v) = u \cdot v \quad (V = \mathbb{R}^n)$, alors $q(v) = v \cdot v = ||v||^2$

Remarque

On peut calculer B à partir de q :

$q(u+v) = B(u+v, u+v) = \overbrace{B(u,u)}^{q(u)} + \overbrace{B(v,v)}^{q(v)} + 2B(u,v)$

Donc :

$$B(u,v) = \frac{q(u+v) - q(u) - q(v)}{2}$$

Si une base est choisie :

$$B(u,v) = u^T B v$$

Si on change la base :

Si Q est la matrice $(n \times n)$ du changement de base :

$$v_{\text{new}} = Q^{-1} v$$
$$u_{\text{new}}^T = (Q^{-1}u)^T = u^T (Q^{-1})^T$$

Et on veut :

$$u_{\text{new}}^T B_{\text{new}} v_{\text{new}} \stackrel{!}{=} u^T B v = u_{\text{new}}^T (Q)^T B Q v_{\text{new}}$$

$(v = Q v_{\text{new}}, \quad u = Q u_{\text{new}})$

Changement de base :

$$B \rightsquigarrow Q^T B Q$$

Théorème

Si B est une matrice symétrique $n \times n$ réelle, alors $\exists$ matrice $n \times n$ Q inversible tel que $Q^T B Q$ est diagonalisable avec $\pm 1, 0$ sur la diagonale.

C'est à dire pour toute forme quadratique q, il existe une base tel que :

$$q(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i^2, \quad c_i \in \{-1, 0, +1\}$$

Rappel

$\exists Q$ tel que $Q^T = Q^{-1}$ (c'est à dire Q est orthogonale) tel que $Q^{-1} B Q$ est diagonale.

($\exists$ vecteurs propres de B qui forment une base orthogonale de $\mathbb{R}^n$)

Rappel

Formes quadratiques :

$$q(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} B_{i,j} x_i x_j = x^T B x$$

Formes symétriques bilinéaires :

$$B(u,v) = u^T B v$$

Si on change la base de $\mathbb{R}^n$:

$$B \rightsquigarrow Q^T B Q$$

(Q est la matrice de changement de base)

Théorème

Si B est une matrice symétrique $n \times n$ alors $\exists Q$ une matrice $n \times n$ inversible telle que $Q^T BQ$ est diagonale, avec $\pm 1, 0$ sur la diagonale. C'est à dire, après le changement de base, q se simplifie en :

$$q = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i^2, \quad c_i \in \{+1, -1, 0\}$$

Preuve/Algorithme

On utilise consécutivement des matrices Q élémentaires, c'est à dire on applique des opérations élémentaires sur les lignes de B et (les mêmes opérations) sur les colonnes.

- Cas 1 $B_{1,1} \neq 0$, et si $B_{1,i} \neq 0 (i \neq 1)$

  On fait : $l_i \to l_i - cl_1$ avec $c = \dfrac{B_{1,i}}{B_{1,1}}$ où l_i est la i-ième ligne.

  Pour que $B_{1,i} \to 0$, il faus aussi appliquer $c_i \to c_i - cc_i$

  Exemple

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \underset{l_2 \to l_2 - 2l_1}{\to} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \underset{c_2 \to c_2 - 2c_1}{\to} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- Cas 2 $B_{1,1} = 0, B_{1,i} \neq 0$ On peut faire : $l_1 \to l_1 + l_2, c_1 \to c_1 + c_2$ et on est dans le Cas 1.

  Exemple

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \underset{l_1 \to l_1 + l_2}{\to} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \underset{c_1 \to c_1 + c_2}{\to} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Algorithme :

■	0	0	0	0
0	■	0	0	0
0	0	■	0	0
0	0	0	■	0
0	0	0	0	■

Exemple

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&0\\3&0&1\end{pmatrix}\underset{l_2\to l_2-2l_1}{\longrightarrow}\begin{pmatrix}1&2&3\\0&-3&-4\\3&0&1\end{pmatrix}\underset{l_3\to l_3-3l_1}{\longrightarrow}\begin{pmatrix}1&2&3\\0&-3&-4\\0&-6&-8\end{pmatrix}$$
$$\underset{\substack{c_2\to c_2-2c_1\\c_3\to c_3-3c_1}}{\longrightarrow}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-3&-6\\0&-6&-8\end{pmatrix}\underset{l_3\to l_3-2l_2}{\longrightarrow}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-3&-6\\0&0&4\end{pmatrix}\underset{c_3\to c_3-2c_2}{\longrightarrow}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-3&0\\0&0&4\end{pmatrix}$$
$$\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\qquad x_1^2 1 x_2^2+x_3^2$$

Finalement, on fait :
$l_i\to\alpha_i l_i, c_i\to\alpha_i c_i$ avec $\alpha_i\in\mathbb{R}$ convenables pour que les éléments de la diagonale soient transformés en ±1 ou 0. $\square$

Terminologie

Si B est une matrice symétrique et si $N=Q^TBQ$ est diagonale (Q inversible), on pose :

$$\begin{aligned}n_+ &= \#\text{ éléments } >0 \text{ sur la diagonale de } N\\ n_- &= \#\text{ éléments } <0 \text{ sur la diagonale de } N\\ n_0 &= \#\text{ éléments } =0 \text{ sur la diagonale de } N\end{aligned}$$

Le triplet (n_+,n_-,n_0) est la signature de B (ou de q).

- On dit que B est définie positive si $n_+=n, n_-=0, n_0=0$.
  C'est à dire $q(x)=x^TBx>0\quad\forall 0\neq x\in\mathbb{R}^n$
- On dit que B est définie négative si $n_-=n, n_+=0, n_0=0$.
  C'est à dire $q(x)=x^TBx<0\quad\forall 0\neq x\in\mathbb{R}^n$
- On dit que B est semi définie positive si $n_-=0$.
  C'est à dire $q(x)=x^TB\geq 0\quad\forall 0\neq x\in\mathbb{R}^n$
  (par exemple, $q(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2$ est semi définie positive, $n_+=2, n_-=0, n_0=1$ donc pas définie positive)
- On dit que B est indéfinie si $n_+>0, n_->0$.
  C'est à dire si $\exists x,y\in\mathbb{R}^n$ tels que $q(x)>0, q(y)<0$

Remarque

- La signature de B est indépendante de Q (preuve $\to$ série)
- Les formes quadratiques / symétriques bilinéaires "existent dans la nature"
- Le produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$ et $||\cdot||^2$
- $q(x,y,z,t)=x^2+y^2+z^2-c^2t^2$ Signature : $n_+=3, n_-=1, n_0=0$

5.4 Extremums et selles

Rappel

Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et si f a un extremum local en $a \in \mathbb{R}^n$, alors $\dfrac{\partial f(a)}{\partial x_i} = 0 \quad \forall i$. C'est à dire a est un point critique.

Taylor :

si f est C^2 :

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(a)}{\partial x_i} h_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i \partial x_j} h_i h_j + o(||h||^2)$$

Où $\sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial f(a)}{\partial x_i}$ est la différentielle $(d_a f(h)$.

Où $\dfrac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \dfrac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i \partial x_j}$ est une forme quadratique pour $h = (h_1, \cdots, h_n)$

Terminologie

$$H_a f = \left(\frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{i,j=1}^{n}$$

est la matrice Hessienne de f et $H_a f(h) = \sum_{i,j=1}^{n} \dfrac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i \partial x_j} h_i h_j$ est la forme quadratique Hessienne.

Théorème

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction C^2 et soit $a \in \mathbb{R}^n$ un point critique de f.

- Si $H_a f$ est définie positive, alors a est un minimum local stricte de f.
- Si $H_a f$ est définie négative, alors a est un maximum local stricte.
- Si $H_a f$ est indéfinie, alors a est n'est pas un extremum local de f. On dit que a est une selle.

Remarque

Si $n_+ > 0, n_- = 0, n_0 > 0$, alors le théorème ne dit rien.

Preuve

- Si $H_a f$ est définie positive, on change la base de $\mathbb{R}^n$ pour que $H_a f(h) = ||h||^2$

  Soit $\varepsilon > 0$ tel que $|r(h)| < \dfrac{1}{4}||h||^2$

  Où $r(h)$ est le reste dans le développement de Taylor qui est $o(||h||^2)$

  Pour $||h|| < \varepsilon$ on a :

$$f(a+h) \overset{\text{Taylor}}{=} f(a) + \frac{1}{2}\underbrace{||h||^2}_{H_af(a)} + r(h) > f(a) + \frac{1}{4}||h||^2 > f(a) \text{ si } h \neq 0$$

Donc a est un minimum local stricte.

- Si H_af définie négative - pareil.
$$H_af(a) = -||h||^2$$
- Si H_af est indéfinie, on change la base pour que H_af soir diagonale avec $\pm 1, 0$ sur la diagonale.

  H_af indéfinie $\implies \exists$ vecteurs v, w (on peut choisir des éléments de la base) tel que $||v|| = 1 = ||w||$ et $H_af(v) = +1$ et $H_af(w) = -1$

  On a :

$$f(a+tv) = f(a) + \underbrace{\frac{1}{2}t^2}_{=H_af(tv)} + \underbrace{r(tv)}_{\text{borné par} \pm \frac{1}{4}t^2} \qquad |t| < \varepsilon$$

$\implies f(a+tv) =\geq f(a) + \frac{1}{4}t^2$

Aussi :

$$f(a+tv) \leq f(a) - \frac{1}{4}t^2$$

$\implies a$ n'est ni un maximum ni un minimum local. $\square$.

Proposition

Si $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Alors :

B est définie positive ssi $det(B) > 0$ et $a > 0$. B est définie négative ssi $det(B) > 0$ et $a < 0$. B est indéfinie ssi $det(B) < 0$.

Preuve

$\exists Q$ inversible tel que $Q^TBQ = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 \end{pmatrix}$ où $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \{0, 1, -1\}$

$\implies det(Q^TBQ) = \varepsilon_1\varepsilon_2$.

Mais aussi :

$$det(Q^TBQ) = \overbrace{det(Q^T)}^{det(Q)} det(B)det(Q) = det(Q)^2 det(B)$$

$$\implies \varepsilon_1\varepsilon_2 = sym(det(B)) \in \{1, -1, 0\}$$

Donc $det(B) > 0$ si et seulement si $\varepsilon_1\varepsilon_2 = 1$ si et seulement si $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$ si et seulement B est définie positive ou négative.

Mais $\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} B \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = a \implies \begin{cases} a > 0 & \implies B \text{ est définie positive} \\ a < 0 & \implies B \text{ est définie négative} \end{cases}$

$det(B) < 0$ si et seulement si $\varepsilon_1\varepsilon_2 = -1$ si et seulement si B est indéfinie. $\square$

Exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} det(B) = -1 \implies \text{indéfinie}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} det(B) = 2, a = 1 \implies \text{définie positive}$$

Comment trouver les extrema locaux d'une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

- Trouver les points critiques $a \in \mathbb{R}^n$ (tel que $\dfrac{\partial f(a)}{\partial x_i} = 0$ c'est à dire $d_a f$)
- Trouver la signature de $H_a f = \left(\dfrac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{i,j=1}^n$

$$H_a fest \begin{cases} \text{définie positive} & \implies \text{min} \\ \text{définie négative} & \implies \text{max} \\ \text{indéfinie} & \implies \text{selle} \end{cases}$$

Exemple

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
$f(x, y) = xy(1 - x - y)$
Dessin HARDCORE
Points critiques :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y(1 - 2x - y) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x(1 - 2y - x) \stackrel{!}{=} 0$$

Les points critiques $= (y = 0 \vee 1 - 2x - y = 0) \wedge (x = 0 \vee 1 - 2y - x = 0)$

$$(x, y) = (0, 0), (1, 0), (0, 1), (\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$$

4 points critiques :

$$Hf = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2y & 1 - 2x - 2y \\ 1 - 2x - 2y & -2x \end{pmatrix}$$

- $(x, y) = (0, 0)$:

$$Hf = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$det(Hf) = -1 \implies$ indéfinie $\implies$ $(0, 0)$ est une selle.

- $(x, y) = (1, 0)$:

$$Hf = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$det(Hf) = -1 \implies$ indéfinie $\implies$ $(0, 0)$ est une selle.

- $(0, 1)$ est indéfinie donc c'est une selle.

- $(x, y) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$

$$Hf = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$det(Hf) = \frac{1}{3}, -\frac{2}{3} < 0 \implies$ définie négative $\implies$ est un maximum local.

5.5 Multiplicateurs de Lagrange

Problème

Si $y : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, et si $S \subset \mathbb{R}^n$ est donné par $S = \{x \in \mathbb{R}^n | F(x) = 0\}$, où $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ est une fonction donnée.

On cherche les extrema locaux de $g|_S : S \to \mathbb{R}$

Exemple

$n = 2, k = 1$

$$g(x, y) = x + y, F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$$

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | F(x, y) = 0\} = \{(x, y) | x^2 + y^2 = 1\}$$

Dessin avec le cercle

On cherche les maxima et les minima de $g|_S$

Remarque

g continue, S compact $\implies$ max et min existent.
max en $(x,y) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$
min en $(x,y) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$
Ces deux points ne sont pas des points critiques de g.

Théorème

Multiplicateurs de Lagrange

Soit $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ une fonction C^1, c'est à dire $F = \begin{pmatrix} F_1 \\ \dots \\ F_k \end{pmatrix}$, $F_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ des fonctions C^1.

$S = \{x \in \mathbb{R}^n | F(x) = 0\}, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction C^1, et $a \in S$ tel que $g|_S$ a un maximum ou minimum local en a.

Si l'application linéaire $d_aF : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ est surjective, alors $\exists \lambda_1, \cdots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ (multivariable de Lagrange) tel que a est un point critique de $g - \lambda_1 F_+ - \cdots - \lambda_k F_k$

Remarque

- $g|_S)(g - \lambda_1 F_1 - \cdots - \lambda_k F_k)|_S$ car $F_i|_S = 0 \forall i$
- Pour trouver les extrema de $g|_S$, on cherche $(\lambda_1, \cdots, \lambda_k)$ et $a \in \mathbb{R}^n$ tel que a est une point critique de $g - \sum \lambda_i F_i$

  $\to$ les extrema sont parmi ces points a.

d_aF surjective $\iff$ rang$(d_aF) = k$, c'est à dire rang$\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\right)_{\substack{i=1,\cdots,k \\ j=1,\cdots,n}} = k$

Exemples

$n = 2, k = 1$

$$F(x,y) = x^2 + y^2 - 1, g(x,y) = x + y$$

$$g - \lambda F = x + y - \lambda(x^2 + y^2 - 1) \quad (*) \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

On cherche les points critiques de $(*)$ qui sont dans $S = \{(x,y) | x^2 + y^2 = 1\}$

$$\frac{\partial(*)}{\partial x} = 1 - 2x, \frac{\partial(*)}{\partial y} = 1 - 2y$$

$$2\lambda x = 1 = 2\lambda y$$

$$\text{tel que } x^2 + y^2 = 1$$

$$\implies x = y$$

$$\implies x = y = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$p_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \text{ et } p_2 = \left(\frac{-}{1}\sqrt{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Sont les "extrema potentiels" de $g|_S$.

S compact, g continue $\implies$ les maxima et les minima existent, $g(p_1) = \sqrt{2} = \max$, $g(p_2) = -\sqrt{2} = \min$

$F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$

$g(x, y) = x^2 - xy^2$

$(*) = g - \lambda F = x^2 - xy^2 - \lambda(x^2 + y^2 - 1)$

$\frac{\partial(*)}{\partial x} = 2x - y^2 - 2\lambda x \stackrel{!}{=} 0$

$\frac{\partial(*)}{\partial y} = -2xy - 2\lambda y \stackrel{!}{=} 0$

$x^2 + y^2 \stackrel{!}{=} 1 \implies y(x + \lambda) = 0$

C'est à dire $y = 0$ ou $x = -\lambda$

$y = 0 \implies x = \pm 1, \lambda = 1$

$x = -\lambda \implies \lambda = -x$

$\implies 2x - y^2 + 2x^2 = 0$ et $x^2 + y^2 = 1 \iff y^2 = 1 - x^2$

$2x - 1 + x^2 + 2x^2 = 0$

$3x^2 + 2x - 1 = 0$

$x = \begin{cases} -1 & \implies y = 0 \\ \frac{1}{3} & \implies y = \pm\frac{\sqrt{8}}{3} \end{cases}$

On a trouvé 4 points :

$(x, y) = (\pm 1, 0), (\frac{1}{3}, \frac{\sqrt{8}}{3})$

Dessin avec les 4 valeurs

Il faut calculer $g(p_i)$ pour $i = 1, \cdots, 4$

$g(p_1) = g(p_2) = 1 = \max$

$g(p_3) = g(p_4) = -\frac{5}{27} = \min$

Exemple

Trouver les minima et les maxima de :

$$g(x, y) = x^2 - 2xy^2$$

dans

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 1\}$$

C'est à dire on cherche les maxima et les minima de $g|_D$

D est compact, g est continue $\implies$ les maxima et les minima existent.

Soit on trouve les maxima et les minima à l'intérieur $(x^2 + y^2 < 1) \implies$ point critique de g

Soit les minima et les maxima se trouvent sur le bord (S) $\implies$ on utilise les multiplicateurs de Lagrange.

Les extremums potentiels qui sont sur le bord ($\in S$) :

$$(\pm 1, 0), (\frac{1}{3}, \pm\frac{\sqrt{8}}{3})$$

Les extremums potentiels à l'intérieur :

$$\begin{array}{c} \dfrac{\partial g}{\partial x} = 2x - y^2 \overset{!}{=} 0 \\ \dfrac{\partial g}{\partial y} = -2xy \overset{!}{=} 0 \end{array} \quad \text{et } x^2 + y^2 < 1 \implies (x, y) = (0, 0)$$

$g(0, 0) = 0$
$\implies$ ni maximum ni minimum global
Pour voir si c'est un extremum local :

$$Hg = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2y \\ -2y & .2 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ semi-définie positive car } n_+ = 1, n_- = 0, n_0 = 1 \implies \text{ on ne peut rien dire}$$

Dessin
$\implies$ a n'est pas un extremum local.

Rappel

(Multiplicateurs de Lagrange

$F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ de la classe C^1 avec les composantes $F_1, F_2, \cdots, F_k$ $S = \{x \in \mathbb{R}^n | F(x) = 0\}$, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction C^1, $a \in S$ un extremum local de $g|_S : S \to \mathbb{R}$. On suppose que $d_a F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ est surjective.

Alors $\exists \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k \ni \mathbb{R}$ tel que a est un point critique de $g - \lambda_1 F_1 - \cdots - \lambda_k F_k$.

Preuve

Cas 1 :
$F_1(x_1, \cdots, x_n) = x_1$, c'est à dire $S = \{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n | x_1 = x_2 = \cdots = x_k = 0\}$.
Alors $g|_S = g(\underbrace{0, 0, \cdots, 0}_{k}, \underbrace{x_{k+1}, x_{k+2}, \cdots, x_n}_{n-k})$ est une fonction de $n - k$ variables.

$$\implies \frac{\partial g(a)}{\partial x_i} = 0 \quad i = k+1, k+2, \cdots, n$$

On pose $\lambda_j = \dfrac{\partial g(a)}{\partial x_j} \quad j = 1, \cdots k$
Et donc :

$$\frac{\partial(g - \lambda_1 x_1 - \cdots - \lambda_k x_k)(a)}{\partial x_m} = 0 \quad m = 1, \cdots, n$$

Cas 2 : général
L'idée est qu'il existe un changement de variable tel que on se retrouve dans le cas 1.

Lemme

On pose $\tilde{F}_1(x_1, \cdots, x_n) = x_i \quad i = 1, \cdots, k$
$\exists$ ouvert $a \in U \subset \mathbb{R}^n, 0 \in V \in \mathbb{R}^n$ et une bijection $\Phi : U \to V$ tel que Φ et Φ^{-1} sont $C^1, \quad \Phi(a) = 0$ et $F = \tilde{F} \circ \Phi$

Preuve

Analyse 2 (Théorème de la fonction inverse) "$\square$"
On définit $\tilde{g}$ par $\tilde{g} = g \circ \Phi^{-1} \quad (g = \tilde{g} \circ \Phi)$
$\tilde{F}, \tilde{g}$ Cas $\implies \exists \lambda_1, \cdots, \lambda_k$ tel que 0 est un point critique de $\tilde{g} - \lambda_1 \tilde{F}_1 - \cdots - \lambda_k \tilde{F}_k$
C'est à dire $d_0(\tilde{g} - \sum \lambda_i \tilde{F}_i) = 0$
Règle de la chaîne :

$$d_a(g - \sum \lambda_i F_i) = d_0 \tilde{g} \circ d_a \Phi - \sum \lambda_i d_0 \tilde{F}_i \circ d_a \Phi$$

$$= d_0(\tilde{g} - \sum \lambda_i \tilde{F}_i \circ d_a \Phi = 0$$

$\square$

Résumé de la partie 5

- Calculer avec les dérivées partielles et différentielles et utiliser la règle de la chaîne
- Trouver les extrema d'une fonction, ses points critiques, la matrice Hessienne, sa signature et utiliser les multiplicateurs de Lagrange.

6 Intégrales multiples

6.1 Motivation

$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x =$ L'aire sous la courbe.
Dessin
Si $A \subset \mathbb{R}^n, f : A \to \mathbb{R}$

$$\int_A f(x_1, \cdots, x_n)\mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n =$$

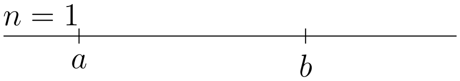
Dessin
Comment définir $int_A f \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n$?
$n = 2$
Dessin patatoïde.

6.2 Définitions

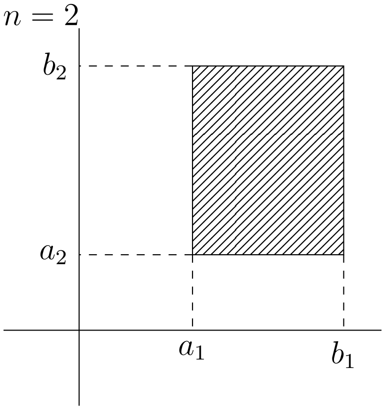
Définition

Un pavé (rectangle en n dimensions) dans $\mathbb{R}^n$ est un sous-ensemble de la forme $P = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n] \quad a, b \in \mathbb{R}$

$n = 1$



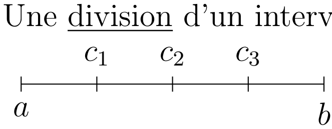
$n = 2$



Le volume de P est $vol\ P = \prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i)$

Définition

Une division d'un intervalle fermé [a,b] est une choix de points $a < c_1 < c_2 < \cdots < c_k < b$

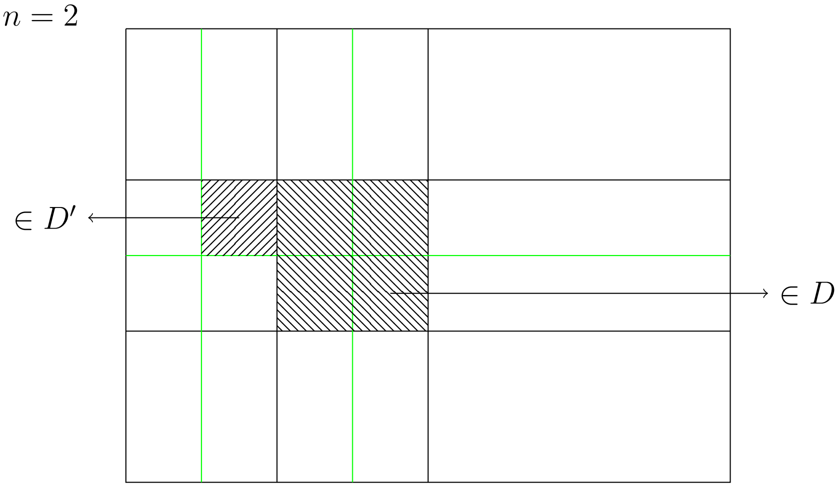


Une dimension d'un pavé $P \subset \mathbb{R}^n$ est une décomposition de P en sous-pavés qui est donnée par des divisions de côtés de P.

Image $n = 2$.

Un <u>raffinement</u> d'une dimension D est une dimension D' obtenue en ajoutant des nouveaux points de division.

$n = 2$



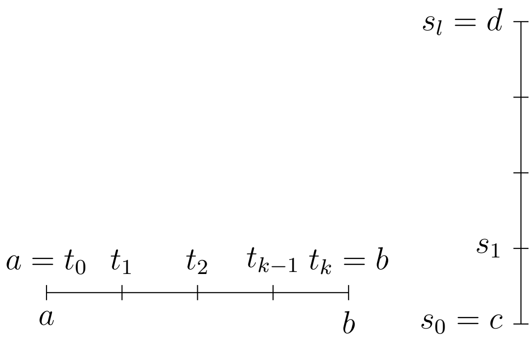
Proposition

Si P est un pavé et D une dimension de P, alors :

$$vol\ P = \sum_{R \in D} vol\ R$$

Preuve

(pour $n = 2$)
$P = [a, b] \times [c, d]$:
Image



$$vol\ P = (b-a)(d-c) = \big((t_k - t_{k-1}) + (t_{k-1} - t_{k-2}) + \cdots + (t_1 - t_0)\big)\big((s_l - s_{l-1}) + \cdots + (s_1 - s_0)\big)$$

$$= \sum_{i,j} (t_i - t_{i-1})(s_j - s_{j-1}) = \sum_{R \in D} vol\ R$$

□

Définition

Si $P \subset \mathbb{R}^n$ est une pavé, D une division de P et $f : P \to \mathbb{R}$ une fonction bornée, alors la somme de Riemann supérieure de f est :

$$S(f(,D)) = \sum_{R \in D} \underset{x \in R}{sup} f(x) vol(R)$$

La somme de Riemann inférieure est :

$$s(f(,D)) = \sum_{R \in D} \underset{x \in R}{inf} f(x) vol(R)$$

Observation

$$S(f,D) \geq s(f,D)$$

Lemme

Si D' est un raffinement de D, alors :

$$S(f,D') \leq S(f,D) \text{ et } s(f,D^{)} \geq s(f,D)$$

Preuve

$$\begin{aligned} S(f,D) &= \sum_{R \in D} \underset{x \in R}{sup} f(x) vol\ R = \sum_{R \in D} \underset{x \in R}{sup} f(x) \sum_{R' \in D', R' \subset R} vol\ R' \\ &= \sum_{R' \in D'} \underset{\substack{x \in R \\ \text{où } R \in D \text{ est tel que} \\ R' \subset R}}{sup} f(x) vol\ R' \\ &\geq \sum_{R' \in D'} \underset{x \in R'}{sup} f(x) vol\ R' = S(f,D') \end{aligned}$$

Pour $s(f,D') \geq s(f,D)$ c'est pareil.

$\square$

Proposition

Si D_1 et D_2 sont des divisions de P, alors :

$$S(f,D_1), \geq s(f,D_2)$$

Preuve

Si D' est un raffinement commun de D_1 et D_2, alors :

$$S(f,D_1) \geq S(f,D') \geq s(f,D') \geq s(f,D_2)$$

$\square$

Définition

Si $P \subset \mathbb{R}^n$ est un pavé, $f : P \to \mathbb{R}$ une fonction bornée, alors l'intégrale de Riemann supérieure de f par P est :

$$\overline{\int_P} f \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n = \underset{D \text{ division de } P}{inf} S(f, D)$$

L'intégrale inférieure est :

$$\underline{\int_P} f \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n = \underset{D \text{ division de } P}{sup} S(f, D)$$

(par la proposition, supérieure est supérieure à l'intégrale.

Si $\overline{\int_P} f = \underline{\int_P} f$, on dit que f est intégrable et son intégrale est :

$\int_P f = \overline{\int_P} f = \underline{\int_P} f$

Définition

Si $A \subset \mathbb{R}^n$ est borné, donc $\exists$ pavé $P \subset \mathbb{R}^n$, tel que $A \subset P$, et si $f : A \to \mathbb{R}$ est une fonction bornée, alors :

$$\int_A f = \int_P \tilde{f}, \text{ où } \tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

Remarque

Le résultat ne dépend pas du choix de P (exercice)

Propriétés de $\int_A f$

- $\int_A (af + bg) = a \int_A f + b \int_A g$ si $a, b \in \mathbb{R}, f, g : A \to \mathbb{R}$ tel que $\int_A f$ et $\int_A g$ existent (preuve dans le semestre 1)
- Si $f \leq g$, alors $\int_A f \leq \int_A g$

Théorème

Si $P \subset \mathbb{R}^n$ et si $f : P \to \mathbb{R}$ est continue, alors $\int_P f$ existent.

Plus généralement, si $f : P \to \mathbb{R}$ est bornée, et si l'ensemble $\{x \in P | f \text{ n'est pas continue en } x\}$ est négligeable, alors $\int_P f$ existe.

Définition

Si $A \subset \mathbb{R}^n$ est borné, alors $vol(A) = \int_A 1$.

A est <u>négligeable</u> si $vol(A) = 0$, c'est à dire si $\forall \varepsilon > 0, \exists$ pavés $P_1, P_2, \cdots, P - k$ tels que $A \subset \bigcup_{i=1}^{k} P_i$ et $\sum_{i=1}^{k} vol(P_i) \leq \varepsilon$

Preuve du théorème

Plus tard

Proposition

Si $S \subset \mathbb{R}^{n-1}$ est fermé et borné, et si $g : S \to \mathbb{R}$ est continue, alors le graphe de g $\{(x, g(x)) \in \mathbb{R}^n | x \in S\}$ est négligeable.

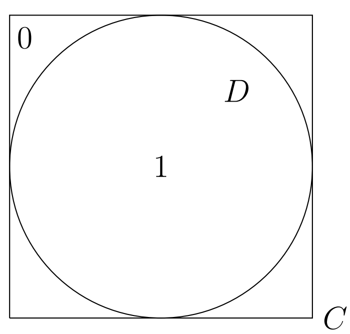
Preuve

Plus tard

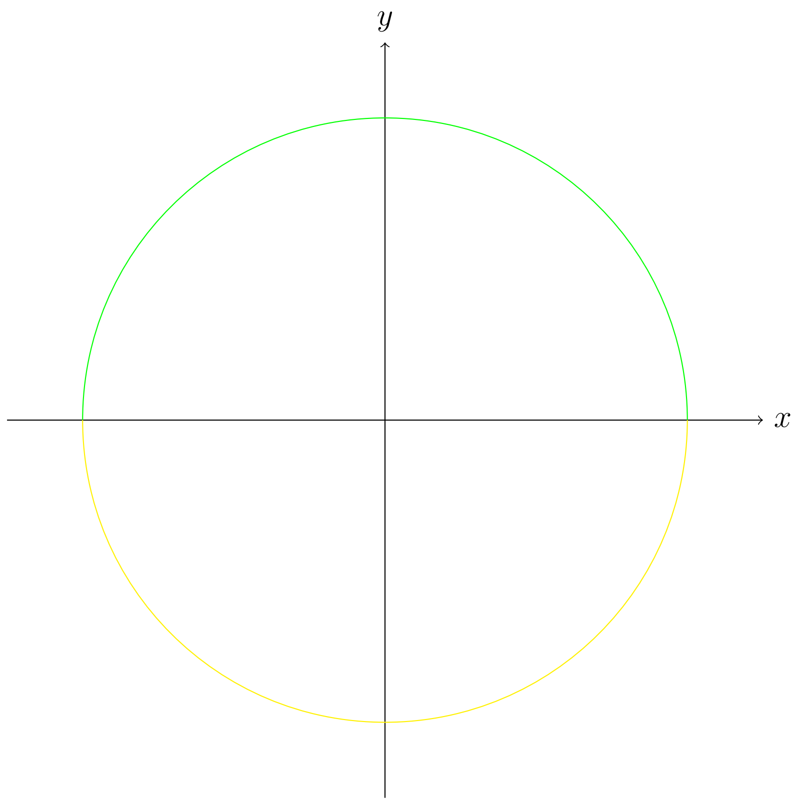
Exemple

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 1\}$, alors $\int_d 1$ existe, car $\int_D 1 = \int_C \tilde{f}$ pour C un carré, ici $\tilde{f} = \chi_C$

$|x| \leq 1$ $|y| \leq 1$, c'est à dire $\begin{cases} 1 & \text{si } x \in D \\ 0 & \text{si } x \notin D \end{cases}$



Les discontinuités de χ_D sont le cercle $\{x^2 + y^2 = 1\}$.
Le cercle est l'union de 2 graphes : $y = \sqrt{1 - x^2}$ et $y = -\sqrt{1 - x^2}$



On utilise si $A, B \subset \mathbb{R}^n$ sont négligeables, alors $A \cup B$ est négligeable.
$\implies$ le cercle est négligeable,
$\implies \displaystyle\int_D 1$ existe.

Intégrales itérées

Théorème

Si $P = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$, si $f : P \to \mathbb{R}$ est intégrable, alors :

$$\int_P f \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n = \underbrace{\int_{a_n}^{b_n} \cdots \left(\int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_1}^{b_1} f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mathrm{d}x_1 \right) \mathrm{d}x_2 \cdots \right) \mathrm{d}x_n}_{(*)}$$

Si l'intégrale itérée $(*)$ existe.

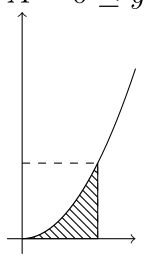
Exemples

$$\int_{\substack{0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1}} xy \mathrm{d}x \mathrm{d}y = \int_0^1 \left(\int_0^1 xy \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \int_0^1 \frac{1}{2} y \mathrm{d}y = \frac{1}{4}$$

$$\int_{x^2 + x^2 \leq 1} 1 \mathrm{d}x \mathrm{d}y = \int_{-1}^1 \left(\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} 1 \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \int_{-1}^1 2\sqrt{1 - y^2} \mathrm{d}y =$$

$$= \int_{-1}^1 2\sqrt{1 - y^2} \mathrm{d}y = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2cos^2(t) \mathrm{d}t = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (cos^2(t) + sin^2(t)) \mathrm{d}t = \pi$$

$y = sin(t), -\pi/2 \leq t \leq \pi/2, \mathrm{d}y = cos(t)\mathrm{d}t, \sqrt{1-y^2} = cos(t)$
$A = 0 \leq y \leq x^2, \quad 0 \leq x \leq 1$



$$\int_A (x+y)\mathrm{d}y\mathrm{d}y = \int_0^1 \left(\int_0^{x^2} (x+y)\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_0^1 [xy + \frac{1}{2}y^2]_0^{x^2} \mathrm{d}x$$
$$= \int_0^1 \left(x^3 + \frac{1}{2}x^4 \right) \mathrm{d}x = \frac{1}{4} + \frac{1}{10}$$

Autre manière de calculer l'intégrale.

Explication

Comment calculer $\int_A f\mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n$?
Image IMPOSSIBLE
$n = 3$
Volume de $\{x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\} = B$
Intégrons d'abord par z :
$-\sqrt{1-x^2-y^2} \leq z \leq \sqrt{1-x^2-y^2}$

$$\int_B 1\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_{D \text{ un autre ensemble}} 2\sqrt{1-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \text{ etc}$$

Preuve du théorème

$P = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$
$f : P \to \mathbb{R}$ intégrable.
On a $P = [a_1, b_1] \times P'$ où $P' = [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^{n-1}$
On pose $g(x_2, \cdots, x_n) = \int_{a_1}^{b_1} f(x_1, x_2, \cdots, x_n)\mathrm{d}x_1$
Supposons que g est bien définie.
Il faut montrer que :

$$\int_P f\mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n = \int_{P'} g\mathrm{d}x_2 \cdots \mathrm{d}x_n$$

Et que P' existe.
Soit D une division de P, c'est à dire une division $a_1 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_N = b$, une division D' de P'.
Montrons que :

$$\int (f, D) \underset{(1)}{\geq} S(g, D') \geq s(g, D') \underset{(2)}{\geq} s(f, D)$$

Si on suppose que :

$$\overline{\int_P} f \overset{(1)}{\geq} \overline{\int_{P'}} g \geq \underline{\int_{P'}} g \overset{(2)}{\geq} \underline{\int_P} f$$

Mais $\overline{\int_P} f = \underline{\int_P} f = \int_P f$

$\implies$ les $\geq$ sont en fait $= \implies \int_{P'}$ existe et $\int_{P'} g = \int_P f$

Pour montrer (1) :

$$g(x_2, \cdots, x_n) = \int_{a_1}^{b_1} f(x_1, \cdots, x_n) \mathrm{d}x_1 = \sum_{i=1}^{N} \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(x_1, \cdots, x_n) \mathrm{d}x_1 \leq \sum_{i=1}^{N} (t_i - t_{i-1}) \sup_{x_i \in [t_{i-1}, t_i]} f(x_1, \cdots, x_n)$$

Donc

$$S(g, D') = \sum_{R' \in D'} \underset{R'}{sup} g \cdot vol\ R' \leq \sum_{R' \in D'} \cdot \sum_{i=1}^{N} (t_i - t_{i-1}) \cdot \underset{[t_{i-1}, t_i] \times R'}{sup} f \cdot vol\ R'$$

$$= \sum_{R \in D} \underset{R}{sup} f \cdot vol\ R = S(f, D)$$

6.3 Changement de variables

Introduction

$D = \{x^2 + y^2 \leq 1\}$
Si on veut calculer

$$\int_D f(x, y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y$$

Dessin
en plus d d'une division, on peut utiliser
Dessin

$$\int_D f(x, y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y = \int_{\substack{0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi}} f(rcos(\varphi), rsin(\varphi)) r \mathrm{d}r \mathrm{d}\varphi$$

Théorème

(changement de variable)
Soit $P \subset \mathbb{R}^n$ un pavé,
$P \subset U \subset \mathbb{R}^n$ où $U \subset \mathbb{R}^n$ est ouvert, $g : U \to \mathbb{R}^n$, une fonction C^n qui est injective dans l'intérieur de P, et $f : g(P) \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable. Alors :

$$\int_{g(P)} f = \int_P f \circ g |det(\mathrm{d}y)|$$

En coordonnées $y = (y_0, \cdots, y_n), \quad x = (x_0, \cdots, x_n)$

$$\int_{g(P)} f(y) \mathrm{d}y_0 \cdots \mathrm{d}y_n = \int_P f(y(x)) \left| \det \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right) \right| \mathrm{d}x_0 \cdots \mathrm{d}x_n$$

$$\mathrm{d}y_0 \cdots \mathrm{d}y_n = \left|\det\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)\right| \mathrm{d}x_0 \cdots \mathrm{d}x_n$$

$$g : x \to y(x)$$

En plus d'un pavé, on peut utiliser n'importe quel sous-ensemble admissible. On définira cette notion plus tard.

Exemple - coordonnées polaires

Calculons :

$$\int_{D=x^2+y^2\leq 1} (x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$g : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x = rcos(\varphi) \\ y = rsin(\varphi) \end{pmatrix}$, $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ fonction C^1

On cherche un rectangle $P \subset \mathbb{R}^2$ tel que $g(P) = D$

$$P = \begin{pmatrix} 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{pmatrix}$$

Dessins

$g|_{\text{l'intérieur de } P}$ est une application injective.

La matrice de dy :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos(\varphi) & -rsin(\varphi) \\ \\ sin(\varphi) & rcos(\varphi) \end{pmatrix}$$

Et le $det = r$

$$\implies \int_D (x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_{\substack{0\leq r\leq 1 \\ 0\leq\varphi\leq 2\pi}} ((rcos(\varphi))^2 + (rsin(\varphi))^2) r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi$$

$$= \int_{\substack{0\leq r\leq 1 \\ 0\leq\varphi\leq 2\pi}} r^3\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi = 2\pi\int_0^1 r^3\mathrm{d}r = \frac{\pi}{2}$$

Exemple - volume d'un cône

$(r = \sqrt{x^2+y^2})$

Dessin

$$= \int_D (1-r)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

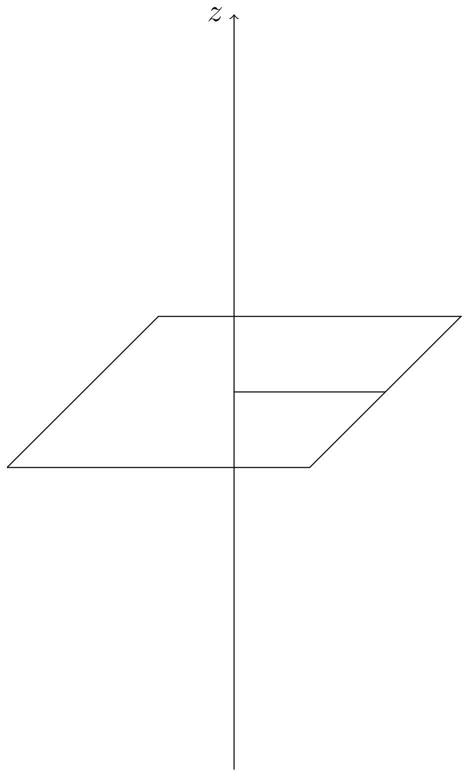
$$= \int_{\substack{0\leq r\leq 1 \\ 0\leq\varphi\leq 2\pi}} (1-r)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi = 2\pi\int_0^1 (r-r^2)\mathrm{d}r = 2\pi\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) = \frac{\pi}{3}$$

Terminologie

La fonction $det(\mathrm{d}y) = det\left(\dfrac{\partial y}{\partial x}\right)$ est le <u>Jacobien</u> (ou le déterminant Jacobien) du changement de variables.

Exemple - coordonnées sphériques dans $\mathbb{R}^3$

Dessin



$z = rcos(\theta), \quad x = rsin(\theta)cos(\varphi), \quad y = rsin(\theta)sin(\varphi)$

$$\begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix} \xrightarrow{g} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Il faut calculer le Jacobien, c'est à dire $det(dg)$
Le Jacobien de $r, \theta, \varphi \to x, y, z$ est la matrice :

$$det\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial z}{\partial r} & \dfrac{\partial z}{\partial \theta} & \dfrac{\partial z}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = det\begin{pmatrix} sin(\theta)cos(\varphi) & rcos(\theta)cos(\varphi) & -rsin(\theta)sin(\varphi) \\ sin(\theta)sin(\varphi) & rcos(\theta)sin(\varphi) & rsin(\theta)cos(\varphi) \\ cos(\theta) & -rsin(\varphi) & 0 \end{pmatrix}$$

$$= r^2 sin(\theta) \cdot det \begin{pmatrix} sin(\theta)cos(\varphi) & cos(\theta)cos(\varphi) & -sin(\varphi) \\ sin(\theta)sin(\varphi) & cos(\theta)sin(\varphi) & cos(\theta) \\ cos(\varphi) & -sin(\theta) & 0 \end{pmatrix}$$

$= \pm 1$ car c'est une matrice orthogonale.
Dessin :

Exemple

Le volume de la boule B_R de rayon R

$$P \begin{cases} 0 \leq r \leq R \\ 0 \leq \theta \leq \pi \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases}$$

$$\int_{B_R} 1\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_P r^2 sin(\theta)\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$$

Intégration par φ

$$= 2\pi \cdot \int_0^R r^2\mathrm{d}r \cdot \int_0^{2\pi} sin(\theta)\mathrm{d}\theta = 2\pi\frac{R^3}{3} \cdot 2 = \frac{4\pi}{3}R^3$$

Exemple

Le centre de masse d'une boule :
Dessin demie-boule

$$\int_{X=\begin{cases} x^2+y^2+z^2 \leq R^2 \\ z \geq 0 \end{cases}} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$P \begin{cases} 0 \leq r \leq R \\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases}$$

$$= \int_P rcos(\theta) \cdot r^2 sin(\theta)\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\varphi$$

$$= 2\pi \int_0^R r^2\mathrm{d}r \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos(\theta)sin(\theta)\mathrm{d}\theta$$

$$t = sin(\theta) \implies \int_0^1 t\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$$

$$= 2\pi\frac{R^4}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\pi R^4}{4}$$

Le centre de masse se trouve à :

$$\frac{\frac{\pi R^4}{4}}{\frac{2\pi}{3}R^3} = \frac{3}{8}R$$

L'intégrale de Gauss

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x$$

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2}e^{-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}\mathrm{d}y = I^2$$

On passe en coordonnées polaires : $P \begin{cases} 0 \leq r \leq \infty \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases}$

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_P e^{-r^2} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi = 2\pi \int_0^{\infty} e^{-r^2} r\mathrm{d}r$$

Avec $s = r^2$ et $\mathrm{d}s = 2r\mathrm{d}r$

$$= \int_0^{\infty} e^{-s}\frac{1}{2}\mathrm{d}s = \pi$$

Volume d'une boule de dimension n.
Préparation : fonction Γ

Définition

Pour $s > 0$, où pour $s \in \mathbb{C}, Re > 0$, on pose :

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} e^{-x}x^{s-1}\mathrm{d}x$$

Propriétés de Γ

$$\Gamma(1) = 1$$

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$$

Preuve : intégrer par parties

$$\Gamma(s+1) = \int_0^{\infty} e^{-x}x^s\mathrm{d}x = 0 + \int_0^{\infty} e^{-x}sx^{s-1}\mathrm{d}x = s\Gamma(s)$$

$u' = e^{-x}, \quad v = x^s$

$$\Gamma(2) = 1$$

$$\Gamma(3) = 2 \cdot 1$$

$$\Gamma(4) = 3 \cdot 2 \cdot 1$$

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty e^{-x}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{d}x =$$

$x = t^2, \quad \mathrm{d}x = 2t\mathrm{d}t$

$$= 2\int_0 \infty e^{-t^2}\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}$$

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{2}\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

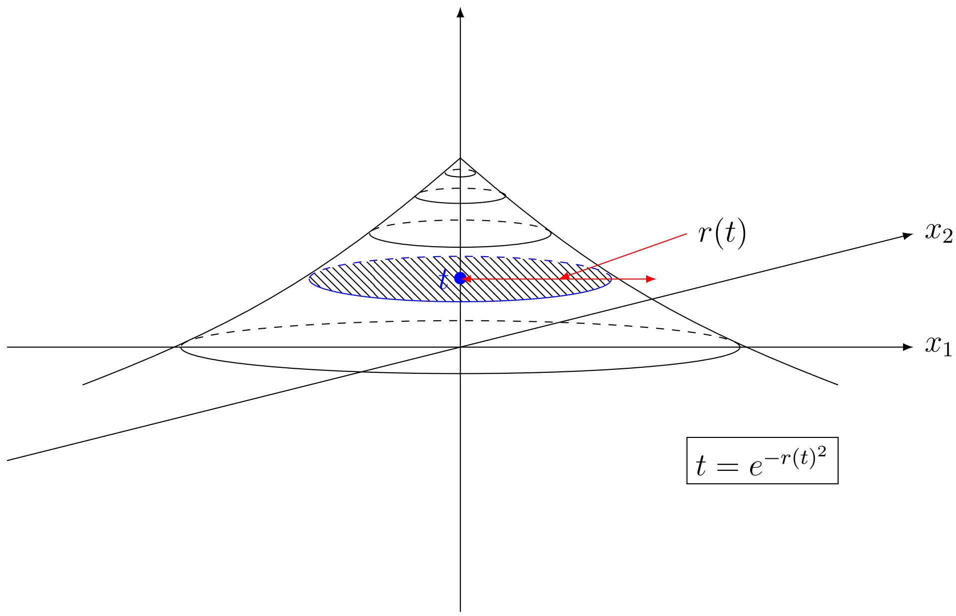
$$\Gamma\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{5}{2}\frac{3}{2}\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

Posons :
$B_n(R) = \{x \in \mathbb{R}^n \Big| ||x|| \leq R\}$
$Vol_n B_n(R) = \underbrace{(Vol_n B_n(1))}_{=V_n} \cdot \mathbb{R}^n = V_n \cdot \mathbb{R}^n$

$$\int_{0 \leq t \leq e^{-x_1^2 - x_2^2 - \cdots - x_n^2}} 1\mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n \mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-x_1^2 - \cdots - x_n^2}\mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n$$

$$= \int e^{-x_1^2} \cdots e^{-x_n^2}\mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x_1^2}\mathrm{d}x_1 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x_n^2}\mathrm{d}x_n = \pi\frac{n}{2}$$

Dessin par $n = 2$:
Dessin cône



L'intégration par $x_1, \cdots, x_n$ donne :

$$\int_0^1 V_n r(t)^2 \mathrm{d}t =$$

$t = e^{-r^2}, \quad \mathrm{d}t = -2re^{-r^2}\mathrm{d}r$

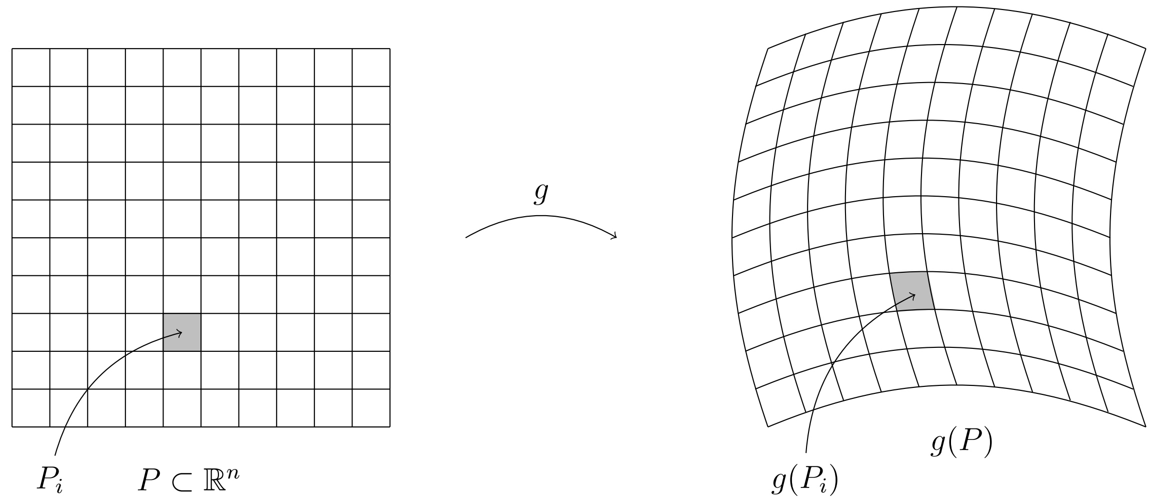
$$= \int_0^\infty V_n r^n 2re^{-r^2}\mathrm{d}r = 2V_n \int_0^\infty r^{n+1}e^{-r^2}\mathrm{d}r$$

$s = r^2, \quad \mathrm{d}s = 2r\mathrm{d}r$

$$= V_n \int_0^\infty s^{\frac{n}{2}} e^{-s}\mathrm{d}s = V_n \Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right) = \pi^{\frac{n}{2}}$$

$$V_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}$$

$\Gamma(n+1) = n!$
si $n = 2k$:
$V_{2k} = \dfrac{\pi^k}{k!}$
si $n = 2k+1$:
$\Gamma\left(\dfrac{2k+1}{2}+1\right) = \dfrac{2k+1}{2}\dfrac{2k-1}{2}\cdots\dfrac{1}{2}\sqrt{\pi}$
$V_{2k+1} = \dfrac{\pi^k 2^{k+1}}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k+1)}$
$2k+1 = 3,\ k = 1$
$V_3 = \dfrac{\pi \cdot 3}{3}$
L'idée de la preuve de la formule du changement de variables :
$q_i \in P_i$
$g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$



Division de P : $\quad P = \bigcup_i P_i$

$f : g(P) \to \mathbb{R}$

$$\int_{g(P)} f = \sum_i \int_{g(P_i)} f \approx \sum_i f(g(q_i)) \cdot vol(g(P_i))$$

Fait

Si $T : r\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est une application linéaire, $C_n =$ le cube $[0,1]^n \subset \mathbb{R}^n$, alors :

$$vol_n(TC_n) = |det(T)|$$

Autrement dit : Si T est une matrice $n \times n$, alors le volume du parallélépipède donné par les colonnes de T est $|det(T)|$

$volg(P_i)$:

P_i petit $\implies$ g est "presque linéaire" sur P_i (g est C^1).

On a donc :

$$volg(P_i) \approx vol(d_{q_i}g)(P_i) = |detd_{q_i}g| \cdot vol(P_i)$$

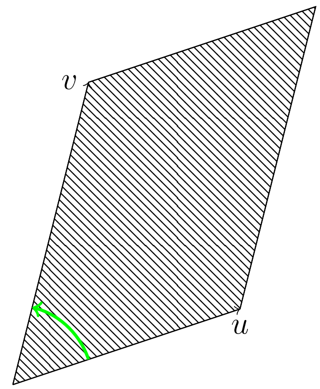
$$\implies \int_{g(P)} f \approx \sum_i f(g(q_i)) \cdot |det(d_{q_i}g)| \cdot vol(P_i)$$

$$\approx \int_P f \circ g \cdot |det(dg)|$$

Pourquoi le "fait" est vrai : le volume <u>orienté</u> d'un parallélépipède donné par les vecteurs $v_1, \cdots, v_n \in \mathbb{R}^n$

$Vol(v_1, \cdots, v_n)$ est linéaire, dans chaque argument $(v_1, \cdots, v_n)$ et antisymétrique

Explication du "fait" pour $n = 2$



L'aire orientée :

Aire (u, v)=$\pm$ aire

aire(u, v) est :

- linéaire dans u est aussi dans v :

  aire$(\alpha u + \beta v, w) = \alpha$ aire (u, w) + β aire (v, w)

- Antisymétrique

  aire (u, v) = -aire(v, u)

  $u = u_1 e_1 + u_2 e_2$

  $v = v_1 e_1 + v_2 e_2$

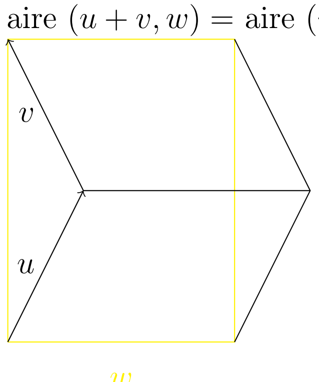
$$\text{aire } (u, v) = \text{ aire}(u_1 e_1 + u_2 e_2, v_1 e_1 + v_2 e_2)$$

$$\overset{\text{linéarité}}{=} u_1 v_1 \text{aire}(e_1, e_1) + u_1 v_2 \text{aire}(e_1, e_2) + u_2 v_1 \text{aire}(e_2, e_1) + u_2 v_2 \text{aire}(e_2, e_2)$$

Or aire$(e_i, e_i) = 0$

$$= (u_1 v_2 - u_2 v_1)\text{aire}(e_1, e_2)$$

aire $(u + v, w)$ = aire (u, w)+ aire (v, w)



6.4 Propriétés élémentaires de l'intégrale

Pour montrer que toute fonction continue est intégrable : continuité uniforme.

Définition

Si X, Y sont des espaces métriques et $f : X \to Y$, alors f est uniformément continue si :

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x, x' \in X)(d_X(x, x') < \delta \implies d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon)$$

Uniforme : δ ne dépend pas de $x \in X$

Théorème

Si X est compact, $f : X \to Y$ continue, alors f est uniformément continue.

Preuve

Supposons que f n'est pas continue, c'est à dire $(\exists \varepsilon > 0)(\forall n), \exists x_n, x'_n \in X$ tel que $d_X(x_n, x'_n) < \dfrac{1}{n}$ et $d_Y(f(x_n), f(x'_n)) \geq \varepsilon$

X est compact $\implies$ remplaçons la suite $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ par une sous-suite convergente. On peut donc supposer que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ existe.

De $d_X(x_n, x'_n) < \dfrac{1}{n}$, on voit que $\lim\limits_{n\to\infty} x'_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$

f est continue $\implies$

$$\begin{array}{ccc} \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) & = & f(\lim\limits_{n\to\infty} x_n) \\ \| & & \| \\ \lim\limits_{n\to\infty} f(x'_n) & = & f(\lim\limits_{n\to\infty} x'_n) \end{array}$$

Contradiction car $d_Y(f(x_n), f(x'_n)) \geq \varepsilon$

$\square$

Théorème

Soient $P \subseteq \mathbb{R}^n$ un pavé, $f : P \to \mathbb{R}$ une fonction continue alors f est intégrable (ie $\int_P f$ existe).

Preuve

P compact $\implies$ f est uniformément continue $(\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, x' \in X d_X(x, x') < \delta \implies d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon)$

D_δ est δ-fine : $x, x' \in P, \in D_\delta$

$\implies ||x - x'|| < \delta$

$\implies \underset{x\in P_i}{sup} f(x) - \underset{x\in P_i}{inf} f(x) \leq \varepsilon$

$$S(f, D_\delta) - s(f, D_\delta) = \sum_{P_i \subset D_\delta} \left(\underset{P_i}{sup} f - \underset{P_i}{inf} f \right) vol(P_i)$$

$$\leq \varepsilon \sum_{P_i \subset D_\delta} vol(P_i) = \varepsilon \cdot vol(P)$$

C'est à dire

$$(\forall \varepsilon > 0),\ \exists D_\delta \text{ tel que}$$

$$S(f, D_\delta) - s(f, D_\delta) \leq \varepsilon vol(P)$$

$$\implies \underset{D}{inf} S(f, D) = \underset{D}{sup} s(f, D)$$

C'est à dire :

$$\int_P f \text{ existe}$$

$\square$

Théorème

Si $P \subset \mathbb{R}^n$ est un pavé, et si $f : P \to \mathbb{R}$ est une fonction bornée tel que :
$A = \{x \in P | f \text{ n'est pas continue en } x\}$ est négligeable. Alors :

$$\int_P f \text{ existe}$$

Preuve

Soit $\varepsilon > 0$ et soient $P_1, \cdots, P_k$ des pavés tel que $A \subset \bigcup_i P_i^0$ et $\sum vol(P_i) \leq \varepsilon$

Si $P = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$, alors $P^0 = (a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n)$ où (a_i, b_i) sont des sous-ensembles ouverts de $\mathbb{R}^n$.

Soit D une division de P tel que $\forall R \in D$, $\forall x, y \in R$, on a $||x - y|| < \delta$. De plus, on suppose $\forall R \in D$, soit $R \subset \bigcup_i P_i$, soit $R \cap \bigcup_i P_i^0 = \emptyset$

Dessin

$P \backslash \underbrace{\bigcup_{i=1}^k P_i}_{\text{ouvert}}$ est fermé et borné.

$\implies f|_{P \backslash \bigcup_i P_i^0}$ est uniformément continue et donc (si δ est bien choisi), on a $\forall R \in D$, tel que $R \subset P \backslash \bigcup_i P_i$:

$$\underset{R}{sup}(f) - \underset{R}{inf}(f) \leq \varepsilon$$

On sait aussi que f est bornée, c'est à dire $|f(x)| \leq C \ \forall x \in P$

$$S(f, D) - s(f, D) = \underbrace{\sum_{R \in D} (\underset{R}{sup}(f) - \underset{R}{inf}(f)) vol(R)}_{(*)}$$

Si $R \subset P \backslash \bigcup_i P_i^0$, alors :

$$(\underset{R}{sup}(f) - \underset{R}{inf}(f)) \cdot vol(R) \leq \varepsilon \cdot vol(R)$$

Si $R \subset \bigcup_i P_i$, $\underset{R}{sup}(f) \leq C$ et $\underset{R}{inf}(f) \geq -C$

$$\implies (\underset{R}{sup}(f) - \underset{R}{inf}(f)) \cdot vol(R) \leq 2C \cdot vol(R)$$

$$(*) \leq \varepsilon \cdot vol(P) + 2C \cdot \varepsilon$$

car $\sum_{i=1}^{k} vol(P_i) \leq \varepsilon$

□

Proposition

Si $S \subset \mathbb{R}^{n-1}$ est fermé et borné et si $f : S \to \mathbb{R}$ est continue, alors le graphe de f :

$$\{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^n | x \in S\}$$

est négligeable.

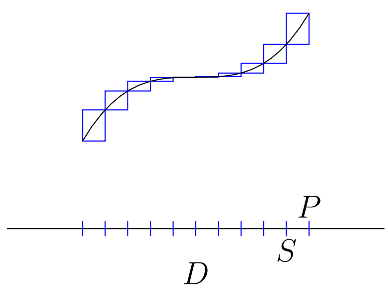
Preuve

S compact, f continue

$\implies$ f est uniformément continue, c'est à dire $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)$ tel que :

Soit $P \subset \mathbb{R}^{n-1}$ un pavé tel que $S \subset P$ et soit D une division f-fixe de P. Alors $\forall R \in D$ tel que $R \cap S \neq \emptyset$:

$$\underset{R \cap S}{sup}(f) - \underset{R \cap S}{inf}(f) \leq \varepsilon$$



Si $R_i \in D$ et si $R_i \cap S \neq \emptyset$, on pose $P_i = R_i \times [\underset{R}{sup}(f) - \underset{R}{inf}(f)] \subset \mathbb{R}^n$

$vol(P_i) = vol(R_i) \cdot (\underset{R}{sup}(f) - \underset{R}{inf}(f)) \subseteq vol(O_i) \cdot \varepsilon$

On a $A \subset \bigcup_i P_i$, $\quad \sum vol(P_i) \leq \sum_{R \in D} vol(R) \cdot \varepsilon = \varepsilon \cdot vol(P)$

Vu que ε est arbitraire, A est négligeable.

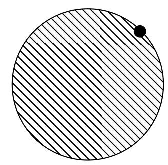
□

Quels sous-ensembles $A \subset \mathbb{R}^n$ sont "convenables" pour l'intégration ?

Définition

Si X est un espace métrique et si $A \subset X$, alors le <u>bord</u> de A est :

$$\partial A = \{x \in X | \chi_A \text{ n'est pas continue en } x\}$$



$D \in \mathbb{R}^2$

$\left(\chi_A(x) = \begin{matrix} 1 \text{ si } x \in A \\ 0 \text{ si } x \notin A \end{matrix} \right)$

C'est à dire $x \in \partial A$ si et seulement si $\forall \varepsilon > 0$:

$$B(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset \text{ et } B(x,\varepsilon) \cap (X \backslash A) \neq \emptyset$$

Définition

Un sous-ensemble borné $A \subset \mathbb{R}^n$ est <u>admissible</u> si $\partial A \subset \mathbb{R}^n$ est négligeable.

Une fonction bornée $f : A \to \mathbb{R}$ est <u>admissible</u> si l'ensemble des discontinuités de f est négligeable.

Proposition

Si A est admissible et $f : A \to \mathbb{R}$ est admissible, alors $\displaystyle\int_A f$ existe.

Preuve

Si P est un pavé tel que $A \subset P$, on pose (pour $x \in P$) :

$$\tilde{f}(x) = \begin{matrix} f(x) \text{ si } x \in A \\ 0 \text{ si } x \notin A \end{matrix}$$

$$\int_A f = \int_P \tilde{f}$$

(Les discontinuités de $\tilde{f}$) $\subset$ (Les discontinuités de f) $\cap(\partial A) \implies \displaystyle\int_P \tilde{f}$ existe.

$\square$

Proposition

Si $A \subset \mathbb{R}^n$ est néligeable et si $f : A \to \mathbb{R}$ est bornée, alors $\displaystyle\int_A f = 0$

Preuve

$\exists C$ tel que $C \geq f(x) \geq -C \; \forall x \in A$

$$\implies 0 = C \cdot \int_A 1 = \int_A C \geq \int_A f \geq \int_A (-C) = 0$$

$$\implies \int_A f = 0$$

$\square$

Théorème

Si $A, B \subset \mathbb{R}^n$ sont admissibles et si $f : A \cup B \to \mathbb{R}$ est admissible, alors :

$$\int_{A\cup B} f = \int_A f + \int_B f - \int_{A\cap B} f$$

Preuve

$$\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_{A\cap B}$$

sur $A \cup B$:

$$f = f(\chi_{A\cup B} = f(\chi_A + \chi_B - \chi_{A\cap B}) = f(\chi_A) + f(\chi_B) - f(\chi_{A\cap B})$$

qui sont trois fonctions admissibles.

$$\implies \int_{A\cup B} f = \int_{A\cup B} f(\chi_A) + \int_{A\cup B} f(\chi_B) - \int_{A\cup B} f(\chi_{A\cap B})$$

$$= \int_A f + \int_B f - \int_{A\cap B} f$$

$\square$

Résumé du chapitre 6

Comment calculer les intégrales :

- Intégrales intérées
- Changement de variables, en particulier les coordonnées polaires et les coordonnées sphériques.
- + calcul de l'intégrale de Gauss : $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \mathrm{d}x$