1 Chapitre I : Geometrie classique

1.1 Avant Euclide

Theoreme de Thales Si les angles des 2 triangle sont egaux en A,A', B,B' et C,C' alors :

$$\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{A'B'}} = \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{A'C'}} = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{B'C'}}$$

Notation : On

Definition 2 triangle avec $\overline{\mathrm{m}}$ angles sont appeles semblable :

aplication :

preuve antique de Thales : Dessins pour 2AB = A'B'
On juxtapose 4 copie de ABC ⇒ 2AV = A'C' et 2BC = B'C'

propriete :
- — 0)
- — 1) opposer $\alpha + \beta = \pi$
- — 2) Angles parralele

theoreme La somme des angles d'un triangle est egale a π

preuve :

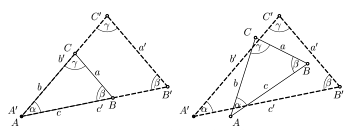
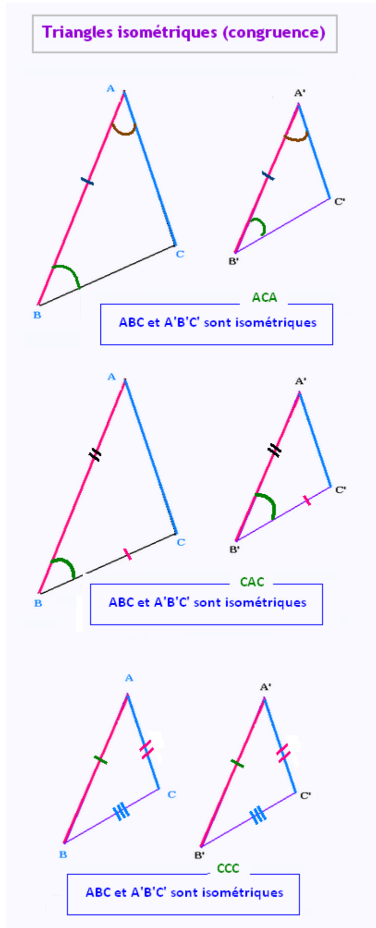


Fig. 1.2 – *Théorème de Thalès*

Critere :



preuve de Thales rigoureuse pour 2AB = A'B' :

- 1) CAC ⇒ A"B"C" est convergent a ABC
- 2) CAC ⇒ triangel orange "same"
- 3) L'angle manquant en B" est $= \pi - \beta - \gamma = \alpha$
- 4) CAC ⇒ tri violet est convergent
- 5) ACA ⇒ $\overline{\text{m}}$ tri vert

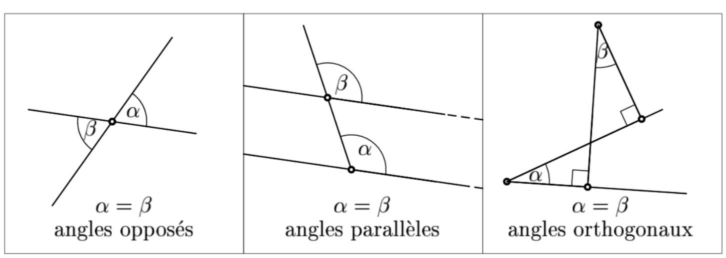


Fig. 1.5 – *Angles opposés, angles parallèles, angles orthogonaux*

De meme pour $\frac{A'B'}{AB} \in \mathbb{N}$, possible mais penible

Si on a une preuve pour $\frac{A'B'}{AB} \in \mathbb{N} \Rightarrow$ *validite pour* $\frac{A'B'}{AB} \in \mathbb{Q}$
Si

$$\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{A'B'}} = \frac{\mathrm{p}}{\mathrm{q}} \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow \mathrm{q}{*}\mathrm{AB} = \mathrm{p} * \mathrm{A'B'}$$

$\Leftrightarrow \mathrm{q} * \mathrm{AB} = \mathrm{p} * \mathrm{A'B'}$. *Soit A"B"C" semblable à ABC avec A"B"* $= \mathrm{q}{*}\mathrm{AB'} = \mathrm{p} * \mathrm{AB})$

Thales appliquer a ABC et A"B"C" $\Rightarrow \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{A"B"}} = \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{A"C"}} = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{B"C"}} (= \frac{1}{\mathrm{p}})$

Thales appliquer a A'B'C' et A"B"C" $\Rightarrow \frac{\mathrm{A'B'}}{\mathrm{A"B"}} = \frac{\mathrm{A'C'}}{\mathrm{A"C"}} = \frac{\mathrm{B'C'}}{\mathrm{B"C"}} (= \frac{1}{\mathrm{p}})$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{A'B'}} = \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{A'C'}} = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{B'C'}} \square$$

Remarque
- *On pourrait en faire une preuve pour apport reel en utilisant continuite et densite* $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$
- *On verra une autre preuve plus tard*

on atribue aussi a Thales : *Les angles a la base d'un triangle isocele (2 cote egaux) sont egaux*

c a d a=b $\Rightarrow \alpha = \beta \Leftrightarrow$ *isocele*

theoreme *Soit AB un diametre d'un cercle C.* $\mathrm{D} \in \mathrm{C} \backslash \{\mathrm{A}, \mathrm{B}\} \Rightarrow \mathrm{ABC}$ *ABC a un angle droit en D*

Preuve :

Application de Thales : *Construction de nombre rationnel a la regle et au compas. Donné un intervalle de la longueur 1 construire une longueur* $\frac{\mathrm{p}}{\mathrm{q}} \in \mathbb{Q}$ *Construire m* $\in \mathbb{N}$ *Donne un intervalle de longueur x, construire une longuer* $\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{q}}$

Theoreme (de l'angle au centre) *Les angles sont ainsi* $\forall \mathrm{A} \neq \mathrm{B}, \mathrm{C}$ *dans l'arc vert*

Remarques :
- *Ce cas limite est donne par le theoreme precedent*
- *En particulier, l'angle* α *ne depend pas de la position de A !*

Preuve : *On decoupe en 4 cas selon la position de A :*

Cas I

Cas II

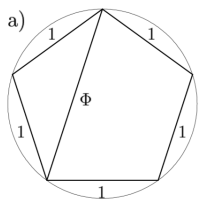
$$\begin{cases} 2\beta \rightarrow \textit{Obtenu par Cas I sur, B,D,A} \\ 2\gamma \rightarrow \textit{Obtenu sur C,D,A} \end{cases}$$

Cas III

1.2 Découverte des nombre Irrationnel :

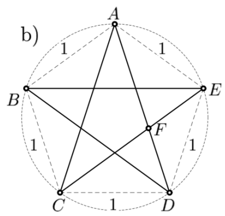
Les figure qui vont le plus nous fasciner sont les reguliere. Parmis celle ci une figure culte. Le pentagone.

On inscrit un pentagone regulier dans un cercle :



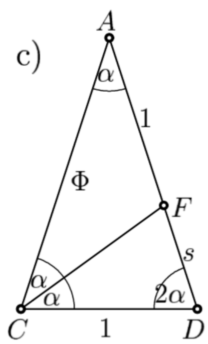
On cherche la longuer ϕ d'une 'et de toute) diagonal

Par L'angle au centre, $\alpha = \frac{\pi}{5}$



Par le triangle ACD, $2\beta + \alpha = \pi \Rightarrow \beta = \frac{2\pi}{5}$

— 1) On deduit Les angles manquants
— 2) On deduit les longueur du cote droit



— 3) On utilise Thales, car les triangles ACD et CDF sont semblable :

$$\frac{1}{\phi - 1} = \frac{\mathrm{CD}}{\mathrm{FD}} = \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{CD}} = \frac{\phi}{1}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad \phi^2 - \phi - 1 = 0 \\ &\Rightarrow \quad \phi = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \quad \phi > 0 \\ &\Rightarrow \quad \phi = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

Affirmation :

$$\boxed{\text{Le "nombre d'or" } \phi \text{ est irrationnel}}$$

Preuve : *Par l'absurde supposons que* $\phi = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{n}} \in \mathbb{Q} \quad \mathrm{pgcd}(\mathrm{m}, \mathrm{n}) = 1$ *Alors :*

$$\phi^2 - \phi - 1 = 0 \Rightarrow \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{n}^2} - \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{n}} - 1 = 0$$

— nˆ2

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad \mathrm{m}^2 - \mathrm{mn} - \mathrm{n}^2 = 0 \\ &\Rightarrow \quad \mathrm{m}^2 = (\mathrm{mn})\mathrm{n} \end{aligned}$$

Soit p un premier qui divise m (ca existe car $\phi > 1 \Rightarrow \mathrm{m} \neq 1$*) alors* $\mathrm{p} \mid \mathrm{m}^2 \Rightarrow \mathrm{p} \mid (\mathrm{m} - \mathrm{n})\mathrm{n}$

$$\begin{cases} p \mid (m-n) \Rightarrow p \mid n \\ p \mid n \end{cases} \Rightarrow \frac{m}{n} \textit{ n'est pas reduite} \rightsquigarrow \quad \square$$

Cette decouverte (ou celle de $\sqrt{2}$ pas clair laquelle était la premiere) bouleverse l'idde Pythagoricienne que "tout est nombre". En particulier, la preuve de Thales est incomplete ! D'autre culture n'ont pas les meme probleme avec les nombre cf tablette Pythagoricienne qui approxime $\sqrt{2}$: $\sqrt{2} = +1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3} + ...$

Theoreme de Pythagore : *On va maintenant parker d'aire, sans donner de vraie definition formelle. Pour l'instant : l'air est une surface polygonal, un nombre reel, de sorte que :*

— l'air du rectangle
— L'air est additif par decoupage

Avec ca on peut deja calculer :

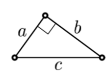
* Aire d'un parrllelograme de base a et hauteur h

* Aire d'un triangle de base a et hauteur h

En particulier, si ABC et A'B'C' sont semblable se rapport λ, on a :

$$\text{Aire}(A'B'C') = \frac{(\lambda a)(\lambda b)}{2} = \lambda^2 * \frac{ab}{2} = \lambda^2 \quad \text{Aire}(ABC)$$

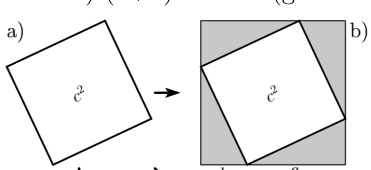
Theoreme de Pythagore :

Dans un triangle rectangle $a^2 + b^2 = c^2$ 

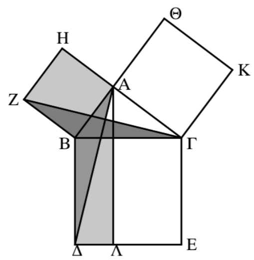
Ce theoreme date sans doute du V av JC. Un article de 1940 recense 370 demonstration !

Preuve :

— 1) $(a+b)^2 = \text{Aire(grand carre)} = c^2 + \frac{4ab}{2} = a^2 + b^2 + 2ab$



— 4) Preuve d'euclide

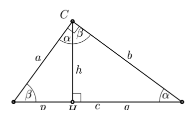


Thales : $\frac{c}{a} = \frac{a}{p} \Rightarrow a^2 = cp$

$\frac{c}{b} = \frac{b}{q} \Rightarrow b^2 = cq \Rightarrow a^2 + b^2 = (p+q)c = c^2 \quad \square$

On en tire le classique

Theoreme (de la hauteur)

Dans un triangle comme soit :  On a : $h^2 = q * p$

Preuve : *On utilise Pythagore 3 fois :*

— $a^2 + b^2 = (p * q)^2 = p^2 + 2pq + q^2$
— $p^2 + h^2 = a^2$
— $q^2 + h^2 = b^2$

$\Rightarrow a^2 + b^2 + p^2 + q^2 + 2h^2 = a^2 + b^2 + p^2 + q^2 + 2pq \quad \square$

Application : *On peut construire a la regle et au compas des racine carre arbitraire. En effet, donne un segment de longueur 1 et un de longueur l.*

— 1) On construit le milieu m de 1+l
— 2) Cercle de centre m par les extrmite du segment
— 3) Perpendiculaire par m

$\Rightarrow \quad h^2 = 1 * l = l \quad \Rightarrow \quad h = \sqrt{l}$

Conclusion : *On peut construire a la regle et au compas a partir d'un intervale de longueur 1, toute longeur l s'ecrient comme un nombre fini de :*

* nombre irreationnel
* +,-
* $\times$, /
* $\sqrt{}$

Corretion : comment construire $\sqrt{p}$ à partir de 1 et p ?

1.3 Les éléments d'Euclide

-300 av JC

Les éléments = 13 livres, compilation de resultats principalments connus

— Nouveau : Rigueur

Définition :

1. Un point est ce dont il n'y a aucune partie
2. Une droite est une longueur sans largeur
3. Angle

.

10. Et quand une droite ayant été éleve sur une droite fait les angles adjacents égaux entre eux, chacun des angles est droit :

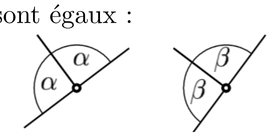
.

— angle obtu, angle aigu, cercle

23. Des droites parrallèle sont celles qui étant dan sle meme plan indefiniment prolonge de part et d'autre, ne se rencontrent pas, ni d'un coté ni de l'autre.

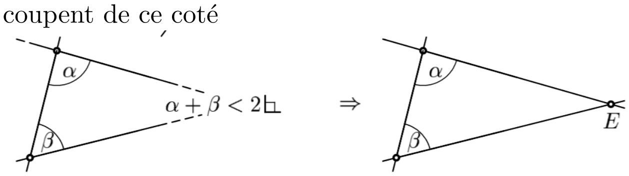
Les postulat : (a accepter comme vrai)

1. Chaque deux point A$\neq$ B peuvent etre joint par un segments de droite
2. Un segments (de droite) peut etre prolonger indefiniment en une droite
3. ($\forall$A $\neq$ B) $\exists$ cercle de centre A passant par B
4. Tout les angles droits sont égaux :

Post. 4. 

$\Rightarrow$ $\alpha = \beta = \llcorner$

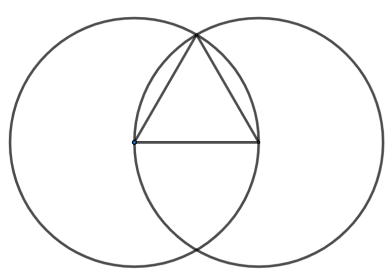
5. Si deux droites en coupant une 3eme de telle manière que la somme des angles intérieur d'un coté est inférieur à 2 angles droits
   Alors ces 2 droites se coupent de ce coté

Post. 5. 

— Post 1 & 2 $\longleftrightarrow$ Constructuion a la regle
— Post 3 $\longleftrightarrow$ Construction au compas
— Post 4 $\longleftrightarrow$ Homogénéité de l'espace
— Post 5 $\longleftrightarrow$? ?

Proposition : *Sur un segment donné, on peut construire un triangle équilatéral*

Preuve :



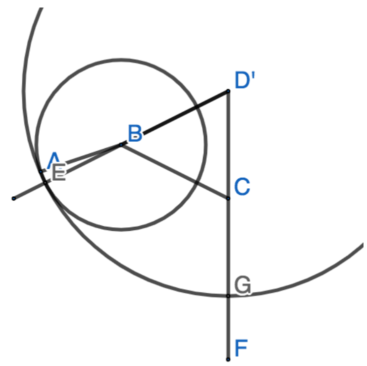
P3 : cercle Ca centre en A passant par B
P3 : cercle Cb passant par B en A
— Soit C $\in$ $C_a \cap C_b$
Alors ABC est un triangle equilateral AC = AB = CB $\square$

Attention : Manque de rigueur pour l'existence du point d'intersection il manque un axiome de continuite. Ce sera rendu rigoureusement avec Hilbert en 1899 avec def précis et 20 postulats

Proposition I.2 : Donné un segment AB et un point C, alors $\exists$ D tq $\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{CD}}$

Remarque : *On comprend de la néscessité de demontrer cette proposition que le compas $\leftrightarrow$ Post 3, ne peuvent pas reporter des distances. Mais avec prop I.2 on peut supposer que notre compas est rigide*

Preuve de la propositon I.2 :

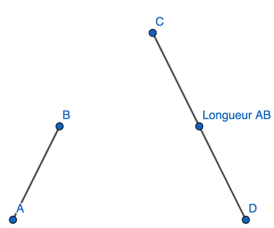


- P1 : segment BC
- Prop I.1 : trinagle equ sur BC
- P2 : prolonge DB'
- P3 : cercle centre en B par A
- D' par E
- P2 : prolonge D'C

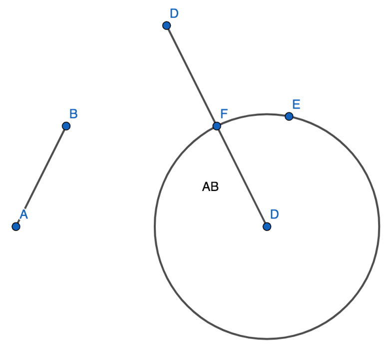
CD = AB car : CD = D'D - D'C car E,D $\in \mathrm{C}_{\mathrm{d}'}$

$$= \mathrm{D'E} - \mathrm{D'B} = \mathrm{BE} = \mathrm{AB} \quad \square$$

Proposition I.3 : *On peut retrancher d'un segment CD donné, un autre segment donné si* $\overline{\mathrm{AB}} < \overline{\mathrm{CD}}$



Preuve :



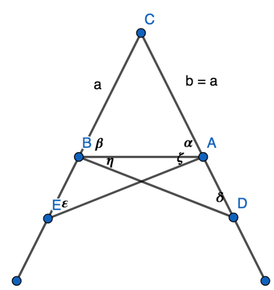
$\overline{\mathrm{CF}} = \overline{\mathrm{CE}} = \overline{\mathrm{AB}}$

- Prop $\exists$ E tq $\overline{\mathrm{CE}} = \overline{\mathrm{AB}}$
- P3 cercle par E centre en C

Proposition I.4 : Critère de congruence CAC :
Indémontrable sur la base des 5 postulat d'Euclide. Il faut prendre cette proposition comme un postulat

Proposition I.5 : *Si dans un triangle deux coté sont égaux, alors les angles opposés sont égaux :* Si a=b alors, $\alpha = \beta$

Preuve :



A voir : $\alpha = \beta$
- P2 : prolongation de CA
- Soit D $\in$ prolongation
- P2 Prolongation de CB
- Soit E $\subset$ prolongation de CB tq $\overline{\mathrm{BE}} = \overline{\mathrm{AD}}$ (existz pour arg converge dans la prop I.3)

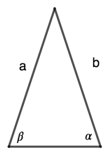
Affirmation :*Les triangle ACE et BCD sont congruent :*

Preuve de l'afirmation : AC = a = BC ; ACE = BCD ; CE=CB+BE=AC+AD=CD $\Rightarrow$(par CAC) AE = BD ; (1) $\delta = \varepsilon$; (2)$\alpha + \zeta - \beta + \mu$; (3)$\beta + \eta$

Affirmation :
Les triangles AEB et BDA sont congruent

AE = BD par (1)
AEB = $\varepsilon = \delta$ = BDA par (2)
$\overset{\text{CAC}}{\Rightarrow}$ BAE = $\zeta = \eta$ = ABD
(3)-(4) : $\alpha = \beta$ $\square$

Proposition I.6 : *Si dans :*



Si $\beta = \alpha$ *et a=b*

Proposition I.7 : sur l'unicité de certain triangle

Prop. I.7. *Si deux triangles sont érigés sur la même base AB et du même côté de celle-là avec* $a = a'$ *et* $b = b'$*, alors* $C = D$*.*
Preuve d'Euclide : supposons $C \neq D$ (voir figure 2.2, image 1). Car DAC est isocèle par

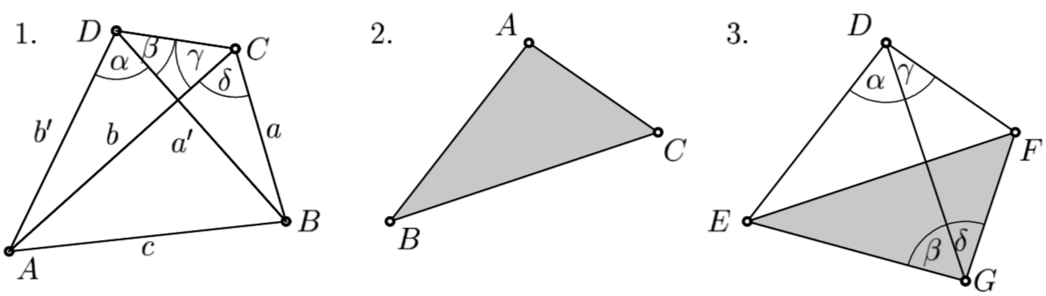
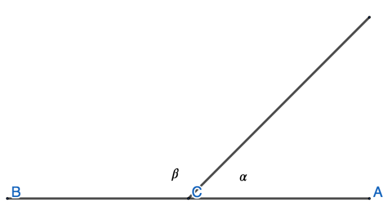


FIG. 2.2 – *Triangles à côtés égaux*

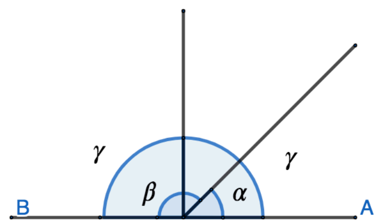
hypothèse, $\alpha + \beta = \gamma$ (Prop. I.5). Car DBC est isocèle, $\beta = \gamma + \delta$ (Prop. I.5). Donc une fois $\gamma > \beta$, et une fois $\gamma < \beta$, ce qui est impossible.

Remarque. Voilà notre première preuve "par l'absurde". Bien entendu, ce genre de raisonnement n'est pas resté sans critiques : "on ne peut pas prouver quelque chose de vrai à l'aide de quelque chose de faux" (L.E.J. Brouwer 1881-1966) !...

Proposition I.8 : critere de congruence CCC
Apparition du 4^eme *postulat*

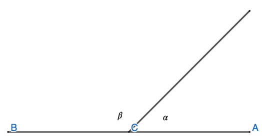


Preuve : *SI ABC sont aligné, alors* $\alpha + \beta = 2\times$ *l'angle*
$\Rightarrow$ *angle* γ *egaux* $\Rightarrow \gamma =$ *angles*
$\alpha + \beta = 2\gamma = 2\times$ l'angle $\square$



(proposition serie I)

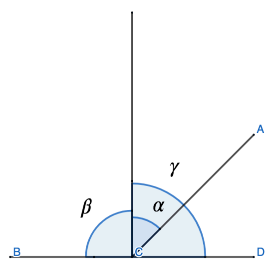
proposition I.13 : (propriete 0 du premier cours)



— Si A,C,B sont aligné ra $\alpha + \beta = 2\perp$

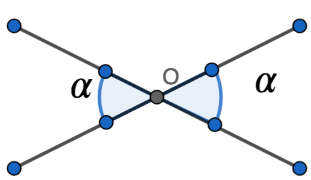
Proposition I.14 : M dessin. Si $\alpha + \beta = 2\perp \Rightarrow A, C, B$ sont aligné

Preuve : Si A, C, B ne sont pas aligné

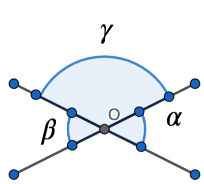


— P2 on prolonge BC
— BCD sont aligné pour ocnstruction
— Prop I.13 $\Rightarrow \gamma + \beta = 2\perp \Rightarrow \gamma = \alpha$

Prop I.15 (propriete 1 du premier cours :



Preuve :

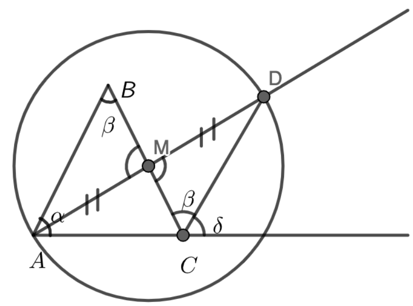


— prop 13 $\alpha + \gamma = 2\perp$
— $\beta + \gamma = 2\perp$

$$\alpha = 2\perp - \gamma = \beta \quad \square$$

Proposition I.16 : (angle interieur a un $\triangle$)

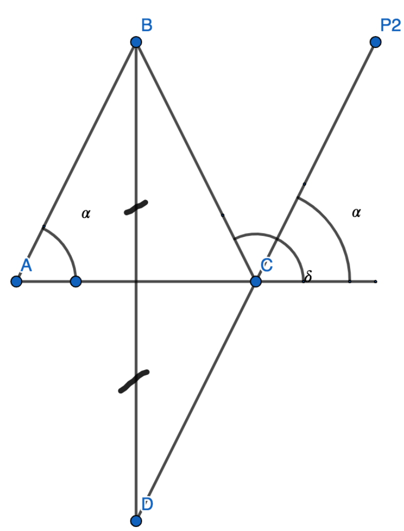
Preuve :



— Prop I.10 : Soit M le milieu de BC
— PI : segmnt entre A et M + P2 prolonge
— P3 : cercle centre en M par A pour trouver D

Affirmation : Les $\triangle$ BMA et CMD sont congruent
En effet :
— BM = CM
— MA = MD (par contruction)
— $\angle$BDA = $\angle$CMD par prop I.15
— Par CAC $\Rightarrow$ Les $\triangle$ sont congruent

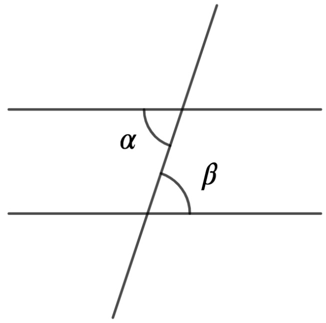
en particulier : $\angle$ABM $= \beta =$ $\angle$DCM
$\beta < \delta$



— Prop Prop I17-19 Resultat sur les lignes, sont utiliser le 5eme

Définition : *DEux droites distinct a et b sont parrallele noté a $\parallel$ b si* a $\cap$ b $= \emptyset$

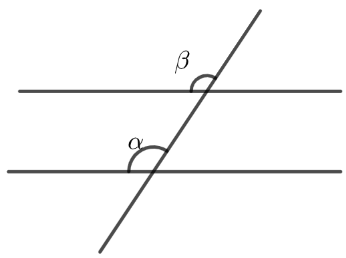
I.27



Si $\alpha = \beta$ *alors* $a \| \ b$

Preuve :
- Si a $\nparallel$ alors a $\cap$ b = $\emptyset$
- Par prop I.16 $\alpha > \beta$ contradiction $\alpha = \beta$ $\square$

Proposition I.28 :



Si $\alpha = \beta$ alors a $\|$ b

Preuve : - Prop I et Prop I.27 $\square$

Entrée du 5eme Postulat : -

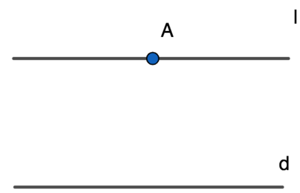
Si $\alpha + \beta$ ¡ $2\perp$ donc les droite s'intersectent du même coté que α et β

Proposition I.29 : -
Si a$\|$ b, alors $\alpha = \beta$

Preuve : -
On démontre la contraposé : $\alpha \neq \beta$ alors a $\nparallel$ b
SRLG $\alpha > \beta$ $\alpha + \gamma = 2\perp$ $\beta + \gamma < \alpha + \gamma = 2\perp$

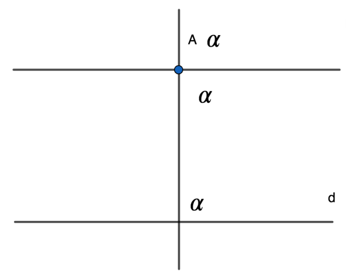
Proposition I.30 : -
Soient a,b,c trois trois

Proposition I.31 Soient A un point et d une droite tq A$\notin$ d



Alors $\exists$ droite l tq l $\parallel$ d et A$\in$ l

preuve :



Remarque : *la preuve de la prop I.31 n'utilise pas le 5eme postulat mais si on demande l'unicité de la droite l, alors oui. Plus précisement :*

Postulat de Playfair : Pour toute droite d, et point A$\notin$ d, il existe une unique droite l, parrallèle à d, et contenant A.
Remarque : *C'est la proposition I.31 où on a ajouté : Alors $\exists!$ droite*

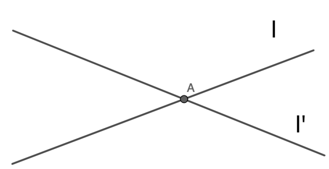
En supposant vrai les postulat 1-4 (mais pas le 5) on montre :

$$\textit{Postulat de Playfair} \Leftrightarrow \textit{5eme Postulat}$$

On démontrer 5eme postulat $\Rightarrow$ Playfair

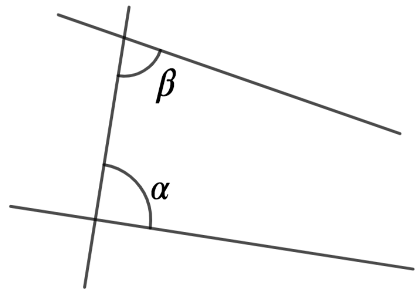
Soit d une droite, A un point :
- l'existence de l $\ni$ A tq d$\parallel$ est établi dans la Prop I.31
- il faut démontrer l'unicité ; Supposons qu'il existe 2 parrallèle, l, l' tq :

l $\parallel$ d ;   l'$\parallel$ d



$\mathrm{l} \parallel \mathrm{d}, \mathrm{d} \parallel \mathrm{l}' \Rightarrow \mathrm{l} \parallel \mathrm{l}'$ *si l et l' sont distinct mais :* $\mathrm{l} \nparallel \mathrm{l}'$ car $\mathrm{A} \in \mathrm{l} \cap \mathrm{l}' \Rightarrow$ *l et l' ne sont pas distinct*
$\square$

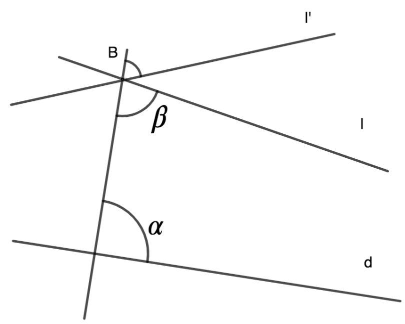
on montre :   Playfair $\Rightarrow$ 5eme postulat :



— $\alpha + \beta = 2\perp$

A voir : *Les droites s'intersectent du cote de* $\alpha + \beta$

Si ce n'est pas le cas, alors : $\begin{cases} \textit{les droite sont } \parallel \\ \textit{elle s'intersectent de l'autre coté} \end{cases}$



— Construire une droite l' tq l'angel en B est α
(par ex S2 : on peut repporter des angles)

$\underline{\text{Prop I.28}} \Rightarrow \text{d} \parallel \text{l}'$
puisque B $\in$ l l $\parallel$ d; B $\in$ l′l′ $\parallel$ d $\Rightarrow$ *l=l'* $\Rightarrow \alpha + \beta = 2\perp \rightsquigarrow$

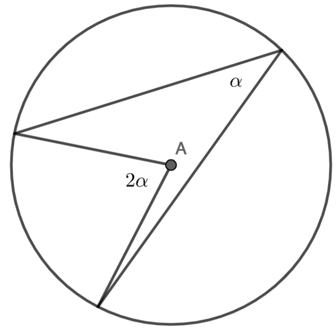
Proposition I.32 Dans un triangle $\alpha + \beta + \gamma = 2\perp$

Proposition I.33 - 46 : Aire de parral*, triangle, etc *Définit l'aire d'un rectangle :*

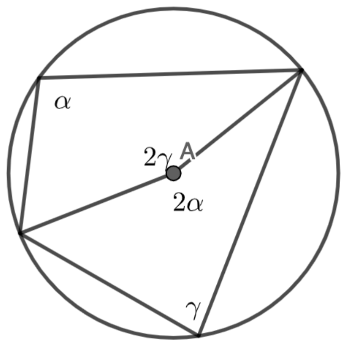
Aire(rectangle) = a×b ; Aire(triangle) = $\frac{\text{b}\times\text{h}}{2}$

Proposition I.48 : Si dans un triangle de cote a,b,c $\text{a}^2 + \text{b}^2 = \text{c}^2$, alors l'angle opposé a c est un angle droit :

Prop III.20 : - Théoreme de l'angle au centre

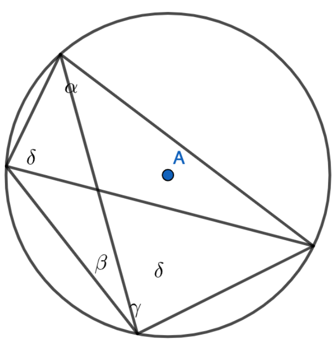


Prop III.22 : -



$\alpha + \gamma = 2\perp$

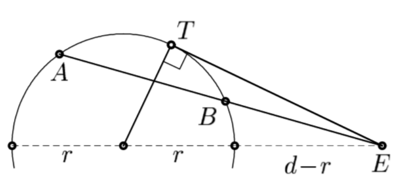
Preuve : -



Prop III.36 : -

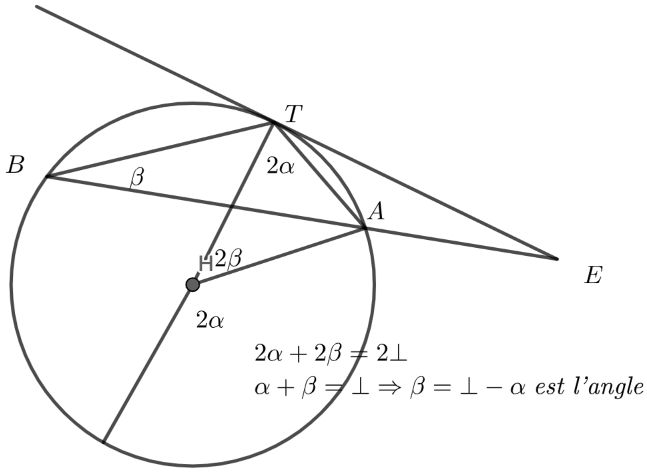
- Soit C un cercle, E un point exterieur zau cercle
- Soit l un droite par E, intersectent C en deux point A,B, alors :

$$\mathrm{AE} \cdot \mathrm{BE} = (\mathrm{d}-\mathrm{r})(\mathrm{d}+\mathrm{R}) = \mathrm{d}^2 - \mathrm{r}^2 \quad =(\mathrm{ET})^2$$



Pour nous la tangente à un cercle est une droite intersectent le cercle en un point T, tq le rayon par T est $\perp$ *à la droite* $\Leftrightarrow \exists!$ point d'intersection

Preuve : -

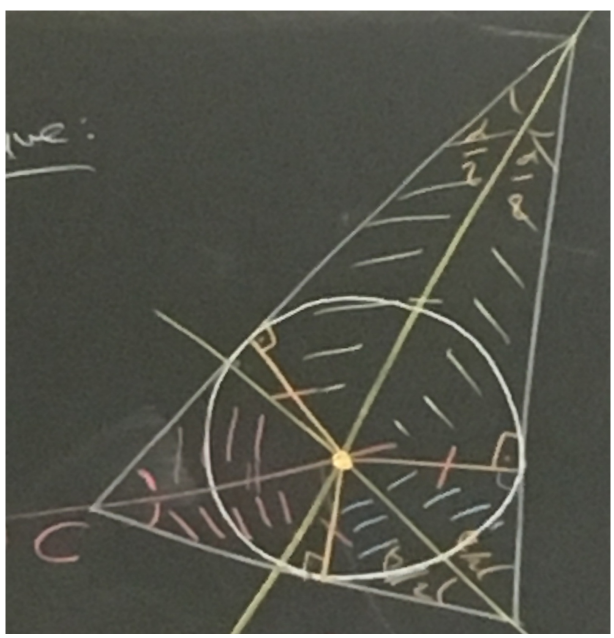


Remarque : *Ce n'est pas la preuve d'Euclide, qui n'as pas encore démontrer Thalès, mais c'est ok pour nous car nous n'utilisons pas cette prop pour démontrer Thalès.*

Rappel : *Cercle inscrit et circonscrit d'un triangle :*

Proposition : -
Les 3 bissectrice d'un $\triangle$ se recontrent en un point qui est le centre du $\underbrace{\text{cercle inscrit}}_{\text{k+gd}}$ du $\triangle$

preuve :



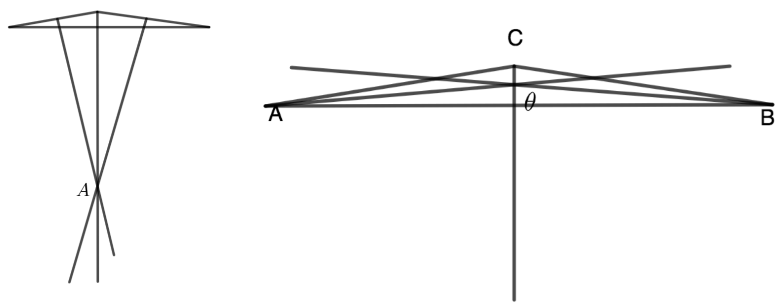
- on considere 2 des bissection et leur point d'intersection θ
- on prend les 3 perp aux coté par θ
- CAA $\Rightarrow$ Les 2 triangle vert sont congruent (1)
- CAA $\Rightarrow$ Les 2 trinangle belu sont congruent (2)
- (1) (2) $\Rightarrow$ Les 3 perp ont meme longueur = r $\Rightarrow$ Le cercle centre en θ de rayon r est le cercle inscrit
- Les droite par C et O a voir, c'est la 3eme bissectrice

Prop : -
Les 3 médiane d'un triangle s'intersectent un point qui est le centre du cercle circonscrit du triangle
- médiane : mediatrice des segment du triangle
- cercle inscrit : le + petit cercle contenant triangle

preuve exo

il existe une autre famille de droites dans un triangle : les médiane, par un sommet et le milieu du segment opposé. Elles s'intersectent en un point (facile à démontrer en coordone plus tard Aucun cercle correspond

Remarque : pour se souvenir faire un dessin dégénéré

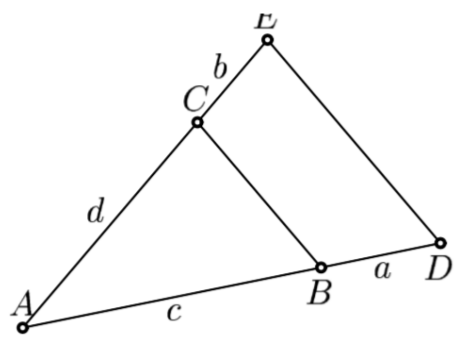


Le cercle circonscrit doit passer par les segements $d(\theta, \mathrm{A}) = d(\theta, \mathrm{B}) \to +\infty \qquad d(\theta, \mathrm{C}) \to 0$ *donc ce n'est pas le cercle circonscrit*

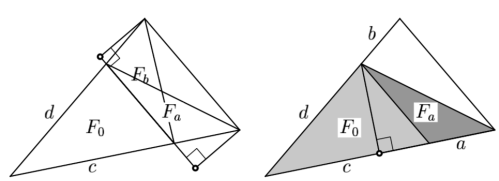
Livre V : -
Théorie des proposition d'Eudoxe, appoxe de nombre irrationnel, précurseur des coupure de Declekind

Livre VI : -
On commence par une variante

Proposition VI.2 : -
Si : CB $\parallel$ ED alors : $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{b}} = \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{c}}$



Preuve : -

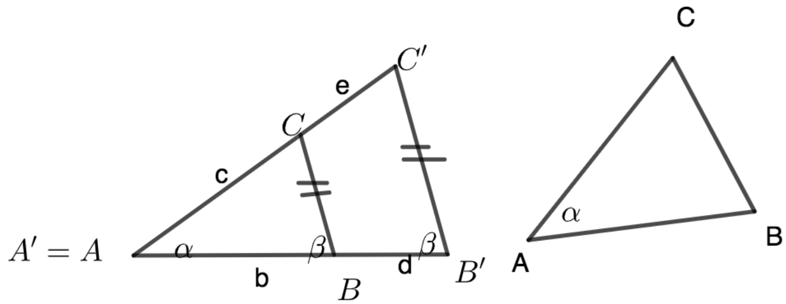


- $A_D = \text{Aire}(CBD)^*$
- $A_E = \text{Aire}(CBE)^*$
- $A_D = \frac{1}{2}dh \qquad A_0 = \text{Aire}(ABC) = \frac{1}{2}bh$
- $\frac{AD}{A_0} = \frac{d}{b} \qquad \text{Par sym}(\begin{cases} B \leftrightarrow C \\ E \leftrightarrow D \end{cases}) : \frac{A_E}{A_0} = \frac{e}{c} = \text{par}(^*) \quad \square$

Théoreme de Thalès : -
Soient A,B,C et A',B',C' deux triangle semble Alors :

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$$

Preuve : -
Srlg $AB \leq A'B'$



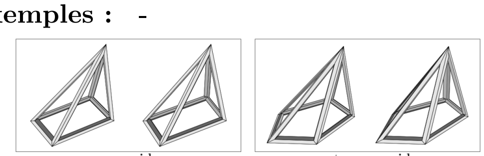
- La prop III nous donne : $\frac{d}{b} + \frac{e}{c}$
- On doi tvoir : $\frac{b}{b+d} = \frac{c}{e+c} \Leftrightarrow \frac{b+d}{b} = \frac{c+e}{c}$
- $1 + \frac{d}{b} = 1 + \frac{e}{c}$

Livre XI - XIII : Dim tri-dimensionnel , volume en particulier :
Les corps platoniens :

Un corp platonien est un polyèdre (solide de $\mathbb{R}^3$ délimité par des faces polygonales) (convexe) régulier

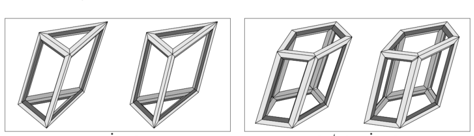
1. Toute les faces sont le même n-gone régulier
2. Tous les sommet rencontrent le même nombre de faces

Exemples : -



pyramide autre pyramide (2.15)

d'un *prisme* ($\pi\rho i\sigma\mu\alpha$, un corps formé par un polygone, un autre identique parallèle et des parallélogrammes),

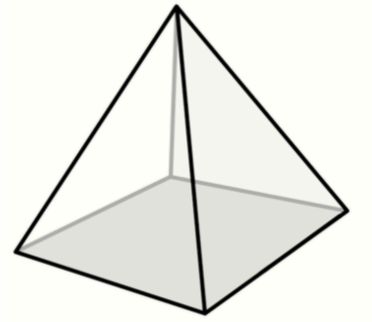
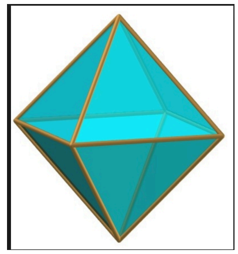
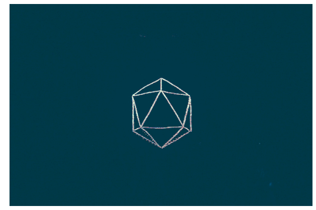


prisme autre prisme (2.16)

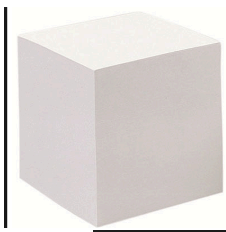
Combien en existe t'il ?

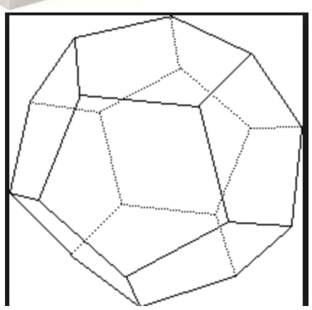
Preuve constructive : -
Un polyèdre régulier détermine deux nombre :
- $3 \leq$ n : toute face est un n-gone
- $3 \leq$ m : # de face qui se rencontrent en un sommet

Quelle polygone regulier peut on construire avec des faces triangulaire ? n=3

m=3  m=4  m=5 

m=6 impossible m ≥ 7 : angle $> 2\pi$

n=4 : carré  m ≥ 4 impossible car $4\perp = 2\pi$

n=5 : pentagone : m=3 

Preuve Algébrique : basé sur la formule d'Euler suivante

Théoreme : -
Dans un polyèdre convexe de $\mathbb{R}^3$, soit :
- v = # sommet
- e = # d'arrète Alors v-e+f = 2
- f = # face

Nous démontrons cette formule à l'aide de la géométrie sphérique :

Ex : -

	v	c	f	n	m
tétraède	4	6	4	3	3
cube	8	12	6	4	3
octaèdre	6	12	8	3	4
dodécaèdre	20	30	12	5	3
icosaèdre	12	30	20	3	5

Pour les polyèdre régulier, on a en plus :

— 2e = nf car chaque face contient n arrete et chaque arete est contenue dans 2 face

— 2e = mv car chaque sommet rencontre m face : donc m arrète et chaque arète rencontre deux sommets

$2 = \text{v-e+f} = \frac{2e}{m} - e + \frac{2e}{n} = \frac{e}{m \cdot n}(2n - mn + 2m) \qquad \Leftrightarrow 2mn + e \cdot mn = 2e(n+m) = (2+e)m \cdot n \quad \circledast$

Si m et n≥ 4 $\qquad 2(n+m) \leq \frac{m}{2} \cdot n + \frac{n}{2} \cdot m = n \cdot m$

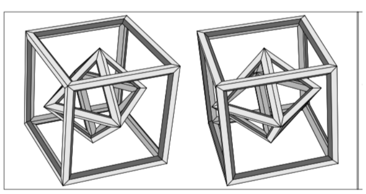
$\circledast$: $(2+e)mn = 2e(n+m) \leq e \cdot nm$ Donc m=3 ou n=3 et pour sym ($\begin{cases} n \leftrightarrow m \\ f \leftrightarrow v \end{cases}$) on peut sopposer n=3

Pour n =3 : $\circledast$ devient : $e \cdot m = 6(e - m)$

Si $m \geq 6$ 6e 6 impossible

$\Rightarrow$ m=3,4 ou 5 sont les seul valeur possible pour n=3

Cette structure algébrique $\begin{cases} v \leftrightarrow f \\ n \leftrightarrow m \end{cases}$) *s'éxplique géométriquement*



2 Chapitre II : L'espace Cartésien $\mathbb{R}^n$

2.1 Le plan $\mathbb{R}^2$ dans les postulats d'Euclide

Définition : -

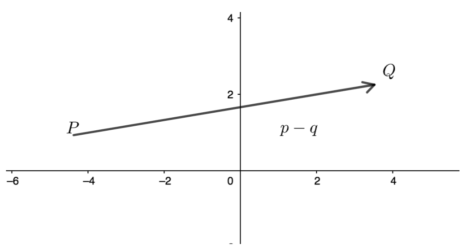
- $\mathbb{R}^2 = \{(x, y)|x, y \in \mathbb{R}\}$ le plan (cartésien)
- Un point est un éléments de $\mathbb{R}^2$
- Une droite est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ de la forme

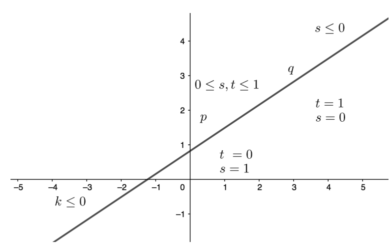
$$d_{p,v} := \{p + tv|t \in \mathbb{R}\} \textit{ou } p \in \mathbb{R}^2, \qquad o \neq v \in \mathbb{R}^2$$

Lemme : $d_{p,v} = d_{q,w} \Leftrightarrow \begin{cases} q \in d_{p,v} \\ \exists s \in \mathbb{R} \qquad tq\, w = s \cdot v \end{cases}$

Exemples : Soient $p \neq q \in \mathbb{R}^2$

$d_{p,q-p} = \{p + t(q-p)|t \in \mathbb{R}\} \quad = \{(1-t)p + tq|t \in \mathbb{R}\} \quad = \{s \cdot p + t \cdot q|s + t = \quad 1, s, t \in \mathbb{R}\}$





Lemme : Par deux point p$\neq$ q il passe une unique droite

Preuve : -

$\exists$ droite $\quad d_{p,q-q} \quad$ Soit $d_{x,v} \ni p, q \quad$ A voir : $d_{p,q-p} = d_{x,v}$

- $d_{x,v} \ni p = x + t, v$
- $d_{x,v} \ni q = x + t_1 \cdot v$
- $= q)p = (t_2 - t_1) \cdot v$

Corolaire : Deux point se rencontrent en au plus un point

Les postulat 1 & 2 sont valide :

Définition : Deux droite sont parallel noté $\|$, si leur intersection est vide

Lemme $d_{p,v} \parallel d_{q,w} \Leftrightarrow \begin{cases} q \notin d_{p,v} \\ \exists s \in \mathbb{R} \quad tq \quad w = sv \end{cases}$

Preuve : (exo)

En résumé : Donné deux droite $d_{p,v}, d_{q,w}$

- v& w linéairement indépendant : droite d'intersectent ern un point
- v& w pas linéairement indépendant $\Leftrightarrow \exists$ s tq w=sv $\begin{cases} q \in d_{p,v} & : \text{droite s'intersectent} \\ q \notin d_{p,v} & : \text{droites } \| \end{cases}$

Corrolaire : (Postulat de Playfair)
Soit d droite, $p \notin$ d Alors $\exists!$ droite d' $\ni$ p tq $d \| d'$

Preuve : - $d = d_{q,v} \rightarrow$
Existence : $d' = d_{p,v} \parallel d_{q,v}$ puisque même vecteur directeur et $p \notin d_{q,v}$ par hypothèse
Unicite : Soit $d_{x,w} \ni p$ et $d_{x,w} \parallel d_{q,v} \Rightarrow w = s \cdot v$ pour $s \in \mathbb{R}$
$d_{x,w} = d_{p,v}$

Remarque : *On est pas en train de dire que playfair découle des postulat 1 et 2 ! Ici on utilise implicitement les structures de* $\mathbb{R}$ Pour le 3eme postulat il nous faut une distance :

On définit $\begin{cases} d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ ((x,y),(x',y')) \rightarrow \sqrt[2]{(x'-x)^2 + (y'-y)^2} \textit{ Par pythagore} \end{cases}$

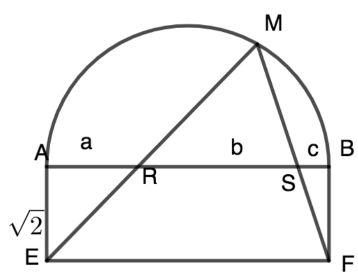
L'équation d'un cercle de rayon r par un point $\theta = (a,b)$

$$C_{\theta,r} = \{p \in \mathbb{R}^2 | d(\theta,p) = r\} \qquad (x,y)|(a-x)^2 + (b-y)^2 = r^2$$

Postulat 3 : $\theta \neq b \in \mathbb{R}^2$: Alors le cercle $C_{\theta,d(\theta,b)}$ passe par b (postulat 4 est valide :)

Le plan cartésien vient avec une approche analytiquer : on traduit les probeleme de géométrie en problème, d'algèbre :

Illustration : -
Théoreme de fermat :



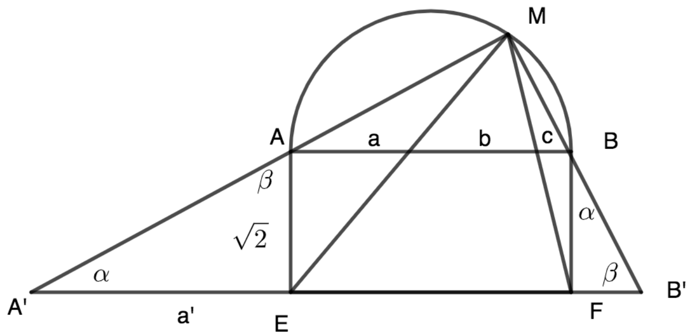
Alors pour tout M in C
Soient R,S les intersection des droites, ME rep MF avec AB,
on a : $(AS)^2 + (RB)^2 = (AB)^2 (= 2^2)$

Soit C un cercle $\frac{1}{2}$ cercle de rayon 1. AB sur son diamètre.

Soient E,F tq : ABFE est un rectangle avec AE = \sqrt{2}

Preuve : - On pose : a :=AR, b =RS, c = SB
on doit montrer : $(AS)^2 + (RB)^2 = (AB)^2$

$\Leftrightarrow (a+b)^2 + (b+C)^2 = (a+b+c)^2$
$\Leftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 + (b+c)^2 = a^2 + 2a(b+C) + (b+c)^2$
$\Leftrightarrow b^2 = 2ac$



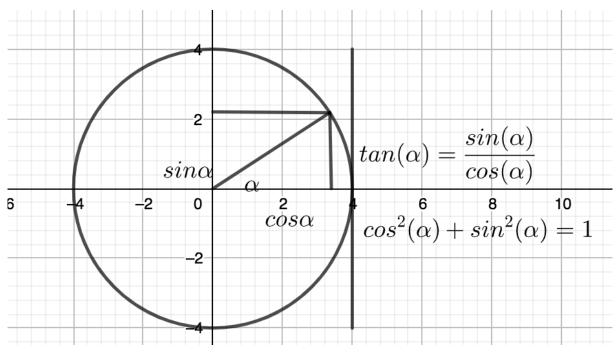
— ABM a un angle droit en M puisque M $\in \frac{1}{2}$ cercle de dim AB

$\Rightarrow$ A'B'M aussi un angle droit en M, donc $\alpha + \beta = 2\perp$
$\Rightarrow$ L'angle manquant dans le triangle AA' E *est* β
$\Rightarrow$ l'angle manquant dans le triange BB' F *est* α

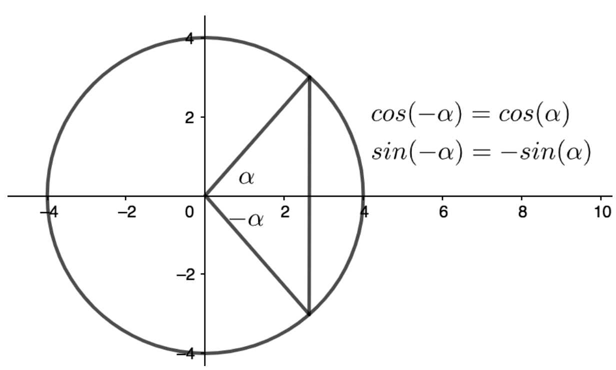
Thales = $\frac{a'}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{C'} \Leftrightarrow a'c' = 2$ Thales : $\frac{a'}{a} = \frac{2}{b} = \frac{c'}{c} \Rightarrow a'c' = \frac{2a}{b} \cdot \frac{2c}{b} = \frac{4ac}{b^2}$ $\square$

2.2 Trigonométrie :

cercle de rayon 1 :



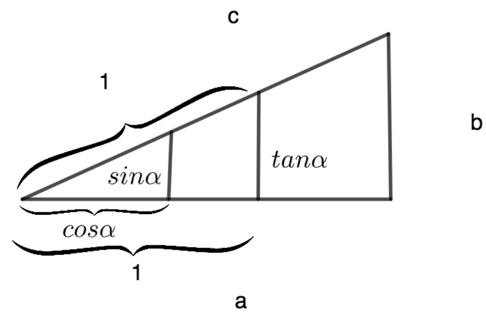
on peut construir des angles négatif :



On peut considérer des angle $\geq 2\pi$, comme angle $\alpha = \alpha + 2\pi$
— $\cos(\alpha + 2\pi) = \cos(\alpha)$
— $\sin(\alpha + 2\pi) = \sin(\alpha)$

$\alpha + \pi$
— $\cos(\alpha) = -\cos(\alpha + \pi)$
— $\sin(\alpha) = -\sin(\alpha + \pi)$
— $\cos(\alpha + \frac{\pi}{2}) = -\sin(\alpha)$

— $\sin(\alpha + \frac{\pi}{2} = \cos(\alpha)$



dans un triangle arbitraire :
$\Rightarrow \sin\alpha = \frac{b}{c}; \quad \cos(\alpha) = \frac{a}{c}; \quad \tan(\alpha) = \frac{b}{a}$

Formule d'addition :
— $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)$
— $\sin(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta) + \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta)$

$\Rightarrow \cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)$
$\Rightarrow \sin(\alpha - \beta) = -\cos(\alpha) \cdot \sin(\beta) + \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta)$

Preuve géométrique pour $0 \leq \alpha, \beta, \alpha + \beta \leq \frac{\pi}{2}$
— $\cos(\alpha + \beta) = X - X'$
— $\sin(\alpha + \beta) = y + y'$

$\overset{\text{Thales}}{\Rightarrow} \begin{cases} \frac{x}{\cos(\beta)} = \frac{\cos(\alpha)}{1} \Rightarrow X = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) \\ \frac{y}{\cos(\beta)} = \frac{\sin(\alpha)}{1} \Rightarrow y = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) \end{cases}$
Les triangles :

En posant : $\alpha = \beta$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) = 1 - 2\sin^2(\alpha) = 2\cos^2(\alpha) - 1$$

$$\sin(2\alpha) = 2\cos(\alpha) \cdot \sin(\alpha)$$

En remplacant αpar$\alpha/2$ *ca nous donne :*

$$\cos(\alpha) \overset{1}{=} 1 - 2\sin^2(\alpha/2) \overset{2}{=} 2\cos^2(\alpha/2) - 1$$

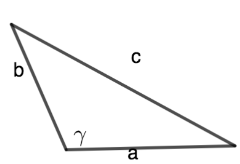
$\begin{cases} 1 \quad \sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos(\alpha}{2} \Rightarrow \sin(\frac{\alpha}{2}) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(\alpha}{2}} \\ 2 \quad \cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos(\alpha}{2} \Rightarrow \cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos(\alpha}{2}} \end{cases}$

$$\sin(\alpha = 2\cos(\frac{\alpha}{2}) \cdot \sin(\frac{\alpha}{2})$$

$$(1) \quad \forall\varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad [n \geq N_\varepsilon \Rightarrow \forall x \in A, d(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon]$$

théoreme du cosinus : -

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(\gamma)$$

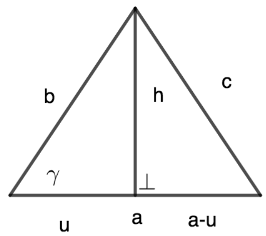


Remarque : -

- Pour $\gamma = \perp$ c'est pythagore
- version calculatoir des critere CAC aγb

$$\cos(\gamma) = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

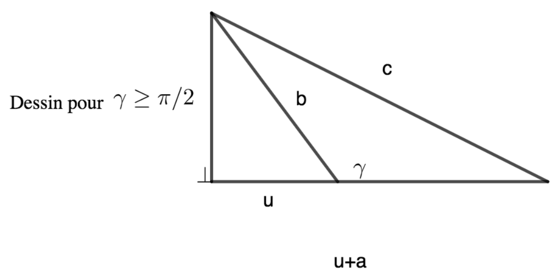
Preuve : -



Pythagore $c^2 = h^2 + (a-u)^2 \quad b^2 = h^2 + u^2 \quad \Rightarrow c^2 - b^2 = a^2 - 2au$

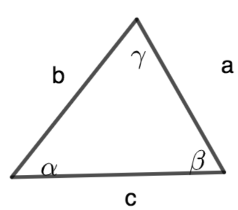
$\cos(\gamma) = \frac{u}{b} \Rightarrow u = b(\cos(\gamma))$
Donc : $c^2 - b^2 = a^2 - 2au \Rightarrow c^2 - b^2 - 2ab(\cos(\gamma))$ dessin pour $\gamma \leq \pi/2$)

a voir :



Pythagore : $c^2 = h^2 + (u+a)^2$
$b^2 = h^2 + u^2 \quad$ et $\frac{u}{b} = \cos(\pi - \gamma) \quad = -\cos(\gamma)$ $\square$

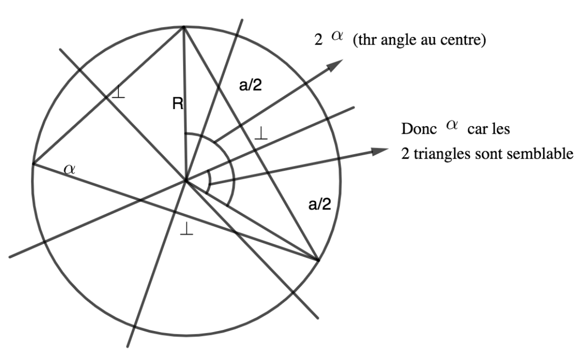
Theoreme du sinus : -

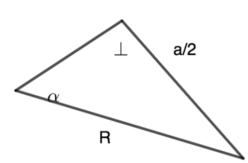


$$\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\beta)}{b} = \frac{\sin(\gamma)}{c} = \frac{1}{2R}$$

ou R est le rayon du cercle circonscrit

Preuve : -



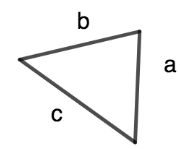


$\sin\,\alpha = \frac{a/2}{R} \quad \Leftrightarrow \frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{1}{2R}$ $\square$ *il existe aussi une formule pour le rayon p du cercle inscrit et une formule pour l'aire d'un triangle*

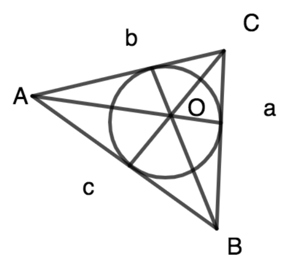
Théoreme de Héron d'Alexandre Ier -

On pose $S = \frac{a+b+c}{2}$

Alors $\text{Aire(ABC)} = \sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}$ $p = \sqrt{\frac{(S-a-(S-b)(S-c)}{S}}$



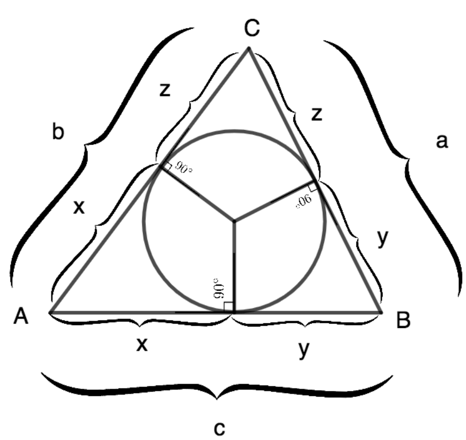
Preuve : - L'égalite pour p $\Rightarrow$ l'égalité pour l'air :



$\text{Aire(ABC)} = \text{Aire(ABO)} + \text{Aire(BCO)} + \text{Aire(ACO)}$

$-\frac{1}{2}pc + \frac{1}{2}pa + \frac{1}{2}pb = p\frac{(a+b+C))}{2}$

Montrons l'égalité pour f : -



on définit x,y,z comme :

$x + y = c(1)$

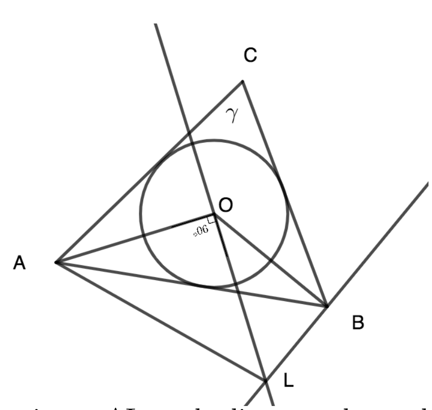
$x + z = b(2)$

$y + z = a(3)$

$(1) + (2) + (3) : 2x = c + b - a$

=a+b+c-2a $\Leftrightarrow x = \frac{a+b+c}{2} - a =$ S-a

$p = \sqrt{\frac{(S-a)(S-b)(S-c)}{2}} \Leftrightarrow p^2 = \frac{x \cdot y \cdot z}{S}$ *Idée : Construction du cercle circonscrit par AOB*

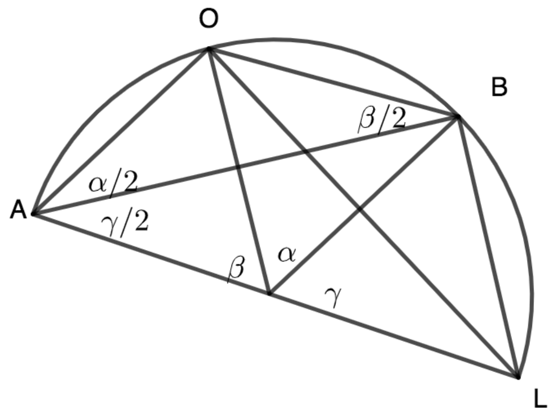


La perpendiculaire a AO par O
La perpendiculaire a AB par B
$\Rightarrow$ intersection := L

<u>Affirmation</u> : AL est le diametre du cercle passant par AOB car ce cercle et le cercle de Thales des

triangle ALO et ALB

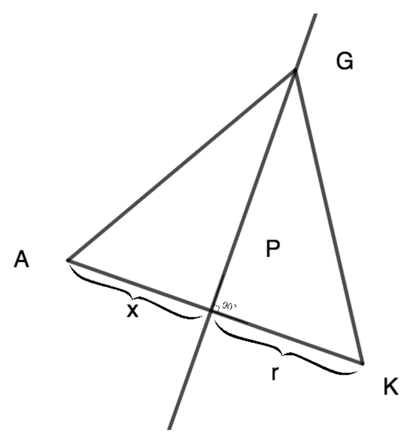
Affirmation : $\angle$LAB $= \gamma/2$



Les triangles ABL et CDO sont semblable
- Par Thales : $\frac{\mathrm{BL}}{\mathrm{P}} = \frac{\mathrm{x+y}}{2}$
- Les trinagles OEK et LBK sont semblable Thales : $\frac{\mathrm{BL}}{\mathrm{P}} = \frac{\mathrm{y-r}}{\mathrm{r}}$
- On pose r = EK

Donc $\frac{\mathrm{x+y}}{\mathrm{Z}} = \frac{\mathrm{y-r}}{\mathrm{r}} \Leftrightarrow \mathrm{r(x+y) = zy - tz}$
$\Leftrightarrow \mathrm{r(x+y+z) = zy} \Leftrightarrow \mathrm{r} = \frac{2\mathrm{y}}{5}$

Theoreme de la Hauteur : -



$\mathrm{p}^2 = \mathrm{xr} \quad = \frac{\mathrm{xyz}}{5}$ $\square$

2.3 Espace $\mathbb{R}^n$

$\mathbb{R}^n = \{(x_1, ..., x_n) | x_i \in \mathbb{R}\}$ Pas juste un ensemble $\mathbb{R}^n$ est muni d'une structure d'espace vectoriel avec 2 operation qui ont une signification géométrique : $\begin{array}{ll} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ (a, b) \longrightarrow & a + b := (a_1 + B_, ..., a_n b_n) \end{array}$

<u>Multiplication par un scalaire</u> : $\begin{array}{ll} \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ (\lambda, a) \longrightarrow & \lambda a := (\lambda a_1, ..., \lambda a_n) \end{array}$

Attention : Dans cette écriture on a choisi O et les axes de coordonné ($\Leftrightarrow$ choisir une base orthonormal)
- On définit la distance euclidienne : d : $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}(\geq 0)$ par :

$$d(a, b) \quad = \quad \sqrt{\sum (b_i - a_i)^2}$$

$n = 1$ $\qquad d(a, b) = \sqrt{(b - a)^2} = |b - a|$

$n = 2$ $\qquad d(a, b) = \sqrt{b_i - a_i)^2 + (b_2 - a_2)^2}$

$$n = 3 \qquad \begin{cases} \textit{Pythagore :} & \sqrt{b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2} \\ & \sqrt{(\sqrt{b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2} + (b_3 - a_3)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} (b_i - a_i)^2} \end{cases}$$

Produit scalaire : -

$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \qquad (a_1, ..., a_n), (b_1, ..., b_n)) \longrightarrow \sum_{i=1}^{n} a_i b_i := \langle (a_1, ..., a_n), (b_1, ..., b_n) \rangle$

De norme associé : $\qquad ||a|| := \sqrt[2]{\langle a, a \rangle}$

Propriétés : -

1. ——a—— est bien défini, cad : $\rangle a, a \rangle \geq 0 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2$
2. le produit scalaire est bilinéaire :

$$\begin{array}{lll} \left\langle \lambda a + \lambda' a', b \right\rangle & = \lambda \langle a, b \rangle + \lambda' \left\langle a', b \right\rangle & \forall a, a', b, b' \in \mathbb{R}^n \\ \left\langle a, \mu b, \mu' b' \right\rangle & = \mu \langle a, b \rangle + \mu' \left\langle a, b' \right\rangle & \forall \lambda, \lambda', \mu, \mu' \in \mathbb{R} \end{array}$$

3. Le produit sclaire est symétrique : $\quad \langle a, b \rangle = \langle b, a \rangle \quad \forall a, b \in \mathbb{R}^n$
4. $||\lambda a|| = |\lambda| \cdot ||a|| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^n$.
5. $||a|| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = 0$

   $\Leftarrow$ *trivial*

   $\Rightarrow \quad 0 = ||a|| = \sqrt{\sum a_i^2} \quad \Leftrightarrow \sum a_i^2 = 0$

   $\qquad\qquad\qquad\qquad \Rightarrow a_i^2 = 0$
6. $d(x,y) = ||y - x||$

Lemme : - $\leq$ *De Cauchy-Schwarz*

$|\langle a, b \rangle| \leq ||a|| \cdot ||b||$ $\qquad$ *avec = si et seulement si a et b sont colinéaire*

(cad a et b sont sur une meme droite par l'orgine)
$\Leftrightarrow b = \lambda a$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$ ou a=0

Preuve : -

Si a=0 on a 0=0 , rien a démontrer
On suppose a$\neq$ 0
idée : on considère f(λ)

$$= \langle b-\lambda a, b-\lambda a\rangle \geq 0$$

$$= \underbrace{\langle b-b\rangle}_{||b||^2} - \lambda \langle a, b\rangle - \lambda\underbrace{\langle b, a\rangle}_{\langle a,b\rangle} + \lambda^2\underbrace{\langle a, a\rangle}_{||a||^2}$$

$$= ||b||^2 - 2\lambda \langle a, b\rangle + \lambda^2||a||^2$$

f(λ) est prolongé de degré 2 (en λ) et f(λ) ≥ 0 donc sot discriminant est ≤ 0

$$\triangle = (2\langle a, b\rangle)^2 - 4||a||^2 \cdot ||b||^2 \leq 0 \Leftrightarrow \langle a, b\rangle^2 \leq ||a||^2 \cdot ||b||^2$$

Pour le cas de l'égalité :
$|\langle a, b\rangle| = ||a|| \cdot ||b|| \Leftrightarrow \triangle = 0 \Leftrightarrow f(\lambda)$ a une unique racine
En particulier il en a une : $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tq $f(\lambda) = 0 = ||b-\lambda a||^2 \Leftrightarrow b-\lambda a = 0 \Leftrightarrow b = \lambda a$

$$\begin{aligned} \textit{Inversement, si } b = \lambda a \quad &\Rightarrow f(\lambda) \textit{a au moin une racine} \\ &\Rightarrow \triangle \geq 0 \textit{mais on sait} \triangle \leq 0 \\ &\Rightarrow \triangle = 0 \quad \square \end{aligned}$$

Propriété de la distance : -

1. $$\begin{array}{ccc} d(a,b) = 0 & \Leftrightarrow & a = b \\ \Updownarrow & & \Updownarrow \\ ||b-a|| = 0 & \Leftrightarrow & b-a = 0 \end{array}$$
2. d(a, b) = d(b, a)
3. L'inégalité du $\triangle$:

$$d(a,b) \leq d(a,c) + d(c,b) \quad \text{avec } = \textit{si et seulement si } c \in \textit{segment entre a et b}$$

Preuve : -

1. deja donné
2. évident
3. On pose $u = c-a$ et $v = b-c \quad \Rightarrow \quad u+v = b-c$

$d(a,b) = ||b-a||$
l'inégalité du triangle a montrer devient :

$$||u+v|| \leq ||u|| + ||v||$$

$$||u+v||^2 = \langle u+v, u+v\rangle$$

$$= \langle u,u\rangle + \langle u,v\rangle + \langle v,u\rangle + \langle v,v\rangle$$ Si l'inégalité est une

$$= |u||^2 + 2\langle u,v\rangle + ||v||^2$$

$$(1) \quad \leq ||u||^2 + 2|\langle u,v\rangle| + ||v||^2$$

$$(2) \quad \leq ||u||^2 + 2||u|| \cdot ||v|| + ||v||^2$$

$$= (||u|| + ||v||)^2$$

égalité , les inégalité 1 et 2 doivent etre de =

(1) : $\langle u, v\rangle = |\langle u, v\rangle|$

(2) :

$|\langle u, v\rangle| = ||u|| \cdot ||v||$ $\Leftrightarrow$ *u et v sont colinéaires*

Si $u = 0c = a \in$ *intervalles*

S*Sinon* $v = \lambda \cdot u$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow b - c = \lambda c - \lambda a \Leftrightarrow b + \lambda a = (1+\lambda)c$

Si $\lambda = -1$: $a = b$ *(ou l'inégalité des trianges est un egalite* $\Leftrightarrow a = b = c$

Si $\lambda \neq -1$

$c = \frac{\lambda}{1+\lambda} = a + \frac{1}{1+\lambda} \cdot b$ *(s'adionnent a 1* $\Rightarrow c \in$ *droite par a et b*

Il faut voir que : $0 \leq \frac{1}{1+\lambda}, \frac{\lambda}{1+\lambda} \leq 1$

On a donc montré : Si l'inégalité est une égalité $\Rightarrow c \in$ segment entre a et b
Utilisons (1) avec v= λu

$$\begin{array}{ccc} \langle u, v\rangle & = \langle u, \lambda u\rangle = & \lambda\underbrace{\langle u, u\rangle}_{||u||^2} \\ \|(1) & & \wr \\ |\langle u, v\rangle| \geq 0 & \Rightarrow & \lambda \geq 0 \end{array}$$

Si c$\in$ [a, b $c = (1-t) \cdot a + t \cdot b$ avec $0 \leq t \leq 1$

Exercice : - montrez que d(a,b) = d(a,c) + d(c,b) $\square$

Comme dans $\mathbb{R}^2$ une droite de $\mathbb{R}^n$ est défini comme :

$$d = \{p + tv | t \in \mathbb{R}\} = d_{p,v}$$

Droite par 2 point $p \neq q$:

$$d_{,q-p} = \{sp + tq | s + t \quad s, t \in \mathbb{R}\}$$

En particulier : m $\frac{1}{2}p + \frac{1}{2}q \in d_{p,q-p}$ et les milieu entre p et q
On vérifié que $d(m, p) = d(m, q) = \frac{d(p,q)}{2}$
deux droite sont parrallele si leur vecteur directeur sont colineaire et les droite sont distincts :
$d_{p,v} \parallel d_{q,w} \Leftrightarrow$
- $w = \lambda v$
- $q \notin d_{p,v}$

Théoreme de Varignion : - Les quatre mlieu des quatre coté d'un quadrilatere arbitraire de $\mathbb{R}^n$ forment une parrallélograme

Preuve : - Soient a,b,c,d $\in \mathbb{R}^n$ les 4 sommet d'un quadrilatère :

Le vecteur directionnel de la droite par $\frac{a+b}{2}$et$\frac{b+c}{2}$ est :

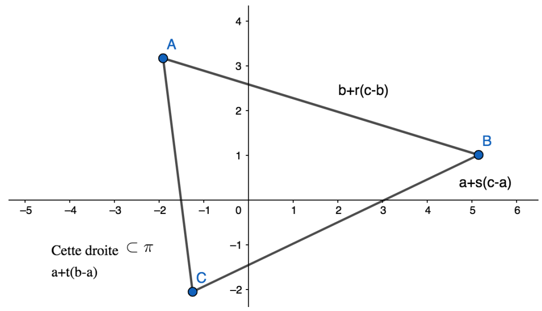
$$\frac{b+c}{2} - \frac{a+b}{2} = \boxed{\frac{c-a}{2}}$$

meme vecteur $\Rightarrow$ les droite sont parallele
E meme les vecteur directeur des 2 autre droites sont $\pm \frac{d-b}{2}$

Equation paramétrique d'un plan : -

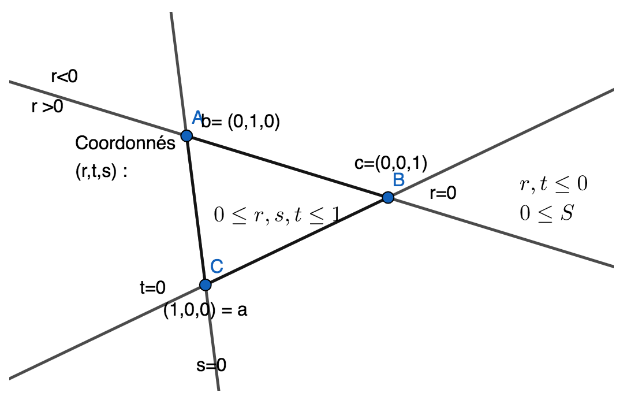
Donne 3 point a,b,c $\in \mathbb{R}^n$ (p,ex n=3) n$\geq$ 2 non aligné

il existe un unique plan $\pi \subset \mathbb{R}^n$ *les contenant* : $\pi = \left\{ \ a + t(b-a) + s(c-a) | st \in \mathbb{R} \ \right\}$



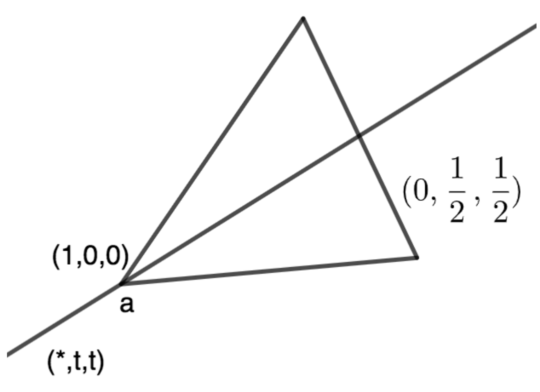
$$\begin{aligned} \pi \quad &= \{(1-t-s)a + tb + sc | s,t \in \mathbb{R}\} \\ &= \left\{ra + tb + sc | \begin{array}{l} r,s,t \in \mathbb{R} \\ r+t+s = 1 \end{array}\right\} \end{aligned}$$

(r,t,s) sont les coordoné barycentrique du plan π (par rapport a a,b,c)



Les 3 médiane (droites pr un sommet et le milieu du segement opposé) sont donné par t=s, r=s et r=t

respectivement :



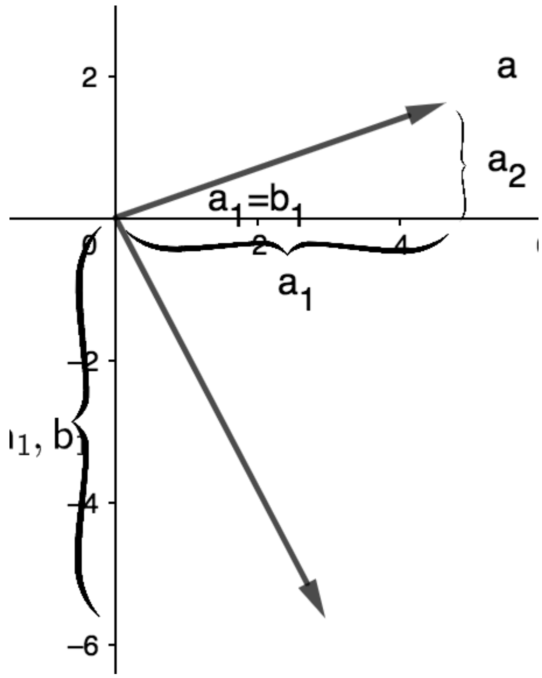
il existe un unique point d'intersection donné par : $t = s = r$ *comme* $t + r + s = 1$
ce point est : $\frac{1}{3}a + \frac{1}{3}b + \frac{1}{3}c$

Angle et produit scalaire :

Théoreme : - L'angle γ entre 2 vecteur non nul a,b, $\in \mathbb{R}^n$ est donné par $\cos(\gamma) = \frac{<a,b>}{||a|| \cdot ||b||}$

En particulier a et b sont orthogonaux $\Leftrightarrow$ ¡a,b¿ = 0

Exemple : - $a=(a_1, a_2) \in \mathbb{R}$

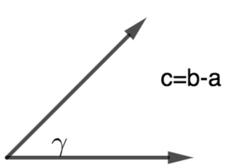


On cherche $b \in \mathbb{R}^2$ tq $a \perp b$
$\Leftrightarrow$ b tq $< a, b >= 0$ par ex on peut toujours prendre $b=(a_2, -a_1)$

Conséquence : - On retrouve CS :

$$| < a, b > | \stackrel{\text{theoreme}}{=} |\cos(\gamma)| \cdot ||a|| \cdot ||b|| \quad \leq ||a|| \cdot ||b||$$

Preuve du Theoreme : -

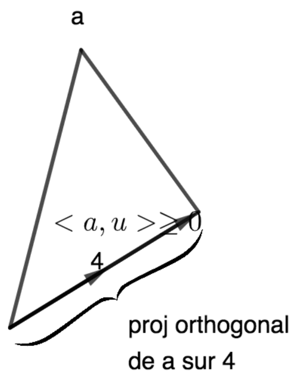


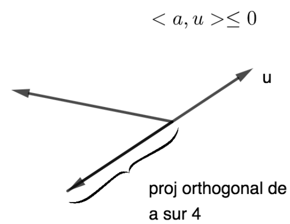
Par theoreme du cosinus : $||c||^2 = ||a||^2 + ||b||^2 - 2||a|| \cdot ||b|| \cdot \cos(\gamma)$

$$< c, c >=< b - a, b - a >= \underbrace{< b, b >}_{||b||^2} - 2 < a, b > + \underbrace{< a, a >}_{||a||^2}$$

$\Rightarrow \cos(\gamma) = \frac{<a,b>}{||a|| \cdot ||b||}$

Corrolaire : - Soit $a \in \mathbb{R}^n$ $u \in \mathbb{R}^n$ de norme 1 ($||u|| = 1$) Alors ¡a,u¿ est la longueur (avec signe) de la projection orthogonal de a sur u Autrement dit : la projection orthogonal est ¡a,u¿·u





preuve : - On cherche $\lambda \in \mathbb{R}$ tq :

$$\begin{array}{l} \mathrm{a} - \lambda \mathrm{u} \perp \lambda \mathrm{u} \\ \Leftrightarrow < \mathrm{a} - \lambda \mathrm{u}, \lambda \mathrm{u} >= 0 \\ \lambda < \mathrm{a}, \mathrm{u} > -\lambda^2 < \mathrm{u}, \mathrm{u} >= 0 \\ \lambda(< \mathrm{a}, \mathrm{u} > -\lambda = 0 \end{array} \quad \text{Pour } \lambda = 0 \text{ c'est une solution algébrique mais :}$$

a-λu$\perp\lambda$u a$\perp$0 n'a pas de solution

Remarque : - Si $\{\mathrm{u}_1, ..., \mathrm{u}_\mathrm{n}\}$ forme une base orthonormale de $\mathbb{R}^\mathrm{n}$

$$\Leftrightarrow < \mathrm{u_i}, \mathrm{u_j} >= \begin{cases} 1 & \mathrm{si\, i = j} \\ 0 & \mathrm{si\, i \neq j} \end{cases} \text{ex base standard } \{\mathrm{e}_1, ..., \mathrm{e_n}\} \text{ou } \mathrm{e_i} = (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0 \text{ est une base orthonormale})$$

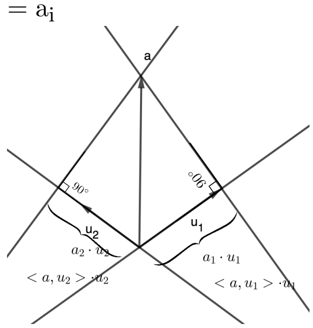
$$\textit{pour } \mathrm{a} = \sum \mathrm{a_i u_i} \quad \textit{on a :} \mathrm{a_i} =< \mathrm{a}, \mathrm{u_i} >$$

On peut le voir :

$\cdot$algebriquement : $< \mathrm{a}, \mathrm{u_i} >=> \sum_{\mathrm{j=i}}^{\mathrm{n}} \mathrm{a_j u_j}, \mathrm{u_i} >= \sum_{\mathrm{j=1}}^{\mathrm{n}} \mathrm{a_j} < \mathrm{u_j}, \mathrm{u_i} > \begin{cases} 0 & \mathrm{si\, j \neq i} \\ 1 & \mathrm{si\, j = i} \end{cases}$

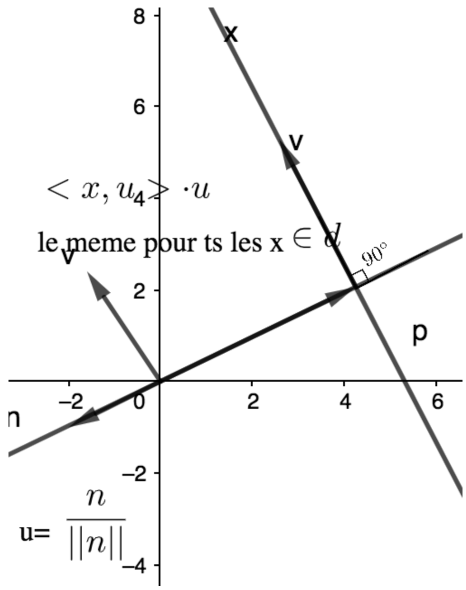
$= \mathrm{a_i}$

$\cdot$geometriquement :



$= \mathrm{a_i}$

Equation cartesien d'une droite de $\mathbb{R}^2$ -



$$d = \{p + tv | t \in \mathbb{R}\} \quad \text{Soit } n \perp v$$

pour tout $x \in d$, $\quad < x, n >$ est le meme :

$$< p + tv, n > = < p, n > + t < v, n > = < p, n >$$

Et les point x$\in$ d sont meme caracterise par : $\quad < x, n > = < p, n > := c \in \mathbb{R}$

$$d = \{x \in \mathbb{R}^2 | < x, n > = c\} \quad n = (a, b) \in \mathbb{R}^2$$

En varient c, on obtient des droites $\|$

Inversement si une droite est donné par :

$$d = \{x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | a_{x1} + b_{x2} + c = 0\}$$

alors (a,b) $\in \mathbb{R}^2$ est non nul et orthogonal a d

Equation Cartesienne d'un plan de $\mathbb{R}^3$: - p$\in \mathbb{R}^3$, $0 \neq n \in \mathbb{R}^3$
On cherche l'unique plan π pour p et orthogonal a n :

$$x \in \pi \Leftrightarrow < x - p, n > = 0 \Leftrightarrow < x, n > = < p, n >$$

Pour x= $(x_1, x_2, x_3), n = (a, b, c)$ $\quad$ d := - $< p, n >$ $\quad x \in \pi \Leftrightarrow x_1 a + x_2 b + x_3 c + d = 0$

Inversement si un plan est donné par : $\{(x_1, x_2, x_3) | ax_1 + bx_2 + cx_3 = d = 0\} \Rightarrow (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ est orthogonal a π

Application du corrolaire precedent : -

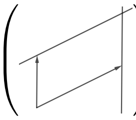
Distance entre un plan (π orthogonal a npasse par p) et un point :
La distance est :

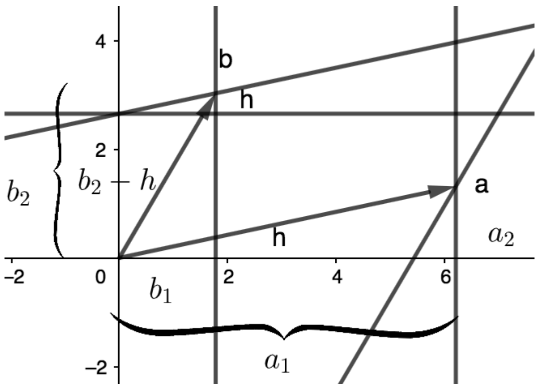
$$\left| < x - p, \frac{n}{||n||} > \right|$$

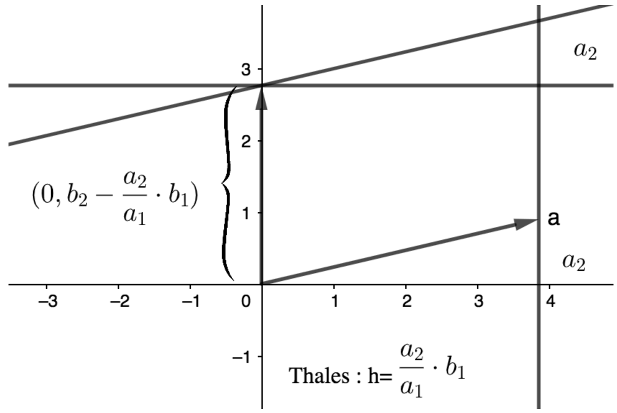
Angle entre deux plan : L'angle entre deux normal

Aire et volumes : -

Probleme : Donné $a=(a_1, a_2)$, $\quad b = (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$

Calculer : Aire $\Bigg($  $\Bigg)$





$$\begin{aligned} \text{Aire :} \quad &= a_1 \left(b_2 - \tfrac{a_2}{a_1} \cdot b_1\right) \\ &= a_1 b_2 - a_2 b_1 \\ &= \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ceci ce generalise a tout dim le vol du parralépipède engendre par :

$$\begin{aligned} a_1 &= (a_{11}, ...a_{1n}) \\ &\vdots \qquad\qquad \text{est} \quad \left| \det \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ . & & . \\ a_{n1} & ... & a_{nn} \end{pmatrix} \right| \\ a_n &= (a_{n1}, ..., a_{nn}) \end{aligned}$$

Ici on a une vison feometrique de l'algorithme d'elimination de Gauss :

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ 0 & b_2 - \frac{b_1}{a_1} \cdot a_2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & b_2 - \frac{b_1}{a_1} \cdot a_2 \end{pmatrix}$$

Produit vectoriel : sulement dans $\mathbb{R}^3$

Donné $a,b \in R^3$, on cherche un vecteur orthogonal à a et b :

$$x \perp a \quad \text{et} \quad x \perp b \Leftrightarrow \begin{cases} < x, a >= 0 \\ < x, b >= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0 \\ b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0 \\ \left(b_2 - \frac{b_1}{a_1} \cdot a_2)x_2 + (b_3 - \frac{b_1}{a_1} \cdot a_3)x_3 = 0\right) \end{cases}$$

Posons : $x_3 := a_1 b_2 - a_2 \cdot b_1$ Ce choix de x_3 donne :

$$\begin{aligned} x_2 &= b_1 a_3 - a_1 b_3 \\ x_1 &= a_2 b_3 - a_3 b_2 \end{aligned}$$

On definit le produit vectoriel de $a,b \in \mathbb{R}^3$ par :

$$a \times b = (a_1 b_3 - a_3 b_2, a_1 b_3 + a_3 b_1, a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

Par construction : $\quad < a \times b, a >= 0 =< a \times b, b >$

Lemme : - $a \times b = 0 \Leftrightarrow$ a et b sont colineaire $\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ \text{ou} \\ b = \lambda a \quad \text{pour } \lambda \in \mathbb{R}^3 \end{cases}$

Preuve : -

$\Leftarrow$: evident

$\Rightarrow$: $a \times b = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a_2b_3 - a_3b_2 = 0 \\ -a_1b_3 + a_3b_1 = 0 \\ a_1b_2 - a_2b_1 = 0 \end{cases}$

Si a=0 rien a faire

Sinon $a \neq 0$ srlg $a_1 \neq 0$

$b_3 = \frac{a_3}{a_1} \cdot b_1 = \frac{b_1}{a_1} \cdot a_3$

$b_2 = \frac{b_1}{a_1} \cdot a_2$

Produit mixte : - ($\mathbb{R}^3$)

trois vecteurs a,b,c $\in \mathbb{R}^3$ est defini par :

$$< a \times b, c > \in \mathbb{R}$$

Lemme : -

Preuve : - $< a \times b, c > = (a_2b_3 - a_3b_2) \cdot c_1 + (-a_1b_3 + a_3b_1) \cdot c_2 + (a_1b_2 - a_2b_1) \cdot c_3$

$= \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$

Mais on sait $= \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} = U_\gamma|$(parralel engendre par a,b et c)

Pour c=a $\times$ b, a$\perp$c et b$\perp$c :
Donc Vol(parallel engendre par a,b) = Aire(parallel engendre par a et b) $\cdot ||a \times b||$

$\Rightarrow A = ||a \times b||$ et $\det \begin{pmatrix} a \\ b \\ a \times b \end{pmatrix} > 0$

En resumer : $a \times b \in \mathbb{R}^3$ est l'unique vecteur tq :

- $< a, a \times b > = 0 = < b, a \times b >$
- $||a \times b|| = A$
- $\det \begin{pmatrix} a \\ b \\ a \times b \end{pmatrix} > 0$

Π plan passant par a, b et c
Pour trouver un vecteur normal : $n = (b - a) \times (c - a)$

2.4 Constructibilité a la Regle et au compas

-Probleme général : Donné un objet géométrique, en construire un autre a la regle et au compas

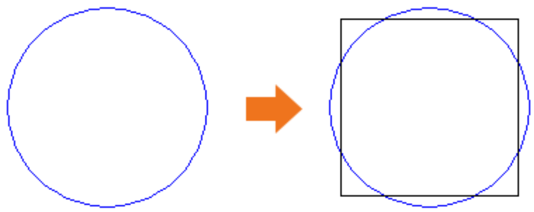
-Exemple : Probleme classique

-Trisection de l'angle : Donné un angle, peut on le bisecter a la regle et au compas ?

Duplication du cube : - Donné un cube, en construire un de double volume

Vol = $a^3 \longrightarrow$ Vol = $2a^3$ Longueur d'un coté = $\sqrt[3]{2} \cdot a$

Quadratur du cercle : - Donné un cercle, construire un carré de même aire :



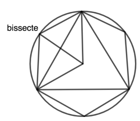
C'est impossible

Construire de polygone régulier : -

Pour quel n peut on construire un n-gone régulier ? ($n \geq 3$)

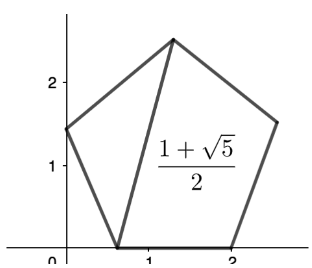
$n = 3$ $\triangle$

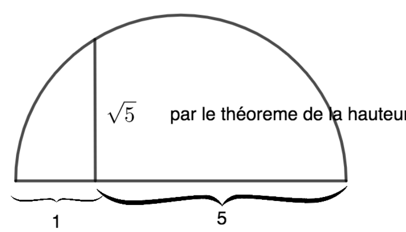
$n = 6$



$n = 5$

On peut construire $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ $\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot c\right)$ a partir de 1 (c)





— A partir de 1 $\rightarrow$ construire 5
— $1+\sqrt{5}$
— $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ en bissectant

en resumer construction possible pour : -

$n=2^m, 3 \cdot 2^m, 5 \cdot 2^m, 5 \cdot 5^m, 3 \cdot 5^m$ ce qui etait connu d'Euclide :

Gauss 1796 construit a la main le 17-gone et montre :

Theoreme : - n-gone constructibe $\Leftrightarrow$ $n=2^k \cdot p_i ... p_r$ ou p_r sont des premier distinct de la forme $p_i = (2^2)^m + 1$le premier de fermat

Aujourd'hui : $(2^2)^m + 1$ pas premier pour $5 \leq m \leq 32$

Théoreme : - dans $\mathbb{R}^2$ on se donne les point A=(0,0) et B=(1,0)

Un point (x,y) $\in \mathbb{R}^2$ est constructible a partir de A et B a la regle et au compas $\Leftrightarrow$ x et y s'écrivent comme des expression finies avec $\mathbb{Q}, +, -, \cdot, /, \sqrt[2]{}$

Exemple : - $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\frac{2+\sqrt{3+\sqrt{5/2}}}{\sqrt{7}}$ sont constructible car $= 1+\sqrt{3}$ est constructible

Theoreme : - Donnés les points A=(0,0) et B=(1,0) Un point (x,y) $\in \mathbb{R}^2$ est constructible a la regle et au compas a partir de A et B si et seulement si x et y s'ecrivent comme des expressions finies impliquant $\mathbb{Q}, +, -, \cdot, /, \sqrt[2]{}$

Preuve : -

$\Leftarrow$ $\mathbb{Q}$ est constructible (Thales)

$+, - \longleftrightarrow$ additions et soustraction d'intervalles

$\cdot, /$ Thales et $\sqrt{}$ theoreme de la hauteur

$\Rightarrow$ Les seul constructions possible a la regle et au compas :
- droite par 2 point donné
- cercle centre en 1 point donné passant par un autre point donné

Voyons ce que cela donne algébriquement :
- Equatin de la droite par $p=(p_1, p_2)$ et $q=(q_1, q_2) \in \mathbb{R}^2$ donné :

$$d = \{p + t(q-p) | t \in \mathbb{R}\}$$

$$d = \{(x_1 x_2) \in \mathbb{R}^2 | < x, n >=< p, n >\} \Leftrightarrow x_1(q_2 - p_2) + x_2(-q_1 + p_1) - < p, n >= 0$$

donc l'equation de la droite a la forme : $ax_1 + bx_2 + c = 0$ ou a,b,c s'expriment en :
- coordone de p et q
- +,-,·

- *Equation du cercle de centre* $p = (p_1 p_2)$ *par* $q = (q_1 q_2)$

$$C = \{(x_1 x_2 \in \mathbb{R}^2 | (x_1 - p_1)^2 + (x_2 - p_2)^2 = (q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2\}$$

equatin de la forme $(x_1 - a)^2 + (x_2 - b)^2 = c$ ou a,b,c s'expriment en :
- coordonne de p et q
- +, -, /

On construit des nouveaux point prenant des intersection de droite et cercle, Algébriquement :

- intersection de deux droites :

$$\begin{cases} ax_1 + bx_2 + c = 0 \\ a'x_1 + b'x_2 + c = 0 \end{cases}$$

Si a et a' = 0 : $bx_2 + c = 0$ alors les droites n'ont pas un unique point d'intersection

Srlga $\neq 0$: $\Leftrightarrow \begin{cases} ax_1 + bx_2 + c = 0 \\ \left(b' - \frac{a'}{a}b\right) x_2 + \left(c' - \frac{a'}{a}c\right) = 0 \end{cases} \longrightarrow x_2 = \frac{ca' - c'a}{b'a - a'b} \quad x_1 = \frac{-1}{a}(bx_2 + c)$

Donc $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$

$\downarrow$

coordonne utilisant
les coeficiant a,b,c,a',b',c'
des droites et +,-,/,·

— intersection d'un cercle et d'une droite :

$$\begin{gathered}ax_1 + bx_2 + c = 0\\(x_1 - d)^2 + (x_2 - e)^2 + f = 0\end{gathered}$$

ou bine a$\neq 0$ ou bine b $\neq 0$ Quitte a echanger $x_1 \longleftrightarrow x_2$ on peut supposer a $\neq 0$

Donc : $x_1 = \frac{-bx_2 - c}{a} \to$ dans l'equation de C $\to \left(\frac{-bx_2 - c}{a} - d\right)^2 + (x_2 - e)^2 + f = 0$

poly de degré 2 en x_2 :

$$(Ax_2)^2 + Bx_2 + C \quad \textit{ou A,B,C s'expriment avec a,b,...,f,+,-,· , /}$$

$\Rightarrow x_2 = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$

L'intersection de 2 cercle :

$$\begin{array}{rl} & (x_1 - a)^2 + (x_2 - b)^2 + c = 0\\ - & (x_1 - d)^2 + (x_2 - e)^2 + f = 0\\ \hline & (-2a + 2d)x_1 + a^2 - d^2 + (-2b + 2e)x_2 + b^2 - e^2 + c - f = 0\end{array}$$

$\to$ On se ramene au cas intersection cercle et droite

Posons K=$\{x \in \mathbb{R} | x$ 'ecrit en une expression finie de $\mathbb{Q}, +, -, \cdot, /, \surd\}$

Lemme : - Si u polynome de degre 3 a coefficcant dans $\mathbb{Q}$ n'a pas de racine dans $\mathbb{Q}$ alors il n'a pas de racine dans K

Exemple : - Duplication du cube est non constructible : $\sqrt[3]{2} \notin K$ $\quad \sqrt[3]{2}$ est racine de f(t)=$t^3 - 2$

f(t) n'a pas de raine rationnele :

$$\left.\begin{array}{ll} 0 = f\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{m^2}{n^3} - 2 = 0 & \Leftrightarrow m^3 = 2n^3\\ \operatorname{pgcd}(m, n) = 1 & \Rightarrow 2|m \Rightarrow 2|n\end{array}\right. \Rightarrow \text{f n'a pas de racine dans K} \Rightarrow \sqrt[3]{2} \notin K$$

Preuve : - On peut supposer que f(t) a la forme suivante :

$$f(t) = t^3 + at^2 + bt + c \quad \textit{avec } a, b, c \in \mathbb{Q}$$

On va montrer : si f n'a pas de racine dans $\mathbb{Q}$

alors f n'as pas dde racine de la forme $\frac{\alpha + \beta\sqrt{R}}{\gamma + \delta\sqrt{R}}$ avec $\alpha, \beta, \gamma, \delta, R \in \mathbb{Q}$ Supposons que η est racine de f

Si $\gamma - \delta\sqrt{R} = 0 \quad \Rightarrow \sqrt{R} = \frac{\gamma}{\delta} \in \mathbb{Q}$

$\Rightarrow \eta \in \mathbb{Q}$ pas possible car f n'a pas de racine rationnel par hypothese

Si $\gamma - \delta\sqrt{R} \neq 0$

$$\eta = \frac{\alpha}{\beta\sqrt{R}\gamma + \delta\sqrt{R}} \cdot \frac{\gamma - \delta\sqrt{R}}{\gamma - \delta\sqrt{R}} = \frac{\alpha\gamma - \beta\delta R + (\beta\gamma - \alpha\delta)\sqrt{R}}{\gamma^2 - \delta^2 \cdot R} = P + Q \cdot \sqrt{R}$$

$$\begin{aligned} 0 = f(\eta) \quad &= f(P + Q\sqrt{R})\\ &= (P^3 + 3P^2Q\sqrt{R} + 3PQ^2R + Q^3R\sqrt{R})\\ &+a(P^2 + 2PQ\sqrt{R} + Q^2R)\\ &+b(P + Q\sqrt{R})\\ &+c\\ &= M + N\sqrt{R} \quad M, N \in \mathbb{Q}\end{aligned}$$

Si $\quad$ N$\neq 0$ $\quad$ alors $\quad \sqrt{\mathrm{R}} = \frac{-\mathrm{M}}{\mathrm{N}} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \eta \in \mathbb{Q}$ impossible

$\downarrow$

car $\mathrm{M}+\mathrm{N}\sqrt{\mathrm{R}} = 0$

Si N=0 $\underset{\mathrm{N}+\mathrm{N}\sqrt{\mathrm{R}}}{\Rightarrow}$ $\mathrm{M} = 0 \Rightarrow \qquad \mathrm{M} - \mathrm{N}\sqrt{\mathrm{R}} = 0$

$\|$ $\qquad$ (par le calcul ci dessus)

Posons $\eta_2 := \mathrm{P} - \mathrm{Q}\sqrt{\mathrm{R}}$ et calculons $\qquad \mathrm{f}(\eta_2)$

Un polyn de degre 3 ne peut pas avoir 2 racine : $\mathrm{f(t)} \underset{\mathrm{t}\to\infty}{\rightarrow} +\infty$

Soit η_3 la 3eme racine :

$$\begin{aligned}\mathrm{f(t)} &= (\mathrm{t}-\eta)(\mathrm{t}-\eta_2)\cdot(\mathrm{t}-\eta_3)\\ &= \mathrm{t}^3 + \mathrm{t}^2\underbrace{(-\eta-\eta_2-\eta_3)}_{\mathrm{a}} + \text{"1"}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \eta_3 = -\mathrm{a} - \eta - \eta_2 = -\mathrm{a} - (\mathrm{P} + \cancel{\mathrm{Q}\sqrt{\mathrm{R}}}) - (\mathrm{P} - \cancel{\mathrm{Q}\sqrt{\mathrm{R}}}) = -\mathrm{a} - 2\mathrm{P} \in \mathbb{Q} \text{ impossible}$$

L'idée de la preuve : recurence sur # de $\sqrt[2]{}$ dans une recine de f

Si f a une racine η qui s'ecrit avec n ocurence de $\sqrt[2]{\cdot}$ $\Rightarrow \eta\frac{\alpha+\beta\sqrt[2]{\mathrm{R}}}{\gamma+\delta\sqrt[2]{\mathrm{R}}}$ ou

$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \mathrm{R}$ s'ecrivent avec $\leq \mathrm{n}-1$ occurence

La preuve ci-dessus au cas n=1 $\quad\square$

Trisection d'un angle : - il est impossible de trisecter 60^{o}

Se donner 60^{o} c'est ne rien se donner puisque 60^{o} est constructible donc :

Donc trisecter $60^{\mathrm{o}} \Longleftrightarrow$ Construire $20^{\mathrm{o}} \Rightarrow$ Construire $\cos(20^{\mathrm{o}})$

On va montrer $\cos 20^{\mathrm{o}} \notin \mathrm{K} \Rightarrow$ pas constructible

$$\begin{aligned}\cos(3\alpha) &= \cos(2\alpha+\alpha)\\ &= \cos(2\alpha)\cos(\alpha) - \sin(2\alpha)\sin(\alpha)\\ &= (2\cos^2\alpha - 1)\cos(\alpha) - (2\cos\alpha\cdot\underbrace{\sin\alpha)\sin\alpha}_{1-\cos^2\alpha}\\ &= 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha\end{aligned}$$

Pour $\alpha = 20^{\mathrm{o}}$: $\cos(3\cdot 20^{\mathrm{o}}) = \frac{1}{2}$, donc $\cos\alpha$ satisfait :

$$\frac{1}{2} = 4\mathrm{t}^3 - 3\mathrm{t} \quad \Leftrightarrow \quad \cos\alpha \textit{ est racine de } \mathrm{f(t)} = 4\mathrm{t}^3 - 3\mathrm{t} - \frac{1}{2} = 0$$

Montrons que f n'as pas de racine dans $\mathbb{Q}$ $\underset{\text{lemme}}{\Rightarrow}$ f n'est pas de racine dans K

$\underset{\text{theoreme}}{\Rightarrow}$ $\cos(20^{\mathrm{o}})$ n'est pas constructible $\quad$ *Supposons que :*

$\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{n}} \in \mathbb{Q}$ est racine de f, avec pgdc(m,n) =1

$$0 = \mathrm{f}\left(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{n}}\right) = 4\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{n}^3} - 3\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{n}} - \frac{1}{2} \overset{2\mathrm{n}^3}{\Leftrightarrow} 0 = 8\mathrm{m}^3 - 6\mathrm{mn}^2 - \mathrm{n}^3$$

$=$ nbs qu'on peut exprimer avec $\mathbb{Q}, \pm, \cdot, /$ et $\sqrt{}$
$\Leftrightarrow$ $8m^3 = n^2(6m+n)$ *Si p premier divise m alors p divise n :* donc
$\Leftrightarrow$ $n^3 = m(8m^2 - 6n^2)$
m=1

Pour m =1 on obtient $n^3 8 - 6n^2$ donc n$\in \mathbb{Z}$ est racine de :

$$h(t) = t^3 + 6t^2 - 8$$

Voyons que h n'as pas de racine entiere (dans $\mathbb{Z}$)

Pour $t \geq 2$: $h(t) \geq 8+24 - 8 = 24 > 0$
Pour $t \leq -6$: $h(t) = t^2 \underbrace{(t+6)}_{\leq 0} - 8 < 0$

Donc h n'as pas de racine entier et f n'asd pas de racine tationnel

Quadratur du cercle : impossible car équivalent a la constructibilité de π

π est un nombre transcendant(dur)

Il est racine d'aucun polynome a coefficient dans $\mathbb{Q}$ Or tout $x \in K$ est racine d'un polynome a coefficient dans $\mathbb{Q}$

2.5 Conique

$\sqrt[3]{2}$ pas constructible vraisemblablement suspecté en Grèce Antique. Construction de $\sqrt[3]{2}$ utilisant des courbe plus compliqué que droites et cercles

En voici une de Menaechiaus $\sim$ 350 AD, presque une trivialité en coordonnées :

On cherche $\underbrace{x}_{\sqrt[3]{2}}$ tq $\underbrace{x^3}_{x \cdot x \cdot x} = 2$ Donc on cherche la soltion de : $\begin{cases} y = x^2 & \text{parabole} \\ x \cdot y = 2 & \text{hyperbol} \end{cases}$ Ce sont des courbe dites coniques, obtenu en intersectant un cone avec un plan

2.6 Parabole :

Définition : - La parabole de droite directrice l et de foyer F est l'ensemble

$$P = \{P | d(P, F) = d(P, l)\}$$

Equation de la parabole : -
Coordonné : Placçons l'origine sur le point entre F et l avec un axe $\parallel$ a l

Posons $d := d(F, l)$

On a $F = \left(\frac{d}{2}, 0\right)$

$$\begin{aligned}
(x, y) \in P &\Leftrightarrow d((x, y), F) = d((x, y), l) \\
&\Leftrightarrow \sqrt{\left(x - \frac{d}{2}\right) + y^2} = x + \tfrac{d}{2} \\
&\Leftrightarrow \left(x - \frac{d}{2}\right)^2 + y^2 = \left(x, \tfrac{d}{2}\right)^2 \\
&\Leftrightarrow \cancel{x^2} - xd + \cancel{\frac{d^2}{4}} + y^2 = \cancel{x^2} + xd + \cancel{\frac{d^2}{4}} \Leftrightarrow y^2 = 2xd
\end{aligned}$$

Tangente a une parabole : -

Ici, la tangente a une courbe en un point est définie comme l'unique droite qui contient P et localement aucun point de la courbe

- Soit $d_1 \perp l$ par P
- d_2 droite par P et F

- soit d la (bone) bissectrice de d_1 et d_2
- Affirmation : d est la tangente

Preuve : - Soit Q $\in$ d , Q$\neq$ P Aussi Q$\notin$ P $\Leftrightarrow \underbrace{d(Q,F)}_{d(Q,B)} \neq d(Q,l)$

p$\in$ P d(P,F) = d(P,l) = d(P,B) par CAC d(Q,B) > d(Q,l) car Q $\notin$ d $\square$

Consequence : - Un rayon vertical sera refleté vers le foyer

C'est le principe des antenne parabolique

2.7 Elipse :

Définition 1 : - Soit $0 \leq e < 1$ donné L'ellipse de droite directrice l et de foyer F est l'ensemble $\varepsilon = \{P|\frac{d(P,F)}{d(P,l)} = e\}$

Remarque : - Pour e=1, on retrouverait la def de la parabole e=$\frac{1}{2}$

Définition 2 : - L'ellipse de foyer F, F' et parametre

$$a > \frac{d(F,F')}{2} \textit{ est l'ensemble :}$$

$$\varepsilon = \{P|d(P,F) + d(P,F') = 2a\}$$

Remarque : - Si F=F' on obtient un cercle de rayon a

Exo : - Les 2 defs sont equivalentes

Eqaution de l'ellipse : - On pose d=d(F,l)

$$d((0,0),F) = e\cdot \underbrace{d((0,0),l)}_{d((0,0)B)}$$

$$\Rightarrow F = \left(\frac{d}{1+e}, 0\right)$$

$$B = \left(\frac{-d/e}{1+e}, 0\right)$$

$$(x,y) \in P \Leftrightarrow d((x,y),F) = e\cdot d((x,y),l)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[2]{\left(x-\frac{d}{1+e}\right)^2+y^2} = e\cdot\left(x+\frac{d/e}{1+e}\right)$$

$$\Leftrightarrow x^2-\frac{2xd}{1+e}+\cancel{\frac{d^2}{(1+e)^2}}+y^2 = e^2\left(x^2+\frac{2xd/e}{1+e}+\cancel{\frac{d^2/e^2}{1+e^2}}\right)$$

$$\Leftrightarrow y^2 = \left(\underbrace{\frac{2xd\cdot e}{1+e}+\frac{2xd}{1+e}}_{2xd}\right)-x^2(1-e^2)$$

$$\boxed{y^2 = 2xd - x^2(1-e^2)}*$$

Posons $a = \dfrac{d}{1-e^2}$ et $b\sqrt{\frac{d^2}{1-e^2}} \Rightarrow d = \frac{b^2}{a}$ et $1-e^2 = \frac{b^2}{a^2}$

$$* \text{ devient } \quad y^2 = 2x\frac{b^2}{a} - x^2\frac{b^2}{a^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{y^2}{b^2} = \frac{2x}{a}-\frac{x^2}{a^2} = -\frac{1}{a^2}(x^2-2xa) = \frac{-1}{a^2}(\underbrace{x^2-2xa+a^2}_{(x-a)^2}-a^2)$$

Posons x' = x-a : $\dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{-1}{a^2}(x^{2\prime}-a^2) = \dfrac{-x^{2\prime}}{a^2}+1 \Leftrightarrow$

$$\boxed{\frac{x^{2\prime}}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1}$$

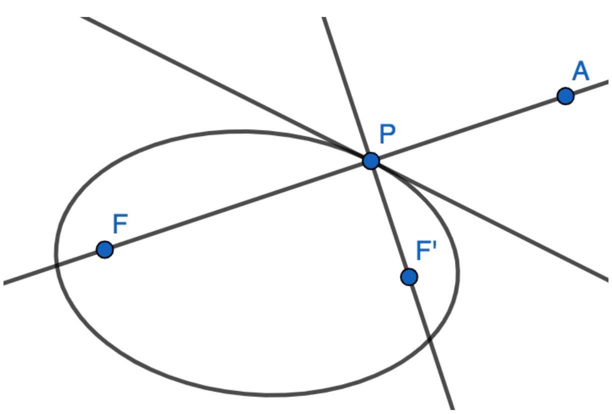
Pour $\left.\begin{array}{l} y=0 \Rightarrow x' = \pm a \\ x'=0 \Rightarrow y = \pm b \end{array}\right\} \Rightarrow$ a et b sont les demi axes de l'ellipse

Precision : - Dans la def 1 de l'élipse, on choisit la parametre e tq $0 < e < 1$

$\dfrac{d(P,F)}{d(P,l)} = e$ n'as pas de sens pour e=0

Mais algébriquement les équations des ellipse avec e=0 correspondent aux cercle

dans la definition 1, les cercle sont exclu. On peut penser aux cercle comme des ellipse avec une droite directice à l'infini



<u>Affirmation</u> La tengente est la bissectrice des droite de P à F et P a F'

Preuve de l'affirrmation : - On montre que $Q \in d$, $Q \neq P$ alors $Q \notin$ ellipse

Soit B sur la projection de la droite par FP tq $\quad d(P,B) = d(P,F')$; $\quad$ CAC $\Rightarrow d(Q,F') = d(Q,B)$

$$\mathrm{d}((\mathrm{Q},\mathrm{F})+\underbrace{\mathrm{d}(\mathrm{Q},\mathrm{F}')}$$

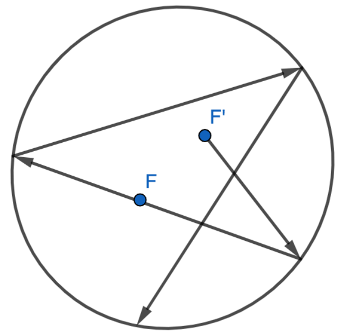
$$=\mathrm{d}(\mathrm{Q},\mathrm{F})+\mathrm{d}(\mathrm{Q},\mathrm{B}) > \mathrm{d}(\mathrm{B},\mathrm{F})$$

$$\|$$

$$2\mathrm{a} = \underbrace{\mathrm{d}(\mathrm{B},\mathrm{P})}_{\mathrm{d}(\mathrm{P},\mathrm{F}')} + \mathrm{d}(\mathrm{P},\mathrm{F}) \quad \text{car B,P,F sont aligné}$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{Q} \notin \text{ ellipse}$$

Conséquence : - Billirad dans une éllipse



un noyau par un des foyer est reflété vers l'autre foyer

2.8 Hyperbole

Définition 1 : - 1 < e l'hyperbole de droite directice et de foyer F est l'ensemble :

$$\mathbb{H} = \left\{ \mathrm{P} \in \begin{array}{c}\text{un}\\ \text{plan}\end{array} \,\middle|\, \frac{\mathrm{D}(\mathrm{P},\mathrm{F})}{\mathrm{d}(\mathrm{P},\mathrm{l})} = \mathrm{e} \right\}$$

Définition 2 : - L'hyperbole de foyer F,F' et parmaetre 0< a < $\frac{\mathrm{d}(\mathrm{F}',\mathrm{F})}{2}$ est l'ensemble :

$$\mathbb{H} = \{\mathrm{P} | \ \mathrm{d}(\mathrm{P},\mathrm{F}) - \mathrm{d}(\mathrm{P},\mathrm{F}')\big| = 2\mathrm{a}\}$$

Equation des Hyperbole (exo) : -

$$\mathrm{y}^2 = 2\mathrm{xd} + (\mathrm{e}^2-1)\mathrm{x}^2$$

$$\frac{\mathrm{x}^2}{\mathrm{a}^2} - \frac{\mathrm{y}^2}{\mathrm{b}^2} = 1$$

Tangente de l'hyperbole = bissectrice des droite verls les 2 foyer

Assymptote de l'hyperbole : -

$$\frac{\mathrm{x}^2}{\mathrm{a}^2} - \frac{\mathrm{y}^2}{\mathrm{b}^2} = 1$$

Pour x,y tres grand : $1 \sim 0$

$$\left(\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{a}} - \frac{\mathrm{y}}{\mathrm{b}}\right)\left(\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{a}} + \frac{\mathrm{y}}{\mathrm{b}}\right) = \frac{\mathrm{x}^2}{\mathrm{a}^2} - \frac{\mathrm{y}^2}{\mathrm{a}^2} - \frac{\mathrm{y}^2}{\mathrm{b}^2} = 0$$

$$\mathrm{y} = \frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}}\mathrm{x} \quad \text{ou } \mathrm{y} = \frac{-\mathrm{b}}{\mathrm{a}}\mathrm{x}$$

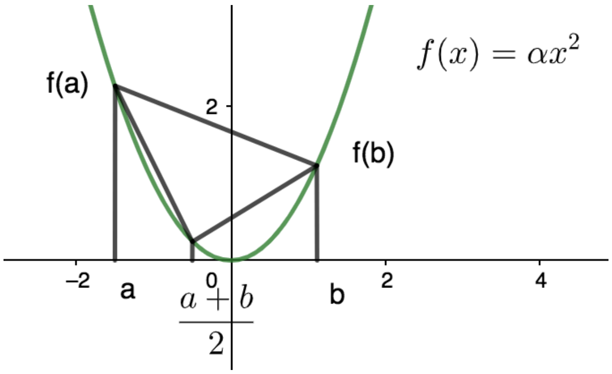
Les equation des 2 droites asymptotiques

2.9 Aires

Ellipse : - $\frac{\mathrm{x}^2}{\mathrm{a}^2} + \frac{\mathrm{y}^2}{\mathrm{b}^2} \overset{*}{=} 1$

Changement de variable	$y' = \frac{a}{b} \cdot y$
$*$ devient	$x^2 + (y')^2 = a^2$
$\Rightarrow$	Aire de l'elipse $= \frac{b}{a}\underbrace{\text{Aire du disque}}_{a} = ab\pi$

Parabole : -



A de : L'aire délimite par la parabole et le segment de droite entre (a,f(a)) et (b,f(b)) est $\frac{4}{3}$Aire $\triangle$ de sommet (a,f(a)),(b,f(b)) et $\left(\frac{a+b}{2}, f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)$

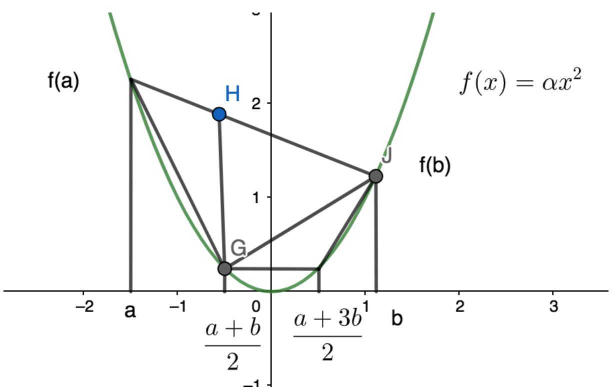
Peuve : - Sans se soucier de convergence on accepte Aire de la parabole =

$$\underbrace{\text{Aire}(\triangle\text{vert}}_{A} \quad +\text{Aire}(2\triangle\text{jaune}) \quad 2\frac{1}{8}A$$

$$+\text{Aire}(4\triangle\text{rouge}) \quad 4\frac{1}{8^2}A$$

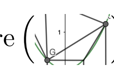
$$+\text{Aire}(A^h\triangle) \quad = \frac{1}{4^h}A$$

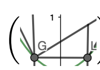
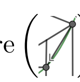
Preuve de l'affirmation : -



Aff$'$: $\quad h' = \frac{1}{4}h$

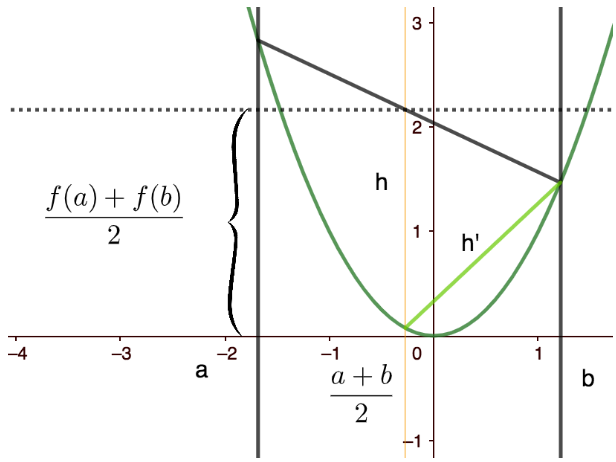
$\Downarrow$

Aff : $\quad$ Aire ()

$=$ Aire () $+$ $\quad$ Aire ()

$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}(b-a)h' + \quad \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}(b-a)h'$

$= \frac{1}{4}(b-a)h'$



$$
\begin{aligned}
f(x) &= \lambda x^2 \\
h &= \frac{f(a)+f(b)}{2} - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \\
&= \lambda\left[\frac{a^2+b^2}{2} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2\right] = \lambda\left[\frac{2a^2+2b^2-a^2-2ab-b^2}{4}\right] \\
&= \lambda\left[\frac{a^2-2ab+b^2}{4}\right] = \lambda\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = \lambda\cdot\frac{1}{2^2}(a-b)^2
\end{aligned}
$$

pour h' : le calcul est le meme que pour hou a est remplace par $\dfrac{a+b}{2}$

$$h' = \lambda\left(\frac{\frac{a+b}{2}-b}{2}\right)^2 = \lambda\left(\frac{a-b}{4}\right)^2$$

$= \lambda\dfrac{1}{2^4}(a-b)^2 \quad \square$

2.10 Cone et conique

Theoreme : - Si un cone est coupe par un plan qui a la meme inclinaison, alors l'intersection est une parabole :

$$\textit{Equation d'un cercle } C \quad x^2 + y^2 = k^2 \cdot z^2$$

toute les droites par (0,0,0) de C ont pente : $\pm\dfrac{1}{k}$

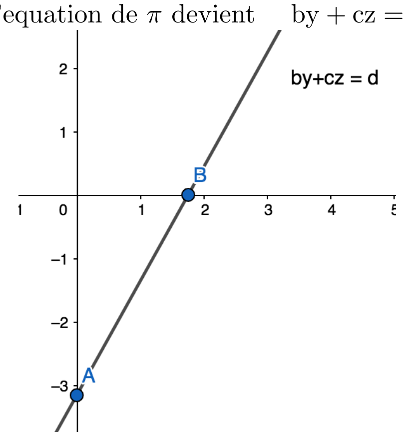
Soit $\pi \subset \mathbb{R}^3$ *un plan* :

$$\pi = \{(x,y,z) | ax + by + cz = d\}$$

A rotation pour l'axe z pres, on peut supposer que $\pi\perp \underbrace{\text{plan des axes y et z}}_{\text{vecteur normal(1,0,0)}}$

En effet, π est donné par une normal n, a rotation par l'axe z pres on peut supposer que $n \perp (1,0,0) \Leftrightarrow\ < n, (1,0,0) >= 0$

L'equation de π devient $\quad by + cz = d$



L'inclinaison du plan π est

$\pm$ la pente de celle droite $= \dfrac{b}{c}$

Si l'inclinaison du cone = inclinaison du plan

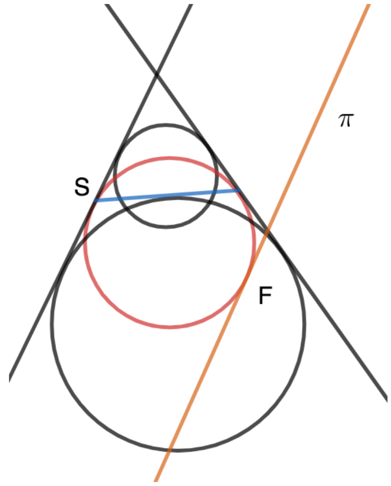
L'equation du plan π devient $\quad y + kz = d \underset{\text{dans l'equ du cone}}{\longrightarrow}$:

$$x^2 + \cancel{y^2} = k^2z^2 = (d-y)^2 = d^2 - 2dy + \cancel{y^2}$$

$\Leftrightarrow x^2 = 2d\left(\dfrac{d}{2} - y\right) = y'$ changement de variable

Théoreme : - Soit C un cone et π un plan dde meme inclinaison. L'inclinaison C$\cap\pi$ est une parabole :

Preuve : -pour $\pi\perp$ au plan y,z projection othogonal sur y,z



Afirmation : $\exists$ une sphèrre au cone et a π

Preuve : Par continuité : Soit F := π avec cette sphère
Soit S = C $\cap$ sphère
Soit l := $\pi \cap$ plan (horizontal) contenant S

Affirmation : C $\cap\, \pi$ est une parabole de foyer F et droite directrice l

Preuve : A voir : P $\in$ C $\cap\, \pi$:
d(P,F)=d(P,l)
Soit P $\in \pi \cap$ C
Soit A$\in$ S l'unique point sur le segment de P à 0

Affirmation : d(P,A)=d(P,F)

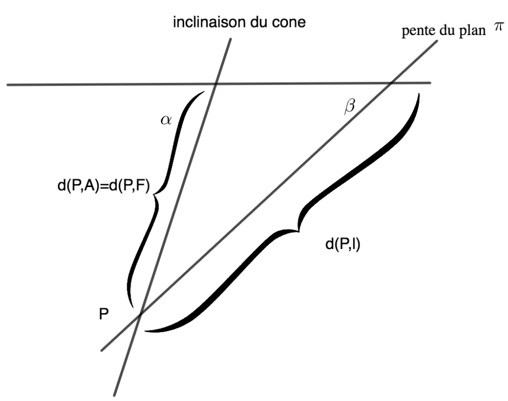
Preuve : car AP et FP sont des droites tangentes à la meme sphère

Si on effectue une rotation, puis on projette, on peut voir P et A comme ceci meme pente que π
d(P,A) = d(P,l) $\square$

Théoreme : - Si la pente du plan π est plus faible que l'inclinaison du cone C, alors $\pi \cap$ C est une ellipse

Preuve : - Meme preuve, meme conclusion de F et l

sul différence :



α et β ne dépendent que des pente, pas de P

Par Thales : $\dfrac{\mathrm{d(P,l)}}{\mathrm{d(P,F)}} := \mathrm{e}$

Seule différence π intersectent aussi la partie supérieur du cone

Donc par Thales : $\dfrac{\mathrm{d(P,F)}}{\mathrm{d(P,l)}} = \mathrm{e}$ $\square$

Probleme de Pappus : -

Donné trois (resp quatre) droites a,b,c (resp d). Pour P point on dénote par PA,PB,PC (resp PD)
Les distances de P aces droites
On cherche l'ensemble des points P tq :

$$\mathrm{PA} \cdot \mathrm{PB} = (\mathrm{PC})^2 \qquad \text{resp} \quad \mathrm{PA} \cdot \mathrm{PB} \cdot = \mathrm{PC} \cdot \mathrm{PD}$$

-Idée de descartes :

P est déterminer par 2 valeur :

X= OA et y =AP

C'est l'origine des coordonné

Distance d'un point a une droite de $\mathbb{R}^2$ -

$$\mathrm{l} = \{(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \in \mathbb{R}^2 | \alpha \mathrm{x} + \beta \mathrm{y} + \gamma = 0\}$$

P=$(\mathrm{x}_0, \mathrm{y}_0)$ d(P,l) = ||projection orthogonal de P-A sur n ——

n=$(\alpha, \beta$) normal a l

$= \left| < \mathrm{P} - \mathrm{A}, \frac{\mathrm{n}}{||\mathrm{n}||} > \right| = *$

Preonons A $= \left(\frac{-\gamma}{\alpha}, 0\right) \in \mathrm{l}$ pour $\alpha \neq 0$

$$* = \left| < \left(\mathrm{x}_0 + \frac{\gamma}{\alpha}, \mathrm{y}_0\right) \left(\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}, \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\right) > \right| = \frac{|\alpha \mathrm{x}_0 + \beta \mathrm{y}_0 + \gamma|}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$$

Pour $\alpha = 0$ verifier que la formule finale est valide

Pour trois (ou quatre) droite donné , l'equation PA·PB = $(\mathrm{PC})^2$ devient quelquechose de la forme :

$$\underbrace{(\mathrm{a}_1\mathrm{x} + \mathrm{b}_1\mathrm{y} + \mathrm{c}_1)}_{\text{dist PA}}\underbrace{(\mathrm{a}_2\mathrm{x} + \mathrm{b}_2\mathrm{y} + \mathrm{c}_2)}_{\text{PB}} = \underbrace{(\mathrm{a}_3\mathrm{x} + \mathrm{b}_3\mathrm{y} + \mathrm{c}_3)}_{\text{PC}}{}^2$$

$\Leftrightarrow \mathrm{Ax}^2 + \mathrm{Bxy} + \mathrm{Cy}^2 + \mathrm{Dx} + \mathrm{Ey} + \mathrm{F} = 0$

DEscartes traite d'inomnbrable cas pour conclure que cette equation définit une conique (cad une parabole une elipse ou une hyperbole)

On le verra simplement avec des technique d'algebre linéaire

3 Chapitre III : isométrie de $\mathbb{R}^n$

3.1 Matrice et application linéaire

Définition : - Soient V,W deux espaces vectoriel réel

Une application f :V→ W est linéaire si

f(v+u') = f(v) + f(u') $(\forall v, y' \in V$ Typiquement pour nous V=$\mathbb{R}^n$

$f(\lambda v) = \lambda f(v) \quad (\forall \lambda \in \mathbb{R}, v \in V$

Remarque : -

1) f lineaire alors f(0) = 0

Car f(0) = f(0·v) = 0·f(v) = 0

2) f est en particulier un homomorphimse de groupe pour les structure de groupe (V,+),(W,+)

Représentation matricielle : -

Si V et W sont de dimension finies :

Soit B=$\{e_1, ..., e_n\}$ une base de V

B'=$\{f_1, ..., f_n\}$ une base de W

une application linéaire f :V→ W est completement determiner par $f(e_1), ..., f(e_n)$

En effet tout $v \in V$ s'ecrit de façon unique comme :

$$v = \lambda_1 e_1 + ... = \lambda_n e_n, \quad \lambda_i \in \mathbb{R}$$

Et alors $f(v) = \lambda_1 f(e_1) + ... + \lambda_n f(e_n)$

Chaque $f(e_j)$ s'écrit de façon unique comme :

$$f(e_j) = a_1 f_1 + ... + a_{mj} f_m \quad a_{ij} \in \mathbb{R}$$

Donc f est completement determiner par la matrice :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$$

De plus f(v) s'obtient par calcul matriciel :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}}_{1:=\prod_{B,B}(f)} \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}}_{\substack{\text{coef de v} \\ \text{dans la base B}}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 a_{11}+ & ... & +\lambda_n a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1 a_{m1} & +...+ & \lambda_n a_{mn} \end{pmatrix}$$

En effet $(\lambda_1 a_{11} + ...\lambda_n a_{1n}) f_1$

$+...$

$+(\lambda_1 a_{m1} + ... + \lambda_n a_{mn}) \cdot f_m$

En particulier, la j-ieme colone de A est constitué des coefficiant de $f(e_j)$ dans la base B'

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} a_{ij} \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{mj} \end{matrix}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} j = \begin{pmatrix} a_{ij} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

Evidement la rep matricielle depend des base B,B' choisis

Si C est une autre base de V
C' est une autre base de W $\rightsquigarrow M^{f}_{C,C'} = M^{id}_{B'C'}$

v vecteur propre d'une application linéaire f :V→ V

$\Leftrightarrow$ f(v) $\in$ droite engendré par v :

Coment trouver vecteur propre et valeur propre ? : -

Soit A une représentation matricielle :f :V→ V lin, dimV = n, A=$\prod\limits_{BB'}^{f}$ pour une base B=$\{e_i, ..., e_n\}$

On cherche $\lambda \in \mathbb{R}$ tq $f(v) = \lambda v$ pour un v$\neq 0 \in$ VV $= \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$

$$\Leftrightarrow \quad A\cdot x = \lambda x \text{ pour } \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \neq 0 \in \mathbb{R}^n$$

$$\Leftrightarrow \quad (\underbrace{A - \lambda I}_{\text{application lineaire}})x = 0 \Leftrightarrow \underset{0}{x} \in \mathrm{Ker}(A - \lambda I) \quad \begin{array}{l} \Leftrightarrow A - \lambda I \text{ pas injective} \\ \Leftrightarrow A - \lambda I \text{ pas inversible} \\ \Leftrightarrow \det(A - \lambda I) = 0 \end{array}$$

Pour trouver les valeur propre on resout : $\underbrace{\det(A - \lambda I)}_{\substack{\text{polynome de degre n} \\ \text{en } \lambda}} = 0$

Exemple : - A=$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

$$\det(A\text{-}\lambda I) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 2 & -\lambda \end{pmatrix} = \begin{array}{l} (1-\lambda)(-\lambda) - 2 \\ \lambda^2 - \lambda - 2 \\ (\lambda - 2)(\lambda + 1) = 0 \end{array} \Rightarrow \text{valeur propre sont } \lambda = 2 \text{ et } \lambda = -1$$

Pour trouver les vecteur propre on resout Ax=λx (pour les valeur propre trouvé)

Exemple : - $\lambda = 2$ Ax=2x $\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$\lambda = -1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ est $\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 2x_1 \\ 2x_1 = 2x_2 \end{cases} \Leftrightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre pour $\lambda = 2$

Si il existe une base B=$\{v_1, ..., v_n\}$ V=$\mathbb{R}^n$ de vecteur propre de f, valeur propre correspondant, $\lambda_1, ..., \lambda_n$ (avec répétition possible, comme p ex, pour f(v)=2v)

$$\text{alors} \prod_{B,B}^{f} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \text{ car } \prod_{B,B}^{f} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \text{j-ieme colone de } \prod_{B,B}^{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \lambda_j \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si f est donné par une machine A par rapport à la base canonique, alors :

$$\mathrm{T}^{-1}\mathrm{A}\mathrm{T} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \begin{matrix}\text{on dit que A} \\ \text{est diagonalisable}\end{matrix}$$

ou T est la matric de changement de base de ma base B a la base canonique T= $\prod_{B,Bcan}^{id}$

$T = \begin{pmatrix} v1|...|v_n \end{pmatrix}$

car T $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ coordonné de x dans la base canonique $\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ x=$v_j \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

Certains application linéaire n'a plus de valeur propre et vecteur propre

Exemple : - A= $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ det(A-λI) = det$\begin{pmatrix} \cos\alpha - \lambda & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha - \lambda \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} &= \cos^2\alpha - 2\lambda\cos\alpha + \lambda^2 + \sin^2\alpha \\ &= \lambda^2 - 2\lambda\cos\alpha + 1 \\ \Delta &= 4\cos^2\alpha - 4 < 0 \qquad \Rightarrow \text{pas de racine (equiv a pas de valeur propre) sauf si } \alpha \in \mathbb{Z}\pi \end{aligned}$$

$$\mathrm{Ax} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda\cos\theta \\ \lambda\sin\theta \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\theta - \sin\alpha\sin\theta \\ \sin\alpha\cos\theta + \cos\alpha\sin\theta \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\theta) \\ \sin(\alpha+\theta) \end{pmatrix}$$

3.2 Isométrie de $\mathbb{R}^n$ et matrice orthogonales

Définitions : -

Une application surjective f :$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est une isométrie si d(f(x),f(y)=d(x,y)) $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$

Remarque : - Une isométrie est automatiquement injective :

$$\text{Si } f(x) = f(y) \text{ alors} \quad \begin{matrix} d(f(x), f(y)) = 0 \\ \| \text{ f isométrie} \\ d(x,y) \Leftrightarrow x = y \end{matrix}$$

— L'ensemble des isométrie de $\mathbb{R}^n$ noté isométrie($\mathbb{R}^n$) forme un groupe. Pusisque isométrie ($\mathbb{R}^n$) $\subset \underbrace{\text{Application de } \mathbb{R}^n \text{ dans } \mathbb{R}^n}_{\text{groupe}}$

$\boxed{\text{Si f,h} \in \text{Isom}\mathbb{R}^n \Rightarrow \text{fh}^{-1} \in \text{Isom}\mathbb{R}^n}$

Exemple : -

1) Une translation $\tau_a : \begin{array}{ll} \mathbb{R}^n \to & \mathbb{R}^n \\ x \to & x+a \end{array}$ pour $a \in \mathbb{R}^n$ est une isométrie

$$\begin{aligned} d(\tau_a(x), \tau_a(y)) &= ||\tau_a(y) - \tau_a(x)|| \\ &= ||y + \cancel{a} - (x + \cancel{a})|| \\ &= ||y = x|| = d(x, y) \end{aligned}$$

Ce n'est pas une application linéaire sauf si a=0, puisque $\tau_a(0) = a \neq 0$ si $a \neq 0$

2) La multiplication par un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$

$\begin{array}{ll} \mathbb{R}^n \to & \mathbb{R}^n \\ x \to & \lambda x \end{array}$

est une isométrie $\Leftrightarrow \lambda = \pm 1$

$$\begin{aligned} d(\lambda x, \lambda y) = ||\lambda_y - \lambda x|| &= |\lambda| \cdot ||x - y|| \\ &= |\lambda| \cdot d(x, y) \\ &\Leftrightarrow |\lambda| = 1 \end{aligned}$$

3) La rotation dans $\mathbb{R}^n$ est une isométrie, On le verra plus tard

on ne peut pas esperer que les isometrie soient linéaire
puisque les translation existent, mais aux translation pres, c'est le cas :

Théoreme : - toute isométrie f $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est composition f=$\tau_a \circ \alpha$, ou α est une isométrie, et est linéaire,

$$\tau_a : x \to x + a \textit{ est une translation}$$

De plus cette décomposition est unique

Preuve : - Unicité : $\tau_a \circ \alpha = \tau_b \circ \beta$

a=0+a =$\tau_a \circ \underbrace{\alpha(0)}_{0\ \alpha \text{ lin}} = \tau_b \circ \underbrace{\beta(0)}_{0\ \beta \text{ lin}} = 0 + b = b$

$$\tau_a \circ \alpha = \tau_a \circ \beta \Rightarrow \alpha = \underbrace{\tau_{-a} \circ \tau_a}_{\text{id}} \circ \alpha = \underbrace{\tau_{-a} \circ \tau_a}_{\text{id}} \circ \beta = \beta$$

Existence de la décomposition :

On pose a :=f(0) et $\alpha := \underbrace{\tau_{-a}}_{(\tau a)^{-1}} \circ f$ isométrie $\quad \alpha(0) = \tau_{-a}(\underbrace{f(0)}_{a}) = a - a = 0$

il reste a montrer : $\begin{cases} \alpha(0) = 0 \\ \alpha \text{ isometrie} \end{cases} \Rightarrow \alpha$ est linéaire

$\forall x, y \in \mathbb{R}^n ||a\alpha(y) - \alpha(x)|| = d(\alpha(x), \alpha(y)) \underset{\alpha \text{ iso}}{=} d(x, y) = ||y - x||$

En partticulier pour x=0 $\quad \boxed{||\alpha(y)|| = ||y||}$ (2)

On calcul : $\quad \underbrace{< x - y, x - y >}_{||x-y||^2} = \underbrace{< x, x >}_{||x||^2} + \underbrace{< y, y >}_{||y||^2} - 2 < x, y >$

$\Rightarrow < x, y > = \frac{1}{2}\left[||x||^2 + ||y||^2 - ||x - y||^2\right]$ (3)

α préserve le prod se :

α est linéaire : $\begin{array}{ll} \text{a)} & \alpha(x + y) = \alpha(x) + \alpha(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n \\ \text{b)} & \alpha(\lambda x) = \lambda\alpha(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \forall \lambda \in \mathbb{R} \end{array}$

a)

b)

□

On a vu que f$\in$ Isom$\mathbb{R}^n$ a la forme :

$$f(x) = \alpha(x) + a$$

ou $\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est une isométrie linéaire et $a \in \mathbb{R}^n$

Theoreme : - Soit $\alpha : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une application linéire donnée de matrice Q relative a une base orthonormé. Sont équivalent :

(i) α est un isométrie

(ii) $QQ^t = I$

(iii) $Q^t \cdot Q = I$

(iv) Q est inversible et $Q^{-1} = Q^t$

Terminologie : -

- Une base $\{e_1, ..., e_n\}$ est dite othonormé

  Si $< e_i, e_j >= \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \Leftrightarrow ||e_i|| = 1 \\ 0 & \text{si } i \neq j \Leftrightarrow e_i \perp e_j \end{cases}$

- Une telle matrice est appelée orthogonale et on dénote par =

$$O(n) = \{Q \in M_n(\mathbb{R}) | Q \cdot Q^k = I\}$$

L'ensemble des matrices orthogonales. on montre facilement que c'est un groupe :

$O(n) \neq \emptyset, \quad I \in O(n)$

Q,P $\in O(n) \quad (QP)(QP)^t = Q\underbrace{PP^k}_{id}Q^t = \underbrace{QQ^k}_{id} = id$

Q$\in O(n) \quad Q^{-1}(Q^{-1})^t = Q^{-1}(Q^t)^{-1} \underset{\substack{\text{equivalence de} \\ (2)\Leftrightarrow(3)}}{=} I$

Combinaison du rappel : $(AB)^t = B^t A^t$

Preuve du theoreme : -

(1)$\Rightarrow$ (2) : α isomorphe $\Rightarrow \alpha(0) = 0$ et α preserve la prod scalaire, cad :

$$< \alpha(x), \alpha(y) >=< x, y > \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n < a, b >= a_1 b_1 + ... + a_n b_n = (a_1, ..., a_n) \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a^t \cdot b$$

Soit Q une matrice representant α par rapport a une base orthogonale B=$\{e_1, ...?e_n\}$

$$\begin{aligned} < x, y > &=< \alpha(x), \alpha(y) > \\ &=< Qx, Qy > \\ &= (Qx)^t \cdot Qy = x^t(Q^tQ)y \quad * \end{aligned} \qquad e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i - ieme$$

$*$ appliqué a x=e_i, y=e_j $\left\{\begin{array}{lll} \text{si} & i=j & 1 \\ \text{si} & i\neq j & 0 \end{array}\right\} =< e_i, e_j >= (0,...,1,...,0) \quad \underbrace{(Q^tQ)\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{j–ime colone de } Q^t\cdot Q} \quad \Rightarrow Q^t \cdot Q = id$

(2) $\Rightarrow$ (1) :Soit α donnée par une matrice Q tq $Q^tQ = id$ Alors $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$:

$$d(\alpha(x), \alpha(y))^2 = ||\alpha(y) - \alpha(x)||^2 = ||\alpha(y - x)||^2$$

=¡$\alpha(y - x), \alpha(y - x) >=< Q(y - x), Q(y - x) >$
$=(Q(y - x))^t(Q(y - x)^t(Q(y - x)) = (y - x)^t\underbrace{Q^tQ}_{id}(y - x)$
$=(y - x)^t(y - x) =< y - x, y - x >= ||y - x||^2 = d(x, y)^2$
$\Rightarrow \alpha$ preserve les distance $\Rightarrow$ $\left.\begin{array}{l} \alpha \text{ est injective } \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ \text{lineaire} \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha$ bijective $\Rightarrow \alpha$ isométrie

$\left.\begin{array}{ll} (4) \Rightarrow & (2) \\ (4) \Rightarrow & (3) \end{array}\right\}$ trivial

(2) $\Rightarrow$ (4). On suppose que $Q^t \cdot Q = id$

$(\det Q)^2 = \underbrace{\det Q^t}_{\det Q} \cdot \det Q = \det(Q^t \cdot Q) = \det(id) = 1$

$\Rightarrow \underset{\neq 0}{\det Q} \in \{\pm 1\} \Rightarrow Q$ est inversible

$$Q^{-1}. = id \cdot Q^{-1} \underset{\text{par hyp}}{=} (Q^t \cdot \underbrace{Q)Q^{-1}}_{id} = Q^t$$

(3) $\Rightarrow$ (4) : identique $\square$

3.3 Exemples et classification des isométrie en petite dimension

n = 1 ex $x \to -x$
$x \to x + a$
$x \to x$ id
reflexion par $c \in \mathbb{R}$

O(1)=$\{Q \in M_1(\mathbb{R}) | Q^kQ = 1\} = \{\pm 1\}$

f$\in$ isometrie$\mathbb{R} \Rightarrow f(x) = \pm x + a$ pour $a \in \mathbb{R}$

f(x) = +x+a : est une translation pour l'identité pour $\begin{array}{l} a\neq 0 \\ a=0 \end{array}$

f(x) = -x+a a un point fixe en $\frac{a}{2}$ $\quad f\left(\frac{a}{2}\right) = -\frac{a}{2} + a = \frac{a}{2}$

f est la reflexion par rapport a $\frac{a}{2}$ $\quad f\left(\frac{a}{2} + y\right) = -\left(\frac{a}{2} + y\right) + a = \frac{a}{2} - y$

La composition de 2 translation est un translation

la composition de 2 reflexion ?
$\sigma_c\sigma_b(x) = \sigma_c(-x + 2b) = -(-x + 2b) + 2c = x + 2(c - b)$ trans pour $2(c - b)$

La compostion d'une $\begin{array}{l} \text{reflexion et translation} \\ \text{tranaslation et reflexion} \end{array}$ est un reflexion

En resumer : - Toute isometrie de $\mathbb{R}$ est une composition de reflexion :

0 reflexion : identité
1 reflexion : reflexion
2 reflexion : translation

Dimension n=2 : $O(2) = \{Q \in M_2(\mathbb{R}) | Q^t Q = id\}$

Remarque : - $Q \in O(n) \Leftrightarrow$ Ses vecteurs $\begin{matrix}\text{olonnes}\\ \text{ligne}\end{matrix}$ forment une base orthogonales

$$Q=(v_1|v_2|...|v_n) \quad Q^t \cdot Q = id \Leftrightarrow \begin{pmatrix} v_1^t \\ \vdots \\ v_n^t \end{pmatrix} (v_1|...|v_n) = (v_i, v_j >_{i,j})$$

Puisque les colones de $Q \in O(2)$ forment une base orthognormale

- sa 1ere colone est un vecteurs de nomre 1
  $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ tq $a^2 + b^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} a = \cos\alpha \\ b = \sin\alpha \end{cases}$
- Sa 2eme colone est un vecteur $\perp$ a $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ a la forme $\begin{pmatrix} -\lambda b \\ \lambda a \end{pmatrix}$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$
- Sa 2eme colone a norme 1 :
  $$1=\left\| \begin{pmatrix} -\lambda b \\ \lambda a \end{pmatrix} \right\|^2 = \lambda^2 (\underbrace{b^2 + a^2}_{1}) = \lambda^2 \Rightarrow \lambda = \pm 1$$
  Donc $Q= \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}}_{\text{rotation d'angle } \alpha}$ ou bien $Q = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$ det = -1

  Pas de valeur propre ni vecteur propre sauf si $\alpha \in \pi\mathbb{Z}$

<u>Valeur Propre :</u> $\det\left(\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right) \Rightarrow$ 2 valeur propre : ± 1

<u>Vecteur propre :</u> $\lambda = 1$: $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \cos\alpha + 1 \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$ vecteur propre pour $\lambda = 1$

$\lambda = -1 \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha + 1 \end{pmatrix}$

On a obtenu une reflexin par rapport a la droite engendré par le vecgeur propre de valeur propre = 1

Donc $=Q \in O(2)$ represente soit $\begin{matrix}\text{une rotation (de centre O)} \\ \text{une reflexion (par un droite passant par O)}\end{matrix}$

Qu'en est-il de $x \rightarrow Q(x) + c$ $c \in \mathbb{R}^2$

- $Q=\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = R_\alpha$ Q'est ce $\tau_c \circ R_\alpha$

Voyons d'abord comment representer sous la forme $x \rightarrow Q(x) + c$ ne roation d'angle α centrer en b $\in \mathbb{R}^2$

$$\tau_b R_\alpha t_{-b}(x) = ... = R_\alpha(x) + \underbrace{(id - R_\alpha) \cdot b}_{\in \mathbb{R}^2}$$

On conclut que $\tau_c \circ R_\alpha$ *est une rotation d'angle* α *centre en* $b= \underbrace{id - R_\alpha)}_{\text{est inversible}}{}^{-1}(c) \Leftrightarrow \det(id - R_\alpha) \neq 0$

$\Leftrightarrow$ 1 n'est pas valeur propre de R_α pour $\alpha \in 2\pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow R_\alpha \neq id$

- Si $Q \in O(2)$ detQ=-1 est une reflexion Qu'en est il de $\tau_c \circ Q$?

Définition : - Une reflexion glissé est une composition $\tau_a \circ \sigma d$, ou a $\parallel$ d

Proposition : - $f(x) = Q(x) + a$ une isométrie de $\mathbb{R}^2$ avec det Q = -1. Alors f est une :
- reflexion si a $\perp$ a la droite de réflexion de Q (= vecteur propre pour la valeur propre=1)
- réflexion glissé sinon

Preuve : -

Soit v_+ = vecteur propre de Q de valeur propre +1

v_- =vecteur propre de Q de vecteur propre -1

- Si $a \in < v_- >$

$Q(x) + a = \sigma_d(x)$ pour d =droite $\parallel$ a ¡v_+¿ par a/2
- Si $a \notin$ ¡v_-¿

$a = a_1 + a_2$, $a \in < v_+ >$, $a_2 \in < v_- >$

$$f = \tau_a \circ \underbrace{\sigma_{<v+>}}_{Q} = \underbrace{\tau_{a1} \circ \quad \underbrace{\tau_{a2} \circ \sigma_{<v+>}}_{\substack{\text{reflexion par une droite} \\ \parallel \text{a <v+>}}}}_{\text{reflexion glisse}}$$

Classification des isométrie $\mathbb{R}^2$: -

Toute isométrie de $\mathbb{R}^2$ est coomposition d'au plus 3 reflexions :

- 0 réflexion : id

- 1 réflexion : réflexion

- 2 réflexion : translation si $\parallel$ rotation si $\times$
- 3 rélexion : réflexion glissé

Il est vraie en toute dimension qu'une isométrie de $\mathbb{R}^n$ est composition d'au plus n+1 reflexions

En dimension 3 on peut encore classifier les isométrie "à la main" (cf exos)

Théorme : - Toute isométrie de $\mathbb{R}^3$ préservent l'orientation et fixant l'origine est une rotation d'axe passant par l'origine

Définition : - $f=\tau_a \circ Q \in$ Isom $\mathbb{R}^n$ préserve (resp renverse) l'orientation si det Q= +1 (resp -1)

Remarque : - Si P représente $Q \in O(n)$ dans une autre base orthonormé alors det P=det Q car $P=T^{-1}QT$

Corolaire : - Toute isométrie de $\mathbb{R}^3$ preservant l'orientation et fixant un point $p \in \mathbb{R}^3$ est une rotation par un axe passant par p.

Preuve du Théoreme : -

Soit $f(x) = Q(x) + v \in \text{Isom}\mathbb{R}^3$

$f(0) = 0 \Rightarrow v = 0$

f preserve l'ordre $\Leftrightarrow$ det Q = +1

Voyons que $\lambda = 1$ est valeur propre de Q :

$$\det(Q-I) = \det(Q(I-Q^t)) = \underbrace{\det Q}_{1}\underbrace{\det(I-Q^t)}_{\det(I-Q)} = \det((-I)$$

$\cdot(Q-I)) = \det(-I)\cdot\det(Q-I) \Rightarrow \det = -\det \Rightarrow \det(Q-I) = 0$

$Q \in O(3)$ avec detQ=1. On a vu $\lambda = 1$ est valeur propre. Soit $a \in \mathbb{R}^3$ $||a|| = 1$ le vecteur propre pour $\lambda = 1$. On verra que $< a >$ est l'axe de rotation de Q. Soit $v_1 \in$ plan orthogonales a $< a >$ $||v_1|| = 1$ Soit $v_2 \in$ plan orthogonale , $||v_2|| = 1$ et $< v_1, v_2 >= 0$ (p.ex $v_2 = v_1 \times a$)

Representons f dans la base $\{a, v_1, v_2\}$: $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix}$ f(a) = a dans la base $\{a, v_1, v_2\}$

$Q_{vi} \in$ plan orthogonale à a = plan engendré par v_1 et v_2 car $< Qv_i, a >=< Qv_i, Qa >=< v_i, a >= 0$

Donc P a la forme P=$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & & \\ 0 & & \end{pmatrix}$, detP = detA=1

$p \in O(3)$: $I = p \cdot p^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & & A \\ 0 & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & & \\ 0 & A^t & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & & \\ 0 & & AA^t \end{pmatrix} \Rightarrow AA^t = I$

$\Rightarrow$ A est une rotation $\square$

3.4 Groupes de symétries :

But : - Donné $Y \subset \mathbb{R}^n$ étudier

$$\mathrm{Sym}(Y) = \{f \in \mathrm{Isom}\mathbb{R}^n | f(Y) = Y\} \quad \text{et} \quad \mathrm{Sym}^+(Y) = \{f \in \mathrm{Isom}^+\mathbb{R}^n | f(Y) = Y\}$$

Remarque : - Sym(Y) et $\mathrm{Sym}^+(Y)$ sont des groupes

Outils : - Actions de groupes

Définition : - Soit G un groupe et X ensemble vide : Une action de G sur X est une application :

$$\begin{array}{lcl} G \times X & \longrightarrow & X \\ (g, x) & \longrightarrow & g \cdot x \end{array} \quad \text{tq :} \quad \begin{array}{ll} 1) & e \cdot x = x \quad \forall x \in X \\ 2) & (g, h) \cdot x = g \cdot (h \cdot x) \quad \forall g, h \in G, \forall x \in X \end{array}$$

Exemple primodrial pour nous :

$\begin{array}{l} X = Y \subset \mathbb{R}^n \\ G = \mathrm{Sym}(Y) \end{array}$ au lieu de X=Y on pourrait avoir un objet associé a Y p.ex Y=cube dans $\mathbb{R}^3$

On peut prendre X={diagonale du cube}

Autre Exemple : -

1) $\forall$ groupe G, $\forall$ ensemble $X \neq \emptyset$ on a l'action trivial :

$$\begin{array}{lcl} G \times X & \longrightarrow & X \\ (g, x) & \longrightarrow & g \cdot x = x \quad \forall x \forall y \end{array}$$

2) G=Sym(n) X=$\{1, 2, .., n\}$

$$\begin{array}{lcl} \mathrm{Sym}(n) \times \{1, 2, ..., n\} & \longrightarrow & \{1, 2, ..., n\} \\ (\sigma, i) & \longrightarrow & \sigma(i) \end{array}$$

3) $GL_n\mathbb{R}$ agit sur $\mathbb{R}^n$

Définition : - Une action est transitive si $\forall x, y \in X\ \exists g \in G$ tq $y = g \cdot x$

• une action est fidèle si on a : Si $g \in G$ satisfait $gx=x\ \forall x \in X \Rightarrow g = e$

Une action de groupe determine un homomorphisme :

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & G & \longrightarrow & B_{ij}(X) \\ & g & \longrightarrow & \{x \to g \cdot x\} \end{array}$$

A verifier :

1) $x \to g \cdot x$ est bien une bijection
2) φ est un homo

Rappel : - Une action d'un groupe G sur un ensemble $X \neq \emptyset$ est une application : $\begin{array}{ccc} G \times X & \longrightarrow & X \\ (g \cdot x) & \longrightarrow & g \cdot x \end{array}$

Tq : i) $e \cdot x = x \quad \forall x \in X$

ii) $(gh) \cdot x = g \cdot (h \cdot x) \quad \forall g, h, \in G,\ \forall x \in X$

On notera $G \subset X$

Une action $G \subset X$ détermine un homomorhpisme :

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\varphi} & B_{i,j}(X) \\ g & \longrightarrow & \{x \to g \cdot x\} \end{array}$$

A vérifier : -

1) φ est un homom
2) $\mathrm{Im}\varphi \subset B_{i,j}(X)$

On vérifie :

2) Soit $g \in G$ Notons $\begin{array}{ll} C_g : & X \to X \\ & x \to g \cdot x \end{array}$

• C_g surj : Soit $y \in X$

Posons $x = g^{-1} \cdot y$

Alors : $\varphi_g(x) = g \cdot x = g \cdot (g^{-1} \cdot y) \overset{(ii)}{=} \underbrace{(g \cdot g^{-1})}_{1} \cdot y \overset{(i)}{=} y$

1) A voir : $\varphi(gh) = \varphi(g) \circ \varphi(h)$

$\Leftrightarrow \varphi(gh)(x) = \varphi(g) \circ \varphi(h)(x) \quad \forall x \in X$

$\varphi(gh)(x) = (gh) \cdot x \overset{(ii)}{=} g \cdot (h \cdot x) = \varphi(g) \cdot (\underbrace{h \cdot x}_{\varphi(h)(x)})$ *ce qui termine les vérifications*

Inversement un homomorphisme : $\varphi : G \to B_{ij}(X)$ determine une action de G sur X par :

$G \times X \to X$

$\varphi(g \cdot x) \to g(x) \cdot x$

Ceci est bien un action de groupe :

(i) $e \cdot x = \varphi(e)(x) = x$

(ii) $(g \cdot h) \cdot x = \varphi(gh)(x) = \varphi(g)\varphi(h)(x)$

$= g \cdot (\underbrace{\varphi(h)(x)}_{h \cdot x})$

Revenons a nos exemple :

i) Action triviale $\begin{array}{ll} G\times X & \to X \\ (g,x) & \to g\cdot x = x \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ll} G & \to B_{ij}(x) \\ g & \to id_x \quad \forall g\in G \end{array}$

ii) $Sym(n) \subset \{1,2,...,n\} \longrightarrow Sym(n) \to B_{ij}(\{1,2,...,n\}) = Sym(n)$

iii) $GLn\mathbb{R} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow GLn\mathbb{R} \to B_{ij}(\mathbb{R}^n)$

Rappel : - G$\subset$ X fidèle si pour tout g$\in$ G Si $g{\cdot}x = x \quad \forall x \in X \Rightarrow g = e$

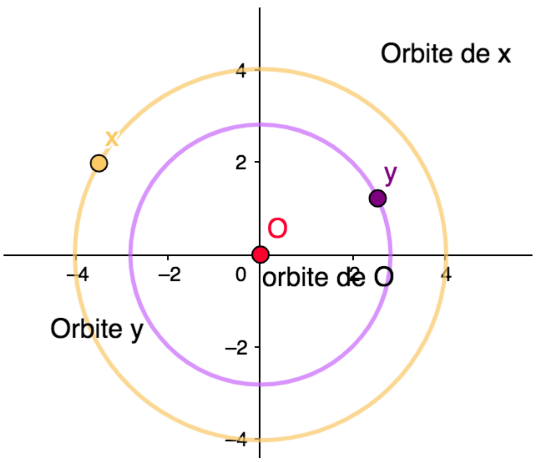
Pour l'homom correspondant etre fidèle veut dire que l'homom est injectif

Définition : - Soit G$\subset$ X une action $\forall x \in X$ on définit l'orbite de x par :

$$Gx = \{g\cdot x | g \in G\}$$

L'ensemble des orbite est dénoté $G\backslash X$

Exemple : - G = rotation par l'origine rotation de $\mathbb{R}^2$



Exemple important : - les groupe diéd aux :

Soit $P_n \subset \mathbb{R}^2$ un n-gone régulier centré en l'origine

On cherche :

$$D_{2n} := Isom(P_n) = \{f \in Isom\mathbb{R}^2 | f(P_n) = P_n\} \quad \text{et } Isom(P_n)$$

$D_{2n} \supset e, r, r^2, ..., r^{n-1}, \quad r^{-1}$

s, $\underbrace{rs, r^2s, ..., r^{n-1}s}_{\substack{\text{Ce sont des reflexions} \\ \text{car elles renversent l'ordre} \\ \text{et ont l'origine comme point fixe}}}$ $\quad$ r := rotation d'angle

On verra que $|D_{2n}| = 2n$ donc $D_{2n} = \{e, r, r^2, ..., r^{n-1}, s, rs, r^2s, ..., r^{n-1}s\}$

Les n réflexion sont :

Remarque sur la notation : Sym(X) = Isom(X) deux notation pour le meme objet : $\{f \in Isom\mathbb{R}^n$ — f(x)=x } pour $X \subset \mathbb{R}^n$

Définition : - G $\subset$ X action Soit x$\in$ X

On définit le stabilisateur de x par Stab(x)=$\{g \in G | g\cdot x = x\}$

Exo : - Action est fidèle $\Leftrightarrow \bigcap_{x\in X} Stab(x) = \{e\}$

Propopsition : -

i) Stab(x) est un sous-groupe de G

ii) Si x et y sont dans la meme orbite alors Stab(x) et Stab(y) sont isomorphe

Avant cette proposition, voyons

Lemme : - Soit G$\subset$ X une action de groupe. Soient x,y $\in$ X Alors :

- ou bien Gx=Gy
- ou bien Gx$\cap$Gy $= \emptyset$

Preuve du lemme : - Supposons que Gx$\cap$Gy $\neq \emptyset$ A voir Gx=Gy

Soit z$\in$ Gx

Puisque z$\in$ Gx $\exists \mathrm{g} \in \mathrm{G}$ $\mathrm{z} = \mathrm{g} \cdot \mathrm{x}$
z$\in$ Gy $\exists \mathrm{h} \in \mathrm{G}$ $\mathrm{z} = \mathrm{h} \cdot \mathrm{y}$

Donc $\mathrm{g}\cdot\mathrm{x} = \mathrm{z} = \mathrm{h} \cdot \mathrm{y} \overset{\mathrm{h}^{-1}}{\rightarrow} (\mathrm{h}^{-1}\mathrm{g})(\mathrm{x}) = \mathrm{y}$

Voyons que Gy $\subset$ Gx

Soit $\mathrm{k}\cdot\mathrm{y} \in \mathrm{Gy}$ pourk $\in \mathrm{G} = \mathrm{k} \cdot ((\mathrm{h}^{-1}\mathrm{g}) \cdot \mathrm{x}) \overset{(ii)}{=} (\mathrm{kh}^{-1}\mathrm{g}) \cdot \mathrm{x} \in \mathrm{Gx}$

De meme Gx $\subset$ Gy par symétrie $\square$ Lemme

Conséquence du Lemme : - On peut choisir un sous-ensemble de S$\subset$ X représentant des orbites tel que :

S contient exactement un élément de chaque orbite. On a alors $\mathrm{X} = \coprod_{\mathrm{s} \in \mathrm{S}} \mathrm{Gs}$

Preuve de la prop : -

i) e$\in$ Stab(x) car $\mathrm{e}\cdot \overset{(i)}{=} \mathrm{x}$

$\mathrm{gh} \in \mathrm{Stab(x)} \Rightarrow (\mathrm{gh})\mathrm{x} \overset{(ii)}{=} \mathrm{g}(\underbrace{\mathrm{hx}}_{\mathrm{x \ car \ h \in Stab(x)}}) = \mathrm{x}$

donc gh$\in$ Stab(x)

$\mathrm{g} \in \mathrm{Stab(x)} : \mathrm{g} \cdot \mathrm{x} = \mathrm{x} \Rightarrow \mathrm{g}^{-1}(\mathrm{g} \cdot \mathrm{x}) = \mathrm{g}^{-1} \cdot \mathrm{x} \Rightarrow \mathrm{g}^{-1} \in \mathrm{Stab(x)}$

ii) Si x et y sont dans la meme orbite, alors Gx=Gy

En effet x,y $\in$ Gz, mais $\mathrm{x} \in \underbrace{\mathrm{Gx} \cap \mathrm{Gz}}_{\neq \emptyset} \underset{\mathrm{lemme}}{\Rightarrow} \mathrm{Gx} = \mathrm{Gz}$

De meme Gy=Gz

En particulier, y$\in$ Gx donc $\exists \mathrm{g} \in \mathrm{G}$ tq $\mathrm{y} = \mathrm{g} \cdot \mathrm{x}$

On définit $\phi_{\mathrm{g}} : \begin{array}{ll} \mathrm{G} \rightarrow & \mathrm{G} \\ \mathrm{h} \rightarrow & \mathrm{ghg}^{-1} \end{array}$ qui est un homom de groupe d'inverse $\phi_{\mathrm{g}^{-1}}$

On a $\phi_{\mathrm{g}}(\mathrm{Stab(x)}) \subset \mathrm{Stab(y)}$

Soit h$\in$ Stab(x), $\phi_{\mathrm{g}}(\mathrm{h})(\mathrm{y}) = (\mathrm{ghg}^{-1})(\mathrm{y}) = (\mathrm{gh})(\underbrace{\mathrm{g}^{-1}\mathrm{y}}_{\mathrm{x}}) = \mathrm{g}(\underbrace{\mathrm{h} \cdot \mathrm{x}}_{\mathrm{x}}) = \mathrm{y}$ car h$\in$ Stab(x)

Par Sym, on a $\phi_{\mathrm{g}^{-1}}$ (Stab(y)) $\subset$ Stab(x) Ce qui finit de montrer que ϕ_{g} restreint à Stab(x) est un isomorphisme d'image Stab(y) $\square$

Formule des orbites : - Soit G$\subset$ X une action avec G fini

Pour tout x$\in$ X :

$$|\mathrm{G}| = |\mathrm{Gx}| \cdot |\mathrm{Stab(x)}|$$

Exemple : -

i) $G \subset X$ action trivial
$Gx = \{x\}$
Stab(x)=G —G—=1·|G|

ii) $\mathrm{Sym(n)} \subset \{1, 2, ..., n\}$ x=n Orbite de n
$\mathrm{Stab(n)} = \{\sigma \in \mathrm{Sym(n)} | \sigma(n) = n\} \cong \mathrm{Sym}(n-1)$
$|\mathrm{Sym(n)}|$=n·$|\mathrm{Sym}(n-1)|$
Par induction : $|\mathrm{Sym(n)}|$=n!

iii) $D_{2n} \subset \{\text{sommet du } n-\text{gone régulier } P_n\} = X$
X un sommet, orbite de x = X
Stab(x) $=\{id, s\}$ —$D_{2n}| = n \cdot 2$

Théoreme des orbites : -
$G \subset X$ G fini $\forall x \in X: \ |G| = |Gx| \cdot |\mathrm{Stab}(x)|$

Preuve : - $\forall y \in Gx$ on pose :

$$S_y = \{g \in G |\ gx = y\}$$

Ceci n'est pas un groupe sauf si y=x puisque pour : $e \cdot y \neq x$

Pour x=y : $S_x = \mathrm{Stab}(x)$ pour définition

On a un bijection :

$$\begin{array}{lll} \varphi & :\mathrm{Stab}(x) & \to S(y) \\ & g & \to h \cdot g \\ \text{d'inverse} & g' & \to g'h^{-1} \end{array}$$

Puisque y∈ Gx : y=hx pour h∈ G
$h^{-1}g'(x) = h^{-1}y = x$

En particulier $|\mathrm{Stab}(x)| = |S_y|$ $G = \bigsqcup_{y \in G_x} S_y$ *Chaque g∈ un unique* S_y *en fait* S_{gx}

$$|G| = \sum_{y \in G_x} |S_y| = \sum_{y \in G_x} |\mathrm{Stab}(x)| = |G_x| \cdot |\mathrm{Stab}(x)| \qquad \square$$

Formule de Lagrange : - H< G groupe

$G/H = \{gH | g \in G\}$ Action de H sur G par : $\begin{array}{ccc} H \times G & \to & G \\ (h, g) & \to & h \cdot g \end{array}$

Une orbite pour cette action $\Leftrightarrow$ Hg classe a droite

Orbite égales ou disjointes $\Leftrightarrow \forall g_1, g_2 \in G \begin{cases} \textit{ou bien} & Hg_1 = Hg_2 \\ \textit{ou bien} & Hg_1 \cap Hg_2 = \emptyset \end{cases}$

d'orbites $\Leftrightarrow$ # de classes a droite :=[G : H]

Maintenant onconsidere l'action de G sur $G/H = \{gH | g \in G\}$

$\begin{array}{ll} G \times G/H & \to G/H \\ (g, g'H) & \to gg'H \end{array}$ Cette action est transitive. Soient $g_1H, g_2H \in G/H$

$$x = H \in G/H \quad \mathrm{Stab}(H) = \{g \in G | gH = H\} = H$$

Formules des orbites : $|G| = |\underbrace{\text{Orbite de H}}_{\substack{\text{G/H car l'action} \\ \text{est transitive}}}| \cdot \underbrace{|\mathrm{Stab}(H)|}_{H} = [G : H] \cdot |H|$

Formule de Burnside : - $G \subset X$

Rappel $\mathrm{Stab}(x) = \{g \in G | gx = x\} < G$ pour $x \in X$

Définition :- $\mathrm{Fix}(g) = \{x \in X | gx = x\} \subset X$ pour $g \in G$

L'ensemble des points fixe de $g \in G$

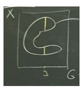
Théoreme : - (Formule de Burnside)

$$|G\backslash X| = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|\mathrm{Fix}(g)|$$

Preuve : - Double comptage sur :

$$Y = \{(g,x) \in G \times X |\ g \cdot x = x\} \subset G \times X$$

Varticalement :



$$\begin{aligned} Y &= Y \cap (X \times \bigsqcup_{g\in G}\{g\} \times X) \\ &= \bigsqcup_{g\in G} Y \cap (\underbrace{X \times \{g\}}_{\text{"droite verticale"}} \times X) \\ &= \bigsqcup_{g\in G} \{g\} \times \mathrm{Fix}(g) \quad {\scriptstyle (1)} \end{aligned}$$

$$Y = Y \cap (G \times \underbrace{\bigsqcup_{x\in X}\{x\}}_{X})$$

Horizontalement

$$\begin{aligned} &= \bigsqcup_{x\in X} Y \cap (\underbrace{G \times \{x\}}_{\text{droite horizontal}}) \\ &= \bigsqcup_{x\in X} \mathrm{Stab}(x) \times \{x\} \quad {\scriptstyle (2)} \end{aligned}$$

Soit$N = |G\backslash X|$ le nombre d'orbite

Soit : $S=\{x_1, ..., x_N\} \subset X$ *un système de représentant des orbite*

$$\sum_{g\in G}|\mathrm{Fix}(g)| \overset{(1)}{=} |Y| \overset{(2)}{=} \sum_{x\in X}|\mathrm{Stab}(x)| = \underbrace{\sum_{i=1}^{N} \cdot \sum_{x\in Gx_1}}\ \underbrace{|\mathrm{Stab}(x)|}_{|\mathrm{Stab}(x_i)| \text{ car } x\in Gx_i}$$

$X=\bigsqcup_{i=1} Gx_i$ $\underbrace{|Gx_i||\mathrm{Stab}(x_i)|}_{|G|}$ (formule des orbite) $\square$

Application : - Enumération d'objet géométrique / combinatoires

Combien existe-t-il de choix de 7 perles différentes :

1er idée : 7 choix par perle $\rightsquigarrow 7^6$ *faux car les collier ont des symétries*

L'esnemble de toute les représentation possible de collier à 6 perles, de 7 types différents est donné par :

$$X = \{x : \{P_1, ..., P_6\} \to \{1, 2, 3, ..., 7\}\}$$

(—X—$=7^6$) L'action de D_{12} sur l'héxagone induit : $\begin{array}{lll} D_{12} \times X & \to & X \\ (g,x) & \to & \{P_i \to x(g^{-1}P_i)\} \end{array}$

Deux représentation de collier $x_1, x_2 \in X$
représentent le meme collier ssi x_1, x_2 sont dans la meme orbite de $D_{12} \subset X$

on cherche alors le # d'orbite de $D_{12} \subset X$

$$= \frac{1}{|D_k|}\sum_{g\in D_{12}}|\mathrm{Fix}(g)| \qquad D_{12} = \{id, r, r^2, ..., r^5, \underbrace{s, rs, ..., r^5 s}_{\text{reflexion}}\}$$

id : Fix(Id) = X $\quad |\mathrm{Fix(id)}|7^6$

r : Fix(r) = collier constant $\mathrm{x(P_i) = x(P_j)}\ \forall \mathrm{i, j}$

ou

$\mathrm{r^{-1}Fix(r^{-1})}$

$\mathrm{r^2Fix(r^{\pm 2}\ )}$

ou

$\mathrm{r^{-2}}$ collier tq : $\begin{matrix} \mathrm{x(P_1) = x(P_3) = x(P_5)} \\ \mathrm{x(P_2) = x(P_4) = x(P_6)} \end{matrix}$

$\mathrm{|Fix(r^{\pm 2})| = 7^2}$

$\mathrm{r^3} \quad \mathrm{|Fix(v^3)| = 7}$

3 réfléxion par des droites passant par des sommet opposé

$|\mathrm{Fix}| = 7^4$

3 rélexion de droites passants par les milieux d'arrète opposés

$|\mathrm{Fix}| = 7^3$

$$\#\ \mathrm{d'orbite} = \frac{1}{12}\left[7^6 + 2\cdot 7 + 2\cdot 7^2 + 7^3 + 3\cdot 7^3 + 3\cdot 7^4\right] = ...$$

Retour a ce qui nous interesse : $\mathrm{Isom(X) = \{f \in Isom(\mathbb{R}^n) | f(X) = X\}}$ pour $\mathrm{X} \subset \mathbb{R}^n$

$+\ \mathrm{Isom(X) = \{f \in Isom+\ (\mathbb{R}^n) | f(X) = X\}}$

n=1 cf exo

n=2
- X=$\mathrm{P_n}$ n-gone régulier
  $\mathrm{Isom(P_n) = D_{2n}}$
  $\mathrm{Isom{+}(P_n) = \{enr, ..., r^{n-1}\} \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$
- $\mathrm{Isom(X) = \{e, r, ..., r^{n-1}\} \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$

n=3
- Isom (ttraède) $\cong$ Sym(4)
  Isom+(tétraède) $\cong$ Alt(4)
- C=cube, centré en origine
  G=Isom(C) $\subset$ X = {sommet de C}

Remarque : - Si g$\in$ G alors g(0) = 0

car 0 = $\cap$ diagonale et g(digonale) est une diagonale

Soit x$\in$ x Formule des orbites $|\mathrm{G}| = |\mathrm{Gx}| \cdot |\mathrm{Stab(x)}|$

$|\mathrm{Gx}| = 8 \quad |\mathrm{Stab(x)}| = |\underbrace{\mathrm{Orbite\ de\ a}}_{3}|$

Stab(x)$\subset$ {arrete par x}

Combien de f$\in$ Isom(C) tq f(x) = x f(a)=a ?

$\Rightarrow$ f est l'isométrie qui fixe la plan $\exists$ 0, x q $\Rightarrow$ f=id ou refl $\Rightarrow |\mathrm{G}| = 8\cdot 3\cdot 2 = 48$

G = Isom(C) $\quad |\mathrm{G}| = 48$

$\mathrm{G^+ = Isom^+(C)}$ meme preuve sauf que Stab(arrete) $< \mathrm{G^+}$

$|\mathrm{G^+}|$ =24 D={diagonale de C} $|\mathrm{D}| = 4$

G et $\mathrm{G^+}$ agissent sur D : $\begin{matrix} \mathrm{G^+ \times D} & \to \mathrm{D} \\ \mathrm{(f,d)} & \to \mathrm{f(d)} \end{matrix}$

Action determine un homomorphisme $\mathrm{G^+ \to Sym(4)\ |D|}$

C est injective : (un peu + tard)

$|G^+| = |\mathrm{Sym}(4)| = 24 \quad \Rightarrow \varphi$ est un isom $\quad G^+ \cong \mathrm{Sym}(4)$ reste a determiner G :

<u>Soit</u> $\begin{matrix} c & \mathbb{R}^3 & \to \mathbb{R}^3 \\ & x & \to -x \end{matrix}$ (la symétrie centrale) représenter par la matrice : $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$\det \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -1$ donc c renverse l'orientation

Posons $C_2 = \{id\ c\}$ (groupe a $\mathbb{Z} : 2\mathbb{Z}$)

On définit un homomorhpisme $\phi : \begin{matrix} G^+ \times C_2 & \to G \\ (f, c^\varepsilon) & \to f \circ c^\varepsilon \end{matrix}$

ϕ est bien un homomorphisme : $\phi(\underbrace{f, c\varepsilon) \cdot (g, c^\delta)}_{(f \circ g, c^\varepsilon \circ c^\delta})) = f \circ g \circ c^\varepsilon \circ c^\delta$

$\phi(f, c^\varepsilon) \circ \phi(g, c^\delta) = f \circ \hat{\c{}}\varepsilon \circ g \circ c^\delta$ *il suffit de voir que* $g \circ c^\varepsilon = c^\varepsilon \circ g$

pour $\varepsilon = 0$: $g \circ id = id \circ g$ ✓

pour $\varepsilon = 1$ $g \circ c = c \circ g$ g est représenté par une matrice Q (car $g(0) = 0$)

$\Leftrightarrow Q \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix} Q$ ✓

ϕ est injective : Si $\phi(f, c^\varepsilon) = f \circ c^\varepsilon = id \Rightarrow c^\varepsilon = f^{-1} \Rightarrow \varepsilon = 0$ (car c renverse $\Rightarrow id = f^{-1} \Rightarrow id = f$ $\square$
Puisque $|G^+ \times C_2| = |G| \Rightarrow \phi$ est un isomorphisme et donc $G \cong \mathrm{Sym}(4) \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Reste a voir que $\varphi : G^+ \to \mathrm{Sym}(4) = |D|$ est injective. Soit $f \in G^+$ tq $\varphi(f) = id$

f fixe les diagonales, donc $f(\{x_i, \overline{x_i}\}) = \{x_i, \overline{x_i}\}$

Si $f(x_1) = \overline{x_1}$ Pour chaque voisin x_2, x_3, x_4 de x_1 on sait que $f(x_i) \in \{x_1, \overline{x_i}\}$

$d(f(x_1), f(x_i)) = d(x_1, x_i) \Rightarrow f(x_i)$ est voisin de $f(x_1) = \overline{x_i}$ $\quad x_i =$ pas voisin de $\overline{x_1} \Rightarrow f(x_i) = \overline{x_i}$

Si $f(x_i) = \overline{x_i} \Rightarrow f = c$ symétrie centrale et $f \notin G^+$

Donc notre supposition que $f(x_1) = \overline{x_1}$ est fausse et $f(x_1) = x_1$

Par symétrie f(v)=v pour tous les sommets $\Rightarrow f = id$

- D=dodécaèdre; meme genre de preuve pour Isom(C)

On laisse Isom(D) agir sur les cubes inscrit dans le dodécaèdre et montre : $\begin{matrix} \mathrm{Isom}^+ (D) \cong \mathrm{Alt}(5) \\ \mathrm{Isom}\ (D) \cong \mathrm{Alt}(5) \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \end{matrix}$

- L'octaèdre et l'isocaèdre s'obtiennent par dualité

Remarque : - Isom (T) = Sym(4)

$\mathrm{Iso}^+ (T) = \mathrm{Alt}(4)$

Est-ce que $\mathrm{Isom}(T) \cong \mathrm{Isopm}^+(T) \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ Non car $\mathrm{Sym}(4) \ncong \mathrm{Alt}(4) \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

pourquoi la meme preuve que pour le cube ne marche pas ? Car la symétrie centrale $c \notin \mathrm{Isom}(T)$

4 Chapitre IV : Géométrie sphérique

4.1 Aire de $\triangle$ sphérique

$\mathrm{S}^2 = \{x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | \, x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$

Les droites $\rightsquigarrow$ grands cercle (cad $\mathrm{S}^2 \cap$ plan par l'origine)

segments de droites $\rightsquigarrow$ arcs de grands cercle

Un $\triangle$ sphérique de sommets P,Q,R dans une hémispgère H est déterminé par les uniques segemtns reliant P,Q et R dans H

L'angle entre deux arcs de cercles est l'angle entre les plans sous jacents :

Supposons que :

- l'aire de triangle varie continuement
- l'aire est invariente par rotation $\quad \mathrm{Aire}(\mathrm{R}_\alpha(\mathrm{X})) = \mathrm{Aire}(\mathrm{X})$
- $\mathrm{Aire}(\mathrm{S}^2) = 4\pi$

Théoreme : - Soit $\triangle$ sphérique d'angles α, β, γ Alors $\mathrm{Aire}(\triangle) = \alpha + \beta + \gamma - \pi$

Remarque : - E, particulier $\alpha + \beta + \gamma$ d'un sphérique est toujours π car $\mathrm{Aire}(\triangle) > 0$

Preuve : - On considère des lunes pour $0 \leq \alpha \leq 2\pi$

<u>Aff</u> l'aire de $(\mathrm{L}_\alpha) = 2\alpha$

Preuve de l'affirmation : - 1er cas : $\alpha = \dfrac{2\pi}{\mathrm{q}}$ $\mathrm{q} \in \mathbb{N}$

On recouvre S^2 de q lunes L_α $\quad 4\pi = \mathrm{Aire}(\mathrm{S}^2) = \mathrm{q}(\mathrm{Aire}(\mathrm{L}_\alpha) \Rightarrow \mathrm{Aire}(\mathrm{L}_\alpha) = 2\dfrac{2\pi}{\mathrm{q}} = 2\alpha$

$\Rightarrow \mathrm{Aire}(\mathrm{L}_\alpha) = \mathrm{p}\, \underbrace{\mathrm{Aire}(\mathrm{L}_{\frac{\alpha}{\mathrm{p}}})}_{2\alpha/\mathrm{p}}$ 1er cas

<u>cas général</u> Continuité et densité de Q dans $\mathbb{R}$ $\quad \square$ Aff

$2\pi = \mathrm{Aire}(\text{hemisphere nord}) = \mathrm{Aire}(\mathrm{L}_\alpha) + \mathrm{Aire}(\mathrm{L}_\beta) + \mathrm{Aire}(\mathrm{L}_\gamma) - 2\mathrm{Aire}(\triangle)$

$\Leftrightarrow 2\pi = 2\alpha + 2\beta + 2\gamma - 2\mathrm{aire}(\triangle)$ $\quad \square$ th

Corolaire : - Pour $\mathrm{F} \subset \mathrm{S}^2$ un n-gone sphérique d'angles $\alpha_1, ..., \alpha_n$ alors :

$$\mathrm{Aire}(\mathrm{F}) = \alpha + ... + \alpha_n - (n-2)\pi$$

Conséquence (du th(du cor))

Formule d'euler : - $\mathrm{P} \subset \mathbb{R}^3$ un polyèdre convexe avec :

v sommet
e arrete
f faces

Alors : v-e+f=2

Preuve : - Supposons que o$\in$ intérieur de P On projette P sur S^2

meme nombre de sommet d'arrete et de faces

Soient $F_1, ..., F_f$ les faces de la projection F_i est un n-gone

$S^2 = \bigsqcup_{i=1}^{f} F_i$:

$$4\pi = \text{Aire}(S^2) = \sum_{i=1}^{f} \text{Aire}(F_i) = \sum_{i=1}^{f}(\text{somme des angles de } F_i \ - (n_i - 2)\pi)$$

$$= \sum_{i=1}^{f} \sum \text{ angles de } F_i) - \sum_{i=1}^{f} h_i\pi + f \cdot 2\pi$$

4.2 Projection stéréograophique et inversion :

$S^2 \subset \mathbb{R}^3$ On identifie $\mathbb{R}^2$ a : $\{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y \in .\mathbb{R}\}$

<u>la projection stéréographique</u> $\varphi_n = \varphi : S^2 \backslash \{N\} \to \mathbb{R}^2$ est definie par la projection a partir de N sur $\mathbb{R}^2$ Plus précisement $P \in S^2$ est envoye sur l'intersectionn de la droite d par P et N avec $\mathbb{R}^2$

<u>Immédiat</u> P$\in$ l'équatezur : $\varphi(P) = P$

φ(l'hémisphere nord) = exterieur du disque de rayon 1 dans $\mathbb{R}^2$

φ(hémisphere sud)=intérieur du disuqe de rayon 1 dans $\mathbb{R}^2$

<u>explicitement</u> P= $(x, y, z) \in S^2$ donc $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

Droite par P et N : $d = \{\underbrace{(1 - t)N + tP}_{(tx,ty,tz+1-t} \Rightarrow \text{point } \in \mathbb{R}^2$

tz+1-t $= 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{1}{1 - z}$

Donc : $\begin{aligned} \varphi \quad &: S^2 \backslash \{N\} \to \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\to \left(\frac{1}{1 - z}, \frac{y}{1 - z}\right) \end{aligned}$

Sonn inverse se calcul explicitement :

$$\text{Soit} \quad (u, v) = (u, v, 0) \in \mathbb{R}^2$$

On cherche l'intersection entre S^2 et la droite par $(u, v, 0)$ et N=(0,0,1) :

$$d = \{(1 - t)(0, 0, 1) + r(u, v, 0) \mid t \in \mathbb{R}^2\}$$

$S^2 \ni (tu, tv, 1 - t)$

$\Leftrightarrow \underbrace{(tu)^2 + (tv)^2 + (1 - t)^2}_{t^2(u^2+v^2+1)-2t+1} = 1$

$\Leftrightarrow t(t(u^2 + v^2 + 1) - 2) = 0$

Pour t=0 on retrouve le pole nord :

Si $t \neq 0 \quad t(y^2+v^2+1) = 2$; $\Leftrightarrow t = \dfrac{2}{u^2 + v^2 + 1}$ On a : $1-t = 1-\dfrac{2}{u^2 + v^2 + 1} = \dfrac{u^2 + v^2 + 1 - 2}{u^2 + v^2 + 1} = \dfrac{u^2 + v^2 - 1}{u^2 + v^2 + 1}$

Don c$\varphi^{-1} : \mathbb{R}^2 \to S^2 \backslash \{N\}$

$(u, v) \to \left(\dfrac{2u}{u^2 + v^2 + 1}, \dfrac{2v}{u^2 + v^2 + 1}, \dfrac{u^2 + v^2 - 1}{u^2 + v^2 + 1}\right)$

Propriété remarquable : -
La prjection stéréographiqe envvoie des cercles de S^2 sur des droites ou des cercles de $\mathbb{R}^2$

Théoreme 2 : - φ(cercle passant par N) = droite de $\mathbb{R}^2$
Et φ^{-1} (droite de $\mathbb{R}^2$) = cercle passant par N

Preuve : -

Un cercle dans S^2 est $\pi \cap \mathrm{S}^2$ ou π est un plan de $\mathbb{R}^3$ intersectqnt S^2 en plus qu'un point. On suppose que N$\in \pi \cap \mathrm{S}^2$ donc N$\in \pi$

La droite d entreN et P est inclue dans π puisque P et N $\in \pi$

$$\varphi(\mathrm{P}) = \mathrm{d} \cap \mathbb{R}^2 \subset \pi \cap \mathbb{R}^2$$

<u>Inversement</u> soit $\mathrm{l} \subset \mathbb{R}^2$ une droite

Soit π la plan contenant l et N
soit $\mathrm{Q} \in \mathrm{l}$, $\underbrace{\varphi^{-1}(\mathrm{S})}_{\textit{droite par Q et N}} \subset \underbrace{\pi \cap \mathrm{S}^2}_{\textit{cercle de } \mathrm{S}^2 \textit{ passant par N}}$

Les deux inclusion $\varphi(\pi \cap \mathrm{S}^2) \subset$ droite $\pi \cap \mathbb{R}^2$ et $\varphi^{-1}(\mathrm{l}) \subset \pi \cap \mathrm{S}^2$ demonstration du Lemme

Théoreme : - φ(carcle ne passant pas par N) = cercle de $\mathbb{R}^2$ et φ^{-1}(cercle de $\mathbb{R}^2$) =cercle ne passant pas par N

Preuve : - Soit $\pi \subset \mathbb{R}^3$ un plan tq : $\pi \cap \mathrm{S}^2$ est un cercle (x,y,z)$\in \pi \cap \mathrm{S}^2 \Leftrightarrow$:

$$\mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2 + \mathrm{z}^2 = 1; \quad \text{(i) } \mathrm{ax} + \mathrm{by} + \mathrm{cz} + \mathrm{d} = 0$$

On suppose que N$\notin \pi \cap \mathrm{S}^2$ donc en particulier c+d$\neq 0$

N$\neq (\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}) \in \pi \cap \mathrm{S}^2$

$$\varphi^{-1}(\mathrm{u}, \mathrm{v}) = \left(\frac{2\mathrm{u}}{\mathrm{u}^2 + \mathrm{v}^2 + 1}, \frac{2\mathrm{v}}{\mathrm{u}^2 + \mathrm{v}^2 + 1}, \frac{\mathrm{u}^2 + \mathrm{v}^2 - 1}{\mathrm{u}^2 + \mathrm{v}^2 + 1} \right)$$

L'equation (1) devient :

$$\mathrm{a}\frac{2\mathrm{u}}{\mathrm{u}^2 + \mathrm{v}^2 + 1} + \mathrm{b}\frac{2\mathrm{v}}{\mathrm{u}^2 + \mathrm{v}^2 + 1} + \mathrm{c}\frac{\mathrm{u}^2 + \mathrm{v}^2 - 1}{\mathrm{u}^2 + \mathrm{v}^2 + 1} + \mathrm{d} = 0$$

2au+2bv+c$(\mathrm{u}^2 + \mathrm{v}^2 - 1) + \mathrm{d}(\mathrm{u}^2 + \mathrm{v}^2 + 1) = 0$

$\Leftrightarrow \mathrm{u}^2(\mathrm{c} + \mathrm{D}) - +2\mathrm{au} + \mathrm{v}^2(\mathrm{c} + \mathrm{D}) + 2\mathrm{bv} + \mathrm{d} - \mathrm{c} = 0$

$\Leftrightarrow \underbrace{\mathrm{u}^2 + 2\mathrm{u}\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{c} + \mathrm{d}}} + \mathrm{v}^2 + 2\mathrm{v}\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{c} + \mathrm{d}} + \frac{\mathrm{d} - \mathrm{c}}{\mathrm{d} + \mathrm{c}} = 0$

$\Leftrightarrow \left(\mathrm{u} + \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{c} + \mathrm{d}}\right)^2 + \left(\mathrm{v} + \frac{\mathrm{b}}{\mathrm{c}+\mathrm{d}}\right)^2 = \frac{\mathrm{a}^2+\mathrm{b}^2}{(\mathrm{c}+\mathrm{d})^2} + \frac{\mathrm{c}-\mathrm{d}}{\mathrm{c}+\mathrm{d}}$

c'est l'équation d'un cercle de centre $\left(\frac{-\mathrm{a}}{\mathrm{c} + \mathrm{d}}, \frac{-\mathrm{b}}{\mathrm{c} + \mathrm{d}}\right)$ et rayon $\sqrt{\mathrm{ojvhef}}$

$*$ pour autant que : $\frac{\mathrm{a}^2 + \mathrm{b}^2}{(\mathrm{c} + \mathrm{d})^2} + \frac{\mathrm{c} - \mathrm{d}}{\mathrm{c} + \mathrm{d}} > 0 \qquad = \frac{\mathrm{a}^2 + \mathrm{b}^2 + \mathrm{c}^2 - \mathrm{d}^2}{(\mathrm{c} + \mathrm{d})^2} \qquad \Leftrightarrow \mathrm{a}^2 + \mathrm{b}^2 + \mathrm{c}^2 - \mathrm{d}^2 > 0$

il faaut encore utiliser la fait que $\pi \cap \mathrm{S}^2$ est un cercle

Srlg on peut supposer que n=(a,b,c) le vecteur normal au plan π est de norme 1 cad n$\in \mathrm{S}^2$ a^2+b^2+c^2 =

1 (x,y,z)

$\forall P \in \pi \quad < P, n >= ax + by + cz = -d$

$\lambda n \in \pi \quad < \lambda n, n >= \lambda < n, n >= \lambda = -d$

$\pi \cap S^2$ est un cercle $\Leftrightarrow$ -1< $\lambda = -d < 1 \Rightarrow d^2 < 1$

Pour montrer que φ^{-1}(cercle $\mathbb{R}^2$) = cercle de S^2 ne passant pas par N. Il suffit de voir que tout cercle de $\mathbb{R}^2$ est décrit par une equation de la forme $\triangle$

$$C = \{(u, v) \mid (u - a_0)^2 + (v - b_0)^2 = (r_0)^2\}$$

On cherche a,b,c,d On va supposer que c+d=1

$\rightarrow$ a=$-a_0$ b=$-b_0$ et on résoud pour c,d a partir de $\begin{cases} r_0^2 = a_0^2 + b_0^2 + c - d \\ c + d = 1 \end{cases}$ $\square$

Théoreme : - (sans preuve)
La projection stéréographique préserve les angles

<u>inversion</u> Une reflexion $\sigma_l : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ par rapport a une droite l satisfait :

i) $\sigma_l(P) = P \quad \forall P \in l$

ii) σ_l échange les coté de l

iii) les cercles et droites $\perp$ a l sont laissé globalement invariantpar σ_l

On cherche l'analogue pour une reflexion par rapport a un cercle

Rappel : - Euclide III.36

AP·A′P′ ne dépend pqu du crcle et de A éxtérieur au cercle mais pas de la droite

Proposition : - Soit C un cercle de centre O_c dans $\mathbb{R}^2$:
Il existe une unique application $\iota_C : \mathbb{R}^2 \setminus \{O_C\} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{O_C\}$ telle que :

i) $\iota_C(P) = P \quad \forall P \in C$

ii) ι_C échange l'intérieur et l'exteirueur du cercle C

iii) Les cerlces et droites $\perp$ a C sont laissé globalement invariants par ι_C

Terminologie : - ι_C est l'inversion par rapport au cercle C

Preuve : - Unicité et construction de ι_C

- Si $P \in C$, on pose $\iota_C(P) = P$
- Si P est a l'interieur

Donc $\iota_C(P) \in d \cap C' = \{P, P'\}$ Mais puisque $\iota_C(P) \in$ exterieur de C (par ii)) on est obligvé de poser $\iota_C(P) := P'$

• Si P est a l'exterieur identique

ι_C est bien définie cad indépandant du choix de C'

III.36 : $O_C P \cdot P_C \cdot P' = (\underbrace{O_C T}_{r:=\text{rayon de C}})^2$ Donc $O_C P' = \dfrac{r^2}{O_C P}$ ne dépend pas de C'

Donc P' est l'unique point sur le rayon par P de O_C a distance $\dfrac{r^2}{O_C P}$ deO_C

<u>Le staisfait les propriétés i), ii), iii)</u> : i) et ii) derivé par construction

Propriété : -

1) $\iota_C \circ \iota_C = \mathrm{id}$

2) Exo Si C et C' sont concentrique (cad il ont le meme centre)

   alors : $\iota_C \circ \iota_C = \text{homotétie de rapport } \left(\frac{r'}{r}\right)^2$

3) On identifie $\begin{cases} \mathbb{R}^2 & = \mathbb{C} \\ (x,y) & \leftrightarrow x+iy \end{cases}$

   C=S' le cerlce unité $\{z \in \mathbb{C} \mid |Z| = 1\}$ Expression pour $\iota_{S'} : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \{0\}$

   $\iota_S \cdot (s) \in \lambda z$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ Pour $z=re^{i\theta}$ $\iota_{S'}(z) = \lambda re^{i\theta}$

   $\underbrace{|z|}_{r} \cdot \underbrace{|\iota_{S'}(z)|}_{\lambda r} = \textit{rayon du cercle } = 1$

   $\Rightarrow \lambda = \frac{1}{r^2}\ \iota_{S'}(z) = \frac{1}{r^2}re^{i\theta} = \frac{1}{r} \cdot e^{i\theta} = \frac{1}{z}$

   Donc $\iota_{S'}(z) = \frac{1}{\overline{z}}$

4) Si $C \subset \mathbb{C}$ cercle arbitraire centre a rayon r

   Exo : $\iota_{C'}(s) = \frac{r^2}{\overline{z}-\overline{a}} + a$

   idée : $\iota_C = T_a \circ H_r \circ \iota_{S'} \circ H_{\overline{r}} \circ T_{-a}$

5) $\mathbb{R}^2\backslash\{0\} \overset{\varphi_s^{-1}}{\to} S^2\backslash\{S_1, N\} \overset{\varphi_N}{\to} \mathbb{R}\backslash\{0\}$

Proposition : - L'inversion $\iota_C : \mathbb{R}^2\backslash\{O_C\} \to \mathbb{R}^2\{O_C\}$ envoie

1) Les droites passant par O_C sur des droites passant par O_C (en fait sur elle meme)
2) Les cercles âssatn par O_C sur des droites ne passant par O_C
3) les droites ne passant pas par O_C suur des cercles passant par O_C
4) Les cercles ne passant pas par O_C sur des cercles ne passants pas par O_C

<u>Idée</u> $\hat{\mathbb{C}} \cup \{+\infty\}$

On étend ι_C à $\hat{\mathbb{C}}$ en posant : $\begin{array}{l} \iota_C(O_C) = +\infty \\ \iota_C(+\infty) = O_C \end{array}$

On pense aux droites comme à des cercles par $+\infty$

Les cercles dans $\hat{\mathbb{C}}$ son soit des vrais cercle de $\mathbb{C}$ soit des droites

DE même la projection stéréographique s'étend à S^2 en posant $\varphi_N(N) = +\infty$

En fait $\hat{X}$ et un sphère S^2

Preuve de la proposition : -

On peut sans restreindre la généralité supposer que $C = S'$

Posons : $\iota := \iota_{S'}$ On a $\iota = \varphi_N \circ (\varphi_N)^{-1}$

1) $\iota(\text{droite par } 0) = \varphi_N(\underbrace{\varphi_S^{-1}(\text{droite par } 0))}_{\text{cercle passant par S (Lemme 1)}}$ $\quad \underbrace{\text{Il passe par } N = \varphi_N^{-1}(0)}_{\substack{\text{droite par le lemme 1} \\ \text{qui passe par } 0=\varphi_N(S)}}$

2) $\varphi_N \underbrace{(\varphi_S)^{-1}(\text{cercle passant par } 0)}_{\text{cercle ne passant pas par S(Th 2)}}$ $\quad \underbrace{\text{Ce cerlce passe pas } N\varphi_S^{-1}(0)}_{\text{droite par le lemme 1}}$ ne passe pas par $0=\varphi_N(S)$

3) $\underbrace{\varphi_N \underbrace{\varphi_S^{-1}(\text{droite ne passant pas par } 0)}_{\substack{\text{cercle par S (lemme 1)} \\ \text{ne passe pas par } N=\varphi_S^{-1}(0)}}}_{\substack{\text{cercle (par Thm2)} \\ \text{qui passe par } 0=\varphi_N(S)}}$

4) $\underbrace{\varphi_N \underbrace{\varphi_S^{-1}(\text{cercle ne passant pas par } 0)}_{\substack{\text{cercle qui ne passe pas par S (Thm2)} \\ \text{qui ne passe pas par } N=\varphi_S^{-1}(0)}}}_{\substack{\text{cercle par (Thm2)} \\ \text{ne passant pas par } 0=\varphi_N(S)}}$ $\square$

Théoreme : - Les inversions renversent les angles orienté

<u>Idée</u> L'angle entre deux courbes de $\mathbb{R}^2$ est l'angle entre les vecteurs tangent

Pour f :$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la dérivée en $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ $\quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{pmatrix}$ est donné par

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x_0,y_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x_0,y_0) \end{pmatrix}$$

Elle préserve les angles si c'est une composition de rotation et homotétie cad $=\begin{pmatrix} \lambda a & -- \lambda b \\ \lambda b & \lambda a \end{pmatrix}$

$\lambda > 0 \quad a^2 + b^2 = 1$

il suffit de montrer le théoreme pour le cercle unité

$$\iota(z) = \frac{1}{z} \quad \textit{composition de} \quad \underbrace{z \quad \to \quad \overline{z}}_{\text{enverse les angles}} \quad \text{et} \quad \underbrace{z \quad \to \quad \frac{1}{z}}_{\text{preserve les angle}} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \to & \begin{pmatrix} \frac{x}{x^2+x^2} \\ \frac{-y}{x^2+y^2} \end{pmatrix} \end{array}$$ *et on calcul la dérivée explicitement* $\square$

Application : Le prisme de Steiner : -

Soient C_1, C_2 deux cercles avec C_2 à l'intérieur de C_1

Soit Γ_1 un cercle tangent a C_1 et C_2

Soit Γ_2 un cercle tangent a C_1 et Γ_1

On continue inductivement :

$$\Gamma_i := \textit{ cercle tangent à } C_1, C_2 \text{ et } \Gamma_{i-1} \quad \Gamma_i \neq \Gamma_{i-2}$$

Soit n$\in$ N $\cup \{+\infty\}$ le + petit entier tq $\Gamma_1 = \Gamma_n$

<u>Affirmation</u> Ce n est indépandent des choix de Γ_1 et Γ_2 il ne déoend pas que C_1 et C_2

Preuve : - Un cas évident : Si C_1 et C_2 sont concentrique

Dans le cas général on veut trouver une inversion tq $\iota(C_1)$ et $\iota(C_2)$ sont concentrique. Puisque l'inversion préserve les cercles et les angles, l'affirmation découle du cas évident ci-dessus

<u>Affirmation</u> $\exists$ cercle $\perp$ à C_1 C_2 et à la droite O_1 etO_2

Modulo l'affirmation : Soit P un des points d'intersections de C avec la droites d

Soit C' un cercle arbitraire de centre P Soit $\iota := \iota_{C'}$

C droite ne passant pas par le centre P
C_1, C_2 cercle ne passant pas par P
$C_i \perp d$ $\iota(C_i) \perp d$
$C_i \perp C$ $\qquad \underbrace{\iota(C_i) \perp \iota(C)}_{\text{le centrede } \iota(C_i) \text{ est } d \cap \iota(C)} \qquad = \text{droite} \perp \iota(d) = d$

Il ne reste plus qu'a montrer l'aff' :

On peut supposer que $O_1 = 0$ et que d est la droite de coordonnées x (horizontal)

On cherche x réel tq $|xT| = |xT'|$ pour T,T' les points de tangence

Dans le cas C=cercle centré en x de rayon $|xT|$ (1)
$|xT'|^2 = (x - a + r')(x - a - r')$ (2)

On cherche x tq : $|xT|^2 = (x - r)(x + r) = |xT'|^2$

$$\Leftrightarrow x = \frac{a^2 + r^2 - (r')^2}{2a}$$

(1) n'a un sens que si $x > r$ et (2) si $x > a + r'$
<u>A vérifier</u> $a^2 + r^2 - (r')^2 > 2ar \Leftrightarrow (a - r)^2 > (r')^2 \Leftrightarrow r - a > r'$ ok

5 Chapitre V : Géométrie Hyperbolique

5.1 Transformation de Mobius

$\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{+\infty\}$

Cercle de $\hat{\mathbb{C}}$ c'est soit un cercle de $\mathbb{C}$ soit une droite ($\Leftrightarrow$ cercle par $+\infty$)

Inversion de $\hat{\mathbb{C}}$ c'est soit un inversion $\iota_{\mathrm{C}}, \mathrm{C} \subset \mathbb{C}$ soit une réfléxion σ_{l} l une droite

Définition : - $\text{Möb}(2) = \{\mathrm{f} : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}} \mid \mathrm{f} = \iota_{\mathrm{k}} \circ \ldots \circ \mathrm{C}_1$ *ou* $\mathrm{c_k}$ *sont des inversion*$\}$

$\text{Möb}^+(2) = \{\mathrm{f} : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}} \quad \mathrm{f} = \iota_{\mathrm{k}} \circ \ldots \circ \mathrm{C}_1$ *ou k est pair*$\}$ *Les éléments de Möb (2) sont appelées transformation de Möbius, et Möb*$^+$*(2) est le groupe de Möbius*

Pour $\mathrm{A} \in \mathrm{GL}_2\mathbb{C}$ on définit

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \varphi_1 & \hat{\mathbb{C}} & \to \hat{\mathbb{C}} \\ & z & \to \dfrac{az+b}{cz+d} \end{matrix} \qquad \textit{ou on comprend que : } \frac{1}{0} = +\infty; \quad \frac{+\infty}{1} = +\infty; \quad \frac{\infty}{\infty} = 1$$

<u>par ex</u> $\quad \varphi_{\mathrm{A}}(+\infty) = \dfrac{a\infty + b}{c\infty d} = \dfrac{a}{c}; \quad$ si $z = \dfrac{-d}{c}$ alors $\varphi_{\mathrm{A}}(z) = +\infty$

Exemple : -

0) $\mathrm{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \varphi_{\mathrm{id}}(z) = \dfrac{1 \cdot z + 0}{0 \cdot z + 1} = z$

1) $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \varphi_{\mathrm{A}}(z) = z + b$ *translation par b*

2) $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \quad \varphi_1(z) = \dfrac{a}{d} \cdot z$ *composition d'un homéotétie facteur r et d'une rotation de C*

3) $\mathrm{A}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \varphi_{\mathrm{A}}(z) = \dfrac{0 \cdot z + 1}{1 \cdot z + 0} = \dfrac{1}{z}$

4) Si $\lambda \in \mathbb{C} \neq 0 \quad \Longrightarrow \varphi_{\lambda\mathrm{A}} = \varphi_{\mathrm{A}}$

Théoreme : - L'application

$$\varphi : \begin{matrix} \mathrm{SL}_2\mathbb{C} & \to \text{Möb}^+(2) \\ \mathrm{A} & \to \varphi_{\mathrm{A}} \end{matrix} \qquad \textit{définit un homomorphisme surjectif de noyau : - } \{\pm \mathrm{id}\}$$

Remarque : -

1) Puisque $\text{Möb}^+(2) \subset \mathrm{B_{ij}}(\hat{\mathbb{C}})$ cet homomorhpisme définit una action de $\mathrm{SL}_2\mathbb{C}$ sur $\hat{\mathbb{C}}$

2) en particulier $\text{Möb}^+(2) \cong \mathrm{SL}_2\mathrm{C}/\{\mathrm{id}\}$ ($:= \mathrm{PSL}_2\mathbb{C}$)

Lemme 1 : - Toute matrice de $\mathrm{GL}_2\mathbb{C}$ est produit de matrice de la fomre :

$$\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Preuve : -

1) vrai pour les matrices de la forme :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}}_{\det = a \cdot b \neq 0 \Rightarrow a \neq 0} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & b/a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2) vrai pour les matrices de la formes

$$\begin{pmatrix} 0 & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} c & d \\ 0 & b \end{pmatrix}}_{\text{cas (1)}}$$

3) cas général :

$$c \neq 0 \text{ sinon cas (1)} \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} b - \frac{da}{c} & \frac{a}{c} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{cas (1)}} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c & d \end{pmatrix}}_{\text{cas (2)}} \quad \square$$

Lemme 2 : - Pour tout cercle $\hat{\mathbb{C}}$ l'inversion $\iota_C \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ est de la forme : $z \to \dfrac{a\overline{z} + b}{c\overline{z} + d}$, pour $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2\mathbb{C}$

De plus $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2\mathbb{R} \iff$ C est orthogonal à la droite réelle $\mathbb{R} \subset \hat{\mathbb{C}}$

Preuve : -

• Soit C un cercle de centre a, rayon r exo : $\iota_C(z) = \dfrac{r^2}{\overline{z} - \overline{a}} + a = \dfrac{r^2 + a(\overline{z} - \overline{a})}{\overline{z} - \overline{a}}$

$$\begin{pmatrix} a & r^2 - |a|^2 \\ 1 & -\overline{a} \end{pmatrix} \qquad \frac{a \cdot \overline{z} + (r^2 - |a|^2}{\overline{z} - \overline{a}}$$

$C \perp\mathbb{R} \iff a \in \mathbb{R} \iff \begin{pmatrix} a & r^2 - |a|^2 \\ 1 & -\overline{a} \end{pmatrix} \in GL_2\mathbb{R}$ (droite $\perp$ cercle $\Leftrightarrow$ droite $\exists$ centre du cercle)

• Si le cercle de $\hat{\mathbb{C}}$ est un droite d :

d= $\{v + \lambda w \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$

$\sigma_d(z) = \{z \to z - v \to w^{-1}(z - v) \to \overline{w^{-1}(z - v)} \to w\overline{w^{-1}(z - v)} \to w\overline{w^{-1}(z - v)} + v = w^2\overline{z} - w^2\overline{v} + v\}$

$\rightsquigarrow$ matrice $\begin{pmatrix} w^2. & -(w^2 - 1)v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL_2\mathbb{C}$

$\sigma_d \rightsquigarrow \begin{pmatrix} w^2 & -w^2\overline{v} + v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $d\perp\mathbb{R} \iff w\perp\mathbb{R} \iff w \in i\mathbb{R} + |w| = 1 \implies w = \pm i$

En résumé : $d\perp\mathbb{R} \iff w = \pm i \iff w^2 = -1 \iff$ matrice a la forme :

$$\begin{pmatrix} -1 & \overline{v} + v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL_2\mathbb{R} \qquad \square$$

Preuve du Théoreme : - • A=$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $A^{-1} = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \in GL_2\mathbb{C}$

$$\varphi_A \circ \varphi_{A'}(z) = \varphi_A \left(\frac{a'z + b'}{c'z + d'}\right)$$

$$= \frac{a\left(\frac{a'z+b'}{c'z+d'}\right) + b}{c\left(\frac{a'z+b'}{c'z+d'}\right) + d} = \frac{a(a'z + b') + b(c'z + d')}{c(a'z + b') + d(c'z + d')} = \frac{(aa' + bc')z + (ab' + bd')}{(ca' + dc')z + (cb' + dd')}$$

$= \varphi_{AA'}(z)$ $\qquad AA' = \begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & cb' + dd' \end{pmatrix}$

En particulier : $\varphi_A \circ \varphi_{A^{-1}} = id = \varphi_{A^{-1}} \circ \varphi_A$

Donc $\varphi_A : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ est bijective et $A \to \varphi_A$ définit un homomorphisme de$GL_2\mathbb{C} \to B_{ij}\ (\hat{\mathbb{C}})$

• Ker $\varphi\{\pm id\}$

$\boxed{\supset}$ $\varphi_{-id} = \varphi_{id} = id \qquad (\varphi_{\lambda A} = \varphi_A\ \lambda \neq 0)$

$\boxed{\subset}$ Si $A \in Ker\varphi_A$:

$$\varphi_A = id \iff \qquad z = \varphi_A(z) = \frac{az+b}{cz+d} \qquad \forall z \in \hat{\mathbb{C}}$$

$\iff cz^2 + (d-a)z - b = 0 \quad \forall z \in \hat{\mathbb{C}}$

$\deg f \leq 2 \implies$ *f a au plus 2 racines.*Ici $\forall z \in \mathbb{C}$ est racines

$\Rightarrow$ coeff sont nul $c = 0; \quad d - a = 0; \quad b = 0 \qquad A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \in SL_2\mathbb{C}$

$\det A = a^2 = 1 \implies a = \pm 1$

$Im\varphi = Möb^+(2) = \varphi(SL_2\mathbb{C}) = \varphi(GL_2\mathbb{C})$

$\boxed{\subset}$ car $SL_2\mathbb{C} < GL_2\mathbb{C}$

$\boxed{\supset}$ $A \in GL_2\mathbb{C} \Rightarrow \exists\lambda \in \mathbb{C}^*$ tq $\det\lambda A = 1 = \det\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\det A = \lambda^2 \det A$

$\lambda A \in SL_2\mathbb{C} \qquad \varphi_A = \varphi_{\lambda A} \in \varphi(SL_2\mathbb{C})$ Prendre λ tq $\lambda^2 = \dfrac{1}{\det A}$

$\varphi(GL_2\mathbb{C}) \subset Möb^+(2)$

il faut voir que $\forall A \in GL_2\mathbb{C}\ \varphi_A$ *est un composition d'un nombre pair d'inversion :*

<u>Lemme 1</u> $\implies$ *il suffit de le voir pour* $\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(1)$\varphi_A \to z \to z + b$ *translation par b est coup de deux réfléxion par droites*

(2) $\varphi\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}(z) = \dfrac{a}{d}z$

(3) *composition de* $\iota_{S'}$ *et réflexion par la droite* $\mathbb{R}$

$$\underbrace{H_r}_{\text{homotétie de facteur } r} \circ \underbrace{Rot_\varphi}_{\text{rot d'angle } \varphi}(z) \implies \textit{composition de deux inversion}$$

Composition de 2 réflexion par des droites X

$\varphi(GL_2\mathbb{C}) \supset Möb^+(2)$

Par le Lemme 2 toute inversion a la fomre $\quad z \to \dfrac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$ avec $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2\mathbb{C}$

Donc une composition de deux inversions à la forme :

$$z \to \frac{a'\bar{z}+b'}{c'\bar{z}+d'} \to \frac{a\left(\frac{a'\bar{z}+b'}{c'\bar{z}+d'}\right)+b}{c\overline{\left(\frac{a'\bar{z}+b'}{c'\bar{z}+d'}\right)}+d} = .. = \varphi_{A\overline{A}'}\ (z)$$

Donc une compostion de 2 inversion $\in \varphi(GL_2\mathbb{C})$ et donc toute composition d'un nombre pair d'inversion aussi $\square$

5.2 Birapport

Définition : - Soient $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \hat{\mathbb{C}}$ tq $z_1 \neq z_4, z_2 \neq z_3$

Leur birapport est le nombre complexe :

$$[z_1, z_2, z_3, z_4] := \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4} \cdot \frac{z_2 - z_4}{z_2 - z_3} \in \mathbb{C} \cup +\infty$$

Remarque : -

1) d'après nos conventions $\left(\frac{+\infty}{\infty} = 1\right)$

   $[+\infty, z_2, z_3, z_4] = \frac{+\infty}{+\infty} = 1$

   De meme pour z_2, z_3 ou $z_4 = \infty$

2) $[z_1, z_1, z_3, z_4] = 1 = [z_1, z_2, z_3, z_3]$

3) $[z_1, z_2, z_3, z_4] = [z_2, z_1, z_4, z_3]$

Théoreme : - $\forall z_1, z_2, z_3, z_4 \in \hat{C}$ avec $z_1 \neq z_4,\ z_2 \neq z_3$

1) $\forall \varphi \in$Möb$^+(2)$ $\quad [\varphi(z_1), \varphi(z_2), \varphi(z_3), \varphi(z_4)] = [z_1, z_2, z_3, z_4]$

2) $\forall \varphi \in$Möb$(2) \setminus$ Möb$^+(2)$ $\quad [\varphi(z_1), \varphi(z_2), \varphi(z_3), \varphi(z_4)] = \overline{[z_1, z_2, z_3, z_4]}$

Preuve : -

1) *On a vu que tout* $\varphi \in$Möb$^+(2)$ est dde la forme $\varphi(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ avec $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2\mathbb{C}$ est produit de matrices de la forme :

$$\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Puisuqe A$\rightarrow \varphi_A$ est un homom, il suffit de démontrer 1) pour les matrices ci-dessus :

$A = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$: $\quad \varphi_A(z) = z + b$

$$\begin{aligned}
&[\varphi(z_1), \varphi(z_2), \varphi(z_3), \varphi(z_4)] \\
&= [z_1 + b, z_2 + b, z_3 + b, z_4 + b] \\
&= \frac{((z_1 + \cancel{b}) - (z_3 + \cancel{b}))}{((z_1 + \cancel{b}) - (z_4 + \cancel{b}))} \cdot \frac{((z_1 + \cancel{b}) - (z_4 + \cancel{b}))}{((z_2 + \cancel{b}) - (z_3 + \cancel{b}))} = [z_1, ..., z_4]
\end{aligned}$$

$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$ $\quad \varphi(z) = \frac{a}{d} \cdot z$

$[\varphi_A(z_1); \varphi_A(z_2), \varphi_A(z_3)\varphi_A(z_4)] \quad = \quad (wz_1, wz_2, wz_3, wz_4] \quad = \quad \frac{\cancel{w}z_1\cancel{w}z_3}{\cancel{w}z_1 - \cancel{w}z_4} \cdot \frac{\cancel{w}z_2 - \cancel{w}z_4}{\cancel{w}z_2 - \cancel{w}z_3}$
$[z_1, z_2, z_3, z_4]$

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad \varphi(z) = \frac{1}{z}$

$$\begin{aligned}
[\varphi_A(z_1), \varphi_A(z_2), \varphi_A(z_3), \varphi_A(z_4)] &= \left[\frac{1}{z_1}, \frac{1}{z_2}, \frac{1}{z_3}, \frac{1}{z_4}\right] \\
&= \frac{1/z_1 - 1/z_3}{1/z_1 - 1/z_4} \cdot \frac{1/z_2 - 1/z_4}{1/z_2 - 1/z_3} \\
&= \frac{(z_1z_3)(1/z_1 - 1/z_3)}{(z_2z_4)(1/z_1 - 1/z_4)} \cdot \frac{(z_2z_4)(1/z_2 - 1/z_4)}{(z_2z_3)(1/z_2 - 1/z_3)}
\end{aligned}$$

$= \frac{z_3 - z_1}{z_4 - z_1} \cdot \frac{z_4 - z_2}{z_3 - z_2} = [z_1, z_2, z_3, z_4]$ *ce qui montre 1) du Théoreme*

2) Si $\underbrace{\varphi}_{\text{nombre d'inversion}}$ $\in$ Mb$^+(2) \setminus$Mb$^+(2)$ alors $\iota \circ \varphi \in$ Mb$^+(2)$ $\forall$ inversion ι

Prenons $\iota =$ l'inversion (cad la reflexion) *par rapport a la droite réelle*
$\iota(z) = \overline{z}$

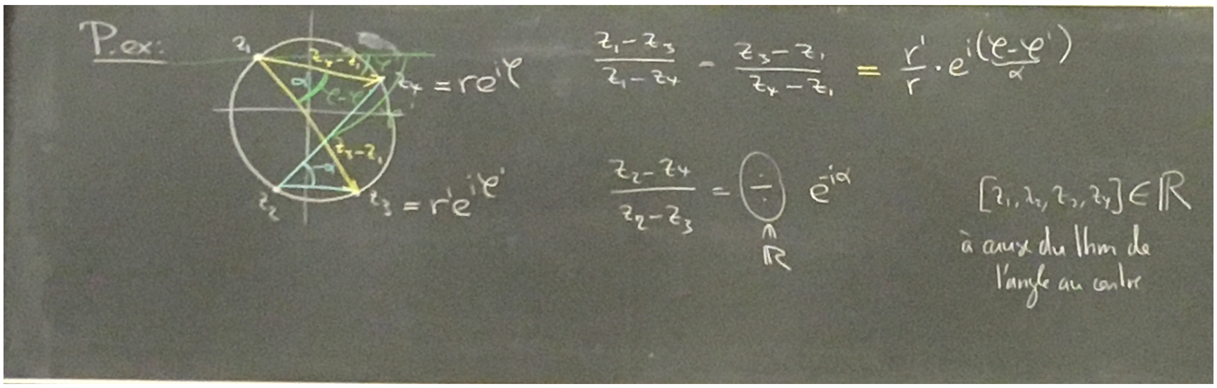
Par le point 1) (car $\iota \circ \varphi \in \mathrm{Mb}^+(2)$) :

$$[z_1, z_2, z_3, z_4] = [\iota \circ \varphi(z_1), \iota \circ \varphi(z_2)\iota \circ \varphi(z_3), \iota \circ \varphi(z_4)]$$

car $\iota(z) = \overline{z} = [\overline{\varphi(z_1)}, \overline{\varphi(z_2)\varphi(z_3)\varphi(z_4)}] \quad = \quad \overline{\varphi(z_1)\varphi(z_2)\varphi(z_3)\varphi(z_4)}$

Application : -

Proposition : - Quatre points distinct de $\hat{\mathbb{C}}$ sont sur un cercle si et seulement si leur birapport est réel



Lemme : - $\forall z_1 ... z_4 \in \hat{\mathbb{C}}$ distinct $\quad \exists \varphi \in \mathrm{Mb}^+(2)$ tq

$\varphi(z_1) = +\infty$

$\varphi(z_2) = 0$

$\varphi(z_3) = +1$

$\varphi(z_4) = [z_1 .. z_4]$

Preuve du Lemme : - Il faut trouver $A \in GL_2\mathbb{C}$ tq $\quad \varphi_A(z) = \dfrac{az + b}{cz + d}$

envoie z_1 sur $+\infty \quad \Leftrightarrow +\infty - \varphi_A(z_1) = \dfrac{az_1 + b}{cz_1 + d} = 0$

$\Leftrightarrow cz_1 + d = 0$

Envoie z_2 sur 0 $\quad \Leftrightarrow 0 = \varphi_A(z_2) \Leftrightarrow a \cdot z_2 + b = 0$

envoie z_3 sur $+1$

$$1 = \varphi_A(z_3) = \frac{az_3 + b}{cz_3 + d} \Leftrightarrow cz_3 + d = az_3 + b \Leftrightarrow (a - c)z_3 + (b - d) = 0$$

Posons A=$\begin{pmatrix} z_3 - z_1 & -z_2(z_3 - z_1) \\ z_3 - z_2 & -z_1(z_3 - z_2) \end{pmatrix}$

Clairement cette matrice staisfait :

$$cz_1 + d = 0 \quad az_2 + b = 0$$

$\underbrace{(a - c)}_{z_2 - z_1} \cdot z_3 + \underbrace{(b - d)}_{z_1 z_3 - z_2 z_3} = 0$

donc $\varphi_A(z_1) = +\infty \quad \varphi(z_2) = 0$ et $\varphi(z_3) = +1$

det A $= (z_3 - z_1)(-z_1)(z_3 - z_2) - (z_3 - z_2)(-z_2)(z_3 - z_1)$

$= (z_2 - z_1)(z_3 - z_1)(z_3 - z_2) \neq 0$ puisque $z_1..z_3$ *sont distinct dans colone*

$$\varphi_A(z_4) = \frac{(\overbrace{z_3 - z_1}^{a}) \cdot z_4 + (\overbrace{-z_2(z_3 - z_1)}^{b})}{(\underbrace{z_3 - z_2}_{c}) \cdot z_4 + (\underbrace{-z_1(z_3 - z_2)}_{d})} = \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} \cdot \frac{z_4 - z_2}{z_4 - z_1} = [z_1, z_4, z_3, z_4] \qquad \square$$

Preuve de la proposition : - $z_1, Z_2, z_3, z_4\hat{C}$; distinct $\in$ cerlce

Soit $\varphi \in \text{Mb}^+(2)$ tq $\varphi(z_1) = +\infty \quad \varphi(z_2) = 0 \quad \varphi(z_3) = 1 \quad \varphi(z_4) = [z_1, z_2, z_3, z_4] \in$ cerlce

Le seul cercle contenant $+\infty$ 0 et 1 est la droite réelle $\mathbb{R}$ donc $+\infty, 0, 1[z_1, z_2, z_3, z_4] \in$ cercle $\iff$ $[z_1, z_2, z_3, z_4] \in \mathbb{R} \quad \square$

5.3 Le disque de Poincarré

On pose D=$\{z \in \mathbb{C}|\ |z| < 1\}$ ce bord est $S' = \{z \in \mathbb{C}|\ \ |z| = 1\}$

On aimerait définir une fonction distance sur D

Soit $z_1, z_2 \in D\ \exists!$ *cercle* $\perp$ *S' est contenant* z_1 et z_2 Soient $z_1^\infty z_2^\infty$ les 2 points d'intersection

Définition : - La distance hyperbolique entre z_1 z_2 est définie par :

$$d_D(z_1, z_2) \quad = \quad -\log[\underbrace{z_1 z_2 z_1^\infty z_2^\infty}_{\in\mathbb{R}}] \qquad (\in \mathbb{R} \geq 0)$$

Remarque : -

1) Si $z_1 = z_2 \quad \nexists$ un unique cercle contient z_1 et z_2 et $\perp$ a S'

   Pour chacun de ces cercle on peut prouver

   - $[z_1, z_2, z_3, z_4] = \pm 1$ qui correspond a $d_D(z_1..z_4) = 0$

   Pour chaque deux cercle

2) Soient $z_1, z_2, z_3 \in$ cercle $\in D\perp aS'$

   $d_D(z_1...z_4) + d_D(z_1...z_3) =$

   $= -\log[z_1, z_2, u, v] - \log[z_2, z_3, u, v]$

   $-\log([z_1, z_2, u, v] \cdot [z_3, z_3, u, v])$

   $$= \text{-log}\left(\underbrace{\frac{z_1 - u}{z_1 - v} \cdot \frac{\cancel{z_2 - v}}{\cancel{z_2 - u}} \cdot \frac{\cancel{z_2 - u}}{z_3 - v} \cdot \frac{z_3 - v}{z_3 - u}}_{[z_1, z_3, u, v]}\right) = d_D(z_1, z_3)$$

$$d'_D z_1, z_2) = -\log[z_1, z_2, z_1^\infty, z_2^\infty]$$

$z_1, z_2 \in D$

Lemme : -

(i) Si $\varphi \in \text{Mob}(2)$ est composition d'inversion par des cercle $\perp$ a S' alors : $\varphi(D) = D$ et $d_D(\varphi(z_1), \varphi(z_2)) = d_D(z_1, z_2)$

(ii) $\forall z_1 \neq z_2 \in D\ \exists$ une inversion par un cercle $C \perp$ S' tq $\iota_C(z_1) = z_2 \quad \iota_C(z_2) = z_1$

Preuve : -

(i) Il suffit de montrer (i) pour $\varphi =$ un inversion ι_C par un cercle C $\perp S'$

Montrons d'abord que $\iota_C(D) = D$

$\iota_C(S')$ est un cercle othogonal a $\iota_C(C) = C$; $\implies$ C'est "S'" (puisque S' $\perp$C) passant C$\cap S'$

$\left.\begin{array}{l} \iota \textit{ est continu} \\ \iota_C(S') = S' \end{array}\right\} \implies$ D est ou bien envoyé sur l'intérieur de S' $\Leftrightarrow \iota_C(D) \subset D$ ou bien

L'éxtérieur d S' $\Leftrightarrow \iota_C(D) \subset \hat{\mathbb{C}} \backslash D$ *

Pour z$\in D \cap C$ on a $\iota_C(z) = z \in D$ ce qui exclut *

On a bien $\left.\begin{array}{l} \iota_C(D) \subset D \\ D = \iota_C\iota_C(D) \subset \iota_C(D) \end{array}\right\} \implies \iota_C(D) = D$

$$d_D(\iota_C(z_1), \iota_C(z_2)) = -\log([\iota_C(z_1), \iota_C(z_2), w_1, w_2]) = *$$

<u>Affirmation :</u> $w_1 = \iota_C(z_1^\infty)$ et $w_2 = \iota_C(z_2^\infty)$

<u>Preuve :</u> $\iota_C(C')$ est l'unique arc de cercle $\perp$ S' pasant par $\iota_C(z_1)$ et $\iota_C(z_2)$

$$z_i^\infty \in C' \cap S' \implies \iota_C(z_i^\infty) \in \iota_C(C') \cap S' = \{w_1, w_2\} \qquad \square$$

$* = -\log[\iota_C(z_1), \iota_C(z_2), \iota_C(z_1^\infty), \iota_C(z_2^\infty)] \quad = \quad -\log(\overline{[z_1, z_2, z_1^\infty, z_2^\infty]})$

car ι_C est une coup d'une inversion (impair)

$\in \mathbb{R}$ puisque $z_1, z_2, z_1^\infty, z_2^\infty \in$ cercle $\quad = \quad -\log([z_1, z_2, z_1^\infty, z_2^\infty)] = d_D(z_1, z_2) \qquad \square$(i)

(ii) Soient $z_1 \neq z_2 \in D$ A voir : $\exists$ cercle C $\perp$ S' tq $\iota_C(z_1) = z_2$

on remarque que $\iota_C(z_1)$et $\iota_C(z_2)$ sont du meme coté de $\iota_C(S')$ car z_1 et z_2 étaint les deux a l'intérieur de S'

On cherche la rayon r tq $d_1 \cdot d_2 = r^2$ $d_1 d_2 = r^2 \implies \iota_{C"}(\iota_C(z_1)) = \iota_C(z_2)$; $C \perp S'$ car C" $\perp \iota'_C(S')$ et $\iota_C(z_1) = z_2$ puisque $\iota_{C"}(\iota'_C(z_1)) = \iota'_C(z_2)$ $\square$ lemme

Conséquence : -

1) Le refléxion par des droite passatn pas 0$\in$ D preservent D
2) Les rotation centré en 0$\in$ D préservent d_D (car composition de 2 réfléxions)
3) On peut étudier les cercles hyperboliques : donné $z_0 \in D$ $r \in \mathbb{R} > 0$
   $\{z \in D \mid d_D(z_0, z) = r\}$

Pour $z_0 = 0 \in D$ $\quad d_D(0, t) = -\log\dfrac{1 - t}{1 + t} = r \Leftrightarrow t = \dfrac{1 - r^{-r}}{1 + r^{-r}}$

$$S = \{z \in D \mid d_D(0, z) = r\} \textit{ est un cercle Euclidien}$$

de Centre 0 et rayon Euclidien $t = \dfrac{1 - e^{-r}}{1 + e^{-r}}$ <u>En effet :</u> z$\in S \Leftrightarrow Rot_\alpha(z) \in S$

Tout cercle hyperbolique est un cercle Euclidien

$$\iota(\iota(S)) = S = \{z \mid d(z_0, z) = r\}$$

Lemme (ii) $\exists$ inversion ι tq $\iota(z_0) = 0$

$$\iota(S) = \{w \mid d(0, w) = r\}$$

4) $\forall z_1, z_2 \in D \exists \varphi \in \mathrm{Mob}(2)$ composition d'inversion par des cercles $\perp S'$ tq $\varphi(z_1) = 0$ et $\varphi(z_2) \in [0, 1)$

Proposition : - d_D satisfait :

i) $d_D\ (z_1, z_2) = 0 \Leftrightarrow z_1 = z_2$

ii) $d_D(z_1, z_2) = d(z_2, z_1) \quad \forall z_1, z_2$

iii) $\leq \triangle$ strictement $d(z_1, z_2) \leq d(z_1, z_2) + d(z_2, z_3) \quad \forall z_1, z_2, z_3$

Avec = si et seulement si $z_2 \in$ arc de cerlce $\perp S'$ entre z_1 et z_3

Preuve : -

(i) $\Longleftarrow$: Si $z_1 = z_2$ on pose $d_D(z_1, z_2) := 0$

$\Longrightarrow$ Soient $z_1, z_2 \in D$ Conséquence : 4) $\exists \varphi$ composition d'inverse par cercle $\perp$ S' tq $\varphi(z_1) = 0$ et $\varphi(z_2) \in [0, 1)$

$$d_D(z_1, z_2) = d_D(\varphi(z_1), \varphi(z_2)) = d_D(0, t) = -\log\frac{1-t}{1+t}$$

Si $z_1 \neq z_2 \implies t \neq 0$ et $-\log\frac{1-t}{1+t} > 0 \iff d_D(t_1, t_2) \neq 0$

(ii) $d_D(z_1, z_2) = -\log[z_1, z_2, z_1^\infty, z_2^\infty] \quad = \quad d_D(z_2, z_1) = -\log[z_2, z_1, z_2^\infty, z_1^\infty]$

(iii) Soient $z_1, z_2, z_3 \in D$ Conséquence 4) : $\exists \varphi$ composition d'inverse par cercle $\perp$ S' tq

$$\varphi(z_1) = 0 \text{ et } \varphi(z_3) = t \in [0, 1)$$

On pose $w := \varphi(z_2)$ <u>A voir :</u> $d_D(z_1, z_3) \leq d_D(z_1, z_2) + d_D(z_2, z_3)$

Puisque $d_D(z_i, z_j) \Leftrightarrow d_D(0, t) \leq d_D(0, w) + d_D(w, t)$

On pose $S_0 = \{z \in D \mid d_D(0, z) = d_D(0, w)\}$

$S_t = \{z \in D \mid d_D(t, z) = d_D(t, w)\}$

t n'est pas le centre du cercle euclidien St, mais on sait que le centre de St est sur l'axe réel :

En effet $z \to \overline{z}$ préserve des distance
Puisque $t \to t$ De plus $S_0 \cap S_t = \{w, \overline{w}\}$
$St \to St$

On pose : $x \in S_t \cap (-1, t)$

$y \in S_0 \cap (0, 1)$

$d_D(0, t) \leq d_D(0, x) + d_D(x, t) \leq d_D(0, y) + d_D(x, t) \quad = \quad d_D(0, w) + d_D(w, t)$

Postulat 1 : - $\forall A \neq B \in D\ \exists$ segment de droite hyperbolique (cad arc de cercle) reliant A et B

Propriété de $\triangle$ hyperbolique : -

<u>Aire</u> On suppose $\exists$ fonction Aire $\begin{array}{l}\text{Polygone} \\ \text{hyperbolique}\end{array} \to \mathbb{R} \geq 0$ qui satisfait :

- Continuite
- Additivite $\quad \mathrm{Aire} = \mathrm{Aire(A)} + \mathrm{Aire(B)}$
- $\mathrm{Aire}(\triangle) = \mathrm{Aire}(\varphi\triangle)$ $\mathrm{Si}\varphi \in \mathrm{Isom(D, d_n)}$

Théoreme : - $\mathrm{Aire}(\triangle \text{ hyp d'angle}) = \pi - (\alpha + \beta + \gamma)$

On peut considéré des $\triangle$ avec des sommets sur S' dans ce cas $\alpha = \beta = \gamma = 0$ et Aire $(\triangle) = \pi$

Le fait que Aire ($\triangle$ avec des sommets) et sonstante décante de fait $\forall \mathrm{z_1, z_2, z_3} \in \mathrm{S'}$

Preuve du théoreme : -

$5\mathrm{aire} = \pi - \alpha - \beta - \gamma)$

Montrons le cas ou 2 sommets sur S' :

$\mathrm{Aire}\ \triangle_\alpha = \pi - \alpha$

Vrai pour $\alpha = \dfrac{2\pi}{\mathrm{n}}$; $\quad \mathrm{n} \cdot \mathrm{Aire}(\triangle \dfrac{2\pi}{\mathrm{n}}) \quad = \quad \underbrace{\mathrm{Aire(n - gone\ avec\ sommets\ sur\ S')}}_{(\mathrm{n}-2)\cdot\pi}$;

Vrai pour $\alpha = \dfrac{\mathrm{p}}{\mathrm{q}} \cdot 2\pi$; $\quad \mathrm{Aire}\left(\triangle \dfrac{\mathrm{p}}{\mathrm{q}} 2\pi\right) + \mathrm{Aire}\left(\mathrm{p} + 1 - \mathrm{gone\ avec\ sommet\ sur\ S'}\right) = \mathrm{p} \cdot \mathrm{Aire}\left(\triangle \frac{2\pi}{\mathrm{q}}\right)$
$\implies \mathrm{Aire}(\triangle \frac{\mathrm{p}}{\mathrm{q}} 2\pi) = \pi - \frac{\mathrm{p}}{\mathrm{q}} 2\pi$

<u>Cas général</u>