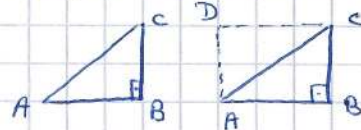


1. La preuve indienne du Théorème de Pythagore (et l'insuccès des Nbr rationnels)

[insuccès : on peut créer une fraction des nombres, mais il en manque, certains sont oubliés. On comble cela avec les irrationnels]

Soit A, B, C les sommets d'un triangle rectangle.



Soit D l'intersection de la droite $\parallel$ au segment BC [BC] passant par A avec la droite $\perp$ à AB passant par C .

$$\text{Aire}(ABC) = \frac{1}{2} \text{Aire}(ABCD) = \frac{1}{2} |AB| \cdot |BC| \quad \leftarrow \text{longueur}$$

De manière générale :

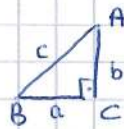
$$h = |CP|$$



P le pied de la hauteur issue de C .

$$\text{Aire}(ABC) = \frac{1}{2} |AB| \cdot h$$

Bhāskara (1114)



$$a = |BC|$$

$$b = |AC|$$

$$c = |AB|$$

Triangle rectangle en C .

On forme un carré dont le côté est égal à l'hyp.

On le compte par 4 triangles rectangles identiques au Δ

initial ABC . De sorte d'obtenir

un grd carré de côté $a+b$ constitué du $\square$ initial de côté c et des 4 triangles rect.

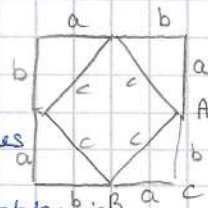
On compare les aires :

$$(a+b)^2 = c^2 + 4 \text{Aire}(ABC)$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab$$

$$\boxed{a^2 + b^2 = c^2}$$

$$|- 2ab$$



1.1 Conséquences du théo de Pythagore :

Un carré de côté 1 a une diagonale
 $u = 1^2 + 1^2 = 2$

Proposition :

Proposition: il n'existe pas de nombres entiers a et b tels que $(\frac{a}{b})^2 = 2$.

Preuve :

(Par l'absurde)

Supposons donc qu'il existe $a, b \in \mathbb{N}^*$ tels que
(1) $a^2 = 2b^2$

On se concentre sur le + petit a et le + petit b qui vérifient (1).

Affirmation:
"pourquoi a pair"

a + petit a doit être pair (sinon il serait impair)
car $a^2 = 2b^2$ est pair, c'est $2 \times$ un entier, et si a impair alors a^2 impair. $\Rightarrow a^2 = 2(2k^2 + 2k + 1) + 1$
 $a = 2k + 1$
 $a^2 = 4k^2 + 4k + 1$

Comme a est pair, il existe $d \in \mathbb{N}$ tel que
 $a = 2d$

$$(2d)^2 = 2b^2$$

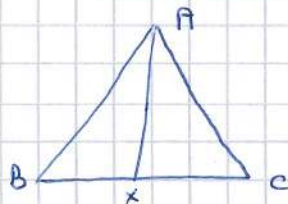
$$4d^2 = 2b^2$$

$$2d^2 = b^2 \quad \text{avec } b < a$$

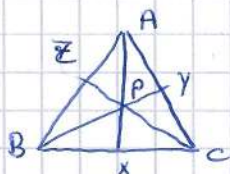
ce qui est absurde/impossible vu le choix de a qui était le + petit.

Géométrie I :

2. Le théorème de Ceva (1678)



Un segment de Ceva est un segment qui a pour extrémité un sommet du triangle et qui a son autre extrémité sur le côté opposé au sommet.
Ici on a le segment $[AX]$ avec $X \in [BC]$



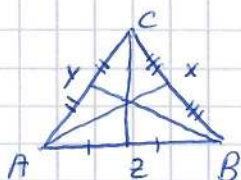
On note $[AX]$, $[BY]$ et $[CZ]$, 3 segments de Ceva.

Théorème :

Si les trois segments $[AX]$, $[BY]$, $[CZ]$ se coupent en un même point alors $\frac{|BX|}{|XC|} \cdot \frac{|CY|}{|YA|} \cdot \frac{|AZ|}{|ZB|} = 1$

La réciproque est aussi vraie!

Ex :

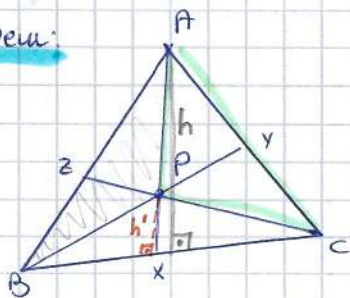


médiane (sommet et milieu côté opposé)
Elle coupe le côté op. en 2 parties égales.

$$\text{Avec Ceva: } \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{1} = 1$$

le 27.09.17

Dém :



Du théorème de Ceva :

Supposons que les 3 segments de Ceva se coupent en un même point P.

$$\frac{|BX|}{|XC|} = \frac{\frac{h}{2} |BX|}{\frac{h}{2} |XC|} = \frac{\text{Aire}(ABX)}{\text{Aire}(AXC)} = \frac{\text{Aire}(ABX) - \text{Aire}(BXP)}{\text{Aire}(AXC) - \text{Aire}(PXC)} = *$$

$$\left(\cdot \frac{h}{2} \right)$$

$$\frac{\text{Aire}(BXP)}{\text{Aire}(PXC)} = \frac{a}{b} = \frac{c}{b} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{a-c}{b-d}$$

$$ab - ad = a(b-d) = b(a-c) = ab - ac$$

$$ad = ac \quad \checkmark$$

$$* = \frac{\text{Aire}(ABP)}{\text{Aire}(APC)} \quad (\text{interprétation})$$

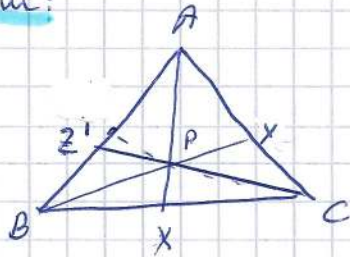
$$\text{De même: } \frac{|YC|}{|AY|} = \frac{\text{Aire}(PBC)}{\text{Aire}(ABP)}$$

$$\frac{|AZ|}{|ZB|} = \frac{\text{Aire}(APC)}{\text{Aire}(PBC)}$$

$$\frac{|BX|}{|XC|} \cdot \frac{|YC|}{|AY|} \cdot \frac{|AZ|}{|ZB|} = \frac{\text{Aire}(PBC)}{\text{Aire}(ABP)} \cdot \frac{\text{Aire}(ABP)}{\text{Aire}(APC)} \cdot \frac{\text{Aire}(APC)}{\text{Aire}(PBC)} = 1$$

6 27.09.17

Dém:

Réciproque de Ceva: p. 4

Si la relation de Ceva est vraie alors les 3 segments de Ceva se coupent en un même point.

On considère les deux segments $[AX]$ et $[BY]$ qui se coupent en P .

On choisit $Z' \in]A;B[$ tel que $[C;Z']$ contient P . Le but est alors de prouver que $Z = Z'$.

D'après le théorème de Ceva et sa première implication déjà démontrée :

$$\frac{|BX|}{|XC|} \cdot \frac{|CY|}{|AY|} \cdot \frac{|AZ|}{|Z'B|} = 1$$

D'autre part, par hypothèse :

$$\frac{|BX|}{|XC|} \cdot \frac{|CY|}{|AY|} \cdot \frac{|AZ|}{|Z'B|} = 1$$

$$\frac{|AZ|}{|Z'B|} = \frac{|AZ'|}{|Z'B|} \Rightarrow Z = Z'$$

Par origine dans le livre Coxeter,

Un modèle pour la géométrie Euclidienne :

Déf:

Un groupe abélien est un ensemble E muni d'une loi interne $E \times E \rightarrow E$ qui vérifie
 $(v, w) \mapsto v + w \quad \forall v, w, u \in E :$

- (i) $(u+v)+w = u+(v+w)$
- (ii) $v+w = w+v$
- (iii) $\exists 0 \in E \quad \forall v \in E \quad 0+v = v$
- (iv) $\forall v \in E \quad \exists (-v) \in E \quad v+(-v) = 0$

Ex:

• $E = \mathbb{Z}$ avec l'addition des nbr entiers

• $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} = E \quad (x, y) + (x', y') = (x+x', y+y')$

• $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = E \quad (x, y) + (x', y') = (x+x', y+y')$

Déf:

Un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ (le corps des réels), c'est un groupe abélien $(V, +)$ muni d'une opération externe $\mathbb{R} \times V \rightarrow V$ appelée multiplication scalaire,
 $(\lambda, v) \mapsto \lambda \cdot v$

telle que: $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall v, w \in V :$

- (i) $\lambda(v+w) = \lambda v + \lambda w$
- (ii) $(\lambda+\mu)v = \lambda v + \mu v$
- (iii) $(\lambda\mu)v = \lambda(\mu v)$
- (iv) $1 \cdot v = v$

Exercice:

Démontrer que $\forall v \in V$ $0 \cdot v = 0$ $0 \in \mathbb{R}$
 $0 \in V$
(Série 2)

Exemple:

Espace vectoriel:

$V = \mathbb{R}^n$ addition coord. par coord.

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$

la structure:

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$(\lambda, (x_1, \dots, x_n)) \mapsto (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$$

notation:

$$\underbrace{\lambda}_{\mathbb{R}} (\underbrace{x_1, \dots, x_n}_{\mathbb{R}^n}) = \underbrace{(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)}_{\mathbb{R}^n}$$

Cheminement:

Produit scalaire $\rightarrow$ norme $\rightarrow$ dist. euclidienne.

Déf:

Produit scalaire:

Soit V un espace vect. sur $\mathbb{R}$.

Un prod. scalaire sur V

$$V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(v, w) \mapsto \langle v, w \rangle \leftarrow \text{prod. sc.}$$

est une application qui associe à tout couple de vecteur un nbr réel.

t.q. : $\forall u, w, v \in V, \forall \lambda \in \mathbb{R}$

+ dans V (i) $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$ + réel

(ii) $\langle u+v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$

(iii) $\langle \lambda u, v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle$ multiplication scalaire multiplication réelle

(iv) $\langle v, v \rangle \geq 0$ réel

(v) $\langle v, v \rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0$ vectoriel

Ex:

Le prod. scal. euclidien:

$$V = \mathbb{R}^n$$

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$[(x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)]$$

$$= x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + \dots + x_n \cdot y_n$$

$$= \sum_{k=1}^n x_k y_k$$

$$\text{Noté : } (x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$$

Dém:

$$(iv) \quad \langle (x_1, \dots, x_n), (x_1, \dots, x_n) \rangle$$

$$= x_1 \cdot x_1 + x_2 \cdot x_2 + \dots + x_n \cdot x_n$$

$$= x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \geq 0$$

Déf:

Soit V un e.v. sur $\mathbb{R}$.une norme sur V est une application

$$V \rightarrow \mathbb{R}$$

$$v \mapsto \|v\|$$

qui à tout vecteur $v \in V$ associe un nb réel $\|v\| \in \mathbb{R}$.

$$\text{t.q.} \quad \forall v, w \in V, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

$$(i) \quad \|v\| \geq 0$$

$$(ii) \quad \|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0 \in V \quad |x| = \text{valeur}$$

$$(iii) \quad \|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\| \quad \text{absolue}$$

$$(iv) \quad \|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$$

Proposition:

Soit V un esp. vect. sur $\mathbb{R}$ muni d'un produit scalaire, alors la formule:

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle} \quad \forall v \in V$$

défini une norme sur V .

Preuve:

$$(i) \quad \|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle} \geq 0 \quad \text{OK car } \langle v, v \rangle \geq 0$$

$$(ii) \quad \|v\| = 0 \iff \sqrt{\langle v, v \rangle} = 0 \iff \langle v, v \rangle = 0 \implies v = 0$$

$$(iii) \quad \|\lambda v\| = \sqrt{\langle \lambda v, \lambda v \rangle} = \sqrt{\lambda^2 \langle v, v \rangle} = |\lambda| \sqrt{\langle v, v \rangle} = |\lambda| \|v\|$$

$$(iv) \quad \|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$$

$$\Leftrightarrow \|v + w\|^2 \leq (\|v\| + \|w\|)^2$$

$$\Leftrightarrow \langle v + w, v + w \rangle \leq \langle v, v \rangle + 2\|v\|\|w\| + \langle w, w \rangle$$

$$2\langle v, w \rangle + \langle v, v \rangle + \langle w, w \rangle \leq \langle v, v \rangle + 2\|v\|\|w\| + \langle w, w \rangle$$

$$2\langle v, w \rangle \leq 2\|v\|\|w\|$$

Inégalité de Cauchy-Schwarz.

Rappel:Si V e.v sur $\mathbb{R}$

avec un produit scalaire.

$$\forall v \in V \quad \|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle}$$

Proposition:Inégalité de Cauchy-Schwarz:Soit V un e.v sur $\mathbb{R}$, muni d'un produit scalaire. $\forall v, w \in V$

$$|\langle v, w \rangle| \leq \sqrt{\langle v, v \rangle} \cdot \sqrt{\langle w, w \rangle}$$

C'est à dire pour la norme associée au produit scalaire définie par $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$

$$|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\|$$

Preuve:Définissons pour $t \in \mathbb{R}$

$$P(t) = \langle v + t \cdot w, v + t \cdot w \rangle$$

Ce nombre est toujours positif ou nul,

$$P(t) \geq 0 \quad \forall t$$

$$P(t) = \underbrace{\langle v, v \rangle}_c + 2t \underbrace{\langle v, w \rangle}_b + t^2 \underbrace{\langle w, w \rangle}_a$$

$$= at^2 + 2bt + c$$

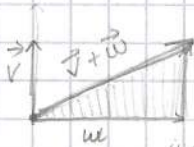
$$\text{Comme } P(t) \geq 0, \Delta = b^2 - 4ac \leq 0$$

$$b^2 \leq 4ac$$

$$4\langle v, w \rangle^2 \leq 4\langle w, w \rangle \cdot \langle v, v \rangle$$

$$\Rightarrow |\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\|$$

(* cas de l'égalité traité en exercice
ou a égalité $\Leftrightarrow \lambda v = w$ ou $\lambda w = v$.)



inégalité du triangle
 $\|\vec{v} + \vec{w}\| \leq \|\vec{v}\| + \|\vec{w}\|$

Où se s'avient que l'inégalité du triangle
 $\|\vec{v} + \vec{w}\| \leq \|\vec{v}\| + \|\vec{w}\|$ est vraie ssi
 $|\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle| \leq \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\|$

Définition:

Un espace métrique est un ensemble X muni d'une application

$$d: X \times X \rightarrow [0, \infty[$$

vérifiant:

$$d(x, y) \geq 0 \quad \forall x, y \in X$$

$$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y \quad \forall x, y \in X$$

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \quad \forall x, y, z \in X$$

$$d(x, y) = d(y, x) \quad \forall x, y \in X$$

Exemple:

$$X = \mathbb{R}^n$$

$$d(v, w) = \|v - w\|$$

$$\text{où } \|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$$

$$\langle v, w \rangle = \sum_{k=1}^n v_k \cdot w_k$$

$$v = (v_1, \dots, v_n), w = (w_1, \dots, w_n)$$

Ex:

facile, vérifier qu'une telle définition est bien une distance. (appliquer les prop. démontrées de la norme).

Déf:

Soit V un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$

Soit $v \in V$, soit $\tau_v: V \rightarrow V$

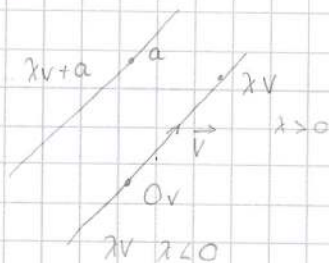
$$w \mapsto v + w$$

(on passe l'espace dans une direction)

$$\tau_v: V \rightarrow V \quad \forall w \in V \quad \tau_v(w) = v + w$$

la translation de vecteur v .

Définition:



Un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$,
 Une droite est par définition l'image
 d'une translation d'une droite
 passant par $O_V \in V$. La droite de
 vecteur directeur $v \neq 0$ et passant
 par $a \in V$, est l'ensemble
 $\{\lambda v + a : \lambda \in \mathbb{R}\}$

Dém:

Par 2 points distincts passe une
 unique droite.

Soit a et $b \in V$, $a \neq b$

(Il existe une droite)

$\{a + \lambda(b-a) : \lambda \in \mathbb{R}\}$ est une droite :
 c'est l'image par la translation
 T_a de la droite passant par O_V et
 de vecteur directeur $b-a \neq 0_V$.

$\lambda = 0$, alors on trouve a .

$\lambda = 1$, on trouve b .

(unicité)

Terminologie:

Soit V un esp. vect sur $\mathbb{R}$

Soit $v \in V$, $v \neq 0$

alors la droite engendrée par v
 est par définition le sous-ensemble
 de V .

$$\{\lambda v : \lambda \in \mathbb{R}\} \text{ (droite par } 0)$$

$$\{\lambda v : \lambda \in \mathbb{R}\} = \langle v \rangle$$

On dit aussi que v est un vecteur
 directeur de la droite $\langle v \rangle$

L'image d'une droite $\langle v \rangle$ par la
 translation de vecteur a est

$$\{\lambda v + a : \lambda \in \mathbb{R}\} \text{ (forme gén d'une droite)}$$

Notation:

Dém:

(unicité) de la droite par 2 points:

$$\text{Soit } \{ \lambda v + v_0 : \lambda \in \mathbb{R} \}$$

une droite de V ($v \in V, v \neq 0, v_0 \in V$)Soit $a, b \in V$, $a \neq b$ tels que a et b appartiennent à cette droite.

$$\exists \lambda_a \in \mathbb{R} \quad \lambda_a v + v_0 = a$$

$$\exists \lambda_b \in \mathbb{R} \quad \lambda_b v + v_0 = b$$

$$\text{Rem: } \lambda_a \neq \lambda_b$$

$$(\lambda_a - \lambda_b)v = a - b$$

$$* v = \frac{a-b}{\lambda_a - \lambda_b}$$

$$* v_0 = a - \lambda_a v$$

$$= a - \lambda_a \left(\frac{a-b}{\lambda_a - \lambda_b} \right)$$

On a exprimé v et v_0 à l'aide de a et b à qui détermine la droite à l'aide des points a et b .⚠ Exprimer encore λ_a et λ_b en fonction de a et b .Proposition:Soit V e.v. sur $\mathbb{R}$ Soit D et D' deux droites.

- Si les vecteurs directeurs de D et D' sont multiples l'un de l'autre alors soit $D = D'$ soit $D \cap D' = \emptyset$
- Si $V = \mathbb{R}^2$, alors la réciproque est vraie. Si j'ai 2 droites D et D' , et qu'elles sont $D = D'$ ou $D \cap D' = \emptyset$ alors leur vecteur directeur sont multiples l'un de l'autre.

Remarque:

⚠ Pourquoi il suffit de ? ⚠

On va appliquer une translation, on peut supposer que la droite D contient $0_V \in V$

Une translation = une bijection. (ça ne change rien)

Preuve:

a. Soit v et v' , les vecteurs directeurs,

le 11.10.17

Théorème:

Lemme sur les droites:

Soit V un e.v sur $\mathbb{R}$

i) soit $v, w \in V$, $v \neq 0$, $w \neq 0$

si il existe $\exists \lambda_0 \in \mathbb{R} : \lambda_0 v = w$

$\Rightarrow \langle v \rangle = \langle w \rangle$

ii) Soit D une droite de V qui contient $0 \in V$
alors $\exists v \in V$ $v \neq 0$ $D = \langle v \rangle$

Preuve:

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad \langle v \rangle &= \{ \lambda v : \lambda \in \mathbb{R} \} = \{ \lambda \cdot \lambda_0^{-1} \lambda_0 v : \lambda \in \mathbb{R} \} \\ &= \{ \lambda \cdot \lambda_0^{-1} w : \lambda \in \mathbb{R} \} = \{ \mu w : \mu \in \mathbb{R} \} = \langle w \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ii)} \quad D &= \{ \lambda v + v_0 : \lambda \in \mathbb{R} \}, \text{ où } v \in V, v \neq 0, v_0 \in V \\ \text{comme } 0 \in D \quad \exists \lambda_0 \in \mathbb{R} : 0 &= \lambda_0 v + v_0 \\ \text{donc } v_0 &= (-\lambda_0) v \\ D &= \{ \lambda v + (-\lambda_0 v) : \lambda \in \mathbb{R} \} \\ &= \{ (\lambda - \lambda_0) v : \lambda \in \mathbb{R} \} = \{ \mu v : \mu \in \mathbb{R} \} = \langle v \rangle \end{aligned}$$

Résumé:

Prop.

Soit V e.v. sur $\mathbb{R}$, soit $a, b \in V$, $a \neq b$
 $\Rightarrow \exists$ une unique droite contenant a et b .

Savoir ♥

Preuve:

Existence:

$$\{ \lambda(b-a) + a : \lambda \in \mathbb{R} \} \quad \lambda=0 \text{ donne } a, \lambda=1 \text{ donne } b.$$

Unicité:

Cas particulier, on suppose $a=0$

$\langle b \rangle$ est une droite qui contient 0 et b .

Soit D , une droite qui contient $a=0$ et b .

Comme D contient 0 : par lemme (ii)

$\exists v \in V$ $v \neq 0$ t.q. $D = \langle v \rangle$. Comme D contient b , $\exists \lambda_b \in \mathbb{R}$, $b = \lambda_b \cdot v$. Donc d'après lemme

iii) $\langle b \rangle = \langle v \rangle = D$.

Cas général : On a d'une part $D_{a,b} = \{ \lambda(b-a) + a, \lambda \in \mathbb{R} \}$

Soit D une droite qui contient a et b .

Soit $T_{-a} : V \rightarrow V$

$$v \mapsto v + (-a)$$

$T_{-a}(D)$: est une droite qui contient $T_{-a}(a) = 0$

$T_{-a}(D_{a,b})$: " " " " = 0

Les 2 droites contiennent aussi $T_{-a}(b) = b - a \neq 0$

D'après le cas particulier, les 2 droites sont les mêmes. $(T_{-a}(D)$ et $T_{-a}(D_{a,b}))$

T_a l'inverse de T_{-a} si $T_a(T_{-a}) = \text{identité}$.

Donc T_a appliqué à $*$ = $D = D_{a,b}$.

Proposition:Soit $V \in V$ sur $\mathbb{R}$ Soit D, D' 2 droites de V

- a) si les vecteurs directeurs de D et D' sont multiples l'un de l'autre alors $D = D'$ ou bien $D \cap D' = \emptyset$.
- b) si $V = \mathbb{R}^2$ alors la réciproque est vraie: si D et $D' \parallel$ au sens d'Euclide (c'est à dire: soit $D = D'$ soit $D \cap D' = \emptyset$) alors leur vect. directeur sont multiples l'un de l'autre.

Preuve:

Quitte à appliquer une translation, il suffit de traiter le cas particulier dans lequel une des droites contient 0.

On suppose donc que $0 \in D$.

$$D = \{ \lambda v : \lambda \in \mathbb{R} \} \text{ où } v \neq 0, v \in V$$

$$D' = \{ \mu v' + a : \mu \in \mathbb{R} \} \text{ où } v' \in V, v' \neq 0 \text{ et } a \in V$$

- a) supposons que $v' = \alpha v$ où $\alpha \in \mathbb{R}$
 donc $D' = \{ \mu v + a, \mu \in \mathbb{R} \}$. $(\mu \alpha v) = \mu v$
 supposons que $D \cap D' \neq \emptyset$ mais alors que $D = D'$
 $\lambda_0 v = \mu_0 v + a \quad \exists \lambda_0, \mu_0 \in \mathbb{R}$. Donc a multiple de v .

$$\text{Donc } \{ \mu v + a : \mu \in \mathbb{R} \} = \{ \mu v : \mu \in \mathbb{R} \}$$

- b) supposons D et $D' \parallel$ au sens d'Euclide.
 bi) si je suis dans le cas $D = D'$ $a = \lambda_0 \cdot v$
 pour $\lambda_0 \in \mathbb{R}$.

$$v' + a = \lambda_1 \cdot v \text{ pour } \lambda_1 \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow v' = \lambda_1 v - a = \lambda_1 v - \lambda_0 v = (\lambda_1 - \lambda_0) v$$

donc v' multiple de v $\square$

$$\text{bii) } D \cap D' = \emptyset \Rightarrow \langle v \rangle = \langle v' \rangle$$

Prouvons la contraposée si $\langle v \rangle \neq \langle v' \rangle$ alors $D \cap D' \neq \emptyset$. C'est-à-dire on cherche $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

$$\lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} v'_1 \\ v'_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

En remplaçant λ et μ par x et y , on voit que l'on obtient un système linéaire de 2 équations à 2 inconnues:

$$x v_1 - y v'_1 = a_1$$

$$x v_2 - y v'_2 = a_2$$

A une solution ssi $\begin{vmatrix} v_1 & -v'_1 \\ v_2 & -v'_2 \end{vmatrix} \neq 0$
 $\begin{vmatrix} v_1 & -v'_1 \\ v_2 & -v'_2 \end{vmatrix} = -v_1 v'_2 + v'_1 v_2 \neq 0$
 ce qui n'est possible que si $\begin{pmatrix} v'_1 \\ v'_2 \end{pmatrix}$ n'est pas multiple de $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$. $\square$

Axiome:

les // dans le plan:

Soit D une droite de $\mathbb{R}^2$ et a un point de $\mathbb{R}^2$.
Il existe une unique droite D' qui est // à D
au sens d'Euclide et qui passe par a .

Dém:

Le modèle du plan donné par $\mathbb{R}^2$ et les droites comme définies vérifient cet axiome:

Existence: Soit v un vect. directeur de D .

$$D' = \{ \lambda v + a : \lambda \in \mathbb{R} \}$$

$$a \in D' \quad (\lambda = 0)$$

et D' est // à D car elle a un même vecteur.

Unicité: Quitte à translation, je suppose $a = 0 \in \mathbb{R}^2$.
Une autre droite D'' // D et passant par $0 = a$.

Alors D'' // D car la relation de // au sens d'Euclide est une relation équivalente. (transitif).

Donc D'' et D' ont un même vect. directeur et contiennent $a = 0$.

$$\Rightarrow D'' = D' \quad \square$$

Orthogonalité et produit scalaire:

Soit V un ev sur $\mathbb{R}$ et $B: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$
un produit scalaire.

Def:

L'orthogonal d'un vecteur $v \in V$ est par déf:

$$v^\perp = \{ w \in V : B(w, v) = 0 \}$$

Remarques:

i) si $v = 0 \in V$ alors $B(w, v) = B(w, 0) = 0$
donc $v^\perp = V$ dans ce cas

ii) si w et $w' \in v^\perp$
 $\Rightarrow \mu w + \lambda w' \in v^\perp$

iii) si $v \in v^\perp \Rightarrow v = 0$

Ex:

$$V = \mathbb{R}^n$$

$$B(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i; \quad x \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ et } y \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$v(0, \dots, 0, \underset{\uparrow}{1}, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$$

$$\text{alors } v^\perp = \{(x_1, x_2, \dots, 0, \dots, x_n) : x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$$

$$v(1, 1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$$

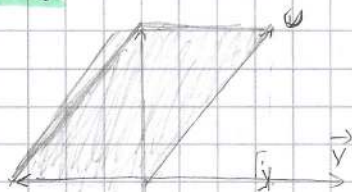
$$\text{alors } v^\perp = \{x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n x_i = 0\}$$

$$v(a_1, \dots, a_n)$$

$$\text{alors } v^\perp = \{x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n a_i x_i = 0\}$$

hyperplan
vecteur orthog.
plat.

Déf:



Projection orthogonale:

Soit V un e.v. sur $\mathbb{R}$, muni d'un prod. scalaire.

Soit $v \in V$ et $v \neq 0$.

La projection orthogonale de $u \in V$ sur la droite engendrée par (v) est le vecteur $\frac{\langle u, v \rangle}{\|v\|^2} \cdot v$.

$$\text{On remarque que } \langle u - \frac{\langle u, v \rangle}{\|v\|^2} \cdot v, \frac{\langle u, v \rangle}{\|v\|^2} \cdot v \rangle = 0$$

Isométrie:

Soient (X, d_x) et (Y, d_y)
des espaces métriques.

Déf:

Une isométrie entre ces espaces métriques est une application $f: X \rightarrow Y$ tel que $\forall x, x' \in X$
 $d_y(f(x), f(x')) = d_x(x, x')$

Remarque:

i) une isométrie est toujours injective.

ii) la composée de 2 iso $\rightarrow$ iso

iii) isométrie surjective $\rightarrow$ bijective $\rightarrow$ inverse = iso.

Déf:

(Symétrie orthogonale relativement à un hyperplan)

Soit V un ev sur $\mathbb{R}$ muni d'un produit scalaire.Soit $v \in V$ $v \neq 0$. Soit $v^\perp = \{w \in V \mid \langle w, v \rangle = 0\}$

$$\sigma_v(u) = u - 2 \frac{\langle u, v \rangle}{\|v\|^2} v \quad \forall u \in V$$

définit une application $\sigma_v: V \rightarrow V$ appelée sym. orth. rel. à $v^\perp$
 σ_v a les propriétés suivantes:

(i) $\sigma_v(v) = -v$

(ii) $\sigma_v(u) = u \iff u \in v^\perp$

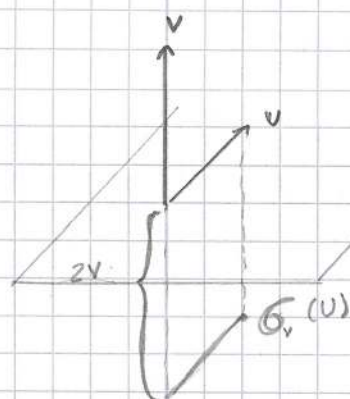
(iii) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad u, u' \in V \quad \sigma_v(\lambda u + \mu u') = \lambda \sigma_v(u) + \mu \sigma_v(u')$
 σ_v est linéaire

(iv) $\sigma_v \circ \sigma_v(u) = u \quad \forall u \in V$ (bijection, auto-inverse)

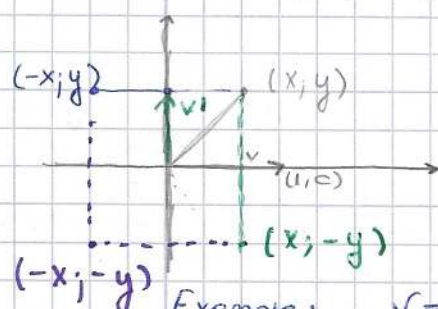
(v) $\lambda \in \mathbb{R}^* \quad \sigma_{\lambda v}(u) = \sigma_v(u)$

(vi) $\langle \sigma_v(x), \sigma_v(y) \rangle = \langle x, y \rangle \quad \forall x, y \in V$

Pour vérifier:

1) remplacer σ_v par sa déf. et calculer / résoudre2) c'est équivalent à préserver la distance
 $d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle}$ (par ce qui garde)

$v^\perp = \{0, y \mid y \in \mathbb{R}\}$

Exemple: $V = \mathbb{R}^2, v = (1, 0)$

$\langle (x, y), (1, 0) \rangle (1, 0) = (x, 0) \quad (x, y) - 2(x, 0) = (-x, y)$

bien la symétrie orthogonale de droite fixe (ou d'axe)
 $\{0, y \mid y \in \mathbb{R}\}$ Exemple: $v = (0, 1) \quad \sigma_v(x, y) = (x, -y)$

$\sigma_v \circ \sigma_v(x, y) = (-x, -y)$

C'est une rotation autour de l'origine d'angle π .

Déf:

Longueur d'une courbe.

 $c: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application.On considère les subdivisions de $[a, b]$ du type $t_0 = a < t_1 < \dots < t_n = b$

$$\text{longueur}(c) = \sup_{\uparrow \text{sur toutes les subdivisions } t_0 < t_1 < \dots < t_n} \sum_{i=0}^{n-1} \|c(t_i) - c(t_{i+1})\|_{\mathbb{R}^n}$$

N.B: il existe pour chaque n fixé un n.b infini de subdivisions et de plus le nombre de points de la subdivision n'est pas borné dans la définition.

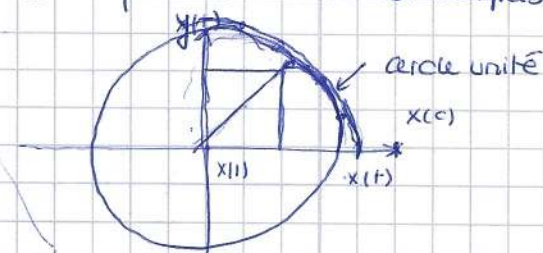
Si $\text{longueur}(c) < \infty$ on dit que la courbe est rectifiable.Exemple:

$$c: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$t \mapsto (1-t, \sqrt{1-(1-t)^2})$$

$$x(t) = 1-t$$

$$y(t) = \sqrt{1-(1-t)^2}$$

Dém:

Proveons qu'il existe une constante C tq pour toute subdivision de $[0, 1]$, la somme $\sum < C$

Affirmation: $C=2$ convientPreuve $c(t_i)$ et $c(t_{i+1})$

$$\|c(t_i) - c(t_{i+1})\| \leq |y(t_{i+1}) - y(t_i)| + |x(t_{i+1}) - x(t_i)|$$

$$\text{et } \sum_{i=0}^{n-1} |y(t_{i+1}) - y(t_i)| \leq 1 \text{ idem pour les } x(t_i)$$

Conclusion: le sup existe et donc $\text{longueur}(c)$ existe.Rappel:

$A \subset \mathbb{R}$, un majorant de A est un élément $x \in \mathbb{R}$ tq $\forall a \in A, a \leq x$

Le sup de A est un majorant de A , noté $\sup(A)$, qui vérifie: si x est un majorant de A alors $\sup(A) \leq x$.

Théorème:

Tout ensemble $A \subset \mathbb{R}$ borné supérieurement admet un unique suprémum, noté $\sup(A)$

Conclusion:

On sait mesurer la longueur d'un arc.

Définition:

On appelle π la longueur de la courbe

$$c: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t \mapsto (1-t, \sqrt{1-(1-t)^2})$$

↳ la longueur ne dépend pas de la paramétrisation de la courbe

Proposition:

$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une isométrie

Soit $c: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ une courbe

$$\text{long}(c) = \text{long}(f \circ c)$$

$[a, b], a \leq b, [a, b] \rightarrow [0, b]$

$c: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n, h(b) = b$

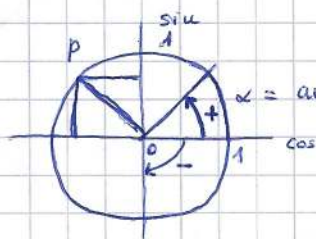
$h(a) = a$

alors $\text{Length}(c) \leq \text{long}(c)$
surjective $\rightarrow \geq$

Preuve:

$$\|f(c(t_{i+1})) - f(c(t_i))\| \stackrel{f \text{ iso}}{=} \|c(t_{i+1}) - c(t_i)\|$$

Déf.



Fonctions trigonométriques:

α = angle en radiant. L'angle en radiant, est la longueur de l'arc sur le cercle trigo ($r=1$)

Si $0 \leq \theta \leq \pi$, il existe un unique point p sur le cercle unité dont la longueur de l'arc entre (1,0) et p.

vaut θ . $p = (\cos \theta; \sin \theta)$

C'est-à-dire que par définition, la première coordonnée de p est $\cos \theta$ et la 2nd est $\sin \theta$.

Par définition on a:

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

On étend les déf de $\cos \theta$ et $\sin \theta$ aux arcs qui peuvent faire + d'un tour.

$$\cos(\theta + 2\pi) = \cos(\theta)$$

$$\sin(\theta + 2\pi) = \sin(\theta)$$

$$\cos(\theta + \pi) = -\cos(\theta)$$

$$\sin(\theta + \pi) = -\sin(\theta)$$

En mesurant les longueurs avec un signe (-) si l'arc correspond à un parcours dans le sens opposé.

$$\cos(-\theta) = \cos(\theta)$$

$$\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$$

$$\sin(\theta) = -\cos(\theta + \frac{\pi}{2})$$

$$\cos(\theta) = \sin(\theta + \frac{\pi}{2})$$

Définition:Homothécies

Soit V , un e.v. sur $\mathbb{R}$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$

$$h_\lambda: V \rightarrow V \\ v \mapsto \lambda v$$

L'application h_λ est l'homothétie de centre $O \in V$ de rapport $\lambda \in \mathbb{R}$.

Propriétés:

i) $\forall v, w \in V \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (l'incéaire)

$$h_\lambda(\alpha v + \beta w) = \alpha h_\lambda(v) + \beta h_\lambda(w)$$

ii) si $\lambda \neq 0$ $h_\lambda \circ h_{\lambda^{-1}}(v) = v$

donc h_λ bijective d'inverse $h_{\lambda^{-1}}$ si $\lambda \neq 0$

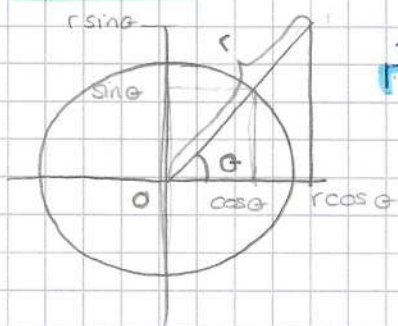
iii) Si $d(v, w) = \|v - w\|$ est une distance sur V définie par une norme.

$$\text{Alors } d(h_\lambda(v), h_\lambda(w)) = |\lambda| d(v, w)$$

Exercice:

$$c: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\text{alors } \text{long}(h_\lambda \circ c) = |\lambda| \text{long}(c)$$

Rotations:Proposition:

L'application $[0, 2\pi[\times \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ est bijective

$$(\theta, r) \mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta)$$

Preuve:

$\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ est réunion disjointe de tous les cercles de centre O et de rayon $r > 0$

Par déf de $(\cos \theta, \sin \theta)$ tout point du cercle de rayon 1, centré en O s'écrit $(\cos \theta, \sin \theta)$ pour un unique $0 \leq \theta < 2\pi$

Soit $r > 0$, le cercle de rayon r de centre O est l'image par la bijection $h_r: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ du cercle de rayon 1 et de centre O .

Donc tout point du cercle de rayon r , de centre O , s'écrit $(r \cos \theta, r \sin \theta)$ pour un unique $0 \leq \theta < 2\pi$.

$$\begin{aligned} \|(r \cos \theta, r \sin \theta)\| &= \sqrt{r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta} \\ &= r \sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} \\ &= r \end{aligned}$$

mod α :

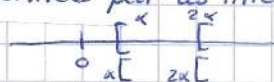
Définition:

Soit $\alpha > 0$

$$\mathbb{R} = \bigsqcup_{k \in \mathbb{Z}} [k\alpha; (k+1)\alpha[\quad k \in \mathbb{Z}$$

union disjointe

La droite réelle est partitionnée par les intervalles $[k\alpha; (k+1)\alpha[\quad k \in \mathbb{Z}$



Donc $\forall x \in \mathbb{R}$ s'écrit de manière unique

$x = k\alpha + x_0$ où $k \in \mathbb{Z}$ est uniquement déterminé par x et $0 \leq x_0 < \alpha$ est lui aussi uniquement déterminé par x .

On note $x \equiv x_0 \pmod{\alpha}$

(en fait x_0 est un représentant particulier de la classe $x \pmod{\alpha}$)



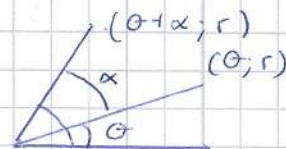
$$x_0 \equiv x \pmod{\alpha}$$

"On raisonne à multiples entiers de α près."

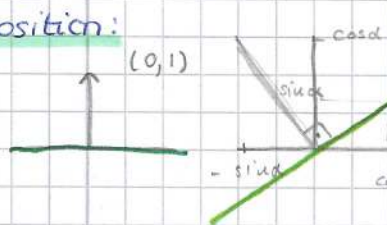
Définition:

La Rotation $R_\alpha: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ d'angle $\alpha \in \mathbb{R}$ de centre $O \in \mathbb{R}^2$ est définie par les conditions:

- i) $R_\alpha: (O_{\mathbb{R}^2}) = O_{\mathbb{R}^2}$
- ii) $R_\alpha: (\theta, r) = (\alpha + \theta \pmod{2\pi}, r)$
où $(\theta, r) \in [0, 2\pi[\times]0, \infty[$
sont les coordonnées polaires.

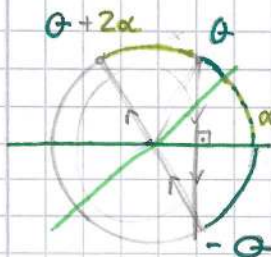


Proposition:



Soit $0 \leq \theta < \pi$

$$\sigma_{(-\sin \alpha; \cos \alpha)} \circ \sigma_{(0, 1)} = R_{2\alpha}$$



Preuve: Comme les 2 membres de l'égalité sont des bijections de $\mathbb{R}^2$ qui fixent l'origine et préservent chaque cercle centré en O .

Il suffit de vérifier l'égalité sur chaque cercle.

(Pour $R_{2\alpha}, (\theta, r) = (\theta + 2\alpha \pmod{2\pi}, r)$ alors c'est clair que c'est une bijection qui préserve les cercles (r ne change pas).

$\sigma_{(-\sin \alpha; \cos \alpha)} \circ \sigma_{(0, 1)}$ bijection car $\sigma_v^2 = \text{i.d.} \Rightarrow \sigma_v = \sigma_v^{-1}$
 $\sigma_v(0) = 0$ et sont des isométries)

Conséquence: $R_{2\alpha}$ est linéaire car composition de 2 symétries qui elles sont linéairesProposition:Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La rotation $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{R_\alpha} \mathbb{R}^2$ d'angle α et de centre $O \in \mathbb{R}^2$ est donnée en coordonnées cartésiennes par la formule:

$$R_\alpha \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} \cos \alpha x - \sin \alpha y \\ \sin \alpha x + \cos \alpha y \end{pmatrix}$$

Preuve: $R_{\alpha+2k\pi} = R_\alpha$ est clair vu la définition en coordonnées polaires, $\forall k \in \mathbb{Z}$ D'autre part $\cos(\alpha + 2k\pi) = \cos(\alpha)$

$$\sin(\alpha + 2k\pi) = \sin(\alpha)$$

Donc il suffit de vérifier la formule pour $0 \leq \alpha < 2\pi$.Comme on a prouvé R_α linéaire, on peut appliquer l'algèbre linéaire.

$$R_\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} \quad R_\alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix}$$

Formules trigonométriques: $R_\alpha \circ R_\beta = R_{\alpha+\beta}$ est évident selon la déf en coord. pol.

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix}$$

$$\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha+\beta)$$

$$\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta = \sin(\alpha+\beta)$$

Proposition:

$$\sin'x = \cos x$$

Preuve:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h \sin x + \sin h \cos x - \sin x}{h} \\ &= \sin x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1 \\ &= \sin x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \\ \text{Il q} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} &= 0 \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(\frac{2h}{2}) - 1}{\frac{2h}{2}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos^2 \frac{h}{2} - \sin^2 \frac{h}{2} - \cos^2 \frac{h}{2} + \sin^2 \frac{h}{2}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2\sin^2 \frac{h}{2}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 2 \frac{-\sin^2 \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} 2 \sin \frac{h}{2} \cdot \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = 0 \cdot 1 = 0 \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \sin x \cdot 0 + \cos x = \cos x$$

$$\text{Et donc } \sin'x = \cos x$$

Proposition:

Procédé d'ortho-normalisation de Gram-Schmidt à 2 vect.

Soit V ev sur $\mathbb{R}^2$, muni d'un produit scalaire.Soit $v, w \in V$. On suppose que la droite $\langle v \rangle$ et la droite $\langle w \rangle$ sont distinctes.

$$E_{v,w} = \{ \lambda v + \mu w : \lambda, \mu \in \mathbb{R} \} \quad \text{engendré par } v \text{ et } w \text{ (le plan).}$$

Il existe $e_1, e_2 \in E_{v,w}$ tq $\langle e_1, e_2 \rangle = 0$

$$\langle e_1, e_1 \rangle = \langle e_2, e_2 \rangle = 1.$$

On obtient une isométrie φ linéaire entre $\mathbb{R}^2$ euclidien et $E_{v,w}$ muni de la distance obtenue en restreignant le produit scalaire de V à $E_{v,w}$. φ est définie ainsi:

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow E_{v,w} \\ (x, y) \mapsto x e_1 + y e_2$$

Preuve:

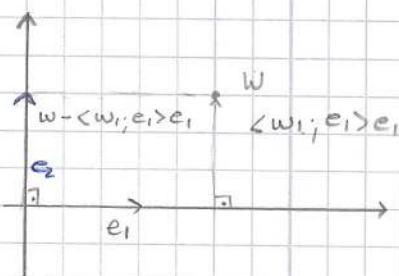
$$e_1 = \frac{v}{\|v\|} \quad (v \neq 0) \quad e_2 = \frac{w - \langle w, e_1 \rangle e_1}{\|w - \langle w, e_1 \rangle e_1\|}$$

$$\text{Par définition: } \|e_1\| = \|e_2\| = 1$$

$$\text{et } \langle e_1, e_2 \rangle = 0$$

Comme e_1 et e_2 sont des comb lin de w et v , $e_1, e_2 \in E_{v,w}$.Donc φ est bien définie. C'est-à-dire que $\varphi(x, y)$ est bien un vecteur de $E_{v,w} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$.De plus φ est surjective, car son image contient v et w . C'est bien le cas car v et w sont combinaisons linéaires de e_1 et e_2 . Montrons que φ est une iso (il résultera que φ injective)

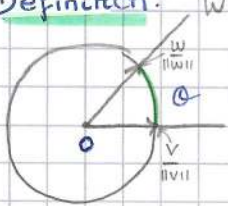
$$P(x, y), Q(x', y') \in \mathbb{R}^2 \quad d_{\mathbb{R}^2}(P, Q) = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}$$



Suite:

$$\begin{aligned}
 d_{E_{V,W}}(P(P); P(Q)) &= \|P(P) - P(Q)\|_V^2 \\
 \text{linéaire} \rightarrow &= \|P(P-Q)\|_V^2 \\
 &= \|(x-x')e_1 + (y-y')e_2\|_V^2 \\
 &= \langle (x-x')e_1 + (y-y')e_2; (x-x')e_1 + (y-y')e_2 \rangle \\
 &= (x-x')^2 \langle e_1; e_1 \rangle + 2(x-x')(y-y') \langle e_1; e_2 \rangle + (y-y')^2 \langle e_2; e_2 \rangle \\
 &= (x-x')^2 + (y-y')^2
 \end{aligned}$$

Définition:



Soit V un e.v. sur $\mathbb{R}$ avec un prod. scalaire. Soit $v, w \in V$, $v \neq 0$, $w \neq 0$. L'angle entre v et w est par déf. la longueur de l'arc le plus court du cercle unité qui relie $\frac{v}{\|v\|}$ à $\frac{w}{\|w\|}$. où le cercle unité considéré est $\{u \in E_{V,W} : \|u\| = 1\}$

On note $\angle(v, w) = \theta$ cet angle tq $0 \leq \theta \leq \pi$

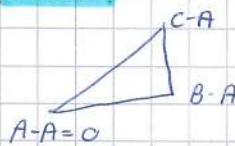
Def:

Soit V un e.v. sur $\mathbb{R}$ muni d'un prod. scalaire.
 Soit D_v une droite de V de vecteur directeur $v \in V$.
 Soit D_w une droite de V de vect. dir. $w \in V$.
 $\angle(D_v, D_w) = \min\{\angle(v, w), \angle(v, -w)\}$
 est l'angle entre D_v et D_w .

Prop:

Soit V un e.v. sur $\mathbb{R}$ muni d'un prod. scal.
 A, B, C des vecteurs de V $A \neq B$, $B \neq C$, $A \neq C$
 La somme des angles de triangle formés des côtés $[AB] \cup [BC] \cup [CA]$ vaut π .

Preuve:



Quitte à appliquer une translation on peut supposer que A .
 On pose $v' = B-A$ et $w = C-A$

Si le Δ est dégénéré, les 3 points sont sur la même droite.
 (idem pour les autres cas dégénéré)

Si v et w ne sont pas sur la même droite passant par zéro. $E_{V,W}$ est isométrique au plan euclidien.
 et $0, v, w$ est un plan triangle.

Lemme:

Soit $O, A_1, A_2, \dots, A_n = O$ des points de $\mathbb{R}^2$. Supposons que ce sont les sommets d'un polygone convexe.

$$(\pi - \alpha_1) + (\pi - \alpha_2) + \dots + (\pi - \alpha_n) = 2\pi$$

$$n\pi - \sum_{k=1}^n \alpha_k = 2\pi \quad \sum_{k=1}^n \alpha_k = n\pi - 2\pi$$



Prop:

Soit V e.v. sur $\mathbb{R}$ muni d'un produit scalaire
 $v, w \in V \setminus \{0\}$

$$\frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \cdot \|w\|} = \cos(\angle(v, w))$$

Dém:

Quitte à multiplier par $\frac{1}{\|v\|}$ et $\frac{1}{\|w\|}$ par v et w respectivement,
 On peut supposer $\|v\| = \|w\| = 1$

La formule devient $\cos(\angle(v, w)) = \langle v, w \rangle$
 qui est évidente selon def. du cos.

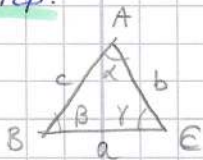
Remarque

$$|\cos x| \leq 1 \quad \text{et} \quad |\cos x| = 1 \iff x = k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{|\langle v, w \rangle|}{\|v\| \cdot \|w\|} = |\cos(\angle(v, w))| \leq 1$$

On retrouve Cauchy-Schwarz.

Prop:



Loi du cosinus:

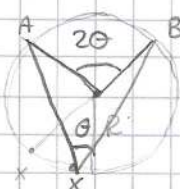
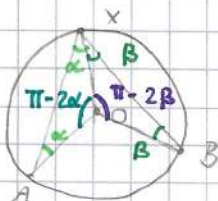
$$\text{Dans un triangle} \quad \cos \alpha = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2bc}$$

Preuve:

$$\begin{aligned} \text{Supposons } A=O \quad a^2 &= \langle B-C; B-C \rangle = \langle B; B \rangle + \langle C; C \rangle \\ &\quad - 2\langle B; C \rangle = c^2 + b^2 \\ &\quad - 2\langle B; C \rangle \\ &= c^2 + b^2 - 2bc \cdot \cos \alpha \end{aligned}$$

Géométrie I :Proposition : 1.1Demi-angle. $x \notin (A, B)$ Soit $A, B \in \mathbb{R}^2$ de même norme $\|A\| = \|B\| = R > 0$ Soit $x \in \mathbb{R}^2$ $\|x\| = R$, x n'est pas sur l'arc A, B

$$2\angle([x; A], [x; B]) = \angle(A, B)$$

Preuve :

Le triangle AOX est isocèle de même B O X est isocèle.

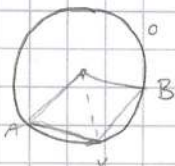
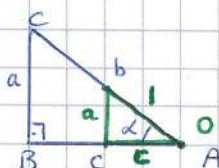
La somme des angles d'un triangle est π .L'angle $\angle(A, B)$ est donc :

$$2\pi - \pi + 2\alpha - \pi + 2\alpha = 2\alpha + 2\beta = 2\angle[(x; A), (B; x)]$$

Proposition : 1.2Demi-angle : $x \in (A, B)$

Les triangles AOX et BOX sont isocèles.

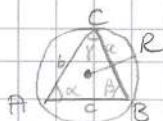
$$\angle(A, B) = \pi - 2\alpha + \pi - 2\beta = 2\pi - 2(\alpha + \beta) = 2\pi - 2\angle[(x; A), (x; B)]$$

Trigonométrie :

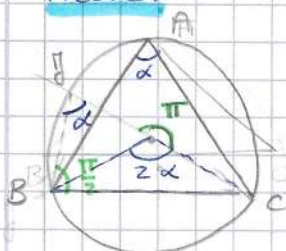
$$\sin \alpha = \frac{a}{b}$$

$$\cos \alpha = \frac{c}{b}$$

$$\tan \alpha = \frac{a}{c}$$

Preuve :On peut supposer $A=0$ On applique l'homothétie de rapport b^{-1} , h On constate que ni les membres de gauche ni les membres de droite ne changent lorsque l'on applique $h_{b^{-1}}$.Conclusion : il suffit de démontrer ces formules lorsque $b=1$.
Mais ces formules sont vraies dans ce cas par déf. de $\cos$ et de $\sin$.Théorème :La loi des sinus.Dans un triangle de sommets A, B, C dont le rayon du cercle circonscrit vaut R ,

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$

Preuve :Soit J l'intersection de la droite contenant C et O avec le cercle.On applique le "demi-angle" donc $\angle([BC], [BJ]) = \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}\angle(O; O\pi)$ Soit α l'angle entre $[J, C]$ et $[J, B]$ $\alpha = \angle([AB], [A, C])$ car on applique 2 fois le "demi-angle."

$$\angle(B, C) \div 2 = \angle([AB], [A, C]) = \alpha = \angle([J, B], [J, C])$$

$$\sin \alpha = \frac{a}{2R}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{\sin \alpha} = 2R \quad \text{de même pour } \frac{b}{\sin \beta} \text{ et } \frac{c}{\sin \gamma}$$

Corollaire du thm du sinus:

L'aire d'un Δ de sommets A, B, C est donnée par la formule:
 $A(ABC) = \frac{abc}{4R}$ où a, b, c sont les longueurs des côtés et R le rayon du cercle circonscrit.

Preuve:

$$\begin{aligned} \text{Aire}(ABC) &= \text{base} \cdot \frac{1}{2} \text{ hauteur} \\ &= c \cdot \frac{\sin(\alpha) b}{2} = \frac{abc}{4R} \quad \begin{matrix} \uparrow \\ \text{thm sinus} \end{matrix} \quad \frac{\sin \alpha}{\alpha} \cdot \frac{1}{2} = \frac{abc}{4R} \end{aligned}$$

Nombres complexes:

Le corps des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$.

C'est un corps commutatif.

Il est muni d'une norme qui en fait un espace complet (Toute suite de Cauchy converge)

Il est algébriquement clos, c'est à dire que tout polynôme à coef dans $\mathbb{C}$ en une variable qui n'est pas constant.

$$P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_d z^d \quad a_0, \dots, a_d \in \mathbb{C}$$

admet une racine $\alpha \in \mathbb{C}$ i.e. $P(\alpha) = 0$

Par exemple: $z^2 = -1$

$\exists$ un certain $\alpha = i$ et qui vérifie $P(i) = i^2 + 1 = 0 \quad i^2 = -1$

Comme ensemble:

$$\mathbb{C} = \{z = x + iy \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$$

pour donner un sens au symbole i , on identifie $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}^2$

$$\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$$

$$(x, y) \mapsto z = x + yi$$

i correspond à prendre (x, y) avec $x=0$ et $y=1$

$$(0, 1) = i$$

1 comme nbr complexe correspond à prendre $x=1, y=0 \quad (1, 0) = 1 \in \mathbb{C}$

$$z = x + iy$$

$$z' = x' + iy'$$

$$(x, y) + (x', y') = (x+x', y+y')$$

$$\oplus \quad z + z' = x + x' + i(y + y')$$

La multiplication:

$$\odot \quad z \cdot z' = xx' - yy' + i(xy' + x'y)$$

$$z = x + iy$$

$x = \text{Re}(z)$ partie réelle $\in \mathbb{R}$

$y = \text{Im}(z)$ partie imaginaire $\in \mathbb{R}$

Il y a une inclusion de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$

$$x \mapsto (x, 0)$$

$$x \mapsto x + i0$$

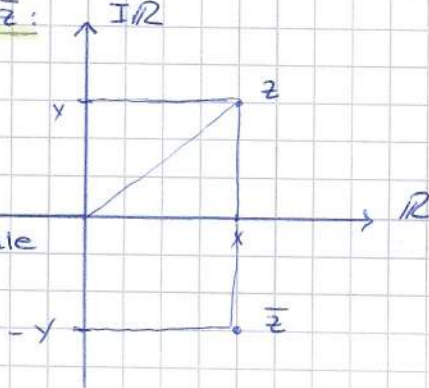
Le conjugué complexe noté $\bar{z}$:

$$z = x + iy \quad \bar{z} = x - iy$$

$$\frac{z + \bar{z}}{2} = \text{Re}(z)$$

C'est la symétrie orthogonale qui fixe l'identité. $(0, 1)$

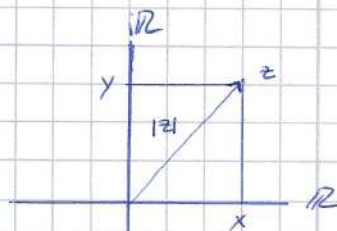
$$\frac{z - \bar{z}}{2i} = \text{Im}(z)$$



La norme de z :

$$|z| = \sqrt{\underbrace{z \cdot \bar{z}}_{\geq 0}} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$



On voit que $|z|$ est la longueur euclidienne du vecteur $z = x + iy$ ($(x, y) \in \mathbb{R}^2$)

Application: $z \neq 0$

$$|z| \neq 0, \quad z \cdot \frac{1}{|z|} \quad \left| z \cdot \frac{1}{|z|} \right| = \frac{1}{|z|} \cdot |z| = 1$$

On dit que $\frac{z}{|z|}$ est normalisé.

Le cercle unité $S^1 \subset \mathbb{C}$

$$S^1 = \{ z \in \mathbb{C} : |z| = 1 \}$$

$$= \{ z \in \mathbb{C} : z \cdot \bar{z} = 1 \}$$

Si $|z| = 1$ on lui associe un argument $\text{Arg}(z)$ qui est par définition la long. de l'arc orienté joignant $1 \in S^1 \subset \mathbb{C}$ à z
 $0 \leq \text{Arg}(z) < 2\pi$.

Forme Polaire: (trigonométrique; exponentielle)Tout nbr complexe $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

s'écrit $z = \rho e^{i\theta}$ $\rho = |z|$ $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ $\theta = \text{Arg}(z)$

multiplication:

$$z = \rho e^{i\theta}$$

$$z' = \rho' e^{i\theta'}$$

$$z \cdot z' = \rho \cdot \rho' \cdot e^{i\theta} \cdot e^{i\theta'} = \rho \cdot \rho' \cdot e^{i(\theta + \theta')}$$

$$e^{i\theta} \cdot e^{i\theta'} = (\cos \theta + i \sin \theta)(\cos \theta' + i \sin \theta')$$

$$= \cos \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta'$$

$$+ i[\cos \theta \sin \theta' + \sin \theta \cos \theta']$$

$$e^{i(\theta + \theta')} = \cos(\theta + \theta') + i \sin(\theta + \theta')$$

Transformation du plan euclidien $\mathbb{R}^2$ et multiplication complexe :On identifie $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$

$$(x, y) \mapsto x + iy = z \quad \|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\bar{z}} = \|z\|$$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda = \lambda \cdot 1 + i \cdot 0 \in \mathbb{C}$ • $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ définit une homothétie de rapport λ .

$$z \mapsto \lambda z$$

Soit $e^{i\theta} \in \mathbb{C}$ $|e^{i\theta}| = 1$ • $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ $z \mapsto e^{i\theta} z$ définit une rotation d'angle θ de centre 0.

cas général:

soit $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

$$z_0 = \rho_0 e^{i\theta_0} \quad \text{où } \rho_0 = |z_0| > 0 \quad \theta_0 = \text{Arg } z \quad 0 \leq \theta < 2\pi$$

• $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$

$$z \mapsto z \cdot z_0$$

On obtient la composition de l'homothétie de rapport $\rho_0 = |z_0|$ avec la rotation $\text{Arg}(z_0) = \theta_0$.Translation:Soit $z_0 \in \mathbb{C}$

$$\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

Transl. de vect z_0 .

$$z \mapsto z + z_0$$

Conj. complexe:

$$\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$z \mapsto \bar{z}$$

symétrie orthogonale d'axe fixe

$$x + iy \mapsto x - iy$$

$$\{z : \text{Im } z = 0\} = \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

Racines n-ème de l'unité:Déf: $z \in \mathbb{C}$ est racine n-ème de l'unité ssi $z^n = 1$ Ex:

$$n=1 \quad z^1 = 1 \quad z=1$$

$$n=2 \quad z^2 = 1 \quad z^2 - 1 = 0 \quad (z+1)(z-1) = 0 \quad z = -1 \text{ ou } z = 1$$

$$n=3 \quad z^3 = 1 \quad \Leftrightarrow (z-1)(z^2+z+1) = 0 \quad \Leftrightarrow z=1 \text{ ou } z^2+z+1=0$$

$$z^2+z+1=0 \quad \Leftrightarrow z = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{i\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{on obtient } \left\{ e^{\frac{2i\pi k}{n}} \quad k=0,1,2 \right\}$$

$$n=4 \quad z^4 = 1 \quad \text{On trouve } \{1, \pm i\} = \left\{ e^{\frac{2i\pi k}{4}} \quad k=0,1,2,3 \right\}$$

Prop gén:Soit $n \in \mathbb{N}$, alors l'ensemble des racines n-ème de l'unité est:

$$\left\{ e^{\frac{2i\pi k}{n}} \quad k=0,1,\dots,n-1 \right\}$$

Ces nombres complexes sont les sommets du polygone régulier à n-côtés centré en 0 de cercle circonscrit de rayon 1.

Preuve:Ce sont bien des solutions $\left(e^{\frac{2i\pi k}{n}} \right)^n = e^{\frac{2i\pi k n}{n}} = e^{2i\pi k} = 1$. Pourquoi pas d'autres?On remarque que $e^{\frac{2i\pi k}{n}} - 1$ sont bien les sommets du polygone. (interprétation de $e^{\frac{2i\pi k}{n}}$ comme rotation)

Un polynôme de degré n a au plus n racines.

 $P(z) = (z)^n - 1$ est de degré n, il y a donc au plus n racines.

Proposition:

$$n \in \mathbb{N} \quad 1 + e^{\frac{2i\pi}{n}} + e^{\frac{4i\pi}{n}} + \dots + e^{\frac{2i\pi(n-1)}{n}} = 0$$

Preuve: première preuve: La résultante des forces est nulle.

deuxième preuve:

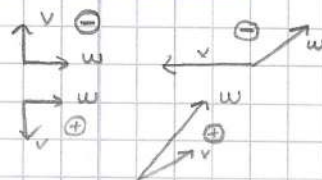
$$\begin{aligned} e^{\frac{2i\pi}{n}} \left(\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2i\pi k}{n}} \right) &= \sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2i\pi(k+1)}{n}} \\ &= \sum_{k=1}^n e^{\frac{2i\pi k}{n}} = \sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2i\pi k}{n}} \\ \text{si } \sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2i\pi k}{n}} &\neq 0 \Rightarrow e^{\frac{2i\pi}{n}} = 1 \end{aligned}$$

Définition:

Orientation dans le plan.

Soit $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$ la base canonique du plan $\mathbb{R}^2$.
Un couple ordonné de vecteurs $v, w \in \mathbb{R}^2$ $v = (v_1, v_2)$ $w = (w_1, w_2)$
définit la même orientation que le couple ordonné e_1, e_2
ssi par définition $\begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{vmatrix} = v_1 w_2 - v_2 w_1 > 0$
si $\begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{vmatrix} < 0$ alors v, w définissent l'orientation opposée.

Ex: $w = e_1$, $v = e_2$ orientation opposée
 $v = e_1$, $w = e_2$ orientation identique

Définition:

Soit $A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ une app. lin.

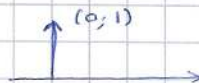
On dit que A préserve l'orientation ssi $\det(A) > 0$
et A renverse l'orientation ssi $\det(A) < 0$.

Remarque:

On est libre de choisir une base de $\mathbb{R}^2$ par ex. $e_1, (1, 0)$, $e_2, (0, 1)$
On exprime la matrice de A dans cette base $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

Exemple:

$$\begin{aligned} G_{(0,1)}(x, y) &= (\dot{x}, -y) \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} &= -1 \end{aligned}$$

Proposition:

Soit $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ une isom pour la métrique euclidienne.
Alors, il existe une translation T , une rotation R qui fixe o
et $E \in \{1, 0\}$ t.q. $h = T \circ R \circ G_{(0,1)}^E$.

De plus E, R, T sont uniques pour un h donné.

Si $E = 0$ on dit que h préserve l'orientation

Si $E = 1$ on dit que h renverse l'orientation.

Corollaire:

En identifiant $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$

$$(x, y) \mapsto x + iy$$

On déduit que toute isométrie $h: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ s'écrit

$$h(z) = e^{i\alpha} z + v \quad \text{à} \quad v \in \mathbb{C}, \quad 0 \leq \alpha < 2\pi$$

si h préserve l'orientation.

$$h(z) = e^{i\alpha} \bar{z} + v \quad \text{si } h \text{ renverse l'orientation.}$$

Rem: $h(o) = v \quad h(1) - h(o) = e^{i\alpha}$

Preuve de la proposition:

Soit $\mathcal{T} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ une translation, telle que

$$\mathcal{T}(0) = 0$$

Soit $\mathcal{R} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ une rotation fixant 0

telle que $\mathcal{R} \circ \mathcal{T}(h(e_1)) = e_1$

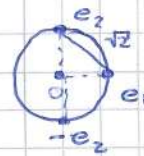
Donc $\mathcal{R} \circ \mathcal{T} \circ h$ fixe $0 \in \mathbb{R}^2$

fixe e_1

$$\mathcal{R} \circ \mathcal{T} \circ h(e_2) = \pm e_2$$

si c'est e_2 on prend $\varepsilon = 0$

si c'est $-e_2$ on prend $\varepsilon = 1$



$$\sigma_{(1,0)}^\varepsilon \circ \mathcal{R} \circ \mathcal{T} \circ h(e_2) = e_2 \Rightarrow \text{fixe } 0, e_1, e_2$$

Une isométrie de $\mathbb{R}^2$ qui fixe $0, e_1, e_2$ est égale à l'identité.

En effet, premièrement tout point du cercle unité est fixé, (distance à $0, e_1, e_2$)

Toutes droites passant par 0 est fixée.

Par Cauchy-Schwarz l'image d'une droite est une droite, comme 0 et tout point de cercle unité est fixé, alors la droite est fixée.

$$\sigma^\varepsilon \circ \mathcal{R} \circ \mathcal{T} \circ \mathcal{L} = \text{id}$$

$$\mathcal{R} \circ \mathcal{T} \circ \mathcal{L} = \sigma^\varepsilon$$

$$\mathcal{T} \circ \mathcal{L} = \mathcal{R}^{-1} \sigma^\varepsilon$$

$$\mathcal{L} = \mathcal{T}^{-1} \circ \mathcal{R}^{-1} \circ \sigma^\varepsilon = \mathcal{T} \circ \mathcal{R} \circ \sigma^\varepsilon$$

Unicité:

$$\mathcal{T} \mathcal{R} \sigma^\varepsilon = \mathcal{T}' \mathcal{R}' \sigma^{\varepsilon'}$$

$$\mathcal{T}'^{-1} \mathcal{T} \mathcal{R} \sigma^\varepsilon = \mathcal{R}' \sigma^{\varepsilon'}$$

$$\mathcal{T}'^{-1} \mathcal{T} \mathcal{R} \sigma^\varepsilon = \mathcal{R}' \sigma^{\varepsilon'} \sigma^\varepsilon$$

$$(\mathcal{T}')^{-1} \mathcal{T} = \mathcal{R} \circ \sigma^\varepsilon \circ \sigma^{\varepsilon'} \circ \mathcal{R}' \rightarrow \text{Fixe } 0 \text{ donc}$$

$$\text{et on a } \mathcal{T} = \mathcal{T}'$$

$$\mathcal{R} \sigma^\varepsilon = \mathcal{R}' \sigma^{\varepsilon'}$$

$$(\mathcal{R}')^{-1} \mathcal{R} = \sigma^\varepsilon \circ \sigma^{\varepsilon'}$$

préserve orientation donc $\sigma^\varepsilon = \sigma^{\varepsilon'} \quad \varepsilon = \varepsilon'$

Géométrie I :Inversion relativement à un cercle :But : Comprendre géométriquement l'application $\sigma : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $z = \rho e^{i\theta}$ où $\rho = |z|$ $\theta = \text{Arg}(z)$

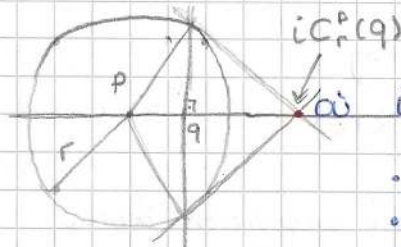
$$z \mapsto \frac{1}{\bar{z}}$$

$$\sigma(\rho e^{i\theta}) = \frac{1}{\bar{\rho e^{i\theta}}} = \frac{1}{\rho e^{-i\theta}} = \frac{1}{\rho} e^{i\theta}$$

sont semblables. Donc $\frac{r}{1} = \frac{1}{R}$; $r = \frac{1}{R}$ La construction esquissée correspond à l'inversion de cercle de centre $O \in \mathbb{R}^2$ et de rayon 1.Définition : Soit C_r^p le cercle de $\mathbb{R}^2$ de centre $p \in \mathbb{R}^2$, de rayon $r > 0$

$$i_{C_r^p} : \mathbb{R}^2 \setminus \{p\} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{p\}$$

$$q \mapsto i_{C_r^p}(q)$$

où $i_{C_r^p}(q)$ est l'unique point de $\mathbb{R}^2 \setminus \{p\}$

- qui se trouve sur la droite passant par p et q
- du même côté que q
- à distance de p égale à $\frac{r^2}{d(p,q)}$

 $C := C_r^p$ notation

$$i_C(q) \stackrel{(\ast)}{=} p + \lambda(q-p)$$

$$d(p, p + \lambda(q-p)) = \frac{r^2}{d(p,q)} \quad \text{calculons } \lambda$$

$$\|\lambda(p-q)\| = \frac{r^2}{\|p-q\|} \quad |\lambda| = \frac{r^2}{d(p,q)^2}$$

$$\text{On obtient donc } i_{C_r^p}(q) = p + \frac{r^2}{\|q-p\|^2} (q-p)$$

$$\text{Si le cercle est centré en } p=0 \quad i_{C_r^0}(q) = \frac{r^2}{\|q\|^2} q$$

$$d(p, i_{C_r^p}(q))$$

$$\frac{d(p, i_{C_r^p}(q))}{r} = \frac{r}{d(p,q)} \Rightarrow d(p, i_{C_r^p}(q)) = \frac{r^2}{d(p,q)}$$

$$i_C \circ i_C = \text{id} \quad \text{c'est-à-dire } i_C \circ i_C(q) = q \quad \forall q \in \mathbb{R}^2 \setminus \{ \text{centre de } C \}$$

Le cercle sur lequel l'application est obtenue, est le cercle fixe $\{q \mid i_C(q) = q\} \Leftrightarrow q \in C$ * Preuve : d'après la formule, un point q est fixe $\Leftrightarrow \|p-q\| = r$.

Proposition: L'application $\sigma: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ est l'inversion

$$z \mapsto \frac{1}{\bar{z}}$$

de cercle $S^1 = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$

Preuve:

On prend $p=0$ et $r=1$

$$\sigma(z) = \frac{z}{\|z\|^2} = \frac{1}{\bar{z}} = \sigma(z)$$

Proposition:

Soit C un cercle de $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ alors $\sigma(C)$ est un cercle de $\mathbb{C} \setminus \{0\}$

Preuve:

$R_\theta: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ la rotation de centre 0 d'angle θ .
Elle conserve les cercles de $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

$h_\lambda: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ pour l'homothétie de centre 0 de rapport $\lambda > 0$

$$R_\theta \sigma = \sigma R_\theta \text{ et } h_\lambda \sigma = \sigma h_\lambda$$

$$R_\theta \sigma(\frac{1}{\rho} e^{i\alpha}) = R_\theta(\frac{1}{\rho} e^{i\alpha}) = \frac{1}{\rho} e^{i(\alpha+\theta)}$$

$$\sigma R_\theta(\frac{1}{\rho} e^{i\alpha}) = \sigma(\frac{1}{\rho} e^{i(\alpha+\theta)}) = \frac{1}{\rho} e^{i(\alpha+\theta)}$$

Conclusion: Il suffit de prouver la proposition pour C de rayon 1 et de centre $a > 0$.

En effet, on peut appliquer une homothétie de rapport λ bien choisi, puis une rotation de sorte à obtenir un cercle de rayon 1 et un centre $a > 0$.

Comme σ commute avec les R_θ et les h_λ .

Si C est donné, $\sigma(C)$ cercle?

$$\begin{aligned} & \sigma(h_\lambda^{-1} h_\lambda(C)) \\ & \parallel \\ & h_\lambda^{-1} \sigma(h_\lambda(C)) \end{aligned}$$

si on montre $\sigma(h(C))$ est un cercle de rayon 1, on déduit $\sigma(C)$ est un cercle.

Si C est un cercle de rayon 1.

$\sigma(C)$ cercle?

$$\sigma(R_\theta^{-1} R_\theta(C)) = R_\theta^{-1}(\sigma(R_\theta(C))) \text{ si } \sigma(R_\theta(C)) \text{ est un cercle}$$

alors $\sigma(C)$ est un cercle.

Rappel:

L'équation d'un cercle de centre $a \in \mathbb{C}$ de rayon $r > 0$ est $|z - a| = r$

$$(z - a)(\bar{z} - \bar{a}) = r^2 \Leftrightarrow z\bar{z} - a\bar{z} - \bar{a}z + a\bar{a} = r^2$$

Preuve: SuiteDans notre cas, on a $r=1$ et $a > 0$

$$\text{soit } z\bar{z} - a\bar{z} - az + a^2 = 1 \quad (*)$$

L'équation de notre cercle.

Soit $w = \frac{1}{z}$ où z vérifie $(*)$

$$\bar{z} = \frac{1}{\bar{w}} \Leftrightarrow z = \frac{1}{w} \text{ remplaçons dans } (*)$$

$$\frac{1}{w} \cdot \frac{1}{\bar{w}} - \frac{a}{\bar{w}} - \frac{a}{w} + a^2 = 1 \quad \text{multiplions par } w\bar{w}$$

$$1 - a\bar{w} - aw + aw\bar{w} = w\bar{w}$$

$$w\bar{w}(1+a^2) - aw - a\bar{w} + 1 = 0$$

$$w\bar{w} - \frac{a}{-1+a^2} \bar{w} - \frac{a}{-1+a^2} w + \frac{1}{-1+a^2} = 0$$

$$\begin{aligned} w\bar{w} - \frac{a}{-1+a^2}(\bar{w}+w) + \frac{a^2}{(a^2-1)^2} &= \frac{a^2}{(a^2-1)^2} - \frac{1}{-1+a^2} \\ &= \frac{a^2 - (a^2-1)}{(a^2-1)^2} \\ &= \left(\frac{1}{a^2-1}\right)^2 \end{aligned}$$

On retrouve donc l'équation du cercle de rayon $\frac{1}{a^2-1}$ et de centre $\frac{a}{a^2-1}$.Proposition:Soit C_p^r le cercle de $\mathbb{R}^2$ de centre $p \in \mathbb{R}^2$ et de rayon $r > 0$.Soit $i_{C_p^r}: \mathbb{R}^2 \setminus \{p\} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{p\}$ l'inversion correspondante.Soit $\alpha \in \mathbb{R}^2 \setminus \{p\}$ un cercle. $i_{C_p^r}(\alpha)$ est un cercle.Preuve:Tp: $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ translation de vecteur p .
 $v \mapsto v+p$ Soit C_o^r le cercle de centre $o \in \mathbb{R}^2$ de rayon r .

On a:

$$i_{C_p^r} = T_p i_{C_o^r} (T_p)^{-1}$$

se vérifie avec la formule $(*)$

$$h_\lambda i_{C_o^r} h_\lambda^{-1}$$

$$=$$

$$i_{C_o^r}$$

Il suffit de vérifier la proposition lorsque $p=0$ et $r=1$.

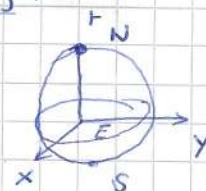
C'est le cas déjà prouvé.

La projection stéréographique, la sphère de Riemann, $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$:

$$S^2 = \{(x, y, t) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + t^2 = 1\} \quad N = (0, 0, 1)$$

$$S = (0, 0, -1)$$

$$E = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$



$$\mathbb{C} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(z, t) \mapsto (x, y, z)$$

$$z = x + iy$$

$S^2 \subset \mathbb{C} \times \mathbb{R}$ devient

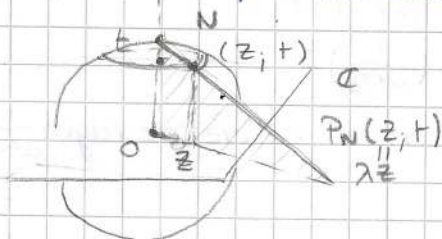
$$S^2 = \{(z, t) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} \mid |z|^2 + t^2 = 1\}$$

Par définition, la projection stéréographique nord

$$S^2 \setminus \{N\} \xrightarrow{P_N} \mathbb{C}$$

$$(z, t) \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } (z, t) = (0, -1) \\ \lambda z & \text{où } \lambda > 0 \end{cases}$$

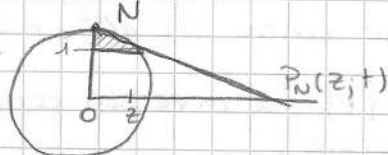
déterminé par la condition suivante:



On demande que $\lambda z = P_N(z, t)$ c'est-à-dire $P_N(z, t)$ est sur la droite du plan complexe qui contient 0 et z ($z \neq 0$) et aussi sur la droite contenant N et (z, t) .

Calcul de λ :

En coupe



Le triangle hachuré est semblable au grand triangle.

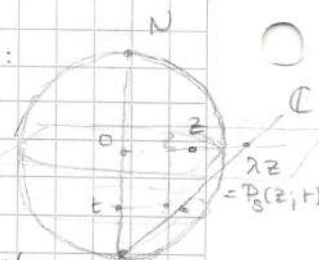
$$\frac{|z|}{1-t} = \frac{|\lambda z|}{1} \quad \text{comme } \lambda > 0 \text{ et } |z| \neq 0$$

$$\lambda = \frac{1}{1-t} \quad \text{donc } (z, t) \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } (z, t) = (0, -1) \\ \frac{z}{1-t} & \text{sinon} \end{cases}$$

De manière analogue, on définit la proj stéréo sud:

$$S^2 \setminus \{S\} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$(z, t) \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } (z, t) = (0, 1) \\ \frac{z}{1+t} & \text{sinon} \end{cases}$$



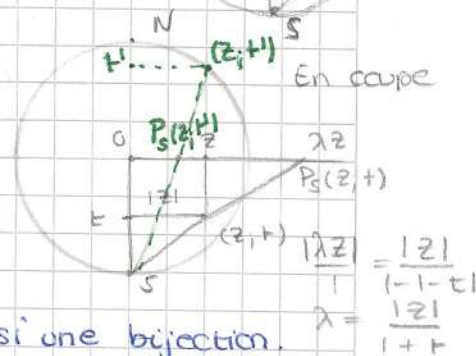
Propositions:

$P_N : S^2 \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{C}$ est une bijection

$P_S : S^2 \setminus \{S\} \rightarrow \mathbb{C}$ est une bijection

$P_N|_{S^2 \setminus \{N, S\}} : S^2 \setminus \{N, S\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ est aussi une bijection.

$P_S|_{S^2 \setminus \{N, S\}} : S^2 \setminus \{N, S\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ est aussi une bijection.



Lemme:

$$S^2 \setminus \{N, S\} \xrightarrow{p} S^2 \setminus \{N, S\} \quad \text{est un homéomorphisme}$$
$$p \mapsto P_S^{-1} N_N(p) \quad \text{est égal à son inverse}$$

Preuve:

On compose des app. continues donc des compositions de certaines de leur restrictions le sont aussi, a fortiori.

Par vérifier que l'application est égale à son inverse on va prouver:

Affirmation: on a un diagramme d'homéomorphisme:

$$\begin{array}{ccc} S^2 \setminus \{N, S\} & \xrightarrow{P_S^{-1} P_N} & S^2 \setminus \{N, S\} \\ P_N \downarrow & & \downarrow P_N \\ \mathbb{C}^* & \xrightarrow{\sigma} & \mathbb{C}^* \end{array}$$

c'est-à-dire $P_N P_S^{-1} P_N = P_N \sigma P_N$

Preuve $P_N P_S^{-1} P_N P_N^{-1} = \sigma$

$$P_N P_S^{-1} = \sigma$$

↑
ck. déjà prouvé.

On sait que $\sigma^{-1} = \sigma$
 $\Leftrightarrow \sigma^2 = \text{Id}$

donc $(P_N P_S^{-1})^2 = \text{id}_{S^2 \setminus \{N, S\}}$

On sait d'après l'aff que $P_N \circ P_S^{-1} P_N P_N^{-1} = \sigma$

$$\begin{aligned} P_S^{-1} P_N &= P_N^{-1} \sigma P_N \\ (P_S^{-1} P_N)^2 &= (P_N^{-1} \sigma P_N) (P_N^{-1} \sigma P_N) \\ &= P_N^{-1} \sigma \sigma P_N \\ &= P_N^{-1} P_N \\ &= \text{Id} \end{aligned}$$

Proposition: L'application $S^2 \xrightarrow{\tilde{\sigma}} S^2$ définie par :

$$p \mapsto \begin{cases} S & \text{si } p = N \\ P_S^{-1}(P_N(p)) & \text{sinon} \end{cases}$$

est continue, bijective, égale à son inverse et donc c'est un homéomorphisme.

Preuve:

On sait déjà que $S^2 \setminus \{N, S\} \xrightarrow{P_S^{-1}P_N} S^2 \setminus \{N, S\}$ est continue, bijective et égale à son inverse. Vérifions la continuité de $\tilde{\sigma}$ au pôle Nord.

Soit C_N une calotte autour du pôle nord.

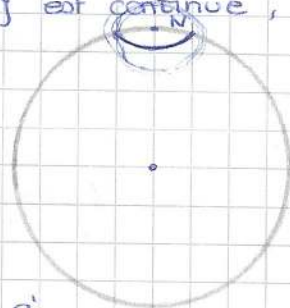
$$C_N = B^{1/2}(N; \frac{1}{10}) \cap S^2 \text{ sur } C_N \setminus \{N\}$$

$P_S^{-1}P_N$ et $P_N^{-1}P_S$ coïncident.

De plus $\tilde{\sigma}(N) = S$ par définition.

$P_N^{-1}P_S(N) = S$ donc $\tilde{\sigma}$ et $P_N^{-1}P_S$ restreintes à C_N coïncident!

Comme $P_N^{-1}P_S$ est continue en N , $\tilde{\sigma}$ aussi.



Conclusion:

On peut identifier $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ à la sphère S^2 (de Riemann)

$$S^2 = (S^2 \setminus \{N\}) \cup \{N\} \longrightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

$$\begin{array}{ccc} p & \longmapsto & P_N(p) \\ N & \longmapsto & \infty \end{array}$$

On peut décrire $\tilde{\sigma}$ à l'aide de cette identification :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} \cup \{\infty\} & \longrightarrow & \mathbb{C} \cup \{\infty\} \\ z & \longmapsto & \frac{1}{\bar{z}} \quad (0 \mapsto \infty; \infty \mapsto 0) \end{array}$$

Etendue

Diagramme:

$$\begin{array}{ccc} S^2 & \xrightarrow{\tilde{\sigma}} & S^2 \\ P_N \downarrow & & \downarrow P_N \\ \mathbb{C} \cup \{\infty\} & \xrightarrow{z \mapsto \frac{1}{\bar{z}}} & \mathbb{C} \cup \{\infty\} \\ & \text{étendue} & \end{array}$$

Géométrie de Möbius:

On considère l'espace euclidien $\mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$.

Un hyperplan de $\mathbb{R}^n$: $p \in \mathbb{R}^n$

$$H_p = \{x + p : \langle x, \vec{R} \rangle = 0\} \quad x \in \mathbb{R}^n, \vec{R} \perp$$

$$S(p, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - p\| = r\} \quad p \in \mathbb{R}^n, r > 0$$

On appelle (hyper) sphère (généralisée) un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ qui est soit une (hyper) sphère de $\mathbb{R}^n$, soit un hyperplan de $\mathbb{R}^n$.

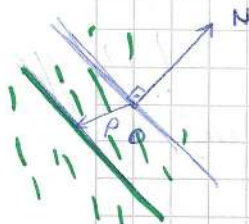
Thm:

$p_0 \in \mathbb{R}^n, r > 0$. On définit l'inversion de sphère $S(p_0, r)$:

$$i_{S(p_0, r)} : \mathbb{R}^n \cup \{\infty\} \longrightarrow \mathbb{R}^n \cup \{\infty\} \text{ par les conditions}$$

$$i_{S(p_0, r)}(q) = \begin{cases} \infty & \text{si } q = p_0 \\ p_0 + \frac{r^2}{\|q - p_0\|^2} (q - p_0) & \text{si } q \in \mathbb{R}^n \setminus \{p_0\} \\ p_0 & \text{si } q = \infty \end{cases}$$

Alors l'image par cette application d'une sphère généralisée, c'est une hypersphère généralisée.



Preuve:

Quitte à conjuguer par une translation, on peut supposer que le centre de l'inversion p_0 est égal à 0.

Soit $K = \{p : \|p - q_0\| = s\}$ hypersphère de centre $q_0 \in \mathbb{R}^n$ et rayon $s > 0$

à voir: $i_{S(0,r)}(K)$ est une sphère généralisée (hyperplan ou sphère)

$$i_{S(0,r)} = i_{S(0,r)}^{-1} \quad (\text{à vérifier})$$

Montrons que $i_{S(0,r)}^{-1}(K)$ est une sphère généralisée.

$$i_{S(0,r)}^{-1}(K) = \{p : \|i_{S(0,r)}(p) - q_0\| = s\}$$

$$\|i(p) - q_0\| = s \Leftrightarrow \left\| \frac{r^2}{\|p\|^2} p - p_0 \right\|^2 = s^2$$

$$\Leftrightarrow \left\langle \frac{r^2}{\|p\|^2} p - q_0, \frac{r^2}{\|p\|^2} p - q_0 \right\rangle = s^2$$

$$\frac{r^4}{\|p\|^2} + \|q_0\|^2 - \frac{2r^2}{\|p\|^2} \langle p, q_0 \rangle$$

Cas 1:

$s = \|q_0\|$ c'est-à-dire K passe par le centre de l'inversion. Notre équation devient:

$$\frac{r^4}{\|p\|^2} = \frac{2r^2}{\|p\|^2} \langle p, q_0 \rangle \Leftrightarrow \langle p, q_0 \rangle = \frac{r^2}{2}$$

C'est l'équation d'un hyperplan!

Cas 2:

$s \neq \|q_0\|$ K ne passe pas par le centre de l'inversion.

$$\frac{r^4}{\|p\|^2} - \frac{2r^2}{\|p\|^2} \langle p, q_0 \rangle = s^2 - \|q_0\|^2$$

$$\frac{r^4}{(s^2 - \|q_0\|^2)^2} \|q_0\|^2 + \frac{r^4}{s^2 - \|q_0\|^2} = \|p\|^2 - 2 \left\langle p, \frac{-r^2}{s^2 - \|q_0\|^2} q_0 \right\rangle + \frac{r^4}{(s^2 - \|q_0\|^2)^2} \|q_0\|^2 = *$$

$$\left(\frac{r^4 \|q_0\|^2 + (s^2 - \|q_0\|^2) r^4}{(s^2 - \|q_0\|^2)^2} = \left(\frac{r^2 s}{s^2 - \|q_0\|^2} \right) \right)$$

$$* = \left\| p - \left(\frac{-r^2}{s^2 - \|q_0\|^2} \right) q_0 \right\|^2$$

qui est la sphère de centre $\frac{-r^2}{s^2 - \|q_0\|^2} q_0$ et de

rayon $\frac{r^2 s}{(s^2 - \|q_0\|^2)}$

Produit vectoriel dans $\mathbb{R}^3$:

Rappel (2) sur le déterminant:

$n=2$: Soit $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ une matrice 2×2 de nombres complexes $a_{ij} \in \mathbb{C}$
 $i, j = \{1, 2\}$
 $\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$

$$n=3: \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$\hookrightarrow$ développement relativement à la 1^{ère} colonne.

Le déterminant change de signe si on permute 2 lignes, idem pour 2 colonnes.

C'est une application linéaire en les colonnes:

$$\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \xrightarrow{\det} \mathbb{R}$$

$$U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \quad V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \quad W = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$$

$$(U; V; W) \mapsto \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} \text{ est linéaire en } U, V, W.$$

$$\text{Donc } \det(U+U'; V; W) = \det(U; V; W) + \det(U'; V; W)$$

$$\det(\lambda U; V; W) = \lambda \det(U; V; W)$$

$$\text{Antisymétrique: } \det(U; V; W) = -\det(V; U; W) = \det(V; W; U) = -\det(U; W; V)$$

Orientation dans $\mathbb{R}^3$:

Déf: $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ sont linéairement indépendants $\Leftrightarrow$ la seule manière d'écrire 0 comme combinaison linéaire de u, v, w est la comb. triviale.
 [Si $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tq $\alpha u + \beta v + \gamma w = 0$ alors $\alpha = \beta = \gamma = 0$]

Déf: $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ forment un système orthonormé ssi
 $\langle u, u \rangle = \langle v, v \rangle = \langle w, w \rangle = 1$
 $\langle u, v \rangle = \langle u, w \rangle = \langle v, w \rangle = 0$

Autre manière (pratique) d'écrire:

Soit $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$:

forment un sys. orth $\Leftrightarrow \langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$

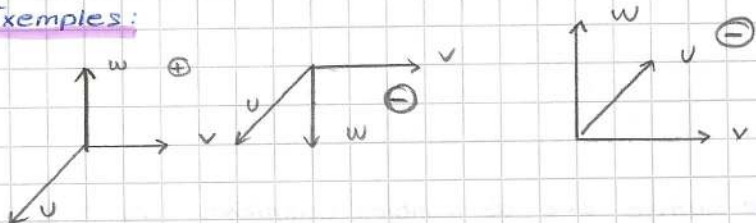
Prop: Si $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$ sont orthonormés alors ils sont indépendants.

Preuve: Soit une comb. liné. $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0$ mq $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$
 $\langle v_i; \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 \rangle = 0$ Soit $1 \leq i \leq 3$
 $\alpha_i \langle v_i, v_i \rangle = 0$
 $\alpha_i = 0.$

Déf: Soit $\{u, v, w\}$ une famille ordonnée de vecteurs linéairement indép de $\mathbb{R}^3$. Cette famille définit la m^{ème} orientation que $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ si

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} > 0 \quad \left(\text{si } < 0 \text{ l'orientation inverse} \right)$$

Exemples:



Produit vectoriel:

$$\vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

$$u \wedge v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

ça ne veut rien dire
juste moyen mnémotechnique

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

$$= \vec{i} \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} u_2 v_3 - v_2 u_3 \\ v_1 u_3 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - v_1 u_2 \end{pmatrix}$$

On voit sur la formule que $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ est bilinéaire et antisymétrique.
($u, v \mapsto u \wedge v$)

Proposition: Soit $A: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ une app. lin.

$\exists!$ application linéaire ${}^t A: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \forall v, w \in \mathbb{R}^3$

$$\langle Av; w \rangle = \langle v; {}^t A w \rangle$$

Preuve:

e_1, e_2, e_3 la base canonique de $\mathbb{R}^3$
la matrice de A ds cette base $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad j=1,2,3$
 $A(e_j) = \sum_{i=1}^3 a_{ij} e_i$

$$\langle A(e_j); e_i \rangle = a_{ij} \quad \forall i, j$$

$$\langle e_j; {}^t A(e_i) \rangle = a_{ij} \quad \forall i, j$$

$$\langle {}^t A(e_i); e_j \rangle = a_{ij}$$

$$\langle {}^t A e_j; e_i \rangle = a_{ji}$$

On obtient donc A^t en transposant A (en échangeant lignes et colonnes).

Matrice du Prod. vect:

$$T_u: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$v \mapsto u \wedge v$$

$u \in \mathbb{R}^3$ est fixé

T_u est linéaire en v .

La matrice de T_u dans la base canonique est:

$$T_u(e_1) = u \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ u_3 \\ -u_2 \end{pmatrix} \quad T_u(e_2) = u \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u_3 \\ 0 \\ u_1 \end{pmatrix}$$

$$T_u(e_3) = u \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2 \\ -u_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T_u = \begin{pmatrix} 0 & -u_3 & u_2 \\ u_3 & 0 & -u_1 \\ -u_2 & u_1 & 0 \end{pmatrix}$$

$${}^t T_u = -T_u$$

Conséquences de la formule:

$$\begin{aligned} \forall u, v, w \in \mathbb{R}^3 \\ \langle \underline{u \wedge v}, w \rangle &= \langle T_0 v, w \rangle = \langle v, {}^t T_0 w \rangle = -\langle v, T_0 w \rangle \\ &= -\langle v, u \wedge w \rangle \\ &= -\langle \underline{u \wedge w}, v \rangle \end{aligned}$$

Corollaire: $\forall u, v, w \in \mathbb{R}^3$

$$\det(u, v, w) = \langle u \wedge v, w \rangle$$

Preuve: pour vérifier l'égalité de 2 app. lin multilinéaire antisymétrique, il suffit de tester l'égalité pour $u = e_1, v = e_2, w = e_3$

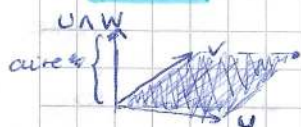
$$\det(e_1, e_2, e_3) = \langle \underline{e_1 \wedge e_2}, e_3 \rangle$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 = 1$$

Corollaire: (Interprétation géométrique)

Soit $u, v \in \mathbb{R}^3$. Alors $u \wedge v$ est l'unique vecteur de $\mathbb{R}^3$ tq

- i) $u \wedge v$ est orth. à u et v
- ii) $\|u \wedge v\|$ = aire du parallélogramme engendré par u et v .
- iii) si $u \wedge v \neq 0$ alors $\{u, v, u \wedge v\}$ est positivement orienté.

Preuve:

$$\text{i) } \langle u \wedge v, u \rangle = \langle u \wedge v, v \rangle = 0$$

car c'est antisymétrique!

$$\text{iii) } \|u \wedge v\|^2 = \det(u \wedge v, u \wedge v) \text{ d'après le corollaire.}$$

ii) Pas à Pas ↓

Proposition: Soit $R: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ une iso tq $R(e_i) = 0$ + préserve les orientations

$$\text{Alors } \forall u, v \quad Ru \wedge Rv = R(u \wedge v)$$

Preuve:

$$\text{On sait que } R \text{ est linéaire. } \langle Ru, Rv \rangle = \langle u, v \rangle$$

$$\langle u, {}^t R R v \rangle = \langle u, v \rangle \Rightarrow {}^t R R = \text{id} \quad {}^t R = R^{-1}$$

$$\det({}^t R R) = 1 = \det({}^t R) \cdot \det(R) = \det(R)^2 = 1$$

$$\det(R) = \pm 1 \text{ et } R \text{ préserve l'orientation}$$

$$\text{Conclusion: } \det(R) = 1$$

$$Ru \wedge Rv \stackrel{?}{=} R(u \wedge v) \quad \text{égalité entre 2 app. lin antisymétrique}$$

donc il suffit de vérifier sur des vecteurs de base.

$$Re_1 \wedge Re_2 \stackrel{?}{=} R(e_1 \wedge e_2)$$

$$Re_1 \wedge Re_2 \stackrel{?}{=} Re_3 \quad Re_3 \text{ est } \perp \text{ à } Re_1 \text{ et } Re_2 \text{ (R iso)}$$

$$\bullet \{Re_1, Re_2, Re_3\} \text{ orienté } \oplus \det(R) > 0.$$

Ces deux points sont aussi vrais en remplaçant $R(e_3)$ par $Re_1 \wedge Re_2$ selon i) et ii)

dernier point: $\|R(e_1) \wedge R(e_2)\| = 1$ Soit $\lambda > 0$

$$R(e_1) \wedge R(e_2) = \lambda R(e_3)$$

$$\lambda = \langle \lambda R(e_3), R(e_3) \rangle = \lambda \cdot 1 = \langle R(e_1) \wedge R(e_2), R(e_3) \rangle \\ = \det(R(e_1), R(e_2), R(e_3))$$

Fin de preuve de ii)

$$\|u \wedge v\| = \|R(u \wedge v)\| = \|Ru \wedge Rv\|$$

On choisit R iso de $\mathbb{R}^3$ tq $R(o) = o$ tq le vecteur normal au plan engendré par u et v , disons $\vec{n}$ satisfait $R(\vec{n}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

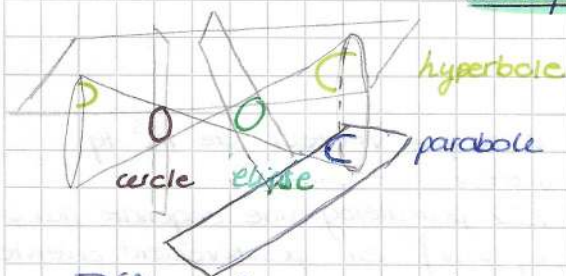
Donc $R(u)$ et $R(v)$ ont une 3^{ème} coordonnée nulle.

Le calcul est facile (cela donne l'air du parallélogramme)

Géométrie I:

le 20.12.17

Coniques:



Déf:

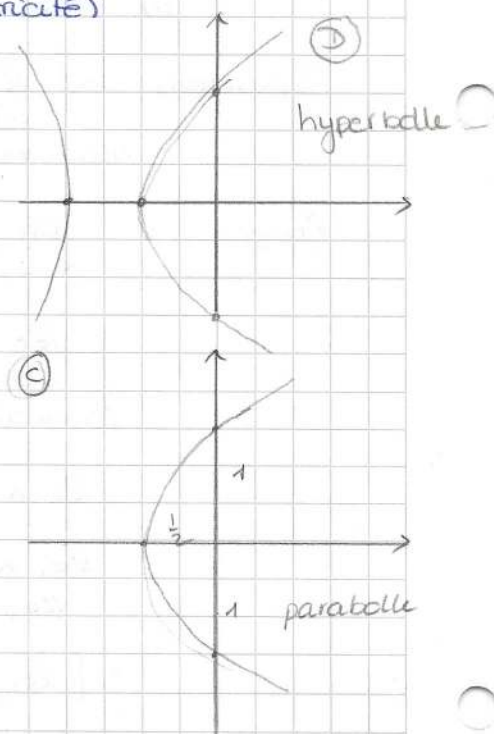
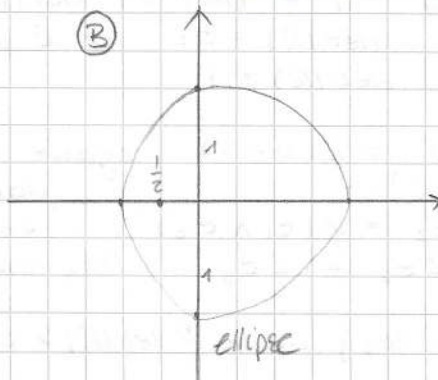
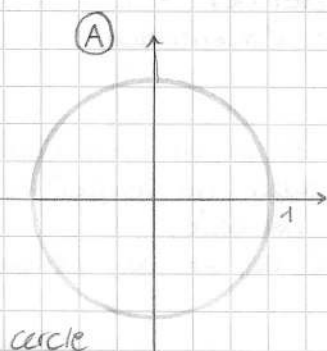
Soit $(r; \theta)$ les coordonnées polaires de $\mathbb{R}^2$ (étendues par la rel. $(-r; \theta) = (r; \theta + \pi)$)
une conique est l'ensemble de point

$$K \in \left\{ (r; \theta) \in \mathbb{R}^2 \mid r = \frac{k}{1 - e \cos \theta} \right\} \text{ par un certain } k > 0$$

et un certain $e \geq 0$ (excentricité)

Remarque: Supposons $k=1$

	$\theta = 0$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
(A) $e=0$	$r=1$	$r=1$	$r=1$	$r=1$
(B) $0 < e < 1$	$r = \frac{1}{1-e} > 1$	$r=1$	$r = \frac{1}{1+e} < 1$	$r=1$
(C) $e=1$	" $r=\infty$ "	$r=1$	$r = \frac{1}{2}$	$r=1$
(D) $e > 1$	$r = \frac{1}{1-e} < 0$	$r=1$	$r = \frac{1}{1+e} < \frac{1}{2}$	$r=1$



Géométrie I:

le 20.12.17

Prop:

Soit (u, v) les coordonnées cartésiennes de $\mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} u = r \cos \theta \\ v = r \sin \theta \end{cases}$$

Soit K la conique définie par $k > 0, e \geq 0$

$$\text{Alors } K = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 + v^2 = (k + eu)^2\}$$

Preuve:

$$\text{Soit } K' = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 + v^2 = (k + eu)^2\}$$

$$(u, v) \in K' \Leftrightarrow u^2 + v^2 = (k + eu)^2 \Leftrightarrow (r \cos \theta)^2 + (r \sin \theta)^2 = (k + e r \cos \theta)^2$$

$$\Leftrightarrow r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta = (k + e r \cos \theta)^2$$

$$\Leftrightarrow r^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = (k + e r \cos \theta)^2$$

$$\Leftrightarrow r^2 = (k + e r \cos \theta)^2$$

$$\Leftrightarrow r = \pm (k + e r \cos \theta) \Leftrightarrow \begin{cases} r(1 - e \cos \theta) = k \\ -r = -k + e r \cos(\theta + \pi) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow r = \frac{k}{1 - e \cos \theta}$$

$$\Leftrightarrow (r, \theta) \in K \quad \blacksquare$$

Remarque:

Soit K une conique, définie par $k > 0, e \geq 0$.

Alors $\forall P \in K \quad d(P, F) = e d(P, D)$ où $F = (0, 0)$ et $D: u = -\frac{k}{e}$

Foyer Droite Directrice

$$d(P, F)^2 = \|P\|^2 = u^2 + v^2$$

$$e^2 d(P, D)^2 = e^2 \left(u + \frac{k}{e}\right)^2 = (eu + k)^2 = u^2 + v^2$$

Ellipses:

Déf:

une ellipse est une conique tq $e < 1$

Proposition:

Soit E une ellipse, déf par $k > 0$ et $e < 1$

Soit le changement de variable : $\begin{cases} x = u - \frac{ek}{1-e^2} \\ y = v \end{cases}$ (décalage horizontal)

$$\text{Soit } a = \frac{k}{1-e^2} \text{ et } b = \frac{k}{\sqrt{1-e^2}}$$

$$\text{Alors } E = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\}$$

Preuve:

$$u^2 + v^2 = (k + eu)^2 = k^2 + e^2 u^2 + 2keu$$

$$u^2 + v^2 - 2keu - e^2 u^2 = k^2$$

$$(1 - e^2)u^2 - 2keu + v^2 = k^2$$

$$(1 - e^2) \left[u^2 - \frac{2keu}{1 - e^2} + \frac{e^2 k^2}{(1 - e^2)^2} + \frac{v^2}{1 - e^2} \right] = k^2$$

$$(1 - e^2) \left(u - \frac{ek}{1 - e^2} \right)^2 + \frac{v^2}{1 - e^2} = k^2$$

$$(1 - e^2) x^2 + \frac{v^2}{1 - e^2} = k^2$$

$$\frac{1 - e^2}{k^2} x^2 + \frac{1}{k^2} y^2 = 1$$

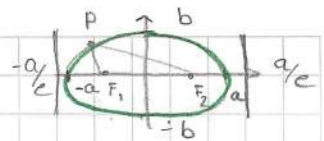
$$\frac{1 - e^2}{k^2} x^2 + \frac{1}{k^2} y^2 = 1 + \frac{e^2}{1 - e^2} = \frac{1}{1 - e^2}$$

$$\frac{(1 - e^2)^2}{k^2} x^2 + \frac{1 - e^2}{k^2} y^2 = 1$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \blacksquare$$

Remarque:

- $e = 0$, on trouve un cercle
- une ellipse est une figure bornée
- Grâce à la symétrie, on obtient deux foyers $F = (\pm ea; 0)$ et deux directrices $D: x = \pm \frac{a}{e}$
- $d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$ (constante)



Hyperboles:

Déf:

Une hyperbole est une conique avec $e > 1$

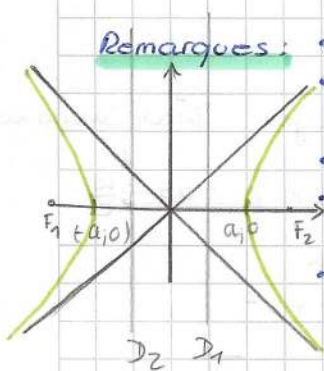
Prop:

Soit H une hyperbole déf par $k > 0$ et $e > 1$

$$a = \frac{k}{1-e^2} \quad b = \frac{k}{\sqrt{e^2-1}} \quad \text{Alors: } H = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{cases} x = u - \frac{e \cdot k}{1-e^2} \\ y = v \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases}\}$$

Remarques:

- une hyperbole est une figure non bornée.
- Grâce à la symétrie, on obtient deux foyers $F = (\pm ea; 0)$ et deux directrices $D: x = \pm \frac{a}{e}$
- $d(P, F_1) - d(P, F_2) = \pm 2a$ (const)
- une hyperbole n'est pas convexe, on trouve toujours 2 branches.
- Une hyperbole a deux asymptotes $\begin{cases} bx \pm ay = 0 \end{cases}$



Paraboles

Déf:

Une parabole est une conique $e = 1$

Prop:

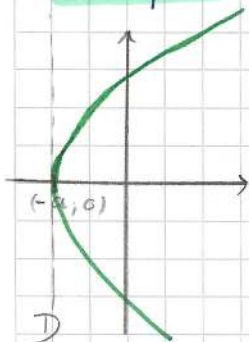
Soit P une parabole déf par $k > 0$

$$\begin{cases} x = u + \frac{k}{2} \\ y = v \end{cases} \quad a = \frac{k}{2}$$

Alors $P = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 = 4ax\}$

Remarques:

- une parabole n'est pas bornée
- elle n'a pas de symétrie par rapport à l'axe vertical
- On a un seul foyer $F = (-a; 0)$ et une directrice $D: x = -a$
- elle n'a pas d'asymptotes



Coniques généralisées

Déf. une conique généralisée est l'ensemble de point

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0\}$$

tg 1 parmi A, B, C est non-nul et $A, B, C, D, E, F \in \mathbb{R}$

Thm. : Soit K une conique généralisée. Alors :

- $AC - B^2 > 0 \Rightarrow K$ est une ellipse, un point ou $\emptyset$
- $AC - B^2 = 0 \Rightarrow$ une parabole, 2 droites //, 2x m droite, $\emptyset$
- $AC - B^2 < 0 \Rightarrow K$ est une hyperbole, 2 droites $\neg(//)$

Preuve : (Idee) appliquer des changements de variables progressifs.

$$(x \ y) \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (D \ E) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + F = 0$$

$$(x' \ y') \begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & C' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \text{"} + \text{"} = 0$$

- Si A' et C' sont non-nul, on peut se ramener au cas :

$$(x'' \ y'') \begin{pmatrix} A'' & 0 \\ 0 & C'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} + F'' = 0$$

$F'' = 0 \rightarrow$ point
 droites $\neg(//)$
 $F'' \neq 0 \rightarrow$ ellipse
 hyperbole
 $\emptyset$

- Si $C' = 0$

$$(x'' \ y'') \begin{pmatrix} A'' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} + E''y'' + F'' = 0$$

$$A''x''^2 + E''y'' + F'' = 0$$

$E'' = 0 \rightarrow x''^2 = \text{cte} = \begin{cases} \emptyset & \text{si } \text{cte} < 0 \\ \text{pt} & \text{si } \text{cte} = 0 \\ // \text{ droites} & \text{si } \text{cte} > 0 \end{cases}$
 $E'' \neq 0 \rightarrow A''x''^2 + E''y'' = -F''$
 // parabole

