

Chamillo: Géométrie I // MO31 printemps 2018

1^{ère} Correction: correction de l'examen
1^{ère} Série: sur Chamillo.

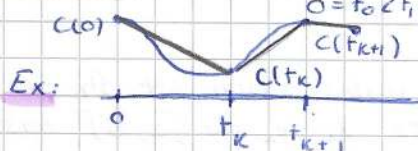
Rendre les séries le.

Géométrie hyperbolique:

1) Élément de longueur infinitésimal euclidien et géodésiques euclidiennes

Soit $c: [0; L] \rightarrow \mathbb{R}^2$ une application.
 $\forall t \in [0; L] \quad c(t) = (x(t); y(t))$

Rappel: $L(c) = \sup_{0=t_0 < t_1 < \dots < t_N=L} \sum_{k=0}^{N-1} d(c(t_k); c(t_{k+1}))$



plus on réduit la longueur entre 2 subdivisions, plus on est proche de la courbe.

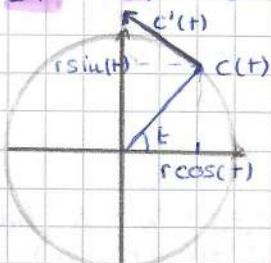
$$L(c) \in [0; \infty]$$

Théorème: Soit $c: [0; L] \rightarrow \mathbb{R}^2$ une application C' , c'est-à-dire que les fonctions coordonnées $c(t) = (x(t); y(t))$

$x: [0; L] \rightarrow \mathbb{R}$ et $y: [0; L] \rightarrow \mathbb{R}$ sont dérivables et continues une fois dérivée.

$$\text{Alors } L(c) = \int_0^L \|c'(t)\| dt = \int_0^L \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$$

Ex: a) $c: [0; 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$

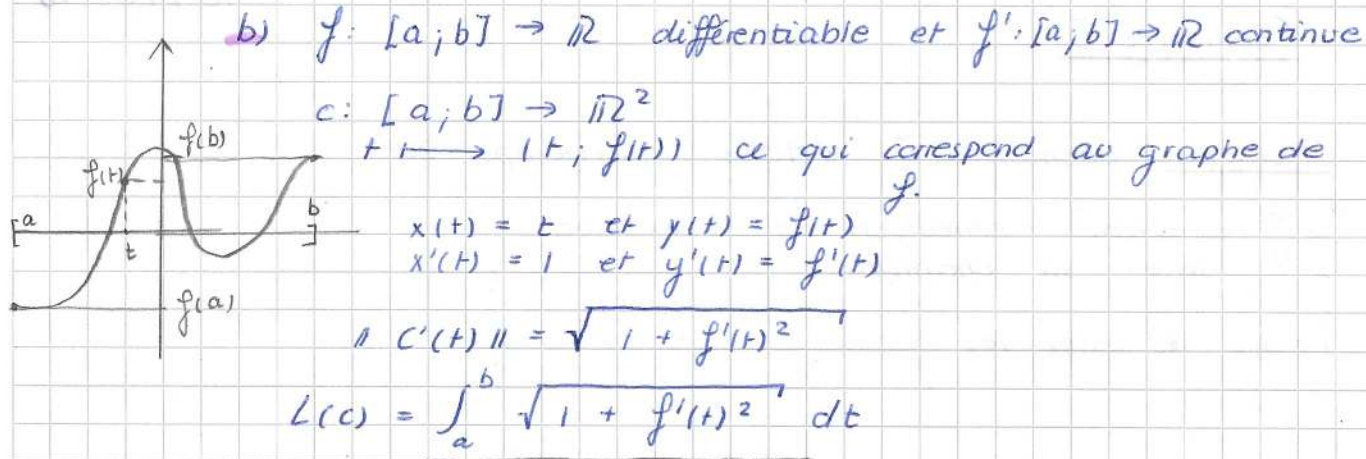


$$t \mapsto c(t) = (r \cos t; r \sin t) \quad \text{à } r > 0$$

$$c'(t) = (-r \sin t; r \cos t)$$

$$\|c'(t)\| = \sqrt{(-r \sin t)^2 + (r \cos t)^2} = r$$

$$L(c) = \int_0^{2\pi} r dt = 2\pi r \quad (\text{périmètre d'un cercle})$$



Rappel: préparation à la preuve du théorème

Continuité uniforme: ce qui permet de montrer que c'est unif. cont.

Soit $f: [a; b] \rightarrow X$ une fonction continue à valeurs dans un espace métrique $(X; d)$, alors f est uniformément continue.

Preuve: On doit prouver: $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, y \in [a; b], |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$ (déf de la cont. uni)

N.B.: δ ne dépend pas ni de x , ni de y .

Raisonnons par l'absurde, en supposant que l'implication n'est pas vraie.

Il existe donc $\varepsilon_0 > 0$ pour lequel l'implication est fautive.

Il existe donc une suite de points x_n, y_n de $[a; b]$ tels que $d(f(x_n); f(y_n)) > \varepsilon$ et $|x_n - y_n| \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$

Comme $[a; b]$ est compact, de toute suite de points de $[a; b]$ on peut extraire une sous-suite convergente. On peut donc supposer (quitte à extraire une sous-suite de x_n) que $x_n \rightarrow x \in [a; b]$ lorsque $n \rightarrow \infty$ (on a aussi $y_n \rightarrow x$ car $|x_n - y_n| \rightarrow 0$)

Par hypothèse f est continue en x . $\exists \delta > 0 \quad |z - x| < \delta \Rightarrow d(f(x); f(z)) < \frac{\varepsilon_0}{2}$

Si n est suffisamment grand on a $|x_n - x| < \delta, |y_n - x| < \delta$

$$\Rightarrow d(f(x_n); f(y_n)) \leq d(f(x_n); f(x)) + d(f(x); f(y_n)) < \frac{\varepsilon_0}{2} + \frac{\varepsilon_0}{2} = \varepsilon$$

Remarque: Un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ est compact si et seulement si il est fermé et borné

Rappel: Intégrale de Riemann

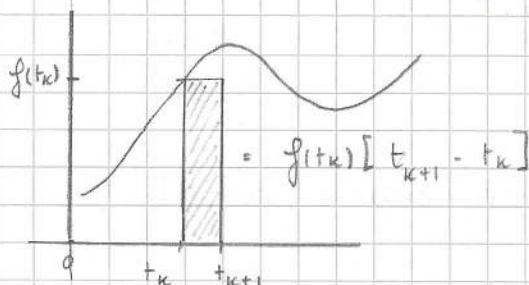
Soit $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue

Alors pour toute suite de subdivision du type $a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b$ finie de $[a; b]$ on a $\lim_{N \rightarrow \infty} (\max_{0 \leq k \leq N-1} t_{k+1} - t_k) = 0$ la limite $\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{N-1} f(t_k)(t_{k+1} - t_k)$ existe

et ne dépend pas du choix de la suite p_2 de subdivision.

Géométrie I:

On la note $\int_a^b f(t) dt = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{N-1} f(t_k) (t_{k+1} - t_k)$



On interprète $\int_a^b f(t) dt$ comme l'aire (signée) définie par le graphe de f .

La continuité uniforme de f permet de prouver que la limite existe et ne dépend pas de la suite de subdivisions.

Rappel: le thm des accroissements finis.

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tq $a < b$, soit $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable alors il existe $a < \xi < b$ tq $f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

$\nearrow$ χ minuscule.

Preuve du théorème:

$$c(t) = (x(t); y(t))$$

Soit $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = L$ une subdivision de $[0; L]$.

$$\sum_{k=0}^{N-1} d(c(t_k); c(t_{k+1})) = \sum_{k=0}^{N-1} \sqrt{(x(t_{k+1}) - x(t_k))^2 + (y(t_{k+1}) - y(t_k))^2}$$

$$\stackrel{\text{Acc. finis}}{\nearrow} = \sum_{k=0}^{N-1} \sqrt{x'(\xi_k)^2 + y'(\eta_k)^2} (t_{k+1} - t_k) \quad \text{où } t_k < \xi_k < t_{k+1} \text{ et } t_k < \eta_k < t_{k+1}$$

$$\stackrel{\text{cont. unif. de } y'}{\nearrow} = \sum_{k=0}^{N-1} \sqrt{x'(\xi_k)^2 + y'(\xi_k)^2} (t_{k+1} - t_k) + E_1 \quad \text{où } E_1 \rightarrow 0 \text{ si } (\max_{0 \leq k \leq N-1} t_{k+1} - t_k) \rightarrow 0$$

$$\stackrel{\text{somme de Riemann}}{\nearrow} = \int_0^L \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt + E_1 + E_2 \quad \text{où } E_2 \rightarrow 0 \text{ si } (\max_{0 \leq k \leq N-1} t_{k+1} - t_k) \rightarrow 0$$

Définition: $c: [0; S] \rightarrow \mathbb{R}^2$ une application.

On dit que c est une géodésique si $L(c) = d(c(0); c(S))$

Ex: $a, b \in \mathbb{R}^2$ ($a \neq b$)

$$\bullet c: [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t \mapsto a + t(b - a)$$

$$\bullet c: [0; \|b - a\|] \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t \mapsto a + t \frac{b - a}{\|b - a\|}$$

ce sont des géodésiques car (avec le théorème).

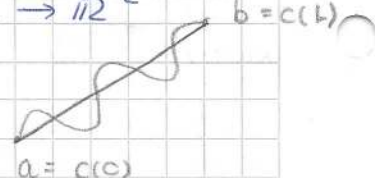
$$L(c) = \int_0^1 \|b - a\| dt = \|b - a\| = d(a; b) = d(c(0); c(1))$$

$$L(c) = \int_0^{\|b - a\|} \left\| \frac{b - a}{\|b - a\|} \right\| dt = \|b - a\| = d(a; b) = d(c(0); c(\|b - a\|))$$

Géométrie I:

le 26.02.18

Rappel: une géodésique est une application $c: [0; L] \rightarrow \mathbb{R}^2$ telle que $d(c(0); c(t)) = \ell(c)$



Proposition: (géodésiques euclidiennes)

Soit $c: [0; s] \rightarrow \mathbb{R}^2$, une application $c(0) = a, c(s) = b$
alors $\ell(c) \geq d(a; b)$

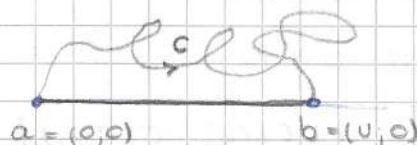
et $\ell(c) = d(a; b)$ ssi c s'écrit: $c: [0; s] \rightarrow \mathbb{R}^2$

où $\tilde{\gamma}: [0; s] \rightarrow [0; 1]$ telle que si $x \leq y$ $\tilde{\gamma}(x) \leq \tilde{\gamma}(y)$
et $\tilde{\gamma}(0) = 0, \tilde{\gamma}(s) = 1$,
 $t \mapsto a + \tilde{\gamma}(t) \cdot (b - a)$

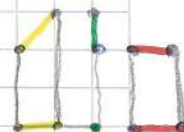
Preuve: Quitte à appliquer une translation, on peut supposer que

$c(0) = a = 0 \in \mathbb{R}^2$. Quitte à appliquer une rotation de centre $0 \in \mathbb{R}^2$
on peut aussi supposer que $c(s) = b = (u; 0) \in \mathbb{R}^2$ avec $u \geq 0$.

Soit $p: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $(x; y) \mapsto (x; 0)$



$\ell(c) \geq \ell(p \circ c)$ car p n'augmente pas les distances.



d'où la conclusion.

Éléments de longueur infinitésimale hyperbolique et géodésiques hyperboliques

Le modèle du demi-plan de Poincaré: (demiplan supérieur)

$$\mathbb{H}^2 = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$$

Soit $c: [0; L] \rightarrow \mathbb{H}^2$

$$t \mapsto (x(t); y(t)) = c(t) \quad y(t) > 0 \quad \forall t$$

$x, y: [0; L] \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable et $x', y': [0; L] \rightarrow \mathbb{R}$ continues

Définition: la longueur hyperbolique de c est $L_{hyp}(c) = \int_0^L \frac{\|c'(t)\|}{y(t)} dt$

$$L_{hyp}(c) = \int_0^L \frac{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}{y(t)} dt$$

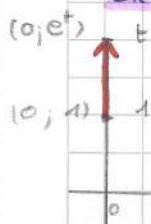
Ex: $c: [0; L] \rightarrow \mathbb{H}^2$
 $t \mapsto (0; e^t)$

$$c'(t) = (0; e^t)$$

$$\|c'(t)\| = e^t$$

$$L_{hyp}(c) = \int_0^L \frac{e^t}{e^t} dt = \int_0^L 1 dt$$

$$L_{hyp}(c) = L$$

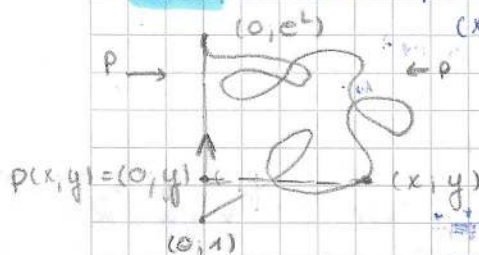


Proposition: Soit $c: [0, L] \rightarrow \mathbb{H}^2$ une courbe C^1

$c(0) = (0, 1)$ et $c(L) = (0, e^L)$. Alors $L_{hyp}(c) \geq L$
 ↑ on fixe le bout de $[0, L]$

De plus: $L_{hyp}(c) = L$ ssi $c(t) = (0, y(t))$, $y'(t) \geq 0$ ($y(0)=1$, $y(L)=e^L$)

Preuve: Soit $p: \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$



$$c(t) = (x(t), y(t)) \quad p \circ c(t) = (0, y(t)) \quad \text{égalité ssi } y'(t) \geq 0$$

$$\frac{\|c'(t)\|}{y(t)} = \frac{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}{y(t)} = \frac{\sqrt{y'^2(t)}}{y(t)} = \frac{|y'(t)|}{y(t)} \geq \frac{y'(t)}{y(t)}$$

$$L_{hyp}(c) = \int_0^L \frac{\|c'(t)\|}{y(t)} dt \geq \int_0^L \frac{y'(t)}{y(t)} dt = \log(y(t)) \Big|_0^L$$

égalité $\Rightarrow y'(t) \geq 0$ et $x'(t) = 0 \forall t$

$$= \log(y(L)) - \log(y(0)) = \boxed{L}$$

Modèle du disque de Poincaré:

$$D^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$$

$$D^2 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\} \quad z = x + yi, \quad x, y \in \mathbb{R}$$

Soit $c: [0, L] \rightarrow D^2$

$$t \mapsto c(t) = x(t) + iy(t)$$

$$x, y: [0, L] \rightarrow \mathbb{R} \text{ dans } C^1$$

$$x^2(t) + y^2(t) < 1$$

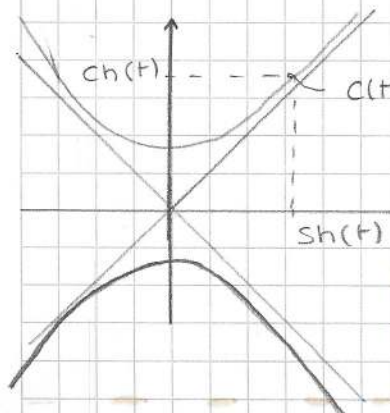
Déf: $L_{hyp}(c) = 2 \int_0^L \frac{\|c'(t)\|}{1 - |c(t)|^2} dt$

Rappel: fonctions trigonométriques hyperboliques $th, ch, sh: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\bullet ch(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \quad \bullet sh(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2} \quad \bullet th(t) = \frac{sh(t)}{ch(t)} = \frac{e^t - 1}{e^t + 1} \quad |th(t)| < 1 \quad \forall t$$

$$\bullet sh'(t) = ch(t) \quad \bullet ch'(t) = sh(t) \quad (\text{pas de changement de signe})$$

$$\bullet th'(t) = 1 - th^2(t) = \frac{1}{ch^2(t)}$$

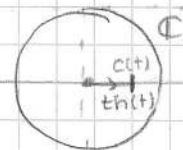


Exemple: $c: [0, L] \rightarrow D^2 \subset \mathbb{C}$

$$t \mapsto th(t)$$

$$L_{hyp}(c) = 2 \int_0^L \frac{\|c'(t)\|}{1 - |c(t)|^2} dt$$

$$= 2 \int_0^L \frac{|th'(t)|}{1 - |th(t)|^2} dt = 2 \int_0^L \frac{1 - th^2(t)}{1 - th^2(t)} dt = 2 \int_0^L 1 dt = \boxed{2L}$$



Résumé de la situation:

Élément de longueur infinitésimal pour une métrique riemannienne:
(dans un ouvert du plan U)

Soit $U \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert (par exemple: $U = \mathbb{R}^2$; $U = \mathbb{H}^2$; $U = \mathbb{D}^2$)

Déf. Une structure riemannienne sur U est une collection de produits scalaires $\langle \cdot, \cdot \rangle_{(x,y)}$ où $(x,y) \in U$

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_{(x,y)} : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (v, w) \mapsto \langle v, w \rangle_{(x,y)}$$

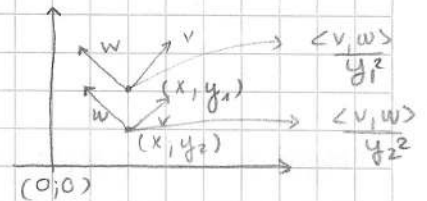
On demande que la fonction $U \rightarrow \mathbb{R}$ est C^1 $\forall v, w \in \mathbb{R}^2$
 $(x,y) \mapsto \langle v, w \rangle_{(x,y)}$

Exemple:

1) $U = \mathbb{R}^2$
 $\langle v, w \rangle_{(x,y)} = \langle v, w \rangle \quad \forall x, y$

2) $U = \mathbb{H}^2$
 $\langle v, w \rangle_{(x,y)} = \frac{\langle v, w \rangle}{y^2} \quad \forall x, y > 0$

3) $U = \mathbb{D}^2$
 $\langle v, w \rangle_z = \frac{\langle v, w \rangle}{(1 - |z|^2)^2}$

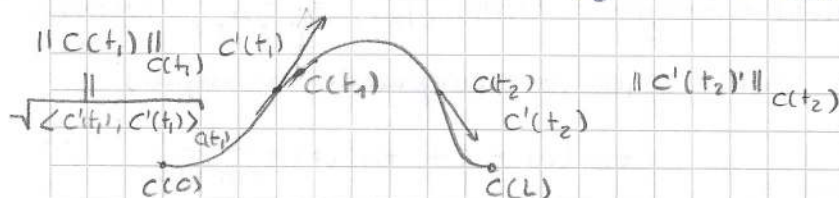


Déf. Longueur Riemannienne d'une courbe différentiable

Soit U , un ouvert du plan, soit $\langle \cdot, \cdot \rangle_{(x,y)}$ une collection de produits scalaires sur U .

Soit $c: [0, L] \rightarrow U$ C^1

$$L_{\text{Rie}}(c) = \int_0^L \|c'(t)\|_{c(t)} dt \quad \text{où} \quad \|c'(t)\|_{c(t)} = \frac{\|(x'(t), y'(t))\|_{(x(t), y(t))}}{c(t)} \\ = \sqrt{\langle (x'(t), y'(t)), (x'(t), y'(t)) \rangle_{(x(t), y(t))}}$$



Géométrie I:Bi-rapport et distance hyperbolique:

Soit $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C} \cup \{\infty\} = \bar{\mathbb{C}}$, on suppose en général que ces points sont distincts.

Déf: le bi-rapport de ces 4 points est le nombre complexe:

$$B(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{\frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4}}{\frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4}}$$

avec la convention que si un point est égal à ∞ , on remplace la différence dans laquelle il intervient par 1.

Ex:

- $B(\infty; z_2, z_3, z_4) = \frac{1}{\frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4}} = \frac{z_2 - z_4}{z_2 - z_3}$
- $B(z_1, z_2, \infty, z_4) = \frac{\frac{1}{z_1 - z_4}}{\frac{1}{z_2 - z_4}} = \frac{z_2 - z_4}{z_1 - z_4}$

Rem:

- Si $z_1 = z_2$, on obtient 1.

- $B(z_1, z_2, z_3, z_4) = B(z_2, z_1, z_4, z_3)$

Proposition: Soit $T: \bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$, une transformation de Möbius.
(Par déf: T est donc une composition d'un nb fini d'inversions de cercle et de réflexions orthogonales dans $\mathbb{C}$)

Alors si $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \bar{\mathbb{C}}$ sont 4 points distincts, on a:

$B(T(z_1), T(z_2), T(z_3), T(z_4)) = B(z_1, z_2, z_3, z_4)$ si T est la composition d'un nombre pair d'inversions et de réflexions (préserve l'orientation)

si ce nombre est impair alors: $B(T(z_1), T(z_2), T(z_3), T(z_4)) = \overline{B(z_1, z_2, z_3, z_4)}$

Notation: $B(T(z)) = B(z)$ et $B(T(z)) = \overline{B(z)}$ pour simplifier les notations $z = (z_1, z_2, z_3, z_4)$.

Preuve de la prop:

remarque: il suffit de prouver la proposition dans les cas particuliers suivants:

- T est une inversion, rel. à un cercle de $\mathbb{C}$
- T est une réflexion, rel. à une droite de $\mathbb{C}$ → suite

Lemme: Soit $h: \mathbb{C} \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ une bijection telle que $B(h(z)) = B(z) \quad \forall z = (z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$
Si T est telle que $B(h^{-1}T h(z)) = B(z)$ alors $B(Tz) = B(z)$

Preuve: du lemme ^{hyp du lemme}

$$B(T(z)) \stackrel{\text{hyp du lemme}}{=} B(K(T(z))) = B(K \circ T \circ K^{-1}(z)) = B(K \circ T \circ K^{-1}(K(z))) \\ = B(K(z)) = B(z)$$

Preuve: de la prop suite.

Appliquons le lemme au cas b):

Notre transformation T est une réflexion. On choisit K_1 une translation de $\mathbb{C}$ tel que l'axe de $K_1 T K_1^{-1}$ passe par $0 \in \mathbb{C}$. On choisit K_2 , une rotation de centre $0 \in \mathbb{C}$ tq l'axe de $K_2 K_1 T K_1^{-1} K_2^{-1} = (K_2 K_1) T (K_2 K_1)^{-1}$ soit la réflexion d'axe réel $z \mapsto \bar{z}$.

Remarque: $\frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4} \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4}$ est préservé par une translation quelconque de $\mathbb{C}$ et par une rotation de centre 0 .

$$\Rightarrow \frac{z_1 + w - (z_3 + w)}{z_1 + w - (z_4 + w)} \frac{z_2 + w - (z_3 + w)}{z_2 + w - (z_4 + w)} = \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4} \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4} \quad \text{pareil avec } e^{i\theta} \text{ par simplification,}$$

$$B(\bar{z}_1; \bar{z}_2; \bar{z}_3; \bar{z}_4) = B(z_1; z_2; z_3; z_4) \text{ est évident.}$$

a) T est une inversion:

Quitte à conjuguer T par une translation, on peut se ramener au cercle qui définit l'inversion est centré en l'origine $0 \in \mathbb{C}$.

On conjugue par une homothétie de centre 0 , de sorte que T soit l'inversion par rapport au cercle unité.

Finalement, il suffit de traiter le cas $T(z) = \frac{1}{\bar{z}}$ ^{conj}

$$\frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4} \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4} \xrightarrow{T} \frac{\frac{1}{\bar{z}_1} - \frac{1}{\bar{z}_3}}{\frac{1}{\bar{z}_1} - \frac{1}{\bar{z}_4}} = \frac{\frac{z_3 - z_1}{z_1 \cdot z_3}}{\frac{z_4 - z_1}{z_1 \cdot z_4}} = \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4} \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4}$$

Prop: Soit $a, b, c \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ distincts. Il existe une transformation de Möbius $T: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ tq $T(a) = 1$ $T(b) = 0$ $T(c) = \infty$

Preuve: cas i) $c = \infty$. On a donc $a, b \in \mathbb{C}$ distincts. Soit $T: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ une transf. de Möbius ^{qui préserve l'orientation (pair)} + $T(a) = 1$ et $T(b) = 0$

On envoie b sur 0 par une translation, (comp de 2 réflexions d'axe //) puis on applique une rotation de centre 0 qui envoie a sur $\mathbb{R} \setminus \{0\} \subset \mathbb{C}$ (rotation = comp de 2 réflexions axe $\perp$ qui se coupent). Enfin on applique une homothétie de centre 0 (= comp de 2 inversions de 0 de m centre)

cas ii) $c \neq \infty$ donc $c \in \mathbb{C}$. On applique une inversion de centre c (qui envoie c à l'infini) On se ramène au cas précédent,

(on peut (si le nbr w est pas pair de comp.) faire $z \mapsto \bar{z}$ et tout va bien)

Géométrie:

Proposition: Soient $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$

$\{z_1, z_2, z_3, z_4\} \subset K$ où K est un cercle généralisé (cercle de centre $\mathbb{C}$ ou droite $\cup \{\infty\}$)
 $\Leftrightarrow B(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{R}$

Preuve:

D'après la prop. précédente; on peut trouver T transf. de Möbius[⊕]

$$T(z_1) = 1, T(z_2) = 0, T(z_4) = \infty$$

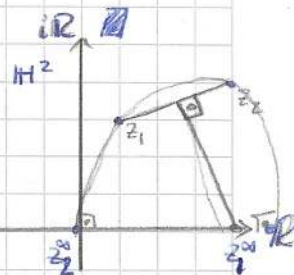
Comme T préserve le bi-rapport et les cercles généralisés, il suffit de prouver l'équivalence dans le cas particulier $T(z_1), 0, 1, \infty$

C'est-à-dire on doit prouver $T(z_1), 1, 0, \infty$ sont sur un cercle généralisé
 $\Leftrightarrow B(T(z_1), 1, 0, \infty) \in \mathbb{R}$.

$$B(T(z_1), 1, 0, \infty) = \frac{T(z_1) - 0}{1 - 0} = T(z_1)$$


Donc $T(z_1) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow T(z_1)$ est sur le cercle généralisé

On vérifie bien que le bi-rapport est réel $\Leftrightarrow T(z_1) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \{T(z_1), 1, 0, \infty\}$ sont alignés (ie sur le cercle $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$)



Déf:

de la distance hyperbolique

Soit $\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\} = \{x + iy : x, y \in \mathbb{R}, y > 0\}$
 Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{H}^2$

$$d_{\mathbb{H}^2}(z_1, z_2) = \log B(z_1, z_2, z_1^{\infty}, z_2^{\infty})$$

où $z_1^{\infty}, z_2^{\infty} \in \mathbb{R} \cap K$ où K est l'unique cercle généralisé perpendiculaire à $\mathbb{R}$ $\subset \mathbb{C}$ tel $z_1, z_2 \in K$.

Géométrie:

Théorème: La formule $d_{\mathbb{H}^2}(z_1, z_2) = \log B(z_1, z_2, z_1^{\infty}, z_2^{\infty})$ définit une distance sur $\mathbb{H}^2$ et $d_{\mathbb{H}^2}(z_1, z_2) = \inf_c L(c)$ où l'infimum est pris sur tous les chemins $c: [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}^2$ tels que $c(0) = z_1$ et $c(1) = z_2$.

Cor: La distance hyperbolique entre deux points $z_1, z_2 \in \mathbb{H}^2$ est réalisée par la longueur de l'arc de cercle^(*) entre z_1 et z_2 où K est l'unique cercle généralisé perpendiculaire à $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ qui contient z_1, z_2 .

(*) généralisé K

Déf: On appelle ces arcs des arcs ou des ségments géodésiques.

Rem: Le chemin le + court entre 2 points d'une sphère est un arc de grand cercle (Ex: équateur)

Preuve du thm. (p.9)

Idee: comme la formule $d_{\mathbb{H}^2}(z_1, z_2)$ fait intervenir le bi-rapport et que ce dernier est invariant par les transformations de Möbius, on va donc prouver que le membre de droite est invariant lui aussi par les transf. de Möbius.

1^{er} pas: Soit $c: [0, L] \rightarrow \mathbb{H}^2$ $c \in C^1$ et $g: \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ une transf. de Möbius, alors $\mathcal{L}_{\mathbb{H}^2}(c) = \mathcal{L}_{\mathbb{H}^2}(g \circ c)$

On va démontrer cela pour 3 types de transformation.

a) $g(z) = z + x$ où $x \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ est fixé.

$$c(t) = (x(t), y(t)) \quad \frac{\|c'(t)\|}{y(t)} = \frac{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}{y(t)}$$

$$g \circ c(t) = (x(t) + x, y(t)) \Rightarrow \frac{\|g \circ c'(t)\|}{y(t)} = \frac{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}{y(t)}$$

b) $g(z) = \lambda z$, $\lambda > 0$. On a bien $g(\mathbb{H}^2) \subset \mathbb{H}^2$, en fait $g(\mathbb{H}^2) = \mathbb{H}^2$ c'est une transformation de Möbius.

$$c(t) = (z(t), \epsilon \in \mathbb{C}, \text{Im}(z(t)) > 0)$$

$$\frac{\|c'(t)\|}{y(t)} = \frac{\|z'(t)\|}{\text{Im}(z(t))} = \frac{|z'(t)|}{\text{Im}(z(t))}, \quad \frac{\|g \circ c'(t)\|}{y(t)} = \frac{\|g \circ c'(t)\|}{\text{Im}(g \circ c(t))} = \frac{|\lambda z'(t)|}{\text{Im}(z(t)\lambda)}$$

$$= \frac{|z'(t)|}{\text{Im}(z(t))}$$

$$c) \quad g(z) = -\frac{1}{z} \quad z = \rho e^{i\theta}$$

$$g(\rho e^{i\theta}) = -\frac{1}{\rho e^{i\theta}} = -\frac{e^{-i\theta}}{\rho}$$

$$c(t) = \rho(t) e^{i\theta(t)}$$

$$\rho(t) > 0 \quad \pi > \theta(t) > 0$$

$$c'(t) = \rho'(t) e^{i\theta(t)} + \rho(t) i \theta'(t) e^{i\theta(t)}$$

$$\frac{\|c'(t)\|}{\text{Im}(c(t))} = \frac{|\rho'(t) e^{i\theta(t)} + \rho(t) i \theta'(t) e^{i\theta(t)}|}{\text{Im}(\rho(t) e^{i\theta(t)})}$$

$$= \frac{|\rho'(t) + \rho(t) i \theta'(t)|}{\text{Im}(\rho(t) e^{i\theta(t)})}$$

$$g \circ c(t) = -\frac{1}{\rho(t)} e^{-i\theta(t)}$$

$$= \frac{|-\frac{\rho'(t)}{\rho(t)} - \frac{1}{\rho(t)} i \theta'(t)|}{\text{Im}(g \circ c(t))}$$

$$\frac{\|g \circ c'(t)\|}{\text{Im}(g \circ c(t))} = \frac{\|-\frac{\rho'(t)}{\rho(t)} e^{-i\theta(t)} - \frac{1}{\rho(t)} i \theta'(t) e^{-i\theta(t)}\|}{\text{Im}(-\frac{1}{\rho(t)} e^{-i\theta(t)})}$$

$$= \frac{|-\frac{\rho'(t)}{\rho(t)} - \frac{1}{\rho(t)} i \theta'(t)|}{(-\frac{1}{\rho(t)})} = \frac{|\frac{\rho'(t)}{\rho(t)} + i \theta'(t)|}{\frac{1}{\rho(t)}}$$

$$= \frac{1}{\rho(t)} \frac{\|\rho'(t) + i \theta'(t) \rho(t)\|}{\text{Im}(e^{i\theta(t)})}$$

Conclusion: $\mathcal{L}_{\mathbb{H}^2}(g \circ c) = \mathcal{L}_{\mathbb{H}^2}(c) \quad \forall g$ du type a), b), c)
et donc $\forall g$ qui s'obtient en composant un nbr fini de tels g .

Preuve: (suite)

Affirmation: Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{H}^2$, en composant des transformations de type a), b), c), on peut envoyer z_1 sur i et z_2 sur $t \cdot i$, $t > 0$

Preuve: cas 1: si z_1 et z_2 sont sur la même droite verticale.

On applique une translation $z \mapsto z + x$ $x \in \mathbb{R}$

qui applique la droite contenant z_1 et z_2 sur la droite $i\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

On applique alors une homothétie de rapport $\lambda > 0$ et de centre 0 qui envoie z_1 sur i .

Cas 2: z_1 et z_2 ne sont pas sur la même droite verticale.

Soit K l'unique cercle tel que $z_1, z_2 \in K$ et

$K \perp i\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Soit $p \in \mathbb{R}$ un point de $K \cap i\mathbb{R}$.

On applique une translation $z \mapsto z + x$ où $x = -p$

On se ramène ainsi à la situation: $T(p) = 0$; $T(z_1)$; $T(z_2)$

On applique alors $z \mapsto -\frac{1}{z}$, ainsi le cercle contenant $T(z_1)$ et $T(z_2)$ est envoyé sur une droite.

(on s'est ramené au cas précédent) On applique alors le cas précédent

Conclusion: il suffit de vérifier le théorème dans le cas où $z_1 = i$ et $z_2 = e^{it}$

On a déjà calculé les 2 membres de l'égalité dans ce cas. $\blacksquare$

Géométrie:

le 19.03.18

Déf: Soient K_1 et K_2 deux cercles dans le plan. (vrai cercle)

Supposons $K_1 \cap K_2 \neq \emptyset$: Soit $p \in K_1 \cap K_2$

L'angle en p entre K_1 et K_2 est par déf l'angle entre les droites $T_p K_1$ et $T_p K_2$ (tangente au point p à K_1, K_2)

Par définition, si $p \in \mathbb{R}^2$ et $p \in K$ un cercle, $T_p K$ est l'unique droite de $\mathbb{R}^2$ contenant le point p et perpendiculaire à l'unique droite de $\mathbb{R}^2$ contenant p et le centre de K . (l'angle ne dépend pas du choix de p)

Théorème: Soit g une transformation de Möbius (de $\mathbb{C} \setminus \{0\}$), alors g préserve les angles

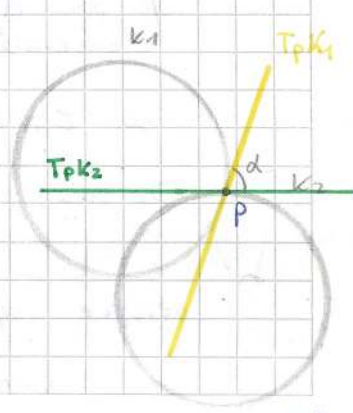
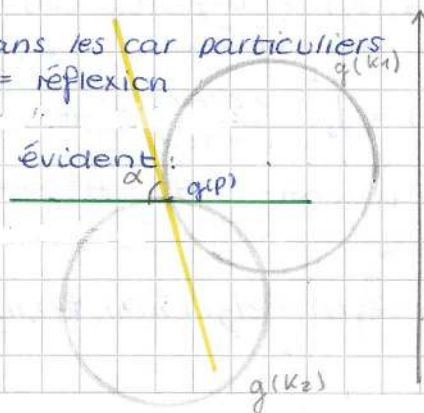
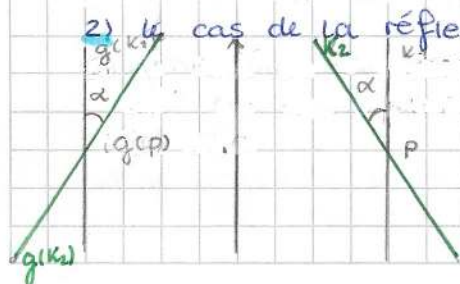
si K_1, K_2 sont des cercles généralisés de $\mathbb{C}$ et si $p \in K_1 \cap K_2$.

Alors l'angle entre K_1 et K_2 en p est le même que l'angle entre $g(K_1)$ et $g(K_2)$ en $g(p)$.

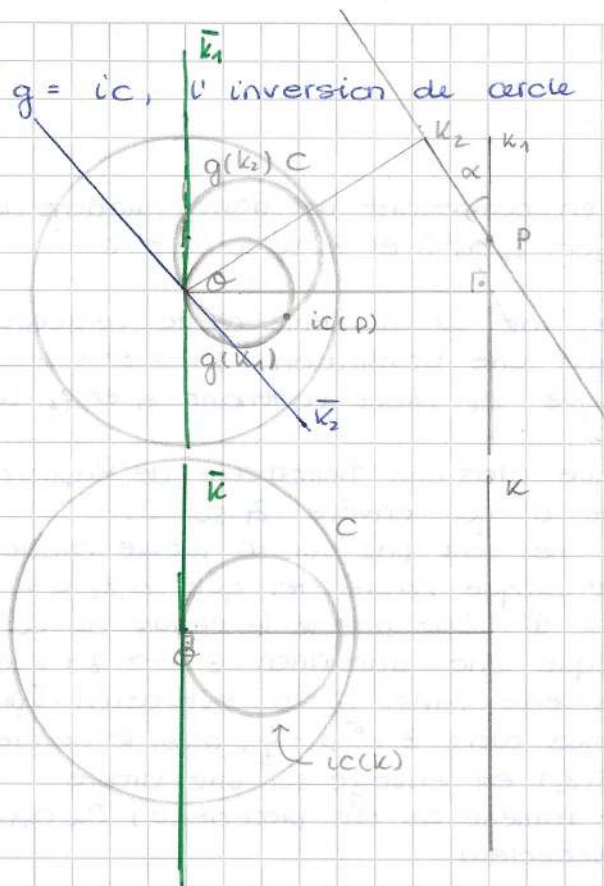
Preuve: Il suffit de le prouver dans les cas particuliers

1) $g =$ inversion et 2) $g =$ réflexion

2) le cas de la réflexion est évident:



1) Soit $g = i_C$, l'inversion de cercle C et de centre O .



$i_C(K_1)$ est un vrai cercle
 $i_C(\infty) = O \quad j=1,2$

$\bar{K}_1$ est l'unique droite contenant O parallèle à K_1
 $\bar{K}_2$ " " " " à K_2

L'angle α entre $\bar{K}_1$ et $\bar{K}_2$ est le même que l'angle entre K_1 et K_2

De plus $\bar{K}_j = \bar{O} i_C(K_j)$ où $j=1,2$

Or l'angle en O entre $i_C(K_1)$ et $i_C(K_2)$ est le même que l'angle en $i_C(P)$ entre $i_C(K_1)$ et $i_C(K_2)$.

Lors de la situation de K_1, K_2 des vrais cercles, on prend $K_j' = T_P K_j$ (on remplace les cercles par leur tangentes)

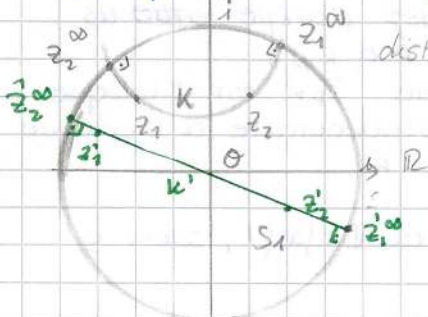
Pour conclure: le cas général où K_1 et K_2 se coupent en P sont des cercles généralisés se traite en remplaçant K_j par $K_j' = T_P K_j$

Le modèle du disque de Poincaré de la géométrie hyperbolique:

$$D^2 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\} \quad d_{D^2} : D^2 \times D^2 \rightarrow [0, \infty)$$

$$(z_1, z_2) \mapsto \log B(z_1, z_2; z_1^\infty, z_2^\infty)$$

distance sur D^2



Soit $z_1, z_2 \in D^2$. Il existe un unique cercle K perpendiculaire à S^1 contenant z_1 et z_2

Attention: K peut-être un diamètre (un segment euclidien contenant $O \in D^2$)

Théorème: (D^2, d_{D^2}) est un espace métrique

De plus $d_{D^2}(z_1, z_2) = \inf_{\gamma} \ell_{D^2}(\gamma)$ où l'infimum est calculé sur l'ensemble des chemins $\gamma : [0, L] \rightarrow D^2$ $\gamma'(t) \neq 0$ $\gamma(0) = z_1$, $\gamma(L) = z_2$

$$\text{où } \ell_{D^2}(\gamma) = \int_0^L \frac{\|\gamma'(t)\|}{1 - |\gamma(t)|^2} dt.$$

De plus, l'application $h : \mathbb{H}^2 \rightarrow D^2$ est une bijection qui

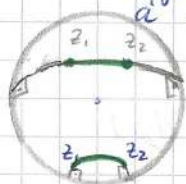
$$z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$$

vérifie $d_{\mathbb{H}^2}(z_1, z_2) = d_{D^2}(h(z_1), h(z_2))$. h est une isométrie entre $\mathbb{H}^2$ et D^2

Géométrie:

le 19.03.18

Cor: la distance entre 2 points z_1 et z_2 dans D^2 est réalisée par la longueur hyperbolique de D^2 de l'arc de l'unique cercle généralisé K perpendiculaire à S^1 tq $z_1 \in K$ et $z_2 \in K$.



Géométrie:

le 26.03.18

Preuve du thm: L'appl $h: \mathbb{H}^2 \rightarrow D^2$ est bien définie

comme $-i \notin \mathbb{H}^2$, on ne divise jamais par zéros. $z = x + iy$

$$\left| \frac{z-i}{z+i} \right| = \left| \frac{x+iy-i}{x+iy+i} \right| = \left| \frac{x+(y-1)i}{x+(y+1)i} \right| = \sqrt{\frac{x^2+(y-1)^2}{x^2+(y+1)^2}} \stackrel{?}{\leq} 1$$

$$x^2+(y-1)^2 \stackrel{?}{\leq} x^2+(y+1)^2 \Leftrightarrow (y-1)^2 \stackrel{?}{\leq} (y+1)^2 \quad (y > 0)$$

est bien vrai pour $y > 0$ ($x+iy \in \mathbb{H}^2$)

Soit $g(z) = \frac{z+1}{z-i}$ est l'inverse de h pour la composition des appl.

$$g \circ h(z) = z \quad \text{et} \quad h \circ g(z) = z$$

Donc h est surjective (et injective)

Rem: h s'étend à $\bar{\mathbb{H}}^2 = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) \geq 0\} \cup \{\infty\}$

$$\text{et } \bar{h}(\partial \mathbb{H}^2 \cup \{\infty\}) = S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$$

$$z = x \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C} \quad |\bar{h}(x)| = \left| \frac{x-i}{x+i} \right| = \left| \frac{x-i}{x+i} \right| = 1$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z+1}{z-i} = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z}{z} \cdot \frac{1+\frac{1}{z}}{1-\frac{i}{z}} = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1+\frac{1}{z}}{1-\frac{i}{z}} = 1$$

$$z \rightarrow \infty \text{ signifie } |z| \rightarrow \infty \quad \bar{h}(\infty) = 1$$

Rem: $g(1) = \infty$

Retour à la preuve:

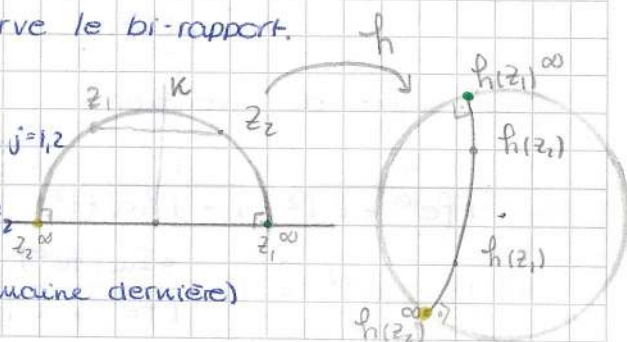
$$\text{On a vu que } d_{\mathbb{H}^2}(z_1, z_2) = \log(B(z_1, z_2; z_1^\infty, z_2^\infty)) = \log(B(h(z_1), h(z_2); h(z_1)^\infty, h(z_2)^\infty))$$

h est une transf. de Möbius et préserve le bi-rapport.

$$= \log(B(h(z_1), h(z_2); h(z_1)^\infty, h(z_2)^\infty))$$

* on peut remplacer $h(z_j)^\infty$ par $h(z_j)^\infty$ $j=1,2$

Soit K , l'unique cercle contenant z_1 et z_2 ,
 $K \perp \mathbb{R}$
 $\bar{h}(K)$ est un cercle $\perp$ à $\bar{h}(\mathbb{R})$ (Thm semaine dernière)
 $= S^1$



Preuve (suite): $= \log B(h(z_1); h(z_2); h(z_1)^\infty; h(z_2)^\infty)$

$\stackrel{\text{déf de } d}{=} d_{D^2}(h(z_1); h(z_2))$

(On ne peut pas par h interchangé $h(z_1)^\infty$ et $h(z_2)^\infty$)

donc h est bien une isométrie entre $(H^2; d_{H^2})$ et $(D^2; d_{D^2})$

Reste à prouver: $d_{D^2}(z_1; z_2) = \inf_c \ell_{D^2}(c)$ où l'inf est pris sur $c: [0; 1] \rightarrow D^2$ $c'(t) = \dot{z}$ et $c(1) = z_2$

Cette égalité est la conséquence de la formule de changement de variable suivante: Soit $c: [0; 1] \rightarrow H^2$ c'

alors $\ell_{H^2}(c) \stackrel{(*)}{=} \ell_{D^2}(h \circ c)$

Supposons $(*)$ vrai. On a donc $\inf_c \ell_{D^2}(c) = \inf_{h \circ c} \ell_{H^2}(c) = \inf_{g \circ c} \ell_{H^2}(g \circ c)$ où $h \circ g = \text{id}_{D^2}$

$\stackrel{(*)}{=} \inf_{g \circ c} \ell_{H^2}(g \circ c) = d_{H^2}(g(c(0)); g(c(1)))$

$= d_{D^2}(h(g(c(0))); h(g(c(1)))) = d_{D^2}(c(0); c(1))$

Reste à prouver: $\ell_{H^2}(c) = \ell_{D^2}(h \circ c)$

Soit $c(t) = \rho(t)e^{i\theta(t)}$, $\rho(t) > 0$, $\pi > \theta(t) > 0$ courbe c'

On va prouver: $\frac{2 |(\dot{h} \circ c)'(t)|}{1 - |\dot{h} \circ c(t)|^2} = \frac{|c'(t)|}{\text{Im}(c(t))}$

si on prouve ceci, on a terminé car en intégrant on obtient:

$\ell_{D^2}(h \circ c) = 2 \int_0^1 \frac{|(\dot{h} \circ c)'(t)|}{1 - |\dot{h} \circ c(t)|^2} dt = \int_0^1 \frac{|c'(t)|}{\text{Im}(c(t))} dt = \ell_{H^2}(c)$

$|(\dot{h} \circ c)'(t)| = \left| \frac{(\rho(t)e^{i\theta(t)})' - i}{\rho(t)e^{i\theta(t)} + i} \right| \quad \Delta \quad \begin{matrix} \rho' = \rho'(t) \\ \theta' = \theta'(t) \end{matrix}$

$= \left| \frac{(\rho'e^{i\theta} + \rho e^{i\theta} i)(\rho e^{i\theta} + i) - (\rho'e^{i\theta} + \rho e^{i\theta} i)(\rho e^{i\theta} - i)}{(\rho e^{i\theta} + i)^2} \right| = \left| \frac{(\rho' + \rho i e^{i\theta})(\rho e^{i\theta} + i) - (\rho' + \rho i e^{i\theta})(\rho e^{i\theta} - i)}{|\rho e^{i\theta} + i|^2} \right|$

$= \frac{|\rho' e^{i\theta} + \rho i + \rho^2 e^{i\theta} - \rho' e^{i\theta} - \rho i - \rho^2 e^{i\theta} - \rho e^{i\theta}|}{|\rho e^{i\theta} + i|^2} = \frac{2|\rho i - \rho e^{i\theta}|}{|\rho e^{i\theta} + i|^2}$

Ainsi:

$\frac{2 |(\dot{h} \circ c)'(t)|}{1 - |\dot{h} \circ c(t)|^2} = 4 \frac{|\rho i - \rho e^{i\theta}|}{|\rho e^{i\theta} + i|^2} \cdot \frac{1}{1 - |\dot{h} \circ c|^2}$

D'autre part: $\frac{|c'(t)|}{\text{Im}(c(t))} = \frac{|\rho' + i\rho\theta'|}{\text{Im}(\rho e^{i\theta})}$ a déjà été prouvé.

Il suffit de vérifier:

$\frac{4}{|\rho e^{i\theta} + i|^2} \cdot \frac{1}{1 - |\dot{h} \circ c|^2} \stackrel{?}{=} \frac{1}{\text{Im}(\rho e^{i\theta})} \Leftrightarrow \frac{4 \text{Im}(\rho e^{i\theta})}{|\rho e^{i\theta} + i|^2} \stackrel{?}{=} 1 - |\dot{h} \circ c|^2$

$\Leftrightarrow |\dot{h} \circ c(t)|^2 \stackrel{?}{=} 1 - \frac{4 \text{Im}(\rho e^{i\theta})}{|\rho e^{i\theta} + i|^2} \Leftrightarrow |\rho e^{i\theta} - i|^2 \stackrel{?}{=} |\rho e^{i\theta} + i|^2 - 4 \text{Im}(\rho e^{i\theta})$

$\frac{|\rho e^{i\theta} - i|^2}{|\rho e^{i\theta} + i|^2} \stackrel{?}{=} \frac{12 - i^2}{12 + i^2 - 4 \text{Im}(2)} \quad p/4$

Preuve: $\Leftrightarrow |z-i|^2 \stackrel{?}{=} |z+i|^2 - 4\operatorname{Im}(z)$

$$\begin{aligned} z &= x+iy \\ \Leftrightarrow x^2 + (y-1)^2 &\stackrel{?}{=} x^2 + (y+1)^2 - 4y \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow y^2 - 2y + 1 \stackrel{?}{=} y^2 + 2y + 1 - 4y \quad \checkmark \quad \text{fin de preuve du thm.}$$

Preuve du cor:

Soit $c: [0,1] \rightarrow \mathbb{D}^2$, $c(0) = z_1$ et $c(1) = z_2$

On applique $g = h^{-1}$, $g \circ c$ est une courbe

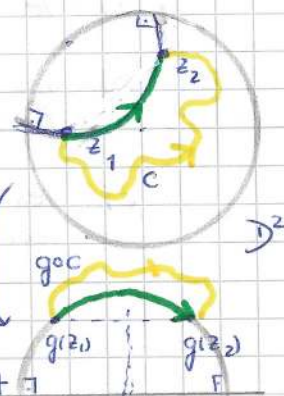
de $\mathbb{H}^2$ liant $g(z_1)$ à $g(z_2)$, on constate

que (sait que) $(g \circ c)$ réalise $d_{\mathbb{H}^2}(g(z_1), g(z_2))$

ssi $g \circ c$ parcourt l'arc de cercle $\mathbb{H}^2$ à $\mathbb{R}$ contenant γ

$g(z_1)$ et $g(z_2)$. Donc c réalise $d_{\mathbb{D}^2}(c(0), c(1))$ ssi c parcourt l'arc

de cercle entre z_1 et z_2 du cercle contenant z_1 et z_2 et $\mathbb{H}^2$ à S^1



le 09.04.18

Actions de $PSL(2, \mathbb{R})$ sur $\mathbb{H}^2$ par isométrie hyperbolique.

Rappel: $\mathbb{H}^2 = \{x+iy \in \mathbb{C} \mid y > 0\}$ (demi-plan de Poincaré)

Déf: Soit $GL(2, \mathbb{R})$ le groupe (pour la multiplication) des matrices 2×2 inversibles à coeff. réels.

On définit $SL(2, \mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{R}) \mid ad - bc = 1 \right\}$

Exo: M_g $SL(2, \mathbb{R})$ est ss-grp de $GL(2, \mathbb{R})$.

Lemme: $\left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \subset SL(2, \mathbb{R})$ est un sous-groupe central $\Rightarrow$ normal.

Comme le quotient d'un groupe par un sous-groupe normal admet une structure de groupe (cf. Algèbre I), on obtient la définition suivante

Déf: On définit $PSL(2, \mathbb{R}) = SL(2, \mathbb{R}) / \left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

Prop: L'application $* : \text{PSL}(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{H}^2 \longrightarrow \mathbb{H}^2$

$$\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, z \right) \longmapsto \frac{az + b}{cz + d}$$

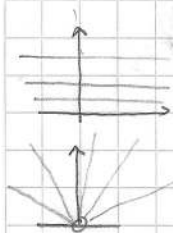
est une action par isométrie hyperbolique.

De plus, on a les points suivants:

a) le stabilisateur de i est $K = \left\{ \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \mid \theta \in \mathbb{R} \right\}$

b) les orbites de $N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\}$ sont les droites euclidiennes horizontales de $\mathbb{H}^2$.

c) les orbites de $A = \left\{ \begin{pmatrix} e^{t/2} & 0 \\ 0 & e^{-t/2} \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$ sont les demi-droites euclidiennes de $\mathbb{H}^2$ "contenant" l'origine.



Preuve:

Commençons par montrer que $* : \text{PSL}(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{H}^2 \longrightarrow \mathbb{H}^2$ est bien définie.

Pour cela mq :

1) la définition est indépendante du choix du représentant.

2) l'image est bien dans $\mathbb{H}^2$.

Soient $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SL}(2, \mathbb{R})$ et $z \in \mathbb{H}^2$. On a $\frac{(-a)z + (-b)}{(-c)z + (-d)} = \frac{-1}{-1} \cdot \frac{az + b}{cz + d}$
 et donc $-\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} * z = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} * z$ donc 1) ✓

Remarquons que $cz + d \neq 0$ (m par $c\bar{z} + d \neq 0$)

sinon $cz + d = 0 \Rightarrow z = -\frac{d}{c} \Rightarrow z \in \mathbb{R} \cup \{\infty\} \Leftrightarrow \bar{z} \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} * z = \frac{az + b}{cz + d} \cdot \frac{c\bar{z} + d}{c\bar{z} + d} = \frac{azc\bar{z} + azd + bc\bar{z} + bd}{c\bar{z} + d}$$

$$= \frac{ac|z|^2 + (bc + 1)z + bc\bar{z} + bd}{|cz + d|^2} = \frac{ac|z|^2 + bd}{|cz + d|^2} + \frac{bc(z + \bar{z})}{|cz + d|^2} + \frac{z}{|cz + d|^2}$$

$\in \mathbb{R}$ $\in \mathbb{R}$ $z > 0$

$$= 11 + \frac{bc \cdot 2\text{Re}(z)}{|cz + d|^2} + \frac{z}{|cz + d|^2} \Rightarrow \text{Im}\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} * z\right) = \text{Im}\left(\frac{z}{|cz + d|^2}\right) > 0$$

Donc 2) ✓

Pour mq c'est une action, il faut mq : 1) $e * z = z \forall z \in \mathbb{H}^2$
 2) $\forall g, h \in G \quad (gh) * z = g * (h * z)$

Soit $z \in \mathbb{H}^2$ et soient $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \in \text{PSL}(2, \mathbb{R})$

1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} * z = \frac{1z + 0}{0z + 1} = z$ ok ✓

Preuve suite:

$$\begin{aligned}
 2) \cdot \left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \right] * z &= \begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & cb' + dd' \end{pmatrix} * z \\
 &= \frac{(aa' + bc')z + (ab' + bd')}{(ca' + dc')z + (cb' + dd')} \\
 &= \frac{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} * z}{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} * z} = \frac{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} * \left[\frac{a'z + b'}{c'z + d'} \right]}{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} * \left[\frac{a'z + b'}{c'z + d'} \right]} \\
 &= \frac{a \cdot \frac{a'z + b'}{c'z + d'} + b}{c \cdot \frac{a'z + b'}{c'z + d'} + d} = \frac{\frac{aa'z + ab' + c'bz + bd'}{c'z + d'}}{\frac{ca'z + cb' + dc'z + dd'}{c'z + d'}} = \frac{(aa' + bc')z + ab' + bd'}{(ca' + dc')z + cb' + dd'}
 \end{aligned}$$

Et on a donc 2) ok ✓

Ce qui montre que $*$ est bien une action.Remarquons que pour $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{PSL}(2, \mathbb{R})$, l'application $f: \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$

est inversible. Pour le voir, on prend la matrice inverse

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \in \text{PSL}(2, \mathbb{R})$$

Alors $f: \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ $z \mapsto \frac{dz-b}{-cz+a}$ est l'inverse de f . • matricielle

$$\begin{aligned}
 \text{En effet: } f \circ f(z) &= f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} * \frac{az+b}{cz+d} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} * z \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} * z = z \quad \text{# action} \quad \text{de manière similaire on a } f \circ f(z) = z.
 \end{aligned}$$

Ceci implique que l'action $*$ agit comme les transf. de Möbius qui préservent la métrique hyperbolique, donc $*$ est une action par isométrie hyperbolique.Enfin, on a encore les points a, b, c .a) Soit $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{PSL}(2, \mathbb{R})$. Alors $\frac{ai+b}{ci+d} = i \Leftrightarrow ai+b = -c+di$

$$\Leftrightarrow a=d \text{ et } b=-c. \text{ On a donc } 1 = \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

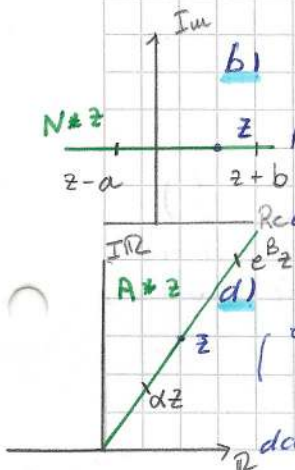
$$= a^2 + b^2 \text{ ce qui donne l'équation d'un cercle}$$

Le stabilisateur est donc $K = \left\{ \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \in \text{PSL}(2, \mathbb{R}) \mid \theta \in \mathbb{R} \right\}$ b) Soit $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\}$ et soit $z \in \mathbb{H}^2$.

$$N * z = \left\{ \frac{z+a}{1} = z+a \mid a \in \mathbb{R} \right\} \text{ (translation réelle)}$$

Redonc $N * z = \{ z + x \mid x \in \mathbb{R} \} =$ droite euclidienne horizontale par z .d) Soit $\begin{pmatrix} e^{s/2} & 0 \\ 0 & e^{-s/2} \end{pmatrix} \in A = \left\{ \begin{pmatrix} e^{t/2} & 0 \\ 0 & e^{-t/2} \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$ et soit $z \in \mathbb{H}^2$

$$\begin{pmatrix} e^{s/2} & 0 \\ 0 & e^{-s/2} \end{pmatrix} * z = \frac{e^{s/2} z}{e^{-s/2}} = e^s z \text{ (homothétie de rapp } e^s \text{ et centre } 0)$$

donc $A * z = \{ e^t z \mid t \in \mathbb{R} \} =$ demi droite euclid. de vecteur directeur z "contenant" 0.

Déf: le groupe spécial unitaire de signature (1,1) est l'ensemble

$$SU(1,1) := \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{C}, |\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1 \right\}$$

dont la loi est le produit matriciel.

Prop: $SU(1,1) \cong SL(2, \mathbb{R})$

Preuve: Vérifions d'abord que $SU(1,1)$ est un groupe.

• Associativité: $\checkmark$ (Induite par le prod. matriciel)

• Neutre: $I \in SU(1,1)$ ($\forall S \in SU(1,1)$ $SI = IS = S$)

• Inverse: $S \in SU(1,1)$ $S^{-1} = \begin{pmatrix} \bar{\alpha} & -\beta \\ \bar{\beta} & \alpha \end{pmatrix} \in SU(1,1)$

• Fermeture: (Bien déf) $\forall S, S' \in SU(1,1) \Rightarrow S \cdot S' \in SU(1,1)$

$$S, S' \in SU(1,1) \quad \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & \delta \\ \bar{\delta} & \bar{\gamma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\gamma + \beta\bar{\delta} & \alpha\delta + \beta\bar{\gamma} \\ \bar{\beta}\gamma + \bar{\alpha}\bar{\delta} & \bar{\beta}\delta + \bar{\alpha}\bar{\gamma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\gamma + \beta\bar{\delta} & \alpha\delta + \beta\bar{\gamma} \\ \overline{\alpha\delta + \beta\bar{\gamma}} & \overline{\alpha\gamma + \beta\bar{\delta}} \end{pmatrix}$$

$$\text{et } \det(S \cdot S') = \det(S) \cdot \det(S') = 1 \cdot 1 = 1$$

Isomorphisme:

$$\text{Soit } H = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} \quad H^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}$$

$$\text{Soit } \varphi: SL(2, \mathbb{R}) \rightarrow SU(1,1)$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto H \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} H^{-1}$$

$$\text{Soit } \psi: SU(1,1) \rightarrow SL(2, \mathbb{R})$$

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\alpha} & \bar{\beta} \end{pmatrix} \mapsto H^{-1} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\alpha} & \bar{\beta} \end{pmatrix} H$$

Il faut mq:

• φ et ψ sont bien définis ($\forall T \in SL(2, \mathbb{R}), \varphi(T) \in SU(1,1)$
 $\forall S \in SU(1,1), \psi(S) \in SL(2, \mathbb{R})$)

✓ • φ et ψ sont des homomorphismes (évident par déf.)

✓ • $\begin{cases} \varphi \circ \psi = \text{id} \\ \psi \circ \varphi = \text{id} \end{cases}$ (évident par déf.)

Mq φ et ψ sont bien définies:

$$\text{Soit } T \in SL(2, \mathbb{R}) \text{ alors } \varphi(T) = HT H^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a-ic & b-id \\ a+ic & b+id \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a-ic+d+ib & a-ic-d-ib \\ a+ic+ib-d & a+ic-ib+d \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a+d+i(b-c) & a-d+i(b+c) \\ a-d+i(b+c) & a+d-i(b-c) \end{pmatrix} \in SU(1,1).$$

Géométrie I:Preuve: (suite). Soit $S \in SU(1,1)$

$$\begin{aligned} \psi(S) &= H^{-1} S H = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \alpha + \bar{\beta} & \beta + \bar{\alpha} \\ i(\alpha + \bar{\beta}) & i(\beta + \bar{\alpha}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \alpha + \bar{\beta} + \beta + \bar{\alpha} & i(-\alpha - \bar{\beta} + \beta + \bar{\alpha}) \\ i(\alpha - \bar{\beta} + \beta - \bar{\alpha}) & \alpha - \bar{\beta} - \beta + \bar{\alpha} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(\alpha) + \operatorname{Re}(\beta) & \operatorname{Im}(\beta) - \operatorname{Im}(\alpha) \\ \operatorname{Im}(\alpha) + \operatorname{Im}(\beta) & \operatorname{Re}(\alpha) - \operatorname{Re}(\beta) \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{R}) \end{aligned}$$

$$\det(\psi(S)) = \det(\pi^{-1}) \det(S) \det(H) = 1$$

Prop: 1) $SU(1,1) \times \mathbb{D}^2 \rightarrow \mathbb{D}^2$ est une action par isométrie hyperbolique
 $(z; \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\alpha} & \bar{\beta} \end{pmatrix}) \mapsto \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\alpha} & \bar{\beta} \end{pmatrix} *_{\mathbb{D}^2} z = \frac{\alpha z + \beta}{\bar{\beta} z + \bar{\alpha}}$

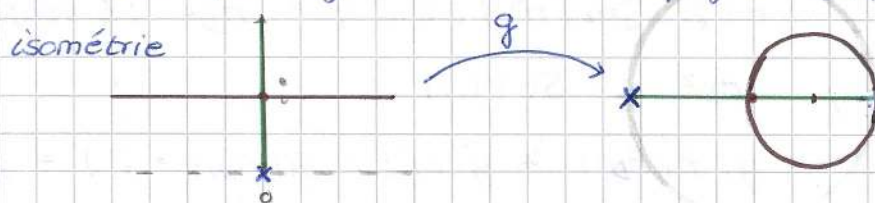
2) $K_{\mathbb{D}^2} = \{ \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} \mid \theta \in \mathbb{R} \} = \text{Stab}(0) \mid K_{\mathbb{D}^2} * 0 = \{0\}$

3) $A_{\mathbb{D}^2} = \{ \begin{pmatrix} \cosh t/2 & \sinh t/2 \\ \sinh t/2 & \cosh t/2 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \} \leq^{SU(1,1)} \text{ et } A_{\mathbb{D}^2} * 0 = (-1, 1) \text{ interval}$

4) $N_{\mathbb{D}^2} = \{ \begin{pmatrix} 1 + i\frac{b}{2} & -i\frac{b}{2} \\ i\frac{b}{2} & 1 - i\frac{b}{2} \end{pmatrix} \mid b \in \mathbb{R} \} \leq SU(1,1) \text{ et}$

$$N_{\mathbb{D}^2} * 0 = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z - \frac{1}{2}| = \frac{1}{2}; z \neq 1 \}$$

Rappel: On sait que $g: \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{D}^2$ tq $g(iz) = \frac{z-i}{z+i}$ est une



Observation:

$$\begin{array}{ccc} SL(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{H}^2 & \longrightarrow & \mathbb{H}^2 \\ \psi \times g \downarrow & & \downarrow g \\ SU(1,1) \times \mathbb{D}^2 & \longrightarrow & \mathbb{D}^2 \end{array} \quad \text{commute}$$

C'est-à-dire, $\forall T \in SL(2, \mathbb{R}), \forall z \in \mathbb{H}^2 \quad \psi(T) *_{\mathbb{D}^2} g(z) = g(T *_{\mathbb{H}^2} z)$

De manière équivalente, $\forall S \in SU(1,1), \forall z \in \mathbb{D}^2 \quad S *_{\mathbb{D}^2} z = g(\psi^{-1}(S) *_{\mathbb{H}^2} g^{-1}(z))$

Preuve:

1) • $\Pi_g: SU(1,1) \times \mathbb{D}^2 \rightarrow \mathbb{D}^2$ est bien définie

$\forall S \in SU(1,1)$ et $\forall z \in \mathbb{D}^2$, $S *_{\mathbb{D}^2} z \in \mathbb{D}^2$ (Exercice)

• $\Pi_g: SU(1,1) \curvearrowright \mathbb{D}^2$ par isométrie hyperbolique

Soit $S \in SU(1,1)$, Soit $z_1, z_2 \in \mathbb{D}^2$. $\Pi_g: d_{\mathbb{D}^2}(z_1, z_2) = d_{\mathbb{D}^2}(S * z_1, S * z_2)$

$$\begin{aligned} d_{\mathbb{D}^2}(S *_{\mathbb{D}^2} z_1, S *_{\mathbb{D}^2} z_2) &= d_{\mathbb{D}^2}(g(\psi^{-1}(S) *_{\mathbb{H}^2} g^{-1}(z_1)), g(\psi^{-1}(S) *_{\mathbb{H}^2} g^{-1}(z_2))) \\ &\stackrel{\text{g isométrie}}{=} d_{\mathbb{H}^2}(\psi^{-1}(S) * g^{-1}(z_1), \psi^{-1}(S) * g^{-1}(z_2)) \stackrel{\uparrow}{=} d_{\mathbb{H}^2}(g^{-1}(z_1), g^{-1}(z_2)) = d_{\mathbb{D}^2}(z_1, z_2) \quad \square \\ &\quad \text{SL}(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{H}^2 \text{ isométrie.} \end{aligned}$$

2) $K_{\mathbb{H}^2} = \left\{ \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \mid \theta \in \mathbb{R} \right\} \leq SL(2, \mathbb{R})$

$$\varphi(K_{\mathbb{H}^2}) = \left\{ H \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} H^{-1} \mid \theta \in \mathbb{R} \right\} = K_{\mathbb{D}^2} \quad \begin{array}{l} \text{p(ss-grp)} \\ \downarrow \\ \text{ss-grp.} \end{array}$$

ça montre que $K_{\mathbb{D}^2} \leq SU(1,1)$

$$\text{Et } K_{\mathbb{D}^2} *_{\mathbb{D}^2} 0 \stackrel{\uparrow}{=} g(\psi^{-1}(K_{\mathbb{D}^2}) *_{\mathbb{H}^2} g^{-1}(0)) = g(K_{\mathbb{H}^2} * i) = g(\{i\}) = \{0\} \quad \square$$

$\begin{array}{ccc} = K_{\mathbb{H}^2} & * & = i \\ * \text{Stabil}(i) & * & i \end{array}$

3) $A_{\mathbb{H}^2} = \left\{ \begin{pmatrix} e^{t/2} & 0 \\ 0 & e^{-t/2} \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\} \leq SL(2, \mathbb{R})$

$$\varphi(A_{\mathbb{H}^2}) = \left\{ H \begin{pmatrix} e^{t/2} & 0 \\ 0 & e^{-t/2} \end{pmatrix} H^{-1} \mid t \in \mathbb{R} \right\} = A_{\mathbb{D}^2} \text{ (à vérifier)}$$

Cela implique $A_{\mathbb{D}^2} \leq SU(1,1)$

$$A_{\mathbb{D}^2} * 0 = g(\psi^{-1}(A_{\mathbb{D}^2}) * g^{-1}(0)) = g(A_{\mathbb{H}^2} * i) = g(\{a i \mid a > 0\})$$

$$A_{\mathbb{H}^2} * i = \frac{e^{t/2} i}{e^{-t/2} i} = e^t i = \{a i \mid a > 0\} = (-1, 1) \text{ (Interval)} \quad \square$$

4) $N_{\mathbb{H}^2} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid b \in \mathbb{R} \right\} \leq SL(2, \mathbb{R})$

$$\varphi(N_{\mathbb{H}^2}) = \left\{ H \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} H^{-1} \mid b \in \mathbb{R} \right\} = \dots = N_{\mathbb{D}^2} \leq SU(1,1)$$

$$N_{\mathbb{D}^2} * 0 = g(\psi^{-1}(N_{\mathbb{D}^2}) * g^{-1}(0)) = g(N_{\mathbb{H}^2} * i) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 1/2| = 1/2, z \neq 1\}$$

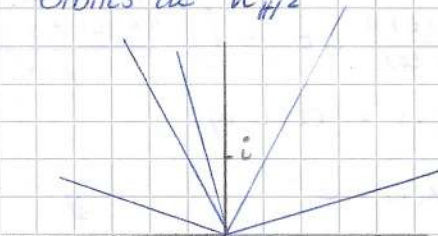
$$N_{\mathbb{H}^2} * i = \left\{ \frac{i+b}{1} \mid b \in \mathbb{R} \right\} = \{b + i \mid b \in \mathbb{R}\} = \frac{i}{1} \quad \square$$

Conclusion: Du cours.

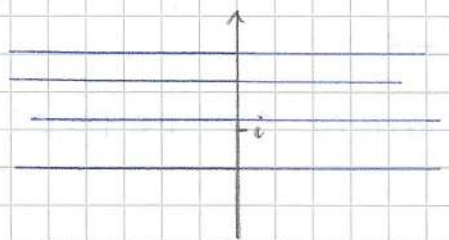
$$\underline{SL(2, \mathbb{R}) \curvearrowright \mathbb{H}^2}$$



Orbites de $K_{\mathbb{H}^2}$

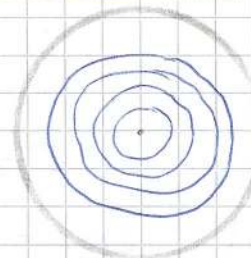


Orbites de $A_{\mathbb{H}^2}$

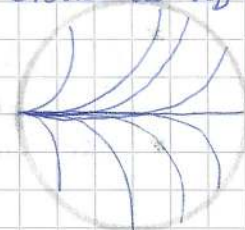


Orbites de $N_{\mathbb{H}^2}$

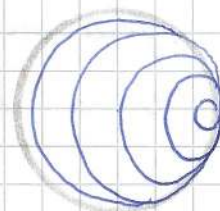
$$\underline{SU(1,1) \curvearrowright \mathbb{D}^2}$$



Orbites de $K_{\mathbb{D}^2}$



Orbites de $A_{\mathbb{D}^2}$

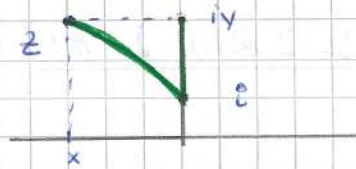


Orbites de $N_{\mathbb{D}^2}$

(Démonstration d'un thm)

Lemme: Soit $z = x + iy$, $y > 0$, $d_{\mathbb{H}^2}(i, z) \geq d_{\mathbb{H}^2}(i, iy)$

égalité $\Leftrightarrow x = 0$



Preuve: $c: I \rightarrow \mathbb{H}^2$ une géod entre i et z $c(0) = i$, $c(1) = z$

$I = [0, 1]$ $c(t) = x(t) + iy(t)$ $v(t) = iy(t)$ [projection verticale]

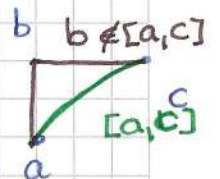
$$d(i, z) = \text{long}(c) = \int_0^1 \frac{\|c'(t)\|}{y(t)} dt = \int_0^1 \frac{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}{y(t)} dt$$

$$\geq \int_0^1 \frac{|y'(t)|}{y(t)} dt = \text{long}(v) = d(i, iy)$$

* est une égalité $\Leftrightarrow \dot{x}(t) = 0$

Prop: $a, b, c \in \mathbb{H}^2$ trois points. On note $[p, q]$ l'image de la géodésique entre p et $q \in \mathbb{H}^2$.

On a $d(a, c) = d(a, b) + d(b, c) \Leftrightarrow b \in [a, c]$



Preuve: • si $b \in [a, c]$ alors $d(a, c) = d(a, b) + d(b, c)$ évident

• si $b \notin [a, c]$ alors $d(a, b) + d(b, c) > d(a, c)$ se déduit du lemme précédent (ie: on se ramène à $a, c \in i\mathbb{R}_+, c \neq a$)

$a = i$ et $c = yi$, $y > 1$ $[a, c]$ b d'après le lemme $d(a, b) > d(a, b')$ où $b' = \text{Im}(b)$ $d(b, c) > d(c, b')$

$$\Rightarrow d(a, b) + d(b, c) > d(a, b') + d(b', c) = d(a, c)$$

(on peut démontrer la même chose dans $\mathbb{D}^2$ ou $\mathbb{H}^2$)

Prop: soit g une isométrie (de $\mathbb{D}^2$ ou de $\mathbb{H}^2$)

Soit $a, b \in X$ où $X = \mathbb{D}^2$ ou $\mathbb{H}^2$, $[a, b]$ le segment géodésique entre a et b . $g([a, b]) = [g(a), g(b)]$

c'est-à-dire g préserve les segments géodésiques.

Preuve: (suite) On a dit $\varphi(1) = 0$ et $\varphi(1/2) = 1/2$

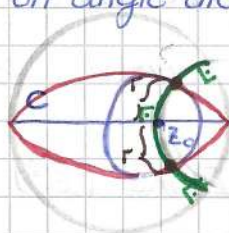
donc φ fixe tout point de $] -1, 1[$ qui est une géodésique.

Lemme: Soit C une géodésique biinfinie de $\mathbb{D}^2$.

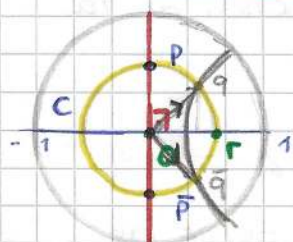
$z_0 \in C$. Soit $r > 0$

$$\{z \in \mathbb{D}^2 \mid d_{\mathbb{D}^2}(z, z_0) = r\} \cap \{z \in \mathbb{D}^2 \mid d_{\mathbb{D}^2}(z, C) = r\}$$

est égal aux 2 points situés sur l'unique géodésique coupant C en z_0 selon un angle droit, et à distance r de z_0



Preuve du lemme:



Il suffit de prouver le lemme dans le cas où $C =] -1, 1[$ et $z_0 = 0 \in \mathbb{D}^2$. Les 2 points p et $\bar{p}$ sur la géod. $\perp$ à C à distance r de z_0 , sont bien à distance r de C .

En effet, si $z \in C$ $z \neq z_0$ alors $d(p, z) > d(p, z_0)$ [lemme du début]

Si q est tq $d(z_0, q) = r$ et $q \neq p$ $q \neq \bar{p}$ alors $d(q, C) < r$

$z \in [q, \bar{q}] \cap C$ alors $d(q, z) < r$

$$2d(q, z) = d(q, \bar{q}) < d(\bar{q}, z_0) + d(z_0, q) = 2r$$

$$d(q, z) < r \quad \square$$

le 30.04.2018

Lemme: Soit $p, q \in \mathbb{D}^2 \setminus] -1, 1[$, deux points dans la même composante connexe. C'est-à-dire $\text{signe } \text{Im}(q) = \text{signe } \text{Im}(p)$ ($\text{Im } p \cdot \text{Im } q > 0$) alors $[p, q] \cap] -1, 1[= \emptyset$

Preuve: On se place dans $\mathbb{H}^2$, soit $p, q \in \mathbb{H}^2 \setminus i\mathbb{R}$ tq $\text{Re}(p) \cdot \text{Re}(q) > 0$

$$[p, q] \cap i\mathbb{R} = \emptyset$$

L'énoncé est vrai dans $\mathbb{H}^2$. Il est bien équivalent à celui

dans $\mathbb{D}^2$. $z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$ est une isométrie $\mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{D}^2$. Les cercles

généralisés sont préservés par g . $g: i\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Si $\text{Re}(q) \cdot \text{Re}(p) > 0$

$\Rightarrow \text{Im}(p) \cdot \text{Im}(q) > 0$. Car si $c: [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}^2 \setminus i\mathbb{R}$ est un chemin continu,

Preuve (Lemme)

tg $c(0) = p$ et $c(1) = q$ et $\text{Im}(c) \cap i\mathbb{R} = \emptyset$ alors $g \circ c: I \rightarrow \mathbb{D}^2$
est un chemin continu. $g \circ c(0) = g(p)$ et $g \circ c(1) = g(q)$
 $\text{Im}(g \circ c) \cap]-1, 1[= \emptyset.$ ■

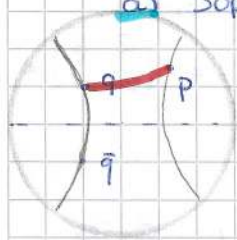
Fin preuve du TRM:

$\varphi: \mathbb{D}^2 \rightarrow \mathbb{D}^2$ isométrie $\varphi|_{]-1,1[} = \text{id}$

Affirmation: $p \in \mathbb{D}^2 \setminus (-1,1)$ alors $\varphi(p) \in \{p, \bar{p}\}$. De plus on a les implications
suivantes: $\varphi(p) = p \Rightarrow \varphi = \text{id}_{\mathbb{D}^2}$ et $\varphi(p) = \bar{p} \Rightarrow \varphi(z) = \bar{z} \forall z \in \mathbb{D}^2$

Preuve: $\varphi(p) \in \{p, \bar{p}\}$ découle du Lemme 1). On choisit $c = (-1,1)$, $\varphi(c) = c$
 $z_0 = [p, \bar{p}] \cap (-1,1)$ $\varphi(z_0) = z_0$. Les 2 points de l'ensemble
sont préservés par φ . Supposons $\text{Im}(p) > 0$.

a) Supposons: $\varphi(p) = p$



• Supposons $\text{Im}(q) > 0$: Alors $\varphi(q) = q$ sinon $\varphi(q) = \bar{q}$
on aurait une contradiction, car $[p, q] \cap (-1,1) = \emptyset$ et
 $[\varphi(p), \varphi(q)] \cap (-1,1) \neq \emptyset$ ($\text{Im} p \cdot \text{Im} \bar{q} < 0$).

D'autre part $[\varphi(p), \varphi(q)] = \varphi([p, q])$ et $[p, q] \cap (-1,1) = \emptyset$
par Lemme 2) φ bijection de $\mathbb{D}^2$ $\varphi|_{(-1,1)} = \text{id}$

$\varphi([p, q]) \cap (-1,1) \neq \emptyset$

Tous les autres cas se prouvent de manière analogue. ■

• Traitons le cas où: si $\text{Im}(p) > 0$ et $\varphi(p) = p$ soit
 q tg $\text{Im}(q) > 0$. Si $\varphi(q) = q$

On échange p et q et on est dans le cas précédent. ■

Cas (i): $\varphi = \text{id}$, $z = \varphi(z) = \kappa' a \kappa + \bar{\kappa}(z) \forall z \in \mathbb{D}^2$ donc

$\bar{\kappa}(z) = (\kappa'^{-1} a^{-1} \kappa'^{-1}) * z \forall z \in \mathbb{D}^2$ où $\kappa'^{-1} a^{-1} \kappa'^{-1} \in \text{SU}(1,1)$

Cas (ii): $\varphi(z) = \bar{z} \forall z \in \mathbb{D}^2$ $\bar{z} = \varphi(z) = (\kappa' a \kappa) \bar{\kappa}(z)$ donc

$\bar{\kappa}(z) = (\kappa'^{-1} a^{-1} \kappa'^{-1}) * \bar{z} \forall z \in \mathbb{D}^2.$

Conclusion: Tout élément de $\text{Isom}(\mathbb{D}^2)$ s'écrit comme $g \cdot \mathcal{I}^\varepsilon$ avec

$g \in \text{PSU}(1,1)$, $\varepsilon \in \{0,1\}$. De plus l'écriture est unique

si $g_1 \mathcal{I}^{\varepsilon_1} = g_2 \mathcal{I}^{\varepsilon_2}$ avec $g_1, g_2 \in \text{PSU}(1,1)$ et $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \{0,1\}$

$$\Rightarrow \mathcal{I}^{\varepsilon_1 \varepsilon_2} = g_1^{-1} g_2$$

$$\text{alors } \bar{z} = \frac{\alpha z + \beta}{\bar{\beta} z + \bar{\alpha}} \quad \text{tq } A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \in \text{SU}(1,1) \quad \forall z \in \mathbb{D}^2 \quad \bar{z}$$

car si $z=0 \Rightarrow \bar{z} = \frac{\beta}{\bar{\alpha}} \Rightarrow \beta=0 \Rightarrow$ la matrice est diagonale

$$\frac{\alpha}{\bar{\alpha}} z = z \Leftrightarrow \forall z \in \mathbb{D}^2 \quad \frac{\alpha}{\bar{\alpha}} = 1 \Leftrightarrow \alpha = \bar{\alpha} \Leftrightarrow z = \bar{z} \text{ alors } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$$

ce qui est impossible

$$\Rightarrow \varepsilon_1 = \varepsilon_2 \Rightarrow g_1 = g_2 \quad \blacksquare$$

$$\text{Dans le Thm: } \{1\} \rightarrow \text{PSU}(1,1) \xrightarrow{\pi} \text{Isom}(\mathbb{D}^2) \xrightarrow{\pi} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow \{0\}$$

$$g \cdot \mathcal{I}^\varepsilon \xrightarrow{\pi} \varepsilon$$

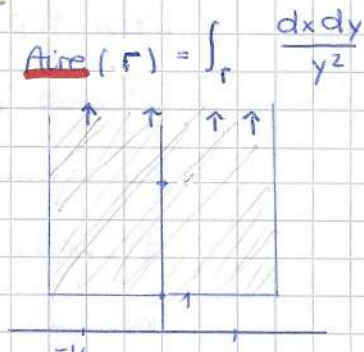
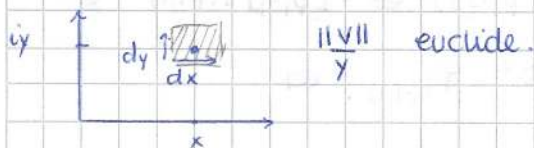
Vérifions que $\text{PSU}(1,1)$ est bien normal dans $\text{Isom}(\mathbb{D}^2)$

(une classe d'équivalence ou on peut la voir comme une isom).

$$\mu = \left\{ \pm \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \right\} \quad \mathcal{I} \mu * (\mathcal{I}(z)) = \begin{pmatrix} \alpha \bar{z} + \beta \\ \bar{\beta} z + \bar{\alpha} \end{pmatrix} = \frac{\alpha \bar{z} + \beta}{\bar{\beta} z + \bar{\alpha}} = \begin{pmatrix} \bar{\alpha} z + \bar{\beta} \\ \beta \bar{z} + \alpha \end{pmatrix} * z$$

Aires et Triangles Hyperboliques

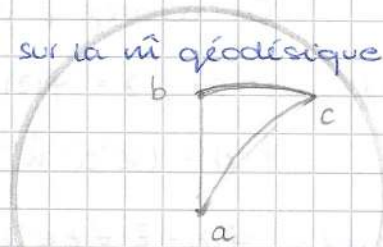
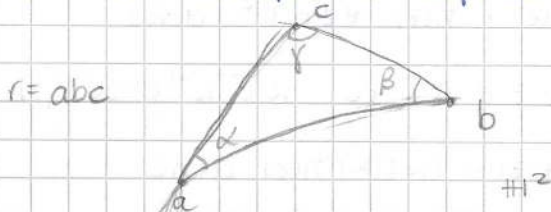
Déf. $r \subset \mathbb{H}^2$ un ss-ensemble joi (compact). Aire $(r) = \int_r \frac{dx dy}{y^2}$



Exemple: $r = \{ z = x + iy : y \geq 1, |x| \leq 1/2 \}$

$$\text{Aire}(r) = \int_r \frac{dx dy}{y^2} = \int_{-1/2}^{1/2} dx \cdot \int_1^\infty \frac{dy}{y^2} = 1 \cdot \left(-\frac{1}{y} \right) \Big|_1^\infty = 1$$

Déf. Un triangle hyperbolique dans $\mathbb{D}^2$ ou $\mathbb{H}^2$. $X = \mathbb{D}^2$ ou $\mathbb{H}^2$ est la donnée de 3 points, $a, b, c \in X$ (qui ne sont pas sur la m même géodésique)



Prop: Soit a, b, c un triangle de $\mathbb{H}^2$, on a $\text{Aire}(abc) = \pi - (\alpha + \beta + \gamma)$

Remarque: • On voit que comme $\text{Aire}(abc) > 0$ $\alpha + \beta + \gamma < \pi$.

L'aire du triangle ne dépend que de ses angles,

Preuve de la prop:

le 07.05.18

1^{er} pas: Cas particulier de la formule de Stokes.

Lemme: (Stokes particulier)

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un joli sous-ensemble. Alors

$$\int_{\Omega} \frac{dx \wedge dy}{y^2} = \int_{\partial \Omega} \frac{dx}{dy} \quad \text{où } \Omega \cap \{(x, 0), x \in \mathbb{R}\} = \emptyset$$

et $\partial \Omega$ est le "bord" de Ω .

Preuve: (Lemme)

$\rightarrow dx$ et $\uparrow dy$

1^{er} cas: Ω est un rectangle. $(x_0, y_0) \rightarrow (x_1, y_1)$ $x_0 < x_1$ et $y_0 < y_1$ où Ω est un rectangle.

$$\int_{\Omega} \frac{dx \wedge dy}{y^2} = (x_1 - x_0) \left(\int_{y_0}^{y_1} \frac{dy}{y^2} \right) = (x_1 - x_0) \left(-\frac{1}{y} \Big|_{y_0}^{y_1} \right) = (x_1 - x_0) \left(\frac{1}{y_0} - \frac{1}{y_1} \right)$$

On sépare les variables et on intègre relativement à dx

$$\int_{\partial \Omega} \frac{dx}{dy} = \int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{y_0} + \int_{x_1}^{x_0} \frac{dx}{y_1} = (x_1 - x_0) \frac{1}{y_0} + (x_0 - x_1) \frac{1}{y_1} = (x_1 - x_0) \left(\frac{1}{y_0} - \frac{1}{y_1} \right)$$

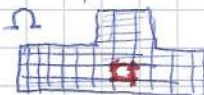
Seuls les 2 segments horizontaux interviennent.

Idée clé de Stokes: On décompose Ω en petits carrés

et on constate que seuls les petits carrés proches

de Ω contribuent à $\int_{\partial \Omega} \frac{dx}{dy}$

2^{ème} cas: Ω est de type



$\bigcup_i \Omega_{ij} = \Omega$ est réunion d'un nombre fini de rectangles

ou de petits carrés. $\int_{\Omega} \frac{dx \wedge dy}{y^2} = \sum_{ij} \int_{\Omega_{ij}} \frac{\partial x \wedge \partial y}{y^2}$

$$= \sum_{ij} \int_{\partial \Omega_{ij}} \frac{dx}{y} = \int_{\partial \Omega} \frac{dx}{y}$$

les contributions de $\int_{\partial A} \frac{dx}{y}$ et de $\int_{\partial B} \frac{dx}{y}$ sur l'arête

verticale de A qui intersecte B s'annulent, car les

signes sont opposés.



Preuve: (Lemme) Suite

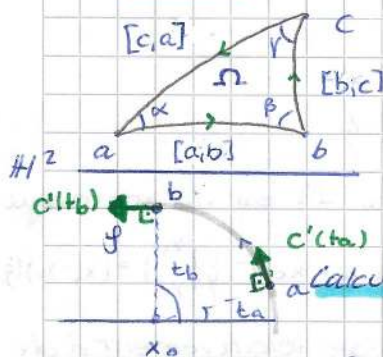
- 3^{ème} Cas: Ω s'approxime par des petits carrés.
Par exemple, Ω est délimité par un nbr fini de courbe C' .

On approxime Ω à ε près par des Ω_n du cas ii)si les carrés sont petits $\left| \int_{\Omega} \frac{dx dy}{y^2} - \int_{\partial \Omega_n} \frac{dx dy}{y^2} \right| < \varepsilon_n$

$$\left| \int_{\partial \Omega} \frac{dx}{y} - \int_{\partial \Omega_n} \frac{dx}{y} \right| < \varepsilon_n$$

$$\Rightarrow \left| \int_{\Omega} \frac{dx dy}{y^2} - \int_{\partial \Omega} \frac{dx}{y} \right| < \varepsilon \text{ (aussi petit qu'on veut)}$$

Parenthèse: Stokes $\int_{\Omega} dw = \int_{\partial \Omega} w$

2^{ème} pas: Preuve de la prop

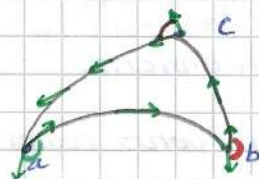
$$\text{Aire}_{\mathbb{H}^2}(\Omega) := \int_{\Omega} \frac{dx dy}{y^2} = \int_{\partial \Omega} \frac{dx}{y} = \int_{[a,b]} \frac{dx}{y} + \int_{[b,c]} \frac{dx}{y} + \int_{[c,a]} \frac{dx}{y}$$

On doit savoir comment faire l'intégrale d'un arc de cercle.

$$C: [t_a; t_b] \rightarrow \mathbb{H}^2$$

$$t \mapsto (x_0 + r \cos t, r \sin t) = (x(t); y(t))$$

$$\int_{[a,b]} \frac{dx}{y} = \int_{t_a}^{t_b} \frac{-r \sin t}{r \sin t} dt = t_a - t_b = - \left(\begin{array}{l} \text{de combien il tourne} \\ \text{variation de } \dot{c}(t) \text{ entre} \\ c(t_a) \text{ et } c(t_b) \end{array} \right)$$



(variation de $\dot{c}(t)$ sur les 3 côtés du triangle)

$$+ (\pi - \beta) + (\pi - \gamma) + (\pi - \alpha) = 2\pi$$

$$\sim \text{Aire}(\Omega) \rightarrow \text{Aire}(\Omega) = \pi - (\alpha + \beta + \gamma)$$

comme $\text{Aire}(\Omega) > 0$ alors $\alpha + \beta + \gamma > \pi$

Produits hermitiens, adjoint, théorème spectral,
thm fond. algèbre.

Déf: Soit V un e.v sur $\mathbb{C}$, un produit hermitien sur V :

$$B: V \times V \rightarrow \mathbb{C} \quad \forall v, w \in V, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

$$(v, w) \mapsto B(v, w)$$

i) $B(\alpha v + \beta w, u) = \alpha B(v, u) + \beta B(w, u)$

ii) $B(w, v) = \overline{B(v, w)}$

iii) $B(v, v) \geq 0$

iv) $B(v, v) = 0 \Leftrightarrow v = 0$

Rem: $B(v, \lambda w) = \overline{B(\lambda w, v)} = \overline{\lambda B(w, v)} = \bar{\lambda} \overline{B(w, v)} = \bar{\lambda} B(v, w)$

Ex: $V = \mathbb{C}^n$ $B: \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$

$$\left(\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \right) \mapsto \sum_{k=1}^n z_k \cdot \overline{w_k} \quad (\text{prod scal...})$$

Déf: Soit V un e.v sur $\mathbb{C}$, $V^* := \{ L: V \rightarrow \mathbb{C} : L \text{ est linéaire} \}$

$$L(\alpha v + \beta w) = \alpha L(v) + \beta L(w) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C} \quad \forall v, w \in V$$

V^* est le dual de V . $\forall v \in V, \forall \alpha \in \mathbb{C} \quad \forall L_1, L_2, L \in V^*$

$$\text{Loi "+" : } (L_1 + L_2)(v) = L_1(v) + L_2(v) \quad \text{Loi "·" : } (\alpha L)(v) = \alpha \cdot L(v)$$

$$\Theta(v) = 0 \quad \forall v \in V, (L + \Theta)(v) = L(v)$$

V^* est un espace vectoriel. (fait d'application linéaire)

Prop: Soit V , un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$. Soit $e_1, \dots, e_n$ une base de V ($\dim V = n$ dans ce cas $\forall n = 1, \dots$)

Soit $e_i^*: V \rightarrow \mathbb{C}$ l'unique application linéaire tq

$$e_i^*(e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad 1 \leq i \leq n$$

Alors $e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*$ est une base de V^* .

Preuve: • indép. lin : $\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i^* = 0 \stackrel{?}{\Rightarrow} \alpha_i = 0 \quad \forall i$ (ici 0 est une application)

En effet, appliquons $(\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i^*) (e_j) \stackrel{\text{hyp}}{=} 0(e_j) = 0 \in V$

et on a $(\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i^*) (e_j) = \alpha_j e_j^*(e_j) = \alpha_j \cdot 1 = 0$

$\Rightarrow \alpha_j = 0 \quad \forall j$

• Les $e_1^*, \dots, e_n^*$ engendrent V^* .

Soit $L \in V^*$. i.e. : $L: V \times V \rightarrow \mathbb{C} \quad (L(e_i) \in \mathbb{C})$

$$L = \sum_{i=1}^n L(e_i) e_i^* \quad (L(e_i) \in \mathbb{C})$$

Testons l'égalité sur les vecteurs de la base $e_1, \dots, e_n$:

$$L(e_j) \stackrel{?}{=} \left(\sum_{i=1}^n L(e_i) e_i^* \right) (e_j) = L(e_j) \cdot \underset{i=j \Rightarrow 1}{e_j^*(e_j)} = L(e_j) \quad \text{ok}$$

Cas particulier d'une base orthonormale. On suppose que V est muni

d'un produit hermitien défini positif noté : $V \times V \rightarrow \mathbb{C}$
 $(v, w) \mapsto \langle v, w \rangle$

Une base de V $e_1, \dots, e_n$ est dite orthonormée (relativement à $\langle \cdot, \cdot \rangle$)

si par déf. : $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Dans ce cas, on a, $e_i^*(v) = \langle v, e_i \rangle \quad \forall v \in V \quad \forall i=1, \dots, n$

$$e_i^*(e_j) = \langle e_j, e_i \rangle = \delta_{ij} = \delta_{ji}$$

Rem: 1) si $w \in V$ est fixé, alors $v \mapsto \langle v, w \rangle$ est bien une

application linéaire de V dans $\mathbb{C}$

2) Si $L: V \rightarrow \mathbb{C}$, $L \in V^*$ alors $L(v) = \sum_{i=1}^n L(e_i) e_i^*(v) = \sum_{i=1}^n L(e_i) \langle v, e_i \rangle$
 $= \langle v, \sum_{i=1}^n \overline{L(e_i)} \cdot e_i \rangle$

Prop: Soit V, W deux e.v sur $\mathbb{C}$. $A: V \rightarrow W$ une application linéaire.

(on suppose $\dim(V) < \infty$ et $\dim(W) < \infty$) (muni de prod hermitien déf positif)

Alors $\exists$ application linéaire $A^*: W \rightarrow V$ telle que $\langle Av, w \rangle_W = \langle v, A^*w \rangle_V$

$\forall v \in V$ et $\forall w \in W$ (Il y a 2 prod. scalaire dans V et dans W)

Géométrie I:

Preuve: Soit $e_1, \dots, e_n$ une base orthonormée de V .

On pose $\forall v \in V \quad A^*(w) = \sum_{i=1}^n \overline{\langle A(e_i); w \rangle} \cdot e_i \in V$
est bien linéaire.

$$\langle \overline{v}, \lambda w \rangle = \lambda \overline{\langle v, w \rangle} \quad \forall v \in V, \forall w \in W \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$$

$$\begin{aligned} \langle v, A^*(w) \rangle &= \langle v, \sum_{i=1}^n \overline{\langle A(e_i); w \rangle} e_i \rangle = \sum_{i=1}^n \langle A(e_i); w \rangle \langle v, e_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \langle A(\langle v, e_i \rangle \cdot e_i), w \rangle = \langle A(\sum_{i=1}^n \langle v, e_i \rangle e_i), w \rangle = \langle A(v), w \rangle_w \\ v &= \sum_{i=1}^n \langle v, e_i \rangle e_i \quad (x = \sum_{i=1}^n x_i e_i, x_i \in \mathbb{C} \quad \langle x, e_j \rangle = x_j) \end{aligned}$$

Unicité: L'égalité $\langle Av, w \rangle = \langle v, A^*w \rangle \quad \forall v \in V$ caractérise le vecteur A^*w

En effet, si $u, u' \in V$ sont tels que $\langle v, u \rangle = \langle v, u' \rangle \quad \forall v \in V$

$$\Rightarrow \langle v, u - u' \rangle = 0 \quad \forall v \in V. \text{ Donc si on choisit } v = u - u'$$

$$\text{On a } \langle u - u', u - u' \rangle = 0 \Rightarrow u - u' = 0 \Rightarrow u = u'$$

↑ produit déf positif.

Cas particulier, si $\dim(V) < \infty, \dim(W) < \infty$. Matrice de A^* :

$\{e_i\}_{i=1}^m$ base de V , $\{e_j\}_{j=1}^n$ base de W (orthonormée)

Matrice $A: V \rightarrow W \quad (A_{ij})_{\substack{i=1 \\ j=1}}^{\substack{m \\ n}} = \langle A(e_i); e_j \rangle_w$

Matrice $A^*: W \rightarrow V \quad ((A^*)_{ij})_{\substack{i=1 \\ j=1}}^{\substack{m \\ n}} = \langle A^*e_j; e_i \rangle_v$

$$\boxed{(A^*)_{ij} = \langle A^*e_j; e_i \rangle = \langle e_i; A e_i \rangle = \overline{\langle A e_i; e_j \rangle} = \overline{A_{ji}}}$$

↑
déf adjoint

↑
échange ligne-colonne
puis conj-complexe
de tous les coeff.

Prop: Soit V un e.v sur $\mathbb{C}$ munit d'un produit hermitien défini positif.

$\dim(V) = n$. Soit $A: V \rightarrow V$ linéaire tq $A^* = A$

1) Si $v \in V, v \neq 0$ est tq $Av = \lambda v$ où $\lambda \in \mathbb{C}$ alors $\lambda \in \mathbb{R}$

2) si $v, w \in V$ sont tq $Av = \lambda v$ et $Aw = \mu w$ où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ sont distincts ($\lambda \neq \mu$) alors $\langle \lambda, \mu \rangle = 0$

3) $\dim(V) > 0 \Rightarrow \exists v \in V: \|v\| = 1, Av = \lambda v$ (Il y a tjrs un vect. propre)

$$A^* = A \text{ hyp}$$

Preuve:

$$1) \quad \begin{array}{ccccccc} \langle Av, v \rangle & = & \langle v, A^* v \rangle & = & \langle v, Av \rangle & = & \bar{\lambda} \langle v, v \rangle \\ \parallel & & \uparrow \text{déf de } A & & & & \uparrow Av = \lambda v \\ \lambda \langle v, v \rangle & & & & & & \end{array}$$

$$\Rightarrow \langle v, v \rangle \neq 0, \lambda = \bar{\lambda} \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$$

$$2) \quad \lambda \langle v, w \rangle = \langle Av, w \rangle = \langle v, A^* w \rangle = \langle v, Aw \rangle = \mu \langle v, w \rangle$$

si $\langle v, w \rangle \neq 0$ alors $\lambda = \mu$ et réciproquement

si $\mu \neq \lambda$ alors $\langle v, w \rangle = 0$

$$3) \quad P_A(z) = \det(z \cdot \text{id} - A) = z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \dots + c_1 z + c_0$$

où $n = \dim(V)$ $c_i \in \mathbb{C}$ D'après le thm fond de l'algèbre

$$\exists \lambda \in \mathbb{C} : P_A(\lambda) = 0$$

$$\text{donc } \det(\lambda \cdot \text{id} - A) = 0 \Rightarrow \text{Ker}(\lambda \text{id} - A) \neq \{0\}$$

$$\text{Soit } v \neq 0 \text{ tq } v \in \text{Ker}(\lambda \text{id} - A), Av = \lambda v$$

on peut choisir v , de norme 1. ($\|v\| = 1$)

le 28.05.18

Thm spectral en dimension finie pour les opérateurs auto-adjoints:

Soit V un ev de dimension n sur $\mathbb{C}$. ($V \neq \{0\}$)

Soit $A: V \rightarrow V$ une application linéaire. On suppose V munit d'un produit hermitien défini positif.

Supposons $A^* = A$.

Alors, il existe une base orthonormée de V $v_1, v_2, \dots, v_n$

et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que $Av_k = \lambda_k v_k \quad \forall k = 1, \dots, n$

$\mathbb{R}$

Preuve: Parmi les ensembles de vecteurs de V $\{v_1, \dots, v_k\}$ où $k \leq n$
 tels que $\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ pour lesquels
 $\hookrightarrow$ prod. herm.

il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ tq $A(v_i) = \lambda_i v_i \quad i=1, \dots, k$

Choisissons parmi les ensembles l'un d'eux pour lequel k est maximal.

Si on montre $k = n$ le théorème est prouvé.

Prouvons que k ne peut pas être plus petit que n .

On suppose par l'absurde que $k < n$.

$W := \{w \in V : \langle w, v_i \rangle = 0 \text{ pour } i=1, \dots, k\}$ C'est un ss-espace vectoriel de V . La restriction du produit hermitien à W est toujours un produit hermitien défini positif.

De plus $A(W) \subset W$, en effet :

si $w \in W$, on a $\langle w, v_i \rangle = 0 \quad \forall i=1, \dots, k$

$$\langle Aw, v_i \rangle = \langle w, A^* v_i \rangle = \langle w, A v_i \rangle = \langle w, \lambda_i v_i \rangle = \overline{\lambda_i} \langle w, v_i \rangle$$

$$= \lambda_i \cdot 0 = 0 \quad [\text{ce qui prouve l'inclusion}]$$

orthogonal de $\langle v_1, \dots, v_k \rangle$

$$V = W \oplus \langle v_1, \dots, v_k \rangle \quad \swarrow \text{ss esp engendré par } v_1, \dots, v_k$$

$$\dim(V) = \dim W + k = n \quad \text{où } n > k$$

Alors $\dim W > 0$. Soit $w \in W, \|w\| = 1 \quad A(w) = \lambda w$

Un tel w existe d'après le pr 3) de la proposition.

Ceci conclut la preuve du théorème. En effet, on a

$\{v_1, \dots, v_k, w\}$ est une collection de vecteurs de V orthonormée.

$A(v_i) = \lambda_i v_i$ et $A(w) = \lambda w \quad \lambda w \in \mathbb{R}$ d'après 1) de la proposition.

Ainsi, k n'était pas maximal $\nearrow$

$\Rightarrow k$ maximal $\Rightarrow k = n$.

Version matricielle du thm spectral:

On note $M(n, \mathbb{C})$ l'ensemble des matrices $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{C}$.

Déf: Transformation unitaire

Soit V un ev sur $\mathbb{C}$ muni d'un produit hermitien défini positif.

Soit $U: V \rightarrow V$ une application linéaire.

On dit que U est unitaire si $\forall v, w \in V \quad \langle Uv, Uw \rangle = \langle v, w \rangle$.

Prop: $U \cdot U^* = \text{id}$ c'est-à-dire $U^{-1} = U^*$

si $e_1, \dots, e_n$ est une base orthonormée de V , la matrice $M(U)$

de U dans cette base vérifie $c_i \cdot c_j = \delta_{ij} \quad 1 \leq i, j \leq n$

c_i i -ème colonne de $M(U)$ ↑ prod hermitien

$$z \cdot w = \sum_{i=1}^n z_i \cdot \overline{w_i} \quad z, w \in \mathbb{C}^n$$

Forme matricielle:

Soit $A \in M(n, \mathbb{C})$, on suppose $\overline{A_{ij}} = A_{ji}$

Il existe une transformation unitaire, $\exists U \in M(n, \mathbb{C})$ unitaire,

c'est-à-dire, tq $c_i \cdot c_j = \delta_{ij}$ où c_i est la i -ème colonne de $U \quad i=1, \dots, n$ et $j=1, \dots, n$

$UAU^{-1} = D$ où $D \in M(n, \mathbb{R})$ tq $D_{ij} = 0$ si $i \neq j \quad 1 \leq i, j \leq n$

Preuve: (Découle du thm spectral)

Soit $A: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ l'application linéaire définie par $A \in M(n, \mathbb{C})$

dans la base canonique, ie: A est définie par les conditions

$\langle A e_j, e_i \rangle = A_{ij}$ où $e_1, \dots, e_n$ est la base canonique de $\mathbb{C}^n$

et $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$ est le prod. hermitien canonique $\langle c_i, c_j \rangle = c_i \cdot c_j$

On a donc $\langle A e_j, e_i \rangle = A_{ij} = \overline{A_{ji}} \quad \langle e_j, A^* e_i \rangle = \overline{\langle A^* e_i, e_j \rangle} = \overline{(A^*)_{ji}}$

$\Rightarrow A^*_{ij} = A_{ij}$ Donc $A^* = A$ d'après le thm spectral,

$\exists v_1, \dots, v_n$ une base orthonormale de $\mathbb{C}^n$, $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R} : A(v_i) = \lambda_i v_i \quad i=1, \dots, n$

Géométrie I :Preuve: (Suite)Soit $u : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ l'application définie par les conditions

$$u(v_i) = e_i \quad \forall i = 1, \dots, n$$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^n & \xrightarrow{A} & \mathbb{C}^n \\ u^{-1} \uparrow & & \downarrow u \\ \mathbb{C}^n & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{C}^n \\ e_i & \longmapsto & u A u^{-1}(e_i) = u A(v_i) = u(\lambda_i v_i) = \lambda_i e_i \end{array}$$

Posons $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \in M(n, \mathbb{R})$

 $U := M(u)$ matrice de u dans la base canonique.

$$U A U^{-1} = M(u) M(A) M(u^{-1}) = M(u^{-1} A u) = D$$

