Entraînement de Méthodes Élémentaires

Exercice 1. *Dix points sont posés dans un triangle équilatéral de côté* 3.

a) Montrer qu'on peut poser un disque de diamètre $1,2$ *qui recouvre au moins* 2 *points.*

b) Montrer qu'on peut poser un disque de diamètre 1 *qui recouvre au moins* 2 *points.*

Exercice 2. *On commence avec le nombre* 1 *écrit sur le tableau. En une étape, on peut remplacer le nombre* n *par* $d(n) + n^3$*, où* $d(n)$ *désigne la somme des chiffres du nombre* n*. Est-il possible, après un certain nombre d'étapes, d'arriver à un nombre s'écrivant uniquement avec des* 3 *et des* 0 *?*

Exercice 3. *On considère des mots écrits avec les lettres* 0 *et* 1*. On commence avec le mot* 01*. En une étape, on peut effectuer une des deux opérations suivantes :*

a) Ajouter deux 0 *ou deux* 1 *adjacents n'importe où dans le mot*

b) Effacer deux 0 *ou deux* 1 *adjacents*

Peut-on, après un certain nombre d'étapes, obtenir le mot 10 *?*

Exercice 4. *Un groupe d'étudiantes satisfait la propriété suivante : si deux étudiantes ont le même nombre d'amies alors elles n'ont aucune amie en commun. Montrer qu'il existe une étudiante avec exactement une amie.*
Remarque : on considère que la relation d'amitié est réciproque, et qu'au moins une étudiante a des amies.

Exercice 5. *On considère* 13 *nombres entiers positifs différents, tous plus petits ou égaux à* 38. *Montrer qu'il existe trois paires dont les différences sont identiques (les paires peuvent avoir un nombre en commun).*

Exercice 6. *On considère un parallélogramme avec côtés de longueurs* 2 *et* 3, *et un angle aigu de* $60°$. *Dans ce parallélogramme sont posés* 13 *points. Montrer qu'on peut trouver* 2 *points à distance au plus* 1.

Exercice 7. *On définit une suite* $\{a_n\}$ *de la façon suivante :*

$$a_1 = a_2 = a_3 = 1$$
$$\forall n \geq 1, \quad a_{n+3} = a_{n+2} + a_{n+1} + a_n$$

Monterr qu'il existe un élément de cette suite dont l'écriture décimale se termine par au moins trois 9.

Exercice 8. *On définit une suite* $\{a_n\}$ *de la façon suivante :*

$$a_1 = a_2 = a_3 = 1, \quad a_4 = 3$$
$$\forall n \geq 1, \quad a_{n+4} = a_{n+3} + a_{n+2} + a_{n+1} + a_n$$

Montrer qu'il existe un élément de cette suite dont l'écriture se termine par au moins trois 0.

Exercice 9. *Alice possède* 100 *chapeaux rouges,* 50 *chapeaux verts et* 100 *chapeaux bleus. En une étape, elle peut faire un des échanges suivants :*

- *Elle échange* 1 *rouge et* 1 *vert pour* 2 *bleus*
- *Elle échange* 1 *rouge et* 1 *bleu pour* 5 *verts*
- *Elle échane* 3 *rouges pour* 3 *bleus*

Peut-elle, après un certain nombre d'échanges, se retrouver avec 100 *chapeaux de chaque couleur ?*

Exercice 10. *Bob possède* 21 *chapeaux rouges,* 22 *chapeaux verts, et* 23 *chapeaux bleus. En une étape, il peut faire un des échanges suivants :*

- *Il échange* 1 *rouge et* 2 *verts pour* 3 *bleus*
- *Il échange* 1 *rouge et* 2 *bleus pour* 8 *verts*
- *Il échange* 5 *rouges pour* 5 *bleus*

Peut-il, après un certain nombre d'étapes, se retrouver avec 26 *chapeaux de la même couleur ?*

Exercice 11. *Au conseil d'état, chaque conseiller a au plus* 3 *amis. Montrer qu'il est possible de diviser le conseil en* 2 *chambres, de telle manière que chaque conseiller aie au plus un seul ami dans sa chambre.*

Exercice 12. *Une fermière possède un troupeau de vaches, dont certaines sont ennemies. Elle remarque la propriété suivante : à chaque fois qu'elle divise son troupeau de vaches en deux parties, au moins une vache se retrouve avec deux ennemies. Montrer qu'il existe une vache avec au moins* 4 *ennemies.*