

Algèbre et Géométrie :

Géométrie des Processus d'évolution (sens maths) :

Processus déterministe, différentiable et fini.

Objets Maths : Variété différentiable, champs de vecteurs

- La partie géométrique des équations différentiables ordinaires.

Ex : Désintégration radioactive

x : quantité de matière radioactive

Le changement en quantité ne dépend que de x .

Le futur et le passé de $x(t)$ sont déterminés par $x(t_0)$
 $K \in \mathbb{R}_{>0}$ $\frac{dx(t)}{dt} = -Kx(t) \Rightarrow x(t) = ae^{-Kt}$

déterministe
[ne dépend que
de x]

Ex : Reproduction des bactéries dans un bouillon de culture en
quantité suffisante.

x : le nbr de bactéries

$$\frac{dx}{dt} = Kx(t)$$

Le changement ne dépend que de x .

Dans un modèle mathématique idéalisé $x \in \mathbb{R}_{>0}$

Rem : le changement instantané = la dérivée de x

$$\frac{dx(t)}{dt} = Kx(t)$$

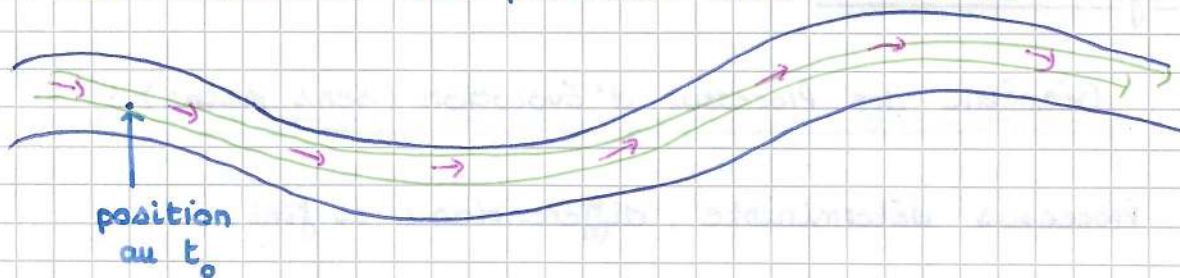
Déf : L'espace des phases = toutes les valeurs possibles de x
noté M

Ex : Radioactive : $M = \mathbb{R}_{>0}$

Bactérie : $M = \mathbb{R}_{>0}$ ou $M \subset \mathbb{R}_{>0}$ ouvert

} 1-dimension.

Exe: Une rivière et une particule dans la rivière.



Si le courant est constant :

$x(t)$ est entièrement déterminé par $x(t_0)$

M = Surface de la rivière $\subset \mathbb{R}^2$

Espace des phases est 2-dimensionnel.

Tous les phénomènes de physique mécanique classique sont déterministes.

Exe: Un flocon de neige dans l'air (vent constant)



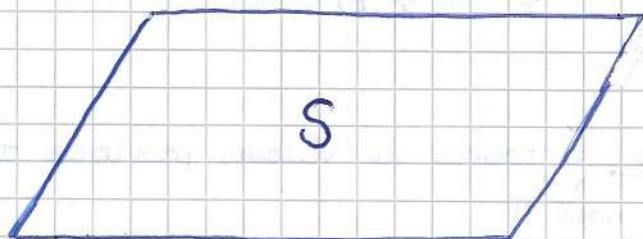
M est 3-dimensionnel.

Déf: Un processus est fini $\Leftrightarrow$ la dimension est finie

Exe: un processus infini :

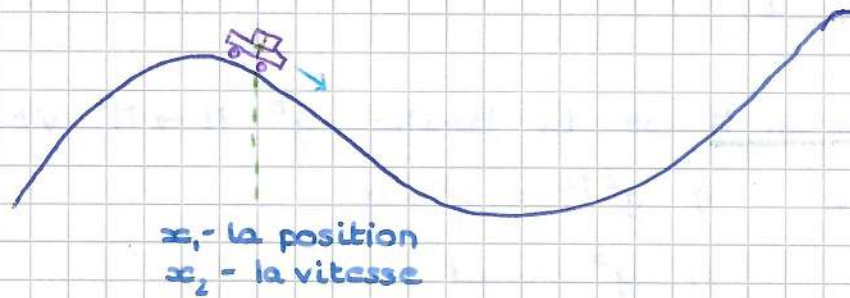
! Pas dans notre cours !

- la température d'une surface



$M = \{f: S \rightarrow \mathbb{R}\}$ est de dimension infinie.

Ex: Voiture sans conducteur, sans frein



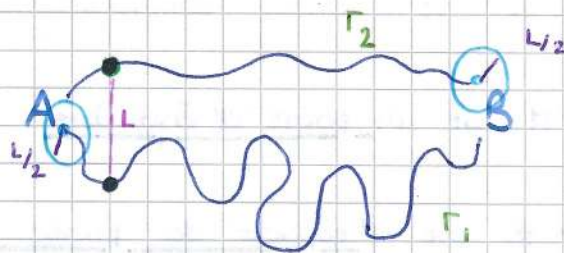
$$M = \mathbb{R}^2 \quad (\text{ou } M \subset \mathbb{R}^2) \quad 2\text{-dimensionnel}$$

Q: À quoi servent les espaces de phases ?

Ex: (Non-trivial)

Deux villes :

deux routes :

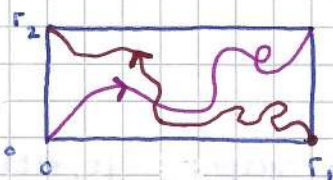


- Propriétés :
- deux mobiles connectés par une corde de longueur L , peuvent aller de A à B sans lâcher la corde.
 - deux voitures sphériques de rayon $L/2$ peuvent se croiser sans se heurter.

Les 2 propriétés sont-elles compatibles ? [Non]

Considérons les espaces de phases :

$$M = [0, r_1] \times [0, r_2] \quad (x_1, x_2) \in M$$



prop 1 : il existe un tel chemin de $(0,0)$ à (r_1, r_2)

prop 2 : il existe un tel chemin de $(r_1, 0)$ à $(0, r_2)$

On a donc qu'il y a une intersection entre les 2,
mais alors on a une contradiction.

Soit $g^t: M \longrightarrow M$ une application d'évolution après le temps t .

Déf: Le flot en M est la famille $g^t: M \rightarrow M \quad \forall t \in \mathbb{R}$ telle que :

- 1) $g^{t+s} = g^t \circ g^s$
- 2) $g^0 = \text{id}$

Il est noté $(M, \{g^t\})$ où $\{g^t\}$ est le groupe de transformation à un paramètre.

C'est bien un groupe muni de " $\circ$ ", qui est isomorphe à $\mathbb{R}$ et donc commutatif.

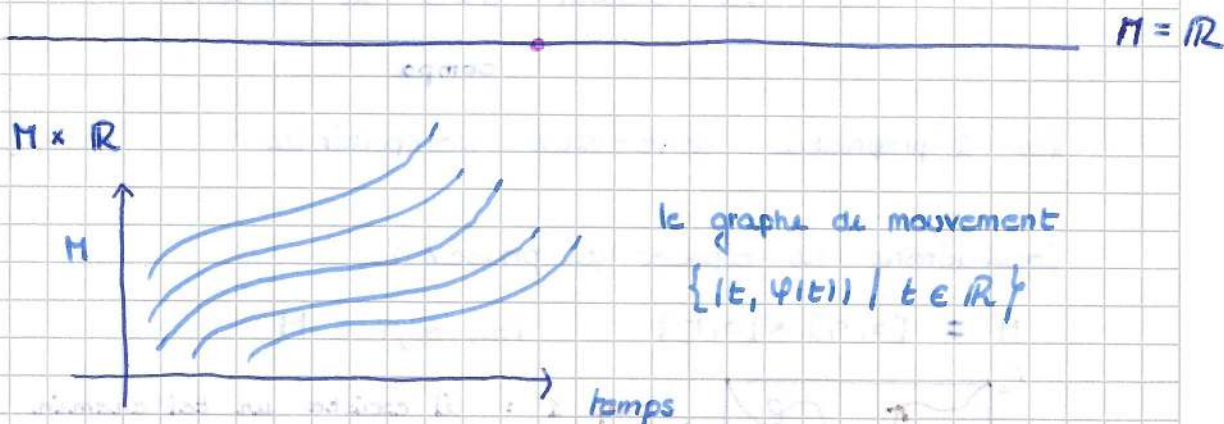
Déf: $x \in M$ est un point d'équilibre pour $\{g^t\}$ si $g^t(x) = x \quad \forall t \in \mathbb{R}$

Déf: $M \times \mathbb{R}$ est l'espace de phase élargi.

$(x, t) \in M \times \mathbb{R}$

Le mouvement de $(x_0, t_0) \in M \times \mathbb{R}$ est $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow M$ tq
 $\varphi(t_0) = x_0$ et $\varphi(t_0 + t) = g^t(x_0)$

Ex: $M = \mathbb{R}$



Déf: La courbe intégrale $\subset \mathbb{R} \times M$ est le graphe $\{(t, \varphi(t))\}$ d'un mouvement $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow M$

L'orbite de φ est l'image de $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow M \subset M$ où φ est un mouvement.

Al- Géom:Définiabilité:

Supposons que $M \subset \mathbb{R}^n$ est ouvert, $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ est lisse de classe C^r (si f est continuellement différentiable r fois)

Rem: Si on ne spécifie pas C^r , on parle de fonctions C^∞ .

Déf: $f: M \rightarrow M$, $M \subset \mathbb{R}^n$ ouvert, considérons les coordonnées

$$y_k: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}.$$

$f: M \rightarrow M$ est lisse de classe C^r si $y_k \circ f$ est lisse $\forall k$.

Déf: $f: M \rightarrow M$ est un difféomorphisme de classe C^r si

$\exists g: M \rightarrow M$ lisse telle que $f \circ g, g \circ f$ sont l'identité en M .

le 24.02.20

Rappel: processus (déterministe, fini, différentiable)

$$\{g^t\}: M \rightarrow M, t \in \mathbb{R} \text{ évolution } g^0 = \text{Id}_M, g^t \circ g^s = g^{t+s}$$

Espace des phases, flots.

$M \subset \mathbb{R}^n$ un domaine ouvert, $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable, lisse de classe C^r ...

$$(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}: M \rightarrow \mathbb{R}$$

$g^t: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ donnée par n -fonctions de coordonnées

$$g^t = (g_1^t, \dots, g_n^t), g_i^t: M \rightarrow \mathbb{R}$$

Rem: lisse = C^∞

Rem: Si $M \subset \mathbb{R}^n$, alors on peut avoir un processus différentiable (si les g^t sont lisses)

↓
difféomorphismes

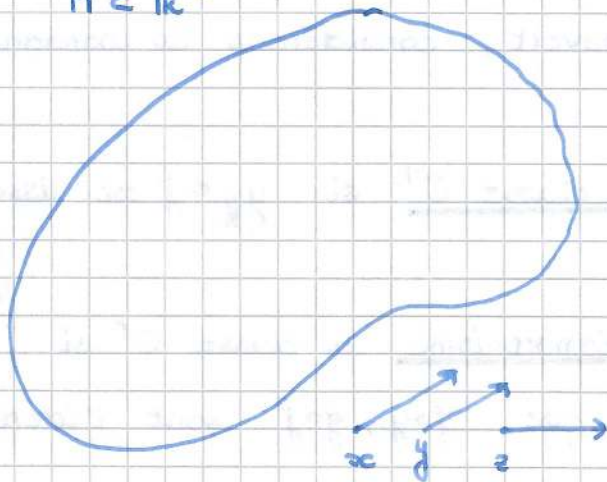
Champs de Vecteurs:

$M \subset \mathbb{R}^n$ ouvert, $g^t: M \rightarrow M$ lisse

$\forall x \in M \quad \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} g^t(x) = \frac{\varphi'(0)}{x}$ un vecteur en $\mathbb{R}^n$
" la vitesse de $\varphi(t)$

$\varphi: \mathbb{R} \rightarrow M$, $\varphi(0) = x$ lisse

$M \subset \mathbb{R}^n$



un vecteur:

[bien défini à translation près.]

C'est un élément de $\mathbb{R}^n$

$\forall x$, on considère $v(x)$

avec x comme origine

Déf: Le champs de vecteurs en M est une application lisse

$$v: M \rightarrow \mathbb{R}^n$$

[pour représentation, on choisit x comme origine de $v(x)$]

On a 2 choses maintenant pour $M \subset \mathbb{R}^n$ ouvert

Flot

$$g^t: M \rightarrow M$$

g^t groupe à 1 param.
de difféo de M

Champs de v .

$$v: M \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$v(x) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} g^t(x)$$

Déf: $\dot{x} = v(x)$ est l'équation différentielle ordinaire.

sa solution $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow M$ est une appl. lisse tq

$$\varphi'(t) = v(\varphi(t))$$

Al-Géom:

Déf: Une solution $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow M$ a conditions initiales (t_0, x_0) si $\varphi(t_0) = x_0$.

Not: Si $g^t: M \rightarrow M$ est un flot correspondant à v , alors $\varphi(t) = g^t(x)$ nous donne une solution pour $(0, x)$. $\varphi'(0) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} g^t(x) = v$.

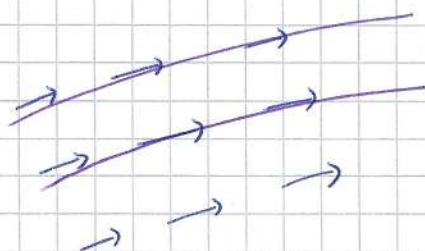
Pour (t_0, x_0) , on peut prendre $\varphi(t) = g^{t-t_0}(x_0)$

Pb: le problème fondamental de la théorie de l'EDO.

Trouver (si possible) g^t pour v

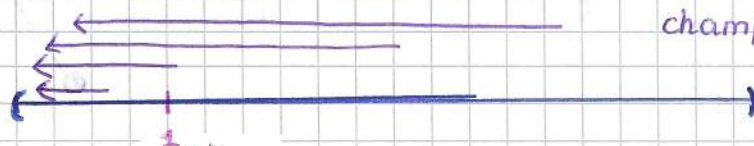
Étudier les liens entre g^t et v .

Ex:



Ex: Désintégration de matière radioactive

$$M = \mathbb{R}_{>0}$$



champs de vecteurs

$$\dot{x} = -kx \quad k \in \mathbb{R} \quad (k=1)$$

$$g^t(x) = e^{-t}x$$

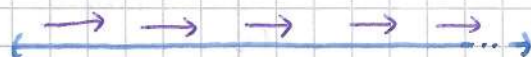
Ex: Reproduction de bactéries

2 cas : $\dot{x} = kx \quad M = \mathbb{R}_{>0}$

$$g^t(x) = e^t x$$

$\dot{x} = kx^2 \quad M = \mathbb{R}_{>0}$

$$\neq g^t$$



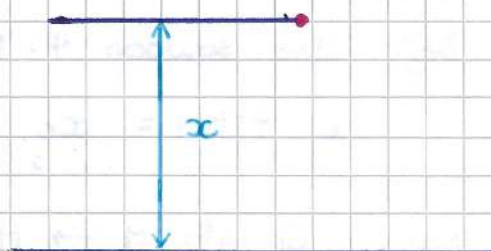
Ex: Chute libre

x = hauteur

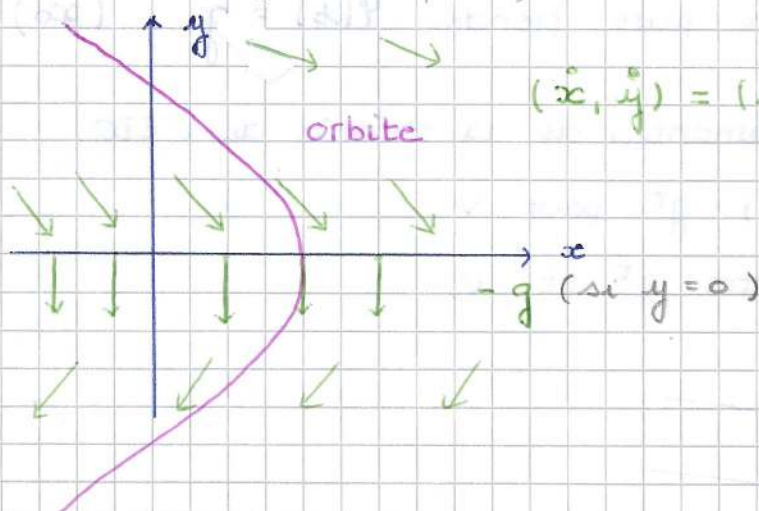
y = vitesse verticale

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -g \end{cases}$$

$$g \approx 9,8 \text{ m/s}^2$$



$$M = \mathbb{R}^2 \text{ (espace de phase)}$$



$$(\dot{x}, \dot{y}) = (y, -g)$$

Champs de vecteurs

Ex: Pendule simple:

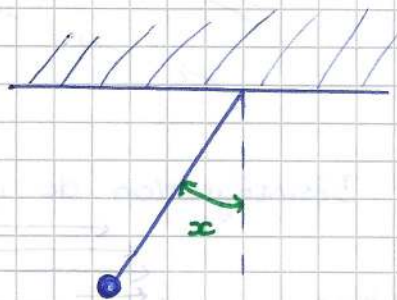
x = angle

y = vitesse angulaire

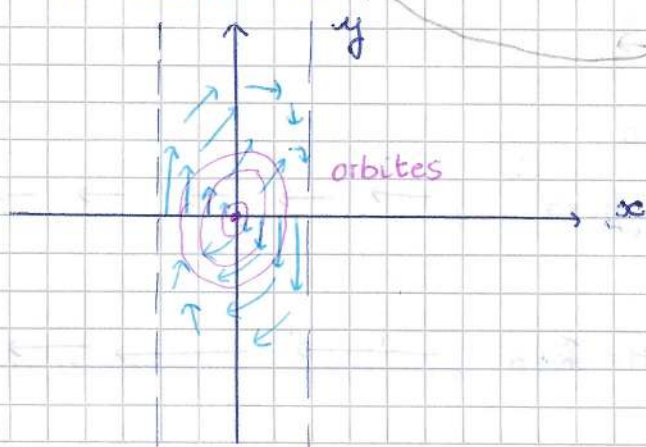
$$K = \frac{g}{l}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -K \sin(x) \end{cases}$$

$$(\text{si } x \text{ petit } \dot{y} = -Kx)$$

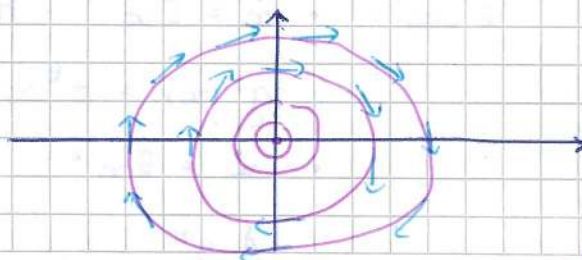


$$M = (-\pi, \pi) \times \mathbb{R}$$



⚠ le flot global n'existe pas ⚠

Pour $K=1$ et $M = \mathbb{R}^2$



flot = rotation

Al-Géom :

Ex : le pendule géométrique

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -L \sin x \end{cases}$$

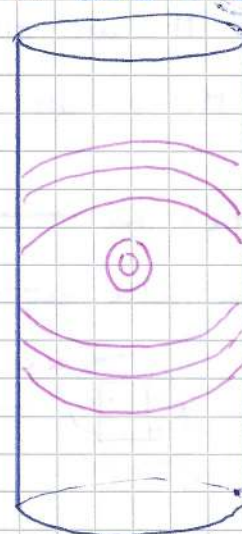
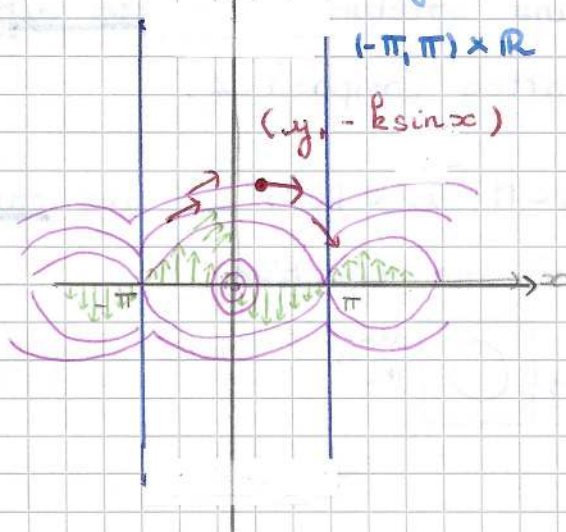
x = angle quelconque $\in S^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$

y = vitesse angulaire $\in \mathbb{R}$

$M = S^1 \times \mathbb{R}$ (= cylindre)

Variété différentiable

[$M = \mathbb{R}^2$ dans le cas périodique]



$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (y, -L \sin x)$$

02.03.2020

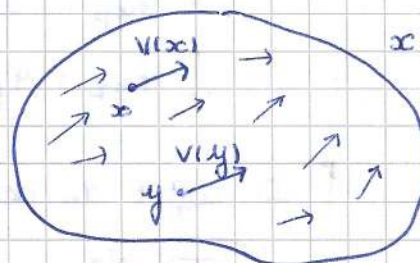
Rappel: Champs de vecteurs:

$$U \subset \mathbb{R}^n, v: U \rightarrow \mathbb{R}^n$$

En $\mathbb{R}^2$,



En $\mathbb{R}^3$,



$\Rightarrow$ Equa. diff. ordinaire : Relation entre champs et flot.

- Espace de phases pour un processus différentiable n'est pas toujours un domaine (ouvert) $U \subset \mathbb{R}^n$ (pendule géom)

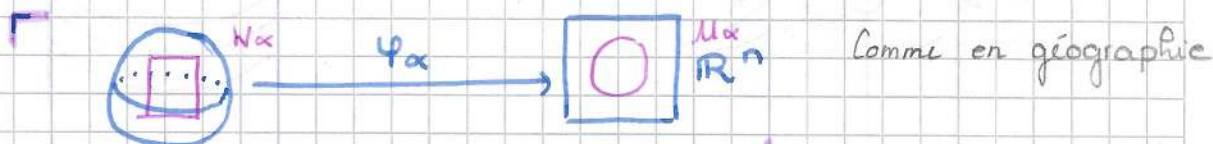
Variétés différentiables:

Rem: On voudrait que les espaces suivants soient des variétés différentiables.

- $\mathbb{R}^n$ + domaines ouverts de $\mathbb{R}^n$
- S^1 , $S^1 \times \mathbb{R}$, $S^1 \times S^1$, ...
- S^2 , le tore $S^1 \times S^1$, le plan projectif $\mathbb{R}P^2$
- Généralisation: S^n , $S^1 \times \dots \times S^1$, $S^1 \times S^2$, $\mathbb{R}P^n$.

Déf: Soit M un ensemble, une structure de variété diff. sur M = un atlas de cartes compatibles.

Déf: $\varphi_\alpha: W_\alpha \longrightarrow U_\alpha$ ($W_\alpha \subset M$, $U_\alpha \subset \mathbb{R}^n$) est une carte si U_α est ouvert et φ_α est bijective.



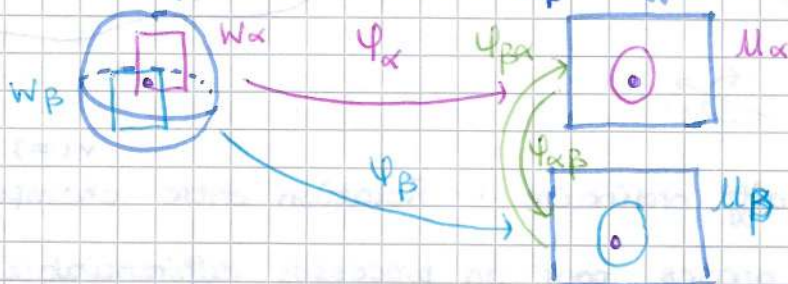
• $\varphi_\alpha: W_\alpha \rightarrow U_\alpha$ et $\varphi_\beta: W_\beta \rightarrow U_\beta$ sont deux cartes compatibles, [$U_{\alpha\beta} := \varphi_\alpha(W_\alpha \cap W_\beta)$, $U_{\beta\alpha} := \varphi_\beta(W_\alpha \cap W_\beta)$]

si: • $U_{\alpha\beta}$ et $U_{\beta\alpha}$ sont ouverts

• $\varphi_{\alpha\beta}: U_{\alpha\beta} \longrightarrow U_{\beta\alpha}$ est un difféomorphisme

[$\varphi_{\alpha\beta} := \varphi_\beta \circ (\varphi_\alpha^{-1})|_{U_{\alpha\beta}}$ applic. de chgmt de carte]

Il suffit de demander $\varphi_{\alpha\beta}$ différentiable



AL - Géom :

- Un atlas $\{\varphi_\alpha: W_\alpha \rightarrow U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de cartes, est une collection de cartes, telle que :
 - φ_α est une carte
 - $\{W_\alpha\}$ est un recouvrement de M . ($M = \bigcup_\alpha W_\alpha$)
 - $\forall \alpha, \beta \in A$, φ_α et φ_β sont compatibles.
- Deux atlas $\{\varphi_\alpha: W_\alpha \rightarrow U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ et $\{\varphi_\beta: W_\beta \rightarrow U_\beta\}_{\beta \in B}$ sont équivalents si $\{\varphi_\alpha: W_\alpha \rightarrow U_\alpha\}_{\alpha \in A} \cup \{\varphi_\beta: W_\beta \rightarrow U_\beta\}_{\beta \in B}$ est un atlas.
 $\Leftrightarrow$ compatibilité des cartes des deux atlas.
- M est une variété lisse (différentiable), si M est un ensemble muni de la structure de variété différentiable (une classe d'équivalence d'atlas) et des 2 propriétés suivantes :
 - Séparabilité : $\forall x, y \in M, x \neq y$, soit $\exists \varphi_\alpha: W_\alpha \rightarrow U_\alpha$ tq $W_\alpha \ni x, y$
 soit $\exists \beta, \gamma \in A$ tq $x \in W_\gamma, y \in W_\beta$ et $W_\gamma \cap W_\beta = \emptyset$
 - Dénombrabilité : $\exists$ un atlas au plus dénombrable.
 $(\exists \text{ une injection } A \hookrightarrow \mathbb{N})$

Ex : $\mathbb{R}^n$

une carte : $\{\text{id}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n\}$

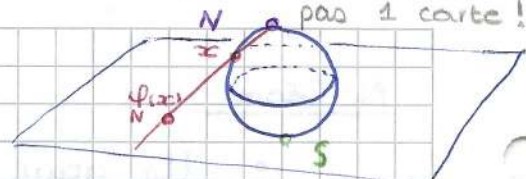
Ex : $U \subset \mathbb{R}^n$

une carte : $\{\text{Id}: U \rightarrow U\}$

Ex : $\mathbb{R}^n$

atlas maximal : $\{\varphi_\alpha: W \rightarrow U \mid U, W \subset \mathbb{R}^n \text{ ouverts et } \varphi_\alpha \text{ difféo}\}$
 p. 11

! par Borsuk - ULM
pas 1 carte!



Ex: S^2

$$W_N = S^2 \setminus \{S\}, \quad W_S = S^2 \setminus \{N\}$$

$$\varphi_N: W_N \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \varphi_S: W_S \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\varphi_{NS} = \varphi_S \circ (\varphi_N^{-1})|_{U_{NS}}$$

$$U_{NS} = \varphi_N(W_N \cap W_S) = S^2 \setminus \{N, S\}$$

$$\varphi_{NS}: \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \text{ l'inversion}$$

$$(x, y) \mapsto \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2} \right)$$

géométriquement: inversion par $D(0, 1)$

Or φ_{NS} est différentiable

Ici, on a besoin de 2 cartes.

Les deux propriétés:

Pour la séparabilité, il faut des cartes compatibles supplémentaires.

$W'_N = \text{hémisphère Nord}$; $W'_S = \text{hémisphère Sud}$

$$\varphi'_N = \varphi_S|_{W'_N}; \quad \varphi'_S = \varphi_N|_{W'_S}$$

Δ φ'_N et φ'_S ne sont pas un recouvrement Δ

Ex: Soit $M = (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \cup \{0^+\} \cup \{0^-\}$, un ensemble



$$W_+ = \mathbb{R} \setminus \{0\} \cup \{0^+\} \text{ et } W_- = \mathbb{R} \setminus \{0\} \cup \{0^-\}$$

$$\varphi_+: W_+ \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \varphi_-: W_- \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \begin{cases} x & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 0 & x = 0^+ \end{cases} \quad x \mapsto \begin{cases} x & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 0 & x = 0^- \end{cases}$$

On a 2 cartes

$$W_+ \cap W_- = \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad U_{+-} = \varphi_+(\mathbb{R} \setminus \{0\}), \quad U_{-+} = \varphi_-(\mathbb{R} \setminus \{0\})$$

$\text{Id}: U_{+-} \rightarrow U_{-+}$ est différent. $\Rightarrow \varphi_+$ et φ_- compatibles

Δ Pas séparable Δ

Pas une variété!

Al-Géom :

- Rem :
- Pour une variété M , on peut considérer l'espace topo correspondant.
 $V \subset M$ est ouvert $\Leftrightarrow \varphi_\alpha(W_\alpha \cap V)$ est ouvert $\forall \alpha$
 - Séparabilité de M est équivalente à la séparabilité avec Hausdorff pour M esp. topo

Le 09.03.20

Rap: Une structure de variété lisse (différentiable)
 " un atlas de cartes (compatibles)

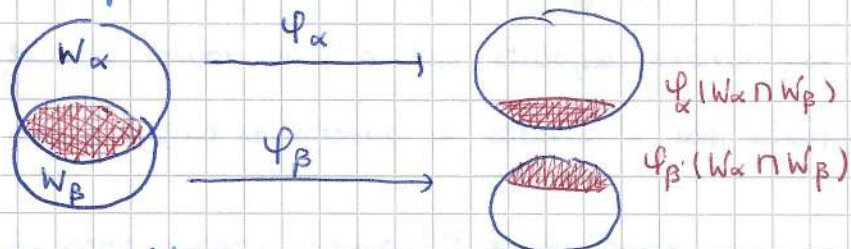
M avec une telle structure est une variété lisse avec les deux propriétés: Séparabilité } propriétés topologiques
 Dénombrabilité }

Un atlas définit une topologie sur M .

$\Omega \subset M$ ouvert si $\forall W_\alpha, \varphi_\alpha: W_\alpha \rightarrow U_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ une carte,

$\varphi_\alpha(\Omega \cap W_\alpha) \subset U_\alpha$ est ouvert (comme ss-ens. de $\mathbb{R}^n$)

Notons que W_α est ouvert par compatibilité des cartes:



$\varphi_\beta \circ (\varphi_\alpha)^{-1} |_{\varphi_\alpha(W_\alpha \cap W_\beta)}$ est C^r -différentiable (lisse)

Pour une variété lisse, on peut toujours considérer

l'atlas maximal (composé de toute les cartes compatibles avec un atlas de M)

Ex:



• S^2 et deux cartes données par la projection stéréographique

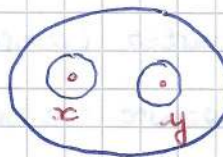
• T^2
 • $\mathbb{R}P^2$ } deux variétés

atlas à equiv. près

Rap: - Séparabilité : $\forall x, y \in M, x \neq y, \exists$ un atlas tq $x \in W_\alpha, y \in W_\beta, W_\alpha \cap W_\beta = \emptyset$.

On a vu que : M séparable si $\exists$ un atlas tq $\forall x, y \in M$ soit $\exists W_\alpha$ tq $x, y \in W_\alpha$, soit $\exists W_\alpha, W_\beta$ tq $x \in W_\alpha, y \in W_\beta$ et $W_\alpha \cap W_\beta = \emptyset$.

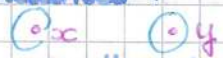
Les définitions sont équivalentes :

$\Leftarrow$: $x \neq y$  $\mathbb{R}^n$ $W_\alpha \cap W_\beta = \emptyset$

$\Rightarrow$: $x \neq y$ ok, $x = y$ même carte

- Dénombrabilité : $\exists$ un atlas au plus dénombrable. vide, fini, dénomb.

Rem: On peut remplacer les deux propriétés par les propriétés topologiques correspondantes :

• M est Hausdorff 

• M est à base dénombrable, (*)

$\Rightarrow \exists$ vsq ouverts disjoints car on peut trouver 2 cartes

$\Leftarrow$ séparés par 2 ouverts $\Rightarrow$ ouverts ds toutes cartes $\Rightarrow$ sép. cartes

Rap: $\{V_\alpha\}$ est une base pour M comme espace topo si $\forall V \subset M$ ouvert $\forall x \in V \exists \alpha : x \in V_\alpha \subset V$.

V = union des éléments de base

la dénombrabilité est une propriété héréditaire (par $\cap$)

(*) $\Rightarrow$ # d'n cartes $\leadsto$ U élem de base $\leadsto$ base dén. de variété

$\Leftarrow \exists$ base dén., on peut décomp. base en cartes, on

utilise cartes tq $\cap \neq \emptyset$ notre base

AL - Géom:"Compacité de M "

Prop: $F = \bigcup_{j=1}^N F_j$, $F_j \subset W_j$ une carte compacte
 $\varphi_j: W_j \rightarrow U_j \subset \mathbb{R}^n$, $\varphi_j(F_j)$ compact.
 $\Rightarrow F$ est compact.

Démo: $\{V_\alpha\}_\alpha$ un recouvrement ouvert de F .

$V_\alpha \subset M$, on choisit un ss-rec. fini $\forall j=1 \dots N$

La réunion finie des recouvrements finis est finie 

si $F \subset M$ un compact. F est contenu dans une collection finie de cartes de M , $W_j \cap F$ est relativement compact (ie: $\overline{W_j \cap F}$ est compact)

Connexité:

Déf: $\forall U, V \subset M$ ouverts tq $U \cup V = M$ et $U \cap V = \emptyset$, alors soit $U = \emptyset$, soit $V = \emptyset$.

Connexité par arcs:

Déf: $\forall x, y \in M \exists \gamma: [0,1] \rightarrow M$ chemin tq $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$

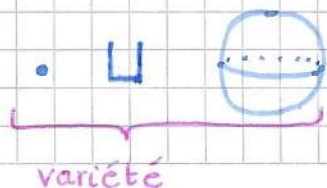
Prop: Toute variété est localement connexe par arcs.

($\forall x \in M$, $x \in U$ ouvert, $\exists V \subset U$, $x \in V$ ouvert + cpa)

($\varphi_V: \mathbb{R}^n$ loc. cpa)

Prop: connexe + loc. cpa $\Rightarrow$ c.p.a

Ex: $\mathbb{R}^0 = \{x_0\}$ est une variété lisse connexe



Déf: Une carte $\varphi_\alpha: W_\alpha \rightarrow M_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ est une carte de dimension n .

Prop: Si M est connexe, toutes les cartes ont la même dimension.

Rv:

Rap: Théorème d'invariance de la dimension

$\Omega_1 \subset \mathbb{R}^n, \Omega_2 \subset \mathbb{R}^m$ deux ouverts non-vides

tg $\Omega_1 \cong \Omega_2 \Rightarrow m = n$.

$\uparrow$
homéo

Si $n = 0, 1, 2$, on a démontré l'invariance.

$n = 0$

$\mathbb{R}^m \quad m > 0$



ensemble infini

il n'y a pas de bijection.

$n = 1$

$\mathbb{R}^m \quad m > 1$



on regarde les composantes connexes.

Si on enlève un pt à gauche $\Rightarrow$ plus connexe.

— " — droite $\Rightarrow$ toujours connexe.

$n = 2$

$m > 2$



$\mathbb{R}^m$

[pr par Borsuk-Ulam]

$\Rightarrow \mathbb{R}^3 \subset \mathbb{R}^m$

$\mathbb{R}^m$
 $\cup$
 $\mathbb{R}^2$
 $\cup$

$\mathbb{R}^2$

Si $\exists$ un homéo, $\exists$ une application $\varphi: \Omega_2 \rightarrow \Omega_1$,

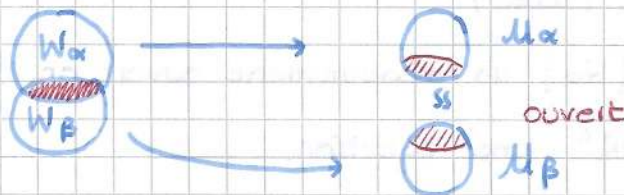
continue, mais pas injective $\downarrow$

La même démo pour $n > 2$ avec le thm de B.U.

AL-Géom:

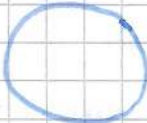
$\Rightarrow$ Si $W_\alpha \cap W_\beta \neq \emptyset$

$\Rightarrow \varphi_\alpha: W_\alpha \rightarrow U_\alpha \subset \mathbb{R}^{n_\alpha}$ et $\varphi_\beta: W_\beta \rightarrow U_\beta \subset \mathbb{R}^{n_\beta}$
ont la même dimension. ($n_\alpha = n_\beta$)



Exemples de variétés lisses, compactes, connexes et de dim. n :

$n = 0$: • - seule variété

$n = 1$:  - seule variété (à homio et difféo près)

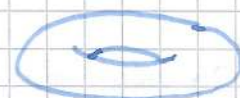
" $\mathbb{R}$ "

le revêtement universel doit être $\mathbb{R}$, par clivement de chemin

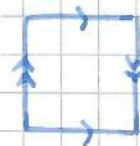
$n = 2$:
"Surfaces"



$T^2 = S^1 \times S^1$



Bte de Klein



/// Surfaces orientables de genre g ($\mathbb{Z}$ de g tore)

/// Surfaces non-orientables. (Somme connexe de k copie de $\mathbb{RP}^2$)

Programme:

- Fonctions lisses sur variétés lisses
- Applications lisses entre variétés
- Vecteurs tangents sur variétés + Rappel du vecteur tangent $\mathbb{R}^n$

Rap: Variété différentiable (lisse)

M , $\{\mathcal{U}_\alpha, \varphi_\alpha\}$, $\{W_\alpha\}$ un recouvrement ouvert en M

ensemble

$\varphi_\alpha: W_\alpha \rightarrow \mathcal{U}_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ une bijection. (carte)

Def: Soit $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction, f est lisse en $p \in M$ si
 $\forall$ carte $\varphi_\alpha: W_\alpha \rightarrow \mathcal{U}_\alpha$, $\mathcal{U}_\alpha \xrightarrow{f \circ \varphi_\alpha^{-1}} \mathbb{R}$ lisse en $\varphi_\alpha(p)$
 $\mathbb{R}^n$ la composition $f \circ \varphi_\alpha^{-1}$ // lisse en carte

Rem: Notons que si $\exists$ une carte φ_β avec $f \circ \varphi_\beta^{-1}: \mathcal{U}_\beta \rightarrow \mathbb{R}$ lisse en $\varphi_\beta(p)$, alors $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ est lisse en p . Il suffit de vérifier par une carte!
 car les applications de changement de cartes $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}: \varphi_\beta(W_\alpha \cap W_\beta) \rightarrow \varphi_\alpha(W_\alpha \cap W_\beta)$ sont lisses. $(f \circ \varphi_\alpha^{-1}) \circ (\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}) = f \circ \varphi_\beta^{-1}$

Def: On définit une application lisse $F: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ comme la collection de n fonctions lisses. $F = (f_1, \dots, f_n): M \rightarrow \mathbb{R}^n$

On dit qu'une application entre variété $f: M \rightarrow N$ est lisse si elle est lisse en cartes, i.e.:

Def: $f: M \rightarrow N$ une application entre deux variétés lisses est lisse en $p \in M$ si pour une carte (de N), $\varphi_\beta: V_\beta \rightarrow \mathcal{U}_\beta \subset \mathbb{R}^m$ la composition $\varphi_\beta \circ f: M \rightarrow \mathbb{R}^m$ est lisse en p .
 // lisse en cartes

Rem: Notons que si M est une variété lisse et $W \subset M$ ouvert, alors W est aussi une variété lisse.

(les cartes sont données par $\varphi_j|_{W \cap W_j}$)

AL-Géom

Def: $f: M \rightarrow N$ est un difféomorphisme si f est lisse, et $\exists g: N \rightarrow M$ lisse tq $g \circ f = \text{Id}_M$ et $f \circ g = \text{Id}_N$.

Rem: Strictement, il faut parler de difféomorphisme entre $(M, \{(U_i; \varphi_i)\})$ et $(N, \{(V_\alpha; \psi_\alpha)\})$ car une variété lisse dépend de l'ensemble M et de l'atlas $\{(U_i; \varphi_i)\}$.

Mais un atlas est considéré à équivalence près.

Pour définir un champs de vecteurs, il faut rappeler la notion du vecteur tangent.

Rap: ($\mathbb{R}^n$)

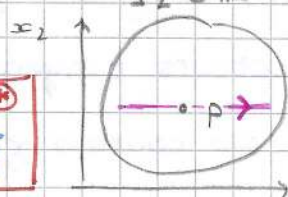


$u \in T_p \mathbb{R}^n$ un vecteur tangent en p est un vecteur en $\mathbb{R}^n$ avec l'origine en p . Par conséquent, on peut considérer la dérivée directionnelle de fonctions lisses en $p \in \mathbb{R}^n$ le long de u .

Rap: Soit $F: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable (lisse) $p \in \Omega$ et $u \in T_p \mathbb{R}^n$ un vecteur tangent.

$x \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, \dots, x_n)$ $\frac{\partial F}{\partial x_j}(p) \in \mathbb{R}$ la dérivée partielle.

$$D_{e_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \quad (*)$$



x_1 change
 x_2 est

= dérivée directionnelle le long de $e_j = (0, \dots, 1, \dots, 0) = \frac{\partial}{\partial x_j}$

e_j vitesse du param.

Soit $\gamma: [0, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^n$ une courbe lisse (la dérivée à droite pour 0)

$$\gamma_j: [0, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$$

telle que $\gamma(0) = p$, $\gamma'(0) = u \in T_p \mathbb{R}^n$. Alors $(F \circ \gamma)'(0) = D_u F$

$$u_j = \gamma_j'(0) \quad \forall j=1, \dots, n$$

(dérivation des fonctions composées) règle de la chaîne.

Aussi, $D_u = u_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + u_n \frac{\partial}{\partial x_n}$ pour $u = (u_1, \dots, u_n) \in T_p \mathbb{R}^n$

$$D_u F(p) \in T_{F(p)} \mathbb{R} = \mathbb{R}$$

la différentielle / l'appli. tangente

$$T_p \mathbb{R}^n \longrightarrow T_{F(p)} \mathbb{R}$$

est une application linéaire.

$$u \longmapsto D_u F$$

vecteur tang. en p de $\mathbb{R}^n$

Pour $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ la différentielle est donnée en coordonnées

$$f = (F_1, \dots, F_m), \quad df: \underbrace{(\mu_1, \dots, \mu_n)}_{\mathbb{R}^n} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} \mu_1 + \dots + \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \mu_n \\ \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1} \mu_1 + \dots + \frac{\partial F_m}{\partial x_n} \mu_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

C'est l'application linéaire donnée par

$$\text{la matrice } \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

la matrice Jacobienne. $A_{f(p)}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

Son déterminant est le Jacobien, seulement si $m = n$!

Rap: Théorème d'inversion locale

Thm: Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert, $p \in \Omega$ et $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application lisse tq le jacobien de f en p est non-nul.

Alors, $\exists W \ni f(p)$ un voisinage ouvert et $g: W \rightarrow \Omega \subset \mathbb{R}^n$ lisse tq elle est un difféomorphisme sur son image

$$\text{ic: } \underbrace{g(W)}_{\Omega} \xrightleftharpoons[g]{f|_{g(W)}} W \subset \mathbb{R}^n, \quad f|_{g(W)} \text{ et } g \text{ sont inverses.}$$

On dit que deux courbes $\gamma_1: [0, \varepsilon_1) \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $\gamma_2: [0, \varepsilon_2) \rightarrow \mathbb{R}^n$ sont équivalentes si $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$ et $\gamma_1'(0) = \gamma_2'(0) \in T_{\gamma_1(0)} \mathbb{R}^n$

Clairement, on peut définir les vecteurs tangents en p à $\mathbb{R}^n$ comme les classes d'équivalence des courbes $\gamma: [0, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^n$ avec $\gamma(0) = p$.

Déf: Soit M une variété lisse et $p \in M$. On appelle vecteur tangent en p à M la classe d'équivalence des courbes issues du point p . ic: $\gamma: [0, \varepsilon) \rightarrow M$, $\gamma(0) = p$.

Deux courbes $\gamma_1: [0, \varepsilon_1) \rightarrow M$, $\gamma_2: [0, \varepsilon_2) \rightarrow M$ sont équivalentes

si $\varphi_\alpha \circ \gamma_1 \sim \varphi_\alpha \circ \gamma_2$ pour une carte $\varphi_\alpha: \underbrace{W_\alpha}_{\subset M} \rightarrow \underbrace{U_\alpha}_{\subset \mathbb{R}^n}$, $p \in W_\alpha$

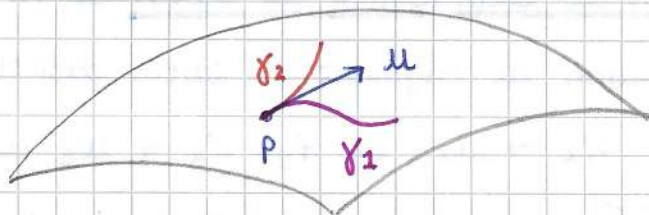
$$[0, \varepsilon_1) \xrightarrow{\gamma_1} W_\alpha \xrightarrow{\varphi_\alpha} \mathbb{R}^n \quad [0, \varepsilon_2) \xrightarrow{\gamma_2} W_\alpha \xrightarrow{\varphi_\alpha} \mathbb{R}^n$$

$$\Rightarrow (\varphi_\alpha \circ \gamma_1)'(0) = (\varphi_\alpha \circ \gamma_2)'(0) \in \mathbb{R}^n \simeq T_p M \text{ espace vectoriel}$$

AL- Géom :

Rem : On peut supposer que $\gamma([0, \varepsilon]) \subset W_\alpha$, sinon on passe à $\gamma|_{[0, \varepsilon']}$ pour $0 < \varepsilon' < \varepsilon$ assez petit $\gamma|_{[0, \varepsilon']} \sim \gamma|_{[0, \varepsilon]}$

Visuellement :



Déf : On note $T_P M$ l'ensemble des vecteurs tangents, c'est un E.V. Structure de l'E.V comme structure $\mathbb{R}^n$.

En plus, pour une application lisse $f: M \rightarrow N$ et $p \in M$,

on définit la différentielle $d_p f: T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$
appli tangente. $[\gamma] \mapsto [f \circ \gamma]$

où $\gamma: [0, \varepsilon] \rightarrow M$, c'est une application linéaire.

le 23.03.20

Rap : Vecteurs tangents comme classes d'équivalence de courbes.

Espace tangent.

Application tangente (la différentielle)

Programme : le fibré tangent, immersions, submersions, champs de vecteurs.

le fibré tangent.

Considérons $TM = \bigcup_{p \in M} T_p M$ (pour une variété M).

L'atlas $\{W_\alpha, \varphi_\alpha\}$ de M nous donne un atlas pour TM .

Soit $\varphi_\alpha: W_\alpha \rightarrow U_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ une carte.

Notons que $W_\alpha \subset M$ est une variété en soi.

$$TW_\alpha = \bigcup_{p \in W_\alpha} T_p W_\alpha = \bigcup_{p \in W_\alpha} T_p M \quad \left(p \in W_\alpha \subset M \quad T_p W_\alpha = T_p M \right)$$

La différentielle $d\varphi_\alpha: TW_\alpha \longrightarrow TM_\alpha \subset T\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{2n}$

$d\varphi_\alpha(p, u) = d\varphi_\alpha(p)(u) \in T_{\varphi_\alpha(p)} M \subset \mathbb{R}^n$ est une carte.

On considère l'union de $d\varphi_\alpha(p): T_p W_\alpha \longrightarrow T_p M \subset \mathbb{R}^{2n}$

Par conséquent, $\{TW_\alpha, d\varphi_\alpha\}$ est un atlas pour TM (fibré tangent)

L'application de changement de cartes de TM est donnée

par l'application de chgmt de cartes pour M :

Soient $\varphi_\alpha: W_\alpha \rightarrow M_\alpha$ et $\varphi_\beta: W_\beta \rightarrow M_\beta$ des cartes de M .

alors $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} \Big|_{\varphi_\alpha(W_\alpha \cap W_\beta)}: \varphi_\alpha(W_\alpha \cap W_\beta) \longrightarrow \varphi_\beta(W_\alpha \cap W_\beta)$

est l'application de chgmt de cartes.

Alors on définit $d(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}) \Big|_{\varphi_\alpha(W_\alpha \cap W_\beta)}$ est l'appu de chgmt de cartes entre $d\varphi_\alpha(TW_\alpha \cap TW_\beta)$ et $d\varphi_\beta(TW_\alpha \cap TW_\beta)$

Prop: TM est une variété lisse.

Pv: TM est Hausdorff:

$u_1, u_2 \in TM$

2 Cas : • $u_1 \in T_{p_1} M, u_2 \in T_{p_2} M$ et $p_1 \neq p_2$

$\Rightarrow \varphi_\alpha: W_\alpha \rightarrow M_\alpha, \varphi_\beta: W_\beta \rightarrow M_\beta, p_1 \in W_\alpha, p_2 \in W_\beta$
et $W_\alpha \cap W_\beta = \emptyset$

$\Rightarrow TW_\alpha \cap TW_\beta = \emptyset, u_1 \in TW_\alpha$ et $u_2 \in TW_\beta$

• $u_1, u_2 \in T_{p_1} M \Rightarrow u_1, u_2 \in TW_\alpha$

Dénombrabilité:

$\exists$ un atlas dénombrable pour M $\{W_\alpha, \varphi_\alpha\}_{\alpha \in A} \Rightarrow \{TW_\alpha, d\varphi_\alpha\}_{\alpha \in A}$
est dénombrable.

$\Rightarrow TM$ est une variété lisse de dimension $2n$ ($\dim M = n$)

AL-Géom :

Si $\gamma: M \rightarrow N$ est une appl. lisse, alors $d\gamma: TM \rightarrow TN$ est aussi une appl. lisse (en cartes)

En plus, $d\gamma(p): T_p M \rightarrow T_{\gamma(p)} N$ est un appl. linéaire.

Ex :

$$\pi: TM \rightarrow M$$

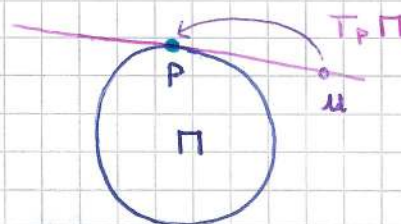
$$\mu \mapsto p \text{ si } \mu \in T_p M$$

est une appl. lisse

En cartes, π correspond à :

$$\mu_\alpha \times \mathbb{R}^n = T\mu_\alpha \xrightarrow{\subset \mathbb{R}^{2n}} \mu_\alpha \subset \mathbb{R}^n$$

$$\begin{matrix} (p, \mu) & \mapsto & p \\ \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & & \mathbb{R}^n \end{matrix}$$

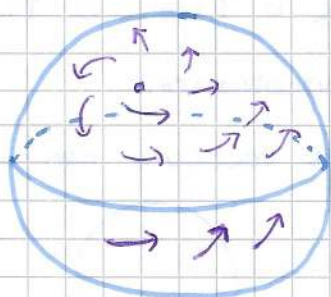


Déf : Un champ de vecteurs v sur M est une application lisse

$$v: M \rightarrow TM (= \cup_p T_p M) \text{ telle que } \pi \circ v = \text{Id}_M$$

En d'autres mots, v associe à p un vecteur $v(p) \in T_p M$ d'une manière différentiable.

Ex : $M = \mathbb{S}^2$



Déf : Soient M et N variétés lisses, alors $M \times N$ est aussi une variété (les cartes sont données par :

$$\psi_\alpha \times \psi_\beta: W_\alpha \times V_\beta \rightarrow \mu_\alpha \times \mu_\beta$$

où $\psi_\alpha: W_\alpha \rightarrow \mu_\alpha$ carte de M et

$\psi_\beta: V_\beta \rightarrow \mu_\beta$ carte de N)

Ex: $T\mathbb{S}^1 \cong \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$

les deux variétés sont difféomorphes

Pv: Considérons $\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$
 $t \mapsto e^{2i\pi t}$

$$\exp|_{(0,1)}: (0,1) \rightarrow \mathbb{S}^1 \setminus \{1\} \text{ est}$$

$$\exp|_{(-1/2, 1/2)}: (-1/2, 1/2) \rightarrow \mathbb{S}^1 \setminus \{-1\}$$

qui sont des bijections.

Leurs applications inverses sont des cartes pour $\mathbb{S}^1$.

L'appli de chgmt de cartes est:

$$\begin{aligned} \psi: (-1/2, 0) \cup (0, 1/2) &\rightarrow (0, 1/2) \cup (1/2, 1) \\ t &\mapsto \begin{cases} t+1 & t \in (-1/2, 0) \\ t & t \in (0, 1/2) \end{cases} \end{aligned}$$

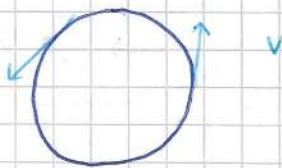
$$T(0,1) = (0,1) \times \mathbb{R}, \quad T(-1/2, 1/2) = (-1/2, 1/2) \times \mathbb{R}$$

$$d\psi_p(\mu) = \mu \in T_{\psi(p)}\mathbb{R} = \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow T\mathbb{S}^1 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} = T_{w_0} \cup T_{w_1}$$

Une autre démonstration:

$\exists$ un champ de vecteurs non-nul $v = d\exp(1) \in T\mathbb{S}^1$



$$\phi: \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \rightarrow T\mathbb{S}^1$$

est un difféomorphisme.

$$(p, \mu) \mapsto (p, \mu v(p))$$

□

AL-Géom:

- Rappel:
- Le fibré tangent à M^n est une variété de dimension $2n$
 - La différentielle est une application lisse $df: TM \rightarrow TN$
 - Le champ de vecteurs sur M comme une application $v: M \rightarrow TM$ tq $v \circ \pi = \text{id}_M$

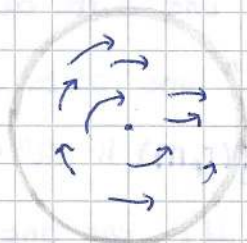
Déf: Une variété est parallélisable si $\exists$ un difféomorphisme

$\Phi: M \times \mathbb{R}^n \rightarrow TM$ tq $\pi' = \pi \circ \Phi$ et $\forall p \quad \Phi|_{\{p\} \times \mathbb{R}^n}: \{p\} \times \mathbb{R}^n \rightarrow T_p M$ est un isomorphisme linéaire.

$$\begin{array}{ccc} M \times \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\Phi} & TM \\ & \searrow \pi' & \swarrow \pi \\ & M & \end{array}$$

Rem: S^2 n'est pas parallélisable. (Plein de variétés ne sont pas parallélisables)

En fait, $\forall v: S^2 \rightarrow TS^2$ un champ de vecteurs admet un point singulier. Théorème du Rénisson.

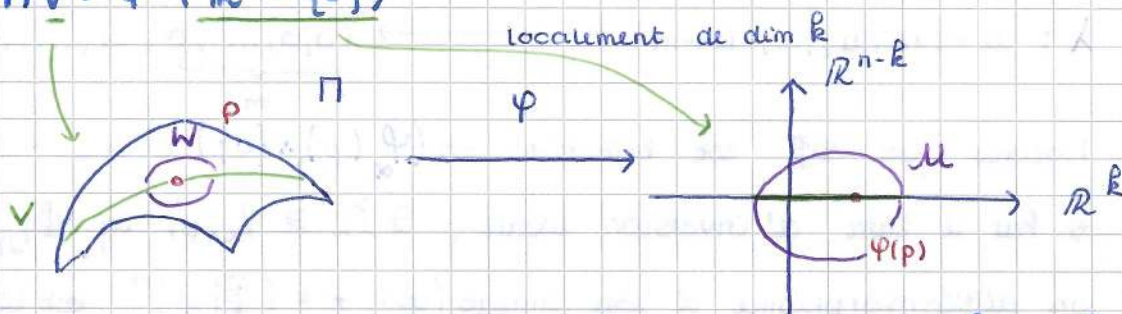


$\exists$ un point dont le vecteur est 0.

Sous-Variétés lisses:

Déf: Soit M une variété. Un ss-ens. $V \subset M$ est une sous-variété si $\forall p \in V \exists$ un voisinage ouvert $p \in W$, $W \subset M$ et une carte (dans l'atlas maximal) $\psi: W \rightarrow U \subset \mathbb{R}^n$ telle que

$$W \cap V = \psi^{-1}(\mathbb{R}^k \times \{0\})$$



clairement, V est une ss-variété en soi, $\dim V = k$ si k ne dépend pas de p . (V est connexe)

Exemple $\uparrow$

$S^1 \subset \mathbb{C}$ et $S^3 \subset \mathbb{H}$
 sont parallélisables

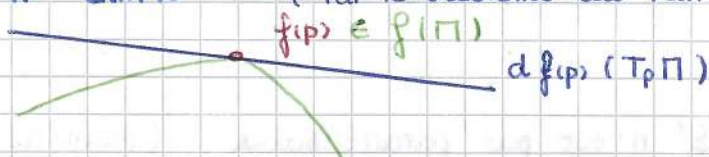
$\swarrow$ lisse
Déf: $f: M \rightarrow N$ est une immersion si $df(p): T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ est injective $\forall p \in M$



Thm: Si $f: M \rightarrow N$ est une immersion injective, alors $f(M) \subset N$ est une sous-variété.

Dém: $m = \dim M \leq n = \dim N$ (Par le théorème du rang)

En cartes :



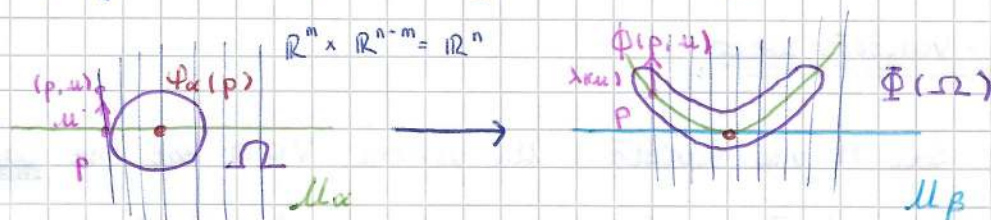
On peut supposer que l'espace tangent à $\Psi_\alpha(f(p))$ est parallèle à $\mathbb{R}^m \times \{0\}$. (Sinon on peut opérer une rotation)

Soit $\Psi_\alpha: U_\alpha \rightarrow U_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ une carte de M

soit $\Psi_\beta: W_\beta \rightarrow U_\beta \subset \mathbb{R}^n$ une carte de N

avec la propriété $d\Psi_\beta(df(T_p M)) \parallel \mathbb{R}^n \times \{0\}$

Alors $\Psi_\beta \circ f \circ \Psi_\alpha^{-1}: U_\alpha \rightarrow U_\beta$ est une application lisse



Définissons $\Phi: U_\alpha \times \mathbb{R}^{n-m} \rightarrow \mathbb{R}^n$
 $(\Psi_\alpha(p), u) \mapsto \Phi(\Psi_\alpha(p) + \lambda(u))$

$\lambda: u = (u_1, u_2, \dots, u_{n-m}) \mapsto (\underbrace{0, 0, \dots, 0}_m, u_1, \dots, u_{n-m})$

Notons que $d\Phi$ est bijective en $(\Psi_\alpha(p), 0) \in U_\alpha \times \mathbb{R}^{n-m}$

Par le thm d'inversion locale, $\exists \Omega \ni \Psi_\alpha(p)$ tq $\Phi|_\Omega$ est un difféomorphisme à son image (ie: $\psi = (\Phi|_\Omega)^{-1}$ est lisse)

AL-Géom:

⇒ On peut prendre la composition de φ_β et φ pour une carte de N après la restriction à un voisinage $W' \ni f(p)$ assez petit.

⇒ $\tilde{f} = \varphi \circ \varphi_\beta|_{W'}$ est une carte telle que $\tilde{f}^{-1}(\mathbb{R}^n \times \{0\}) = f^{-1}(f(p)) \cap W'$ ▣

Déf: $f: M \rightarrow N$ est une submersion si $df_p: T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ est surjective $\forall p \in M$.

Thm: Si $f: M \rightarrow N$ est une submersion, alors $\forall p \in N$ $f^{-1}(p) \subset M$ est une sous-variété.

(la preuve est la même que pour l'immersion)

Thm: Soit $V^k \subset M^n$ une ss-variété $p \in V$, alors $\exists$ un vsq. ouvert W $p \in W \subset M^n$, un domaine ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^k$ et une immersion

$f: \Omega \rightarrow M^n$ tq f est injective et $f(\Omega) = W \cap V$. Aussi

$\exists g: W \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ une submersion tq $g^{-1}(0) = W \cap V$.

Dém: Comme $V \subset M^n$ est une ss-variété, $\exists$ une carte $\varphi: W \rightarrow \mathbb{R}^n$ tq $V \cap W = \varphi^{-1}(\mathbb{R}^k \times \{0\})$. $\Omega = \varphi(V)$ est un domaine en $\mathbb{R}^k$

$\varphi^{-1}|_\Omega$ est une immersion. La composition de φ et la projection $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ est la submersion g . ▣

Sous-Variétés en $\mathbb{R}^n$:

• $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ 

• $S^2, \mathbb{P}^2 \subset \mathbb{R}^3$



• $\mathbb{R}P^2$, la bt de Klein $\subset \mathbb{R}^4$

Thm: (Whitney)

Toute variété M de dimension n est difféomorphe à une ss-variété de $\mathbb{R}^N$ pour $N > 2n$.

Rem: Les variétés lisses peuvent être considérées comme espace des phases pour équations diff. ordinaires.

Rap: Flot: $(M, \{g^t\})$, $g^t: M \rightarrow M$, $t \in \mathbb{R}$, difféo, $g^t \circ g^s = g^{t+s}$

Mouvement: du point $x \in M$ par $\psi: \mathbb{R} \rightarrow M$, $\psi(t) = g^t(x)$

Orbite: $\psi(\mathbb{R}) \subset M$

Espace des phases élargi: $\mathbb{R} \times M$ est aussi une variété

Courbe intégrale: le graphique de ψ .

Champ de vecteurs: $v: M \rightarrow TM$ tq $\pi \circ v = \text{id}_M$

Un flot $(M, \{g^t\})$ définit un champ de vecteurs par $v(x) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} g^t x$.

$\dot{x} = v(x)$ $x \in M$ est une équ. diff. ordinaire.

$\exists ?$ un flot pour v

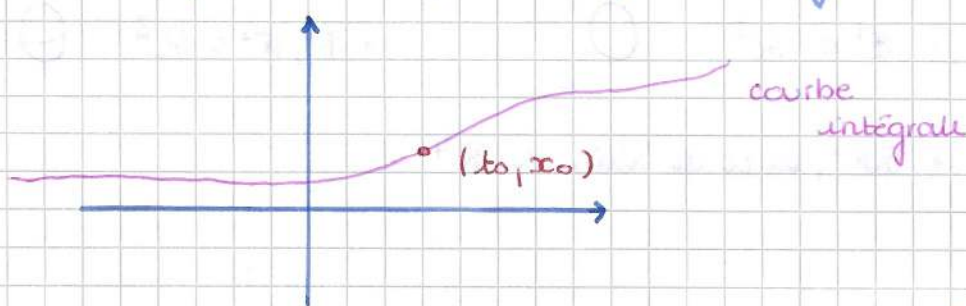
Si oui, est-il unique?

Déf: La solution de $\dot{x} = v(x)$ est une appli. $\psi: I \rightarrow M$, $I = (a, b)$

$$\text{tq. } \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=\tau} \psi(t) = v(\psi(\tau)) \quad \forall \tau \in I$$

Déf: Une solution $\psi: I \rightarrow M$ satisfait à la condition initiale (t_0, x_0) , $t_0 \in I$, $x_0 \in M$, si $\psi(t_0) = x_0$.

(t_0, x_0) est un point de l'espace des phases élargi $\mathbb{R} \times M$



AL- Géom :

Soit M une variété 1-dimensionnelle.

Localement (dans une carte) nous pouvons remplacer M par $U \subset \mathbb{R}$
 $U = (\alpha, \beta)$ un intervalle.

Pour $U = (\alpha, \beta)$ un champs de vecteurs est donné par une
 fonction $v: U \rightarrow \mathbb{R}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

$v: U \rightarrow \mathbb{R}$ peut être différentiable, continuellement différentiable (C^1)
 de classe C^n , C^∞ , etc
 lisse

Thm : Soit v un champ de vecteurs sur $U = (\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$ continuellement
 différentiable. Alors,

- 1) $\dot{x} = v(x)$, $x \in U$ admet une solution $\varphi: I \rightarrow U$
 vérifiant $\varphi(t_0) = x_0 \quad \forall t_0 \in I, x_0 \in U$ (condition initiale
 arbitraire)
- 2) $\forall \varphi_1: I_1 \rightarrow U, \varphi_2: I_2 \rightarrow U$ solutions de $\dot{x} = v(x)$
 vérifiant $\varphi_1(t_0) = x_0 = \varphi_2(t_0) \quad t_0 \in I_1 \cap I_2, x_0 \in U$
 $\exists W \subset I_1 \cap I_2, t_0 \in W$ tel que $\varphi_1|_W = \varphi_2|_W$
- 3) Si $v(x_0) = 0$, alors $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow U$ définie par $\varphi(t) = x_0$
 $t \in \mathbb{R}$ est une solution de $\dot{x} = v(x)$ vérifiant $\varphi(t_0) = x_0$
- 4) Si $v(x_0) \neq 0$, alors $\dot{x} = v(x)$ admet une solution
 $\varphi: I \rightarrow U, t_0 \in I$, vérifiant $t - t_0 = \int_{x_0}^{\varphi(t)} \frac{d\varphi}{v(\varphi)}$
 (Cette formule permet de trouver la fonction inverse
 de φ par une quadrature.)

$$t = t_0 + \int_{x_0}^{\varphi(t)} \frac{d\varphi}{v(\varphi)} \quad \text{est la formule pour } \varphi: \varphi(I) \rightarrow I$$

la fonction inverse $\varphi: t \mapsto x, \psi: x \mapsto t$

Démo: Supposons que $v(x_0) = 0$

$$\begin{aligned} \varphi: \mathbb{R} &\rightarrow \mathcal{M} & \varphi'(t) &= 0 = v(x_0) \\ t &\mapsto x_0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ 3)

$$\left. \frac{d\varphi}{dt} \right|_{t=t_0} \neq 0$$

Supposons que $v(x_0) \neq 0$

$\Rightarrow$ par le thm d'inversion locale, si $\varphi: I \rightarrow \mathcal{M}$ est une solution avec $\varphi(t_0) = x_0$.

$\exists W \subset I$, $t_0 \in W$, et $\psi: \varphi(W) \rightarrow W$ la fonction inverse de φ

On a $x = \varphi(t)$ donc $t = \psi(x) \in W$, notons $\xi = \psi(x)$

$$\text{alors } \left. \frac{d\varphi}{dt} \right|_{t=\xi} = v(\xi) \Rightarrow \left. \frac{d\varphi}{dx} \right|_{x=\xi} = \frac{1}{v(\xi)}$$

$$\Rightarrow \varphi(x) - \varphi(x_0) = \int_{x_0}^x \frac{1}{v(\xi)} d\xi \Rightarrow t - t_0 = \int_{x_0}^{\varphi(t)} \frac{1}{v(\xi)} d\xi$$

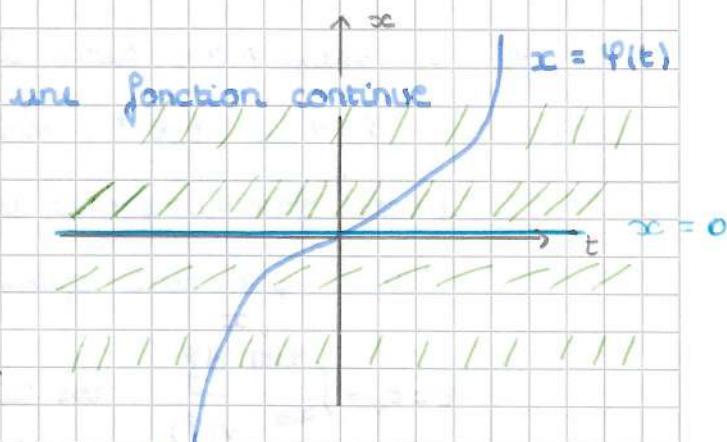
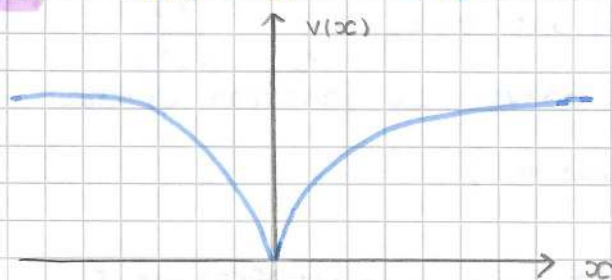
$$\Rightarrow \psi(x) = t = t_0 + \int_{x_0}^{\varphi(t)} \frac{1}{v(\xi)} d\xi$$

$\Rightarrow$ 1), 2) et 4)

$\hookrightarrow$ il manque un bout de la preuve de 2)

Q: la démonstration, fonctionne-t-elle pour le cas $v: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ est seulement continue?

Ex: $v(x) = x^{2/3} = \sqrt[3]{x^2}$



Deux solutions pour $t_0 = 0$, $x_0 = 0$?

$$\varphi_0, \varphi_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\varphi_0(0) = 0$$

$$\varphi_1(0) = 0$$

$$\varphi_0(t) = t$$

$$\varphi_1(t) = \left(\frac{t}{3}\right)^3$$

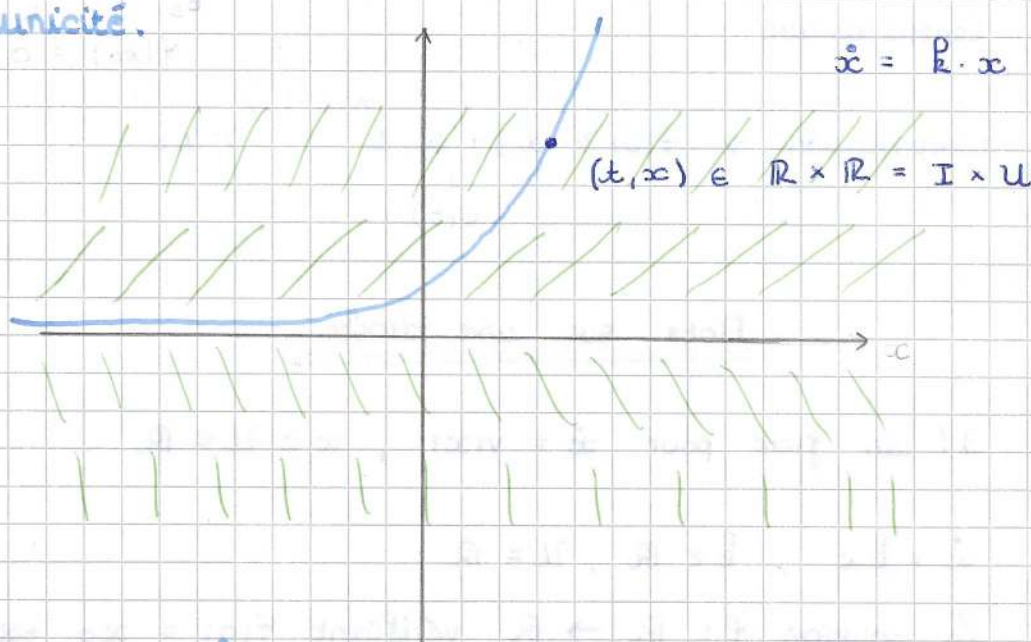
AL-Géom :Ex : (unicité)

$$v(x) = R \cdot x, \quad \dot{x} = R \cdot x, \quad R \neq 0$$

Soit $\varphi: I \rightarrow \mathcal{U}$, $\varphi(t_0) = x_0$ une solution avec $\varphi(I) > 0$

$$t - t_0 = \int_{x_0}^{\varphi(t)} \frac{d\xi}{R\xi} = \frac{1}{R} \log \frac{\varphi(t)}{x_0}$$

$$\Rightarrow \varphi(t) = x_0 e^{R(t-t_0)}$$

 $\Rightarrow$ On peut étendre φ sur la droite $\mathbb{R}$ entière $\Rightarrow$ unicité.

$$\Rightarrow \varphi(t) = x_0 e^{R(t-t_0)} \quad \text{décrit toutes les solutions de } \dot{x} = R \cdot x$$

Lemme : (comparaison des solutions)Soient $\dot{x} = v_1(x)$ et $\dot{x} = v_2(x)$ tels que $v_1(x) \leq v_2(x)$ $x \in \mathcal{U}$ $\varphi_1, \varphi_2: I \rightarrow \mathcal{U}$, $\varphi_1(t_0) = \varphi_2(t_0) = x_0$ $t_0 \in I, x_0 \in \mathcal{U}$ φ_j solution de $\dot{x} = v_j(x)$ $\forall j=1,2$. $\Rightarrow \forall t \in I, t \geq t_0$ on a $\varphi_2(t) \geq \varphi_1(t)$ et $\forall t \in I, t \leq t_0$ on a $\varphi_1(t) \geq \varphi_2(t)$

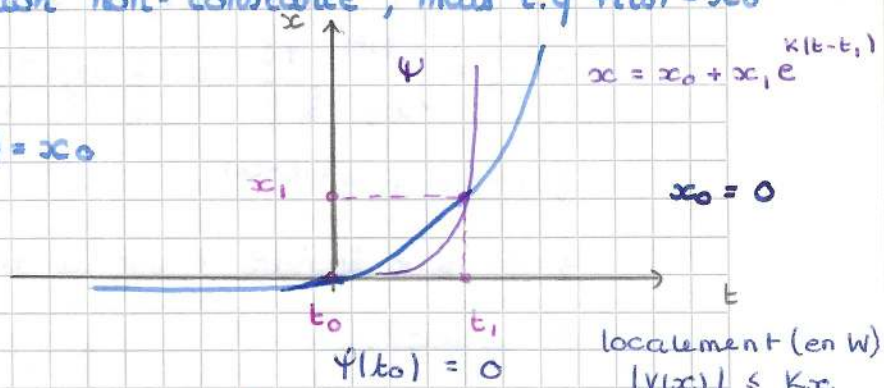
(Propriété directe de l'intégration)

Dém: (Fin de démonstration de l'unicité)

Supposons que $v(x)$ est différentiable $\Rightarrow \exists k > 0 : |v(x)| \leq k|x - x_0|$
pour $x \in W$ un voisinage de x_0 . ($v(x_0) = 0$)

Soit $\psi: I \rightarrow W$ une solution non-constante, mais t.q. $\psi(t_0) = x_0$
 $v(x_0) = 0$.

Supposons que $\psi(t_1) > \psi(t_0) = x_0$



Contradiction

Comparaison $\Rightarrow \psi(t) \geq \underbrace{x_0 + x_1 e^{k(t-t_1)}}_{\psi(t)} > x_0$

Flots sur une droite:

Q: $\exists?$ un flot pour $\dot{x} = v(x)$, $x \in U \subset \mathbb{R}$

Ex: $\dot{x} = kx$, $k \in \mathbb{R}$, $U = \mathbb{R}$

La solution $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant $\psi(0) = x_0$ est donnée par
 $\psi(t) = e^{kt} x_0$.

Définissons $g^t: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par $x_0 \mapsto e^{kt} x_0$ une famille
de difféomorphismes, en plus $x \mapsto e^{kt} x$ est une transformation
linéaire $\forall t \in \mathbb{R}$.

Le flot $\{g^t\}$ est un groupe à un paramètre de difféomorphismes
(dans cet exemple, aussi de transformations linéaires)

$$\begin{aligned} g^t \circ g^s(x) &= g^t(e^{ks} x) = e^{kt} e^{ks} x = e^{k(t+s)} x \\ &= g^{t+s}(x) \end{aligned}$$

Soit $\dot{x} = v(x)$ une EDO sur U .

AL-Géom :

Rappelons le lien entre le flot $\{g^t\}$ tq $\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} g^t(x) = v(x)$ et les solutions de $\dot{x} = v(x)$:

le mouvement $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{U}$ du point défini par $\varphi(t) = g^t(x_0)$ $x_0 \in \mathcal{U}$ nous donne la solution de $\dot{x} = v(x)$ vérifiant la condition initiale $\varphi(0) = x_0$.

Thm : Tout groupe à un paramètre $\{g^t\}$ de transformations linéaires d'une droite est le flot de $\dot{x} = kx$ pour un choix de $k \in \mathbb{R}$

Dém : Soit $\{g^t\}$ un groupe à un paramètre de transformations linéaires $g^t: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ la dérivée $\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} g^t(x) = v(x)$ est aussi linéaire.

$$\text{ie : } v(\lambda x + \mu y) = \lambda v(x) + \mu v(y)$$

$$\Rightarrow v(x \cdot 1) = v(1) \cdot x$$

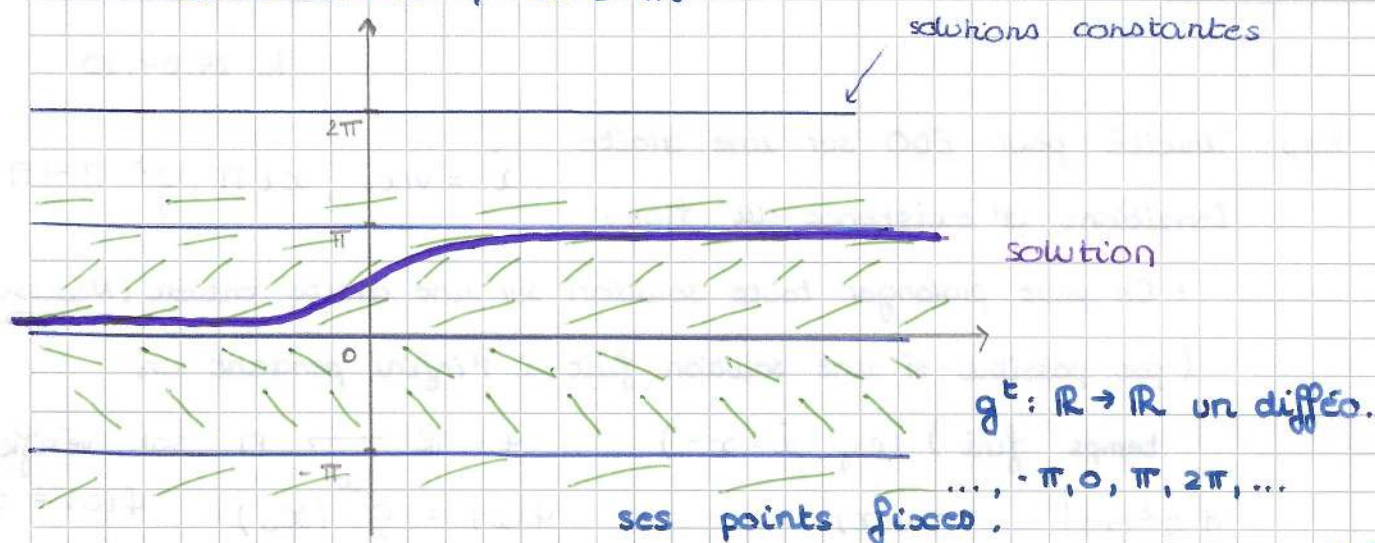
$$\text{Prenons } k = v(1)$$

□

Q : $\exists ?$ un flot pour une EDO quelconque

Ex :

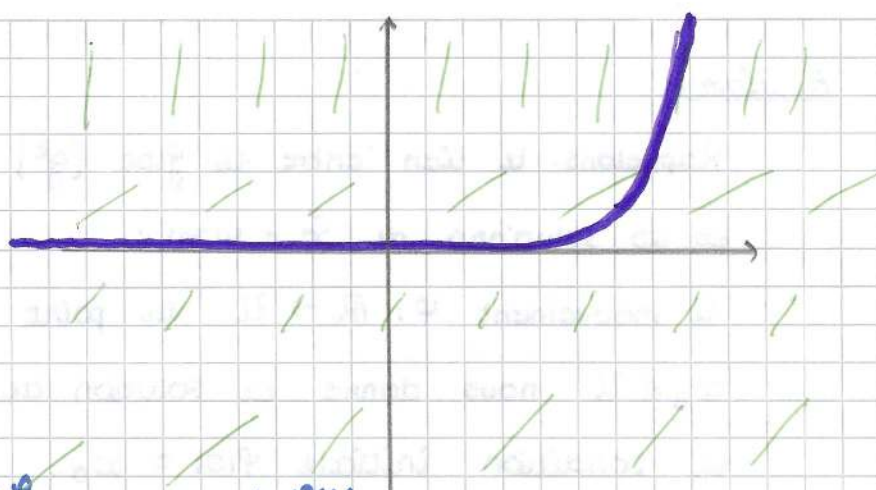
$$\dot{x} = \sin x, \quad x \in \mathbb{R}$$



Le flot est bien défini.

Ex:

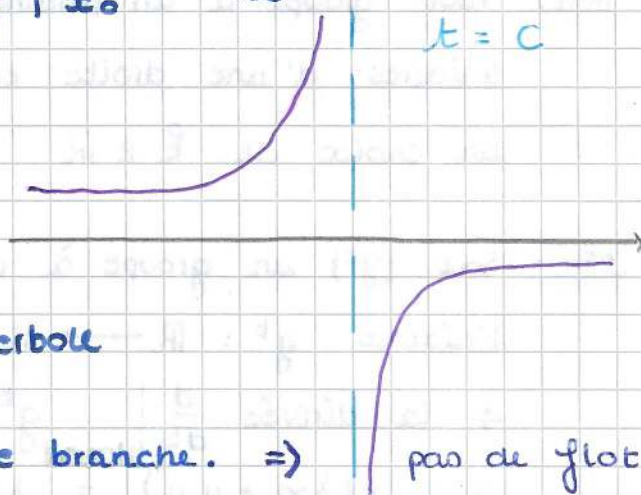
$$\dot{x} = x^2$$



$$t - t_0 = \int_{x_0}^{\varphi(t)} \frac{d\varphi}{\varphi^2} = - \frac{1}{\varphi} \Big|_{x_0}^{\varphi(t)} = \frac{1}{x_0} - \frac{1}{\varphi(t)}$$

$$\frac{1}{\varphi(t)} = \underbrace{\left(\frac{1}{x_0} + t_0 \right)}_C - t$$

$$\varphi(t) = \frac{1}{C - t}$$



son graphique est une hyperbole

la courbe intégrale est une branche. $\Rightarrow$ pas de flot

$\hookrightarrow$ les solutions ne sont pas globalement définies.

Q: Comment trouver une solution vérifiant $\varphi(t_0) = x_0$?

$$\varphi(t) = g^{t-t_0} x_0$$

$$\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{U}$$

$$\varphi(t_0) = g^{t_0-t_0} x_0 = g^0 x_0 = x_0$$

$\Rightarrow$ Toutes les solutions sont globalement définies si $\{g^t\}$ existe.

le 29.04.20

Rap: Unicité pour EDO sur une droite

$$\dot{x} = v(x), x \in M, g^t: M \rightarrow M$$

Conditions d'existence du flot:

- On peut prolonger toute solution sur une droite entière (Nécessaire)
(pas possible si une solution fuit à l'infini pendant un temps fini) (e.g: $\dot{x} = x^2$)

$$\frac{d}{dt} g^t(x) \Big|_{t=0} = v(x)$$

$$\varphi: \mathbb{R} \longrightarrow M \text{ sol. vérifiant}$$

$$\varphi(t) = g^t(x_0) \quad \varphi(0) = x_0$$

p. 34
et $\varphi(t_0) = x_0 \Rightarrow \varphi(t) = g^{t-t_0}(x_0)$

AL- Géom:

Aujourd'hui: Champs de vecteurs et flots sur un plan.

En général, ~~il~~ n'y a pas de méthode pour résoudre une EDO sur M si $\dim M > 1$ (même pour $M = \mathbb{R}^2$).

Cependant, certains cas particuliers admettent une réduction au cas 1-dimensionnel.

Notamment les produits directs. (Exemple de cas qui admet une réduction)

Déf: EDO sur $\mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2$.

Soient $\dot{x}_1 = v_1(x_1)$, $x_1 \in \mathcal{U}_1$ et $\dot{x}_2 = v_2(x_2)$, $x_2 \in \mathcal{U}_2$ deux EDO sur $\mathcal{U}_1$ et $\mathcal{U}_2$ deux variétés lisses (quelconque).

Alors $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2 \ni (x_1, x_2) = x$ est aussi une variété lisse. $\dot{x} = (\dot{x}_1, \dot{x}_2)$ et $T_x(\mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2) = T_{x_1}(\mathcal{U}_1) \times T_{x_2}(\mathcal{U}_2)$

$\Rightarrow v = (v_1, v_2)$ est un champ de vecteurs sur $\mathcal{U}$.

On écrit
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = v_1(x_1) \\ \dot{x}_2 = v_2(x_2) \end{cases} \quad \text{pour } \dot{x} = v(x)$$

Rem: Une EDO générale est donnée par $v(x_1, x_2) = (v_1(x_1, x_2), v_2(x_1, x_2))$

Un champ de vecteurs v est un produit direct si v_1 ne dépend pas de x_2 et v_2 pas de x_1 .

Thm: Les solutions de
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = v_1(x_1) & x_1 \in \mathcal{U}_1 \\ \dot{x}_2 = v_2(x_2) & x_2 \in \mathcal{U}_2 \end{cases}$$
 sont des

applications $\varphi: I \rightarrow \mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2$ de la forme $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$

où $\varphi_i: I \rightarrow \mathcal{U}_i$ est une solution de $\dot{x}_i = v_i(x_i)$ $\forall i=1,2$

$$\varphi(t_0) = (x_{10}, x_{20}) = x_0$$

$$\varphi_1(t_0) = x_{10} \quad \updownarrow \quad \varphi_2(t_0) = x_{20}$$

Ex :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 \\ \dot{x}_2 = k x_2 \end{cases} \quad k \in \mathbb{R}$$

$$\varphi_1(t) = x_{10} e^{t-t_0}$$

$$\varphi_2(t) = x_{20} e^{k(t-t_0)}$$

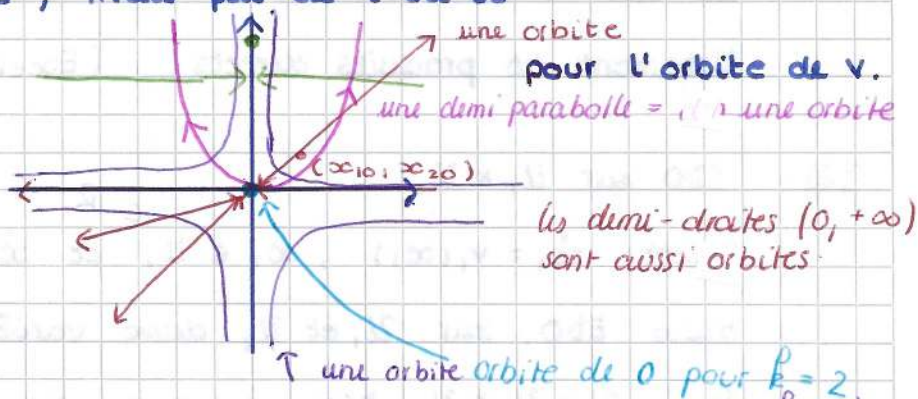
$$x_0 = (x_{10}, x_{20}) \in \mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2$$

$$\Rightarrow |x_2| = C |x_1|^k$$

$$C = \frac{|x_{20}|}{|x_{10}|^k}$$

C dépend de x_0 , mais pas de t ou t_0

$$k = \underline{1}, \underline{2}, \underline{0}, \underline{-1}$$



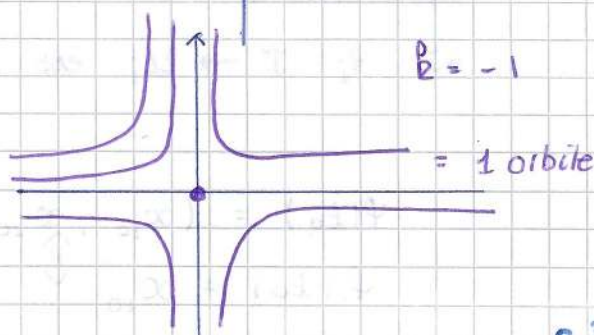
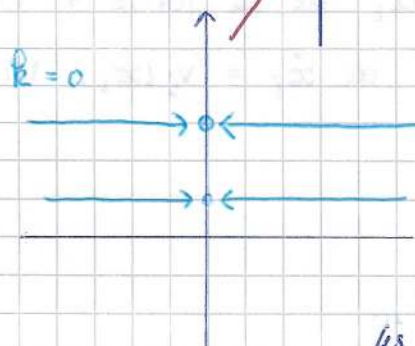
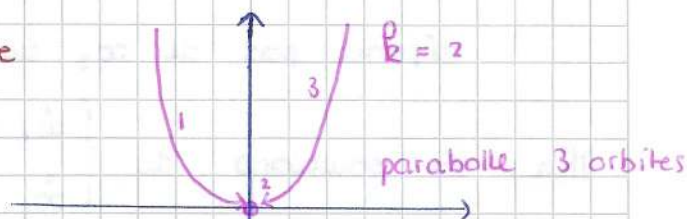
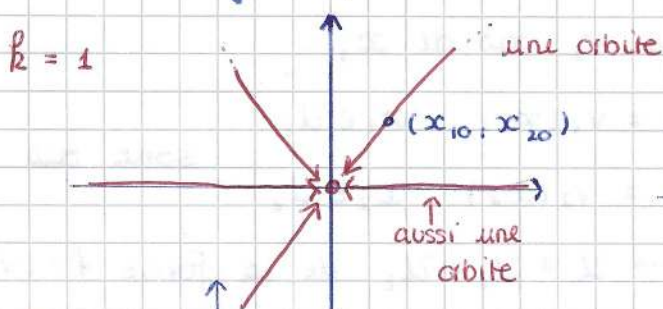
Rem : On a $\begin{cases} \dot{x}_1 = v_1(x_1) & x_1 \in \mathcal{U}_1 \\ \dot{x}_2 = v_2(x_2) & x_2 \in \mathcal{U}_2 \end{cases}$

Supposons $\exists \{g_1^t\}$ le flot pour v_1 sur $\mathcal{U}_1$ et $\exists \{g_2^t\}$ le flot pour v_2 sur $\mathcal{U}_2$

$\exists ?$ le flot pour $v = (v_1, v_2)$ sur $\mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2$?

$$g^t(x_1, x_2) = (g_1^t x_1, g_2^t x_2)$$

le flot pour $\mathcal{U}$



les orbites de v

dans l'exemple en haut de la page.

AL-Géom :Groupe à un paramètre de transformations linéaires d'un plan.

$\varphi_x(t) = (x_1 e^{at}, x_2 e^{bt})$, $x = (x_1, x_2)$, définit le flot

$g^t(x) = \varphi_x(t)$ où $g^t: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ transf. linéaire.
 $g^t(x_1, x_2) \mapsto (g^t(x_1), g^t(x_2))$

Plus généralement, nous pouvons considérer les équations

$$(*) \begin{cases} \dot{x}_1 = ax_1 + bx_2 \\ \dot{x}_2 = cx_1 + dx_2 \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow$ Un champ de vecteurs linéaire $[v(\lambda x + \mu y) = \lambda v(x) + \mu v(y)]$

Une solution $\varphi_x(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_2(t) \end{pmatrix} = e^{At} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

ici $e^{At} = Id + tA + \frac{A^2}{2} t^2 + \frac{A^3}{3!} t^3 + \dots$ la série converge la fonction exponentielle de At .

$$\begin{aligned} \frac{d e^{At}}{dt} &= A + A^2 t + A^3 \frac{t^2}{2} + \dots = A (Id + At + A^2 \frac{t^2}{2} + \dots) \\ &= A e^{At} \end{aligned}$$

$\Rightarrow \varphi'(t) = \frac{d}{dt} e^{At} x = A(e^{At} x)$ est une solution de $\dot{x} = Ax$ ou $(*)$.

Tout groupe à un paramètre de transf. linéaires est

donné par une matrice A . $g^t: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto e^{At} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ le flot

Si $a + d = 0$ ($\text{tr } A = 0$) $\Rightarrow \text{tr } A^n = 0 \quad \forall n$ et d'it $e^{At} = 1$

$\Rightarrow g^t$ préserve l'aire

Ex: Pour le produit direct

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 \\ \dot{x}_2 = k x_2 \end{cases} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$$

on préserve l'aire $\Leftrightarrow k = -1$

car $\text{tr } A = 0 \Leftrightarrow k = -1$

Equations non-autonomes :

champ constant sur le temps

$$\dot{x} = v(x) \quad (\text{donné par un champ de vecteurs})$$

est appelée une équation EDO autonome si elle ne dépend pas du temps t , mais que $\dot{x}$ signifie $\Psi'(t)$.

En général, le champ de vecteurs v sur M , la partie droite peut dépendre de t . (EDO non-autonome sur $\Pi \ni x$)

$$\dot{x} = v(x, t) \quad \text{nous pouvons ajouter } \dot{t} = 1$$

Sa solution est $\varphi: I \rightarrow M$ telle que

$$\varphi'(t) = v(t, \varphi(t)) \in T_{\varphi(t)} M$$

(pas de dépend le système autonome - avec à s)

$$\begin{cases} \dot{x} = v(t, x) \\ \dot{t} = 1 \end{cases} \downarrow \begin{cases} \dot{x} = dx/ds \\ \dot{t} = dt/ds \end{cases}$$

$$TM(\text{le fibré tangent}) = \bigcup_{p \in \Pi} T_p \Pi$$

Une famille $v(t, x)$ de champs de vecteurs paramétrés par $t \in \mathbb{R}$.

Champ de vecteurs : $v: M \rightarrow TM$ lisse tq $\pi \circ v = \text{id}$
 famille de c.d.v : $v: \mathbb{R} \times \Pi \rightarrow T\Pi$ lisse tq $\pi \circ v(t, p) = p \quad \forall t \in \mathbb{R}, p \in \Pi$

Un autre p.d.v est donné par l'espace des phases élargi :

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad \text{par } \Pi = \mathbb{R} \quad y, x \in \mathbb{R}$$

une EDO non-autonome

En général, $\nexists$ une méthode pour la résoudre, même pour $x, y \in \mathbb{R}$.

Une exception notable : $f(x, y) = g(y)/h(x)$

$$\Rightarrow dy/dx = g(y)/h(x)$$

$$\Rightarrow " dy/g(y) = dx/h(x) "$$

$$\dot{y} = dy/dt = g(y) \quad \text{et} \quad \dot{x} = dx/dt = h(x)$$

un produit direct

Si $y \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$, on peut résoudre

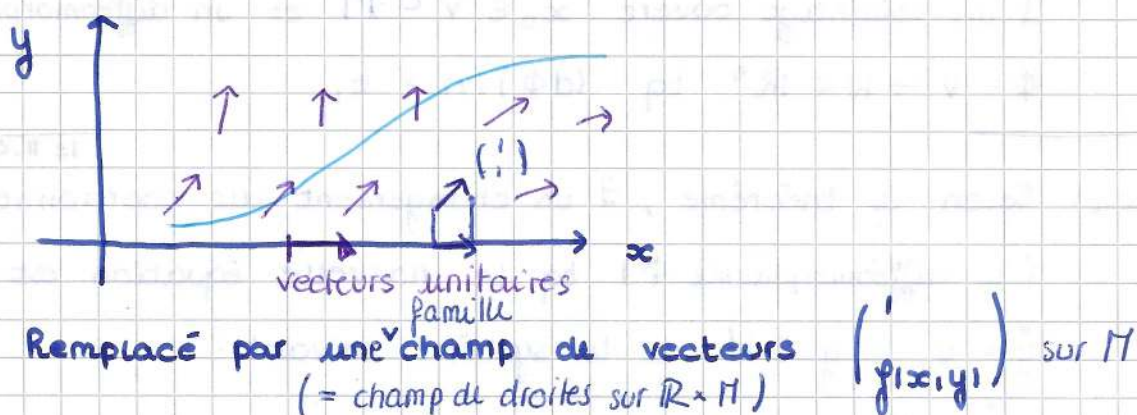
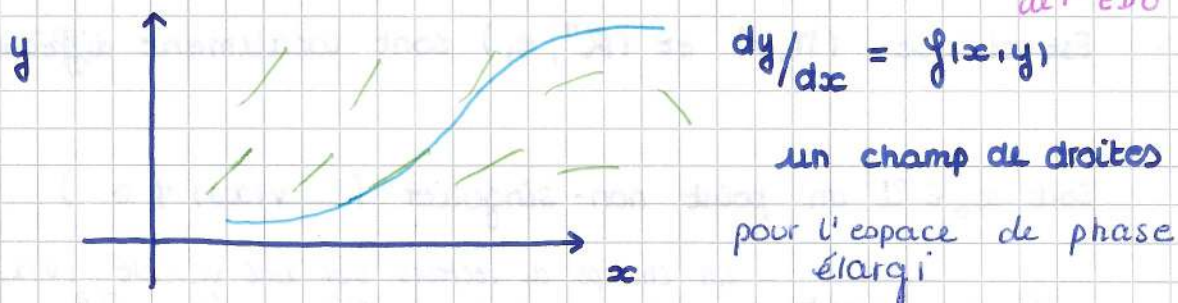
une équation à variables séparables.

$$x = \varphi_1(t)$$

$$y = \varphi_2(t)$$

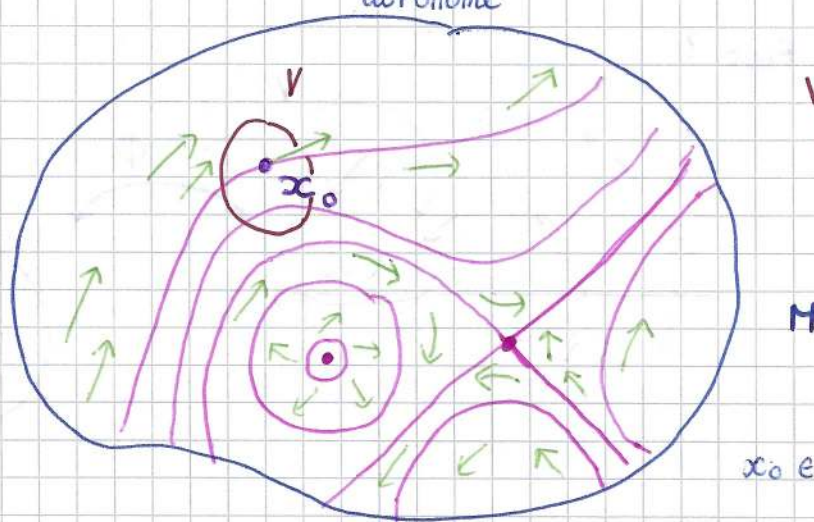
Al- Géom :

Plus généralement, $\dot{x} = v(x, t)$ $x \in M$ peut être
 remplacée par $\begin{cases} \dot{t} = 1 \\ \dot{x} = v(t, x) \end{cases} \quad \begin{matrix} t = t(s) \\ x = x(s) \end{matrix} \quad \left. \vphantom{\begin{matrix} \dot{t} = 1 \\ \dot{x} = v(t, x) \end{matrix}} \right\} \text{ système autonome}$
 $\frac{dt}{ds} = 1 \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{ds}$
 où $\begin{pmatrix} 1 \\ v(t, x) \end{pmatrix}$ est un champ de vecteurs sur $\mathbb{R} \times M$ l'espace des phases pour le nouveau système coïncide avec l'espace élargi de l'EDO



Revenons au point de vue géométrique :

Considérons l'équation $\dot{x} = v(x)$ sur une variété M
 autonome



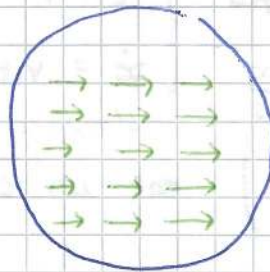
$x_0 \in M$ tq $v(x_0) \neq 0$
 point pas singulier

• pt singuliers

Localement, M est difféomorphe à $\mathbb{R}^n$.

Considérons un champs de vecteurs sur $\mathbb{R}^n$ non-singulier :

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$



Q: Est-ce que (M, v) et $(\mathbb{R}^n, e_1)$ sont localement difféomorphes ?

Soit $x_0 \in \mathcal{U}$ un point non-singulier ($v(x_0) \neq 0$)

Thm: Redressement *un champs de vecteurs sur une variété ($v(x_0) \neq 0$) mise est localement difféo à $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ sur $\mathbb{R}^n$.*

$\exists$ un voisinage ouvert $x_0 \in V \subset M$ et un difféomorphisme

$$\phi: V \rightarrow W \subset \mathbb{R}^n \text{ tq } (d\phi)(v) = e_1$$

1e 11.05.20

Rem: Selon le théorème, $\exists$ un changement des coordonnées locales

(le difféomorphisme ϕ) tq la nouvelle équation est

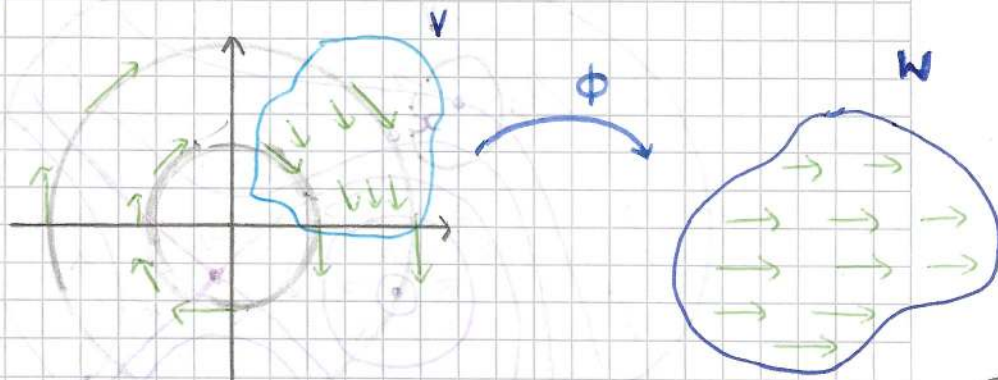
$\dot{y} = e_1$, $y \in W$ ou le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = 1 \\ \dot{y}_2 = 0 \\ \vdots \\ \dot{y}_n = 0 \end{cases}$$

Q: Solution ? Flot ?

Ex :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 \end{cases}$$



AL-Géom :Corollaire du théorème de redressement :Thm : Existence $\dot{x} = v(x)$, $x \in M$ admet une solution $\varphi : I \rightarrow M$ vérifiant $\varphi(t_0) = x_0$, $I \ni t_0$, $\forall t_0 \in \mathbb{R}, x_0 \in M$.Dém :

$$v(x_0) = 0 \Rightarrow \varphi(t) = x_0$$

$$v(x_0) \neq 0 \Rightarrow \exists \phi : V \xrightarrow{\sim} W \subset \mathbb{R}^n \text{ un difféomorphisme}$$

$$\text{Soit } \phi(x_0) = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in W \subset \mathbb{R}^n$$

$$\text{Considérons la solution } \psi(t) = \begin{pmatrix} a_1 + t - t_0 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}; \psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

Soit $I \subset \mathbb{R}$ l'intervalle dans $\psi^{-1}(W)$ contenant t_0 .Alors $\varphi : I \rightarrow M$ définie par $\phi^{-1} \circ \psi|_I$ est une solution vérifiant $\varphi(t_0) = x_0$. ■Thm : UnicitéSoient $\varphi_1 : I_1 \rightarrow M$, $\varphi_2 : I_2 \rightarrow M$ deux solutions de $\dot{x} = v(x)$ sur M tq $\varphi_1(t_0) = \varphi_2(t_0) = x_0 \in M$, $t_0 \in I_1 \cap I_2$

$$v(x_0) \neq 0 \Rightarrow \exists I \subset I_1 \cap I_2, t_0 \in I \text{ tq } \varphi_1|_I = \varphi_2|_I$$

intervalle ouvert (voisinage de t_0)

Dém : $\phi \circ \varphi_1$ et $\phi \circ \varphi_2$ nous donnent deux solutions de

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = 1 \\ \dot{y}_2 = 0 \\ \vdots \\ \dot{y}_n = 0 \end{cases} \quad \text{sur } \mathbb{R}^n, \text{ avec } \phi \circ \varphi_1(t_0) = \phi \circ \varphi_2(t_0) = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

(après une restriction sur $I \subset \phi^{-1}(W)$)

Par l'unicité de solution sur une droite,

$$\phi \circ \varphi_1(t) = \phi \circ \varphi_2(t) = \begin{pmatrix} a_1 + t - t_0 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$
■

Prop: Soient $\varphi_1: I_1 \rightarrow M$ et $\varphi_2: I_2 \rightarrow M$ deux solutions de $\dot{x} = v(x)$ sur M , $I_1, I_2 \subset \mathbb{R}$ deux intervalles tq $I_1 \cap I_2 \neq \emptyset$. Supposons que $\exists t_0 \in I_1 \cap I_2$ tq $\varphi_1(t_0) = \varphi_2(t_0)$. Alors, $\varphi_1|_{I_1 \cap I_2} = \varphi_2|_{I_1 \cap I_2}$ et $\varphi: I_1 \cup I_2 \rightarrow M$ défini par $\varphi(t) = \begin{cases} \varphi_1(t) & t \in I_1 \\ \varphi_2(t) & t \in I_2 \end{cases}$ est une solution de $\dot{x} = v(x)$.

Dém: $I_1 \cap I_2 = (a, b)$ est un intervalle ouvert, $t_0 \in (a, b)$.

Soit $b' := \sup \{t \in [t_0, b) \mid \varphi_1|_{[t_0, t]} = \varphi_2|_{[t_0, t]}\}$.

Par le thm de l'unicité $b' > t_0$.

Soit $b' < b$. Alors, $\varphi_1|_{[t_0, b')} = \varphi_2|_{[t_0, b')}$.

Par continuité de φ_1 et φ_2 , $\varphi_1(b') = \varphi_2(b')$.

Encore une fois par le thm de l'unicité, on a $b' > b$.

$\Rightarrow$ contradiction $\Rightarrow b' = b$.

Pareillement, $a = a' \Rightarrow \varphi_1|_{(a, b)} = \varphi_2|_{(a, b)}$.

$\varphi(t) = \begin{cases} \varphi_1(t) & t \in I_1 \\ \varphi_2(t) & t \in I_2 \end{cases}$ est différentiable et une solution de $\dot{x} = v(x)$.

▮

Dépendance continue et la différentiabilité de solutions par rapport à (x_0, t_0) :

$\dot{x} = v(x)$ sur M

Soit $\varphi_{t_0, x_0}: I_{t_0} \rightarrow M_{x_0}$ la solution vérifiant $\varphi(t_0) = x_0$.

Q: $\varphi_{t_0, x_0}(t) \in M$ donne-t-elle une application continue ? différentiable ?

AL - Géom :

Supposons que $\dot{x} = v(x)$ admet le flot $\{g^t\}_{t \in \mathbb{R}}$
 $g^t: M \rightarrow M$ (groupe à 1 paramètre de difféo)

Rap: g^t est donnée par $G: \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ une application lisse.
 $g^t(x) = G(t, x)$

$\Rightarrow \varphi_{t_0, x_0}(t) = G(t - t_0, x_0)$ différentiable !

Q: Et si le flot pour $\dot{x} = v(x)$ ~~?~~ ?

Le flot local existe néanmoins !

Soit $x_0 \in M$ une variété, $v: M \rightarrow TM$ un champ de vecteurs.

Déf: On appelle flot local défini par v dans le voisinage de x_0 l'ensemble (I, V_0, g) où $0 \in I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert, $x_0 \in V_0$ un voisinage ouvert, $g: I \times V_0 \rightarrow M$ une application lisse définissant la famille $g^t: V_0 \rightarrow M$ $t \in I$, telle que :

- $\forall t \in I$, $g^t: V_0 \rightarrow M$ est un difféo sur son image
- $\forall x \in V_0$, $\varphi: I \rightarrow M$ définie par $\varphi(t) = g^t(x)$ est une sol. de $\dot{x} = v(x)$ vérifiant $\varphi(0) = x_0 \Rightarrow g^0 = \text{Id}_{V_0}$
- $\forall s, t \in I$, $x \in V_0$ tq $g^t(x) \in V_0$, on a $g^s(g^t(x)) = g^{s+t}(x)$

Prop: Soit (I, V_0, g) un flot local défini par $v: M \rightarrow TM$ dans le voisinage de $x_0 \in M$. Alors $\forall x \in V_0$, $\exists V_x \subset V_0$ ouvert $x_0 \in V_x$ et $\delta > 0$ tq $\forall s, t \in (-\delta, \delta) \subset I$, on a $g^s(V_x) \subset V_0$, $g^t(V_x) \subset V_0$ et $g^s(g^t(y)) = g^t(g^s(y)) = g^{s+t}(y) \quad \forall y \in V_x$.

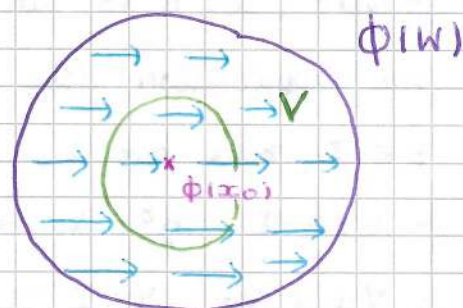
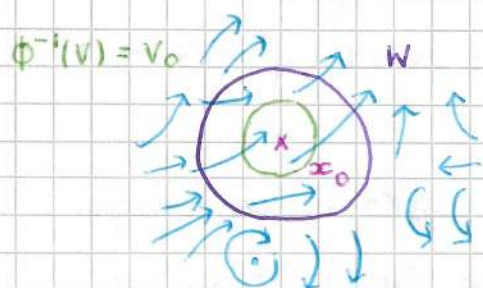
Dém: Continuité de $g: I \times V_0 \longrightarrow M$, $g^{-1}(V_0)$ est ouvert.

Prop: Soit v sur M un champ de vecteurs admettant le flot $G: \mathbb{R} \times M \longrightarrow M$. Alors $\forall V \subset M$ ouvert, $(\mathbb{R}, V, G|_{\mathbb{R} \times V})$ est un flot local défini par v .

Ex: Le champ $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ sur $\mathbb{R}^n$ admet le flot $G^{e_1}: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$
 $G^{e_1}(t, \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x_1 + t \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ défini par e_1 .

Thm: Pour tout champ de vecteurs v sur M et $x_0 \in M$ $\exists$ un flot local (I, V_0, g) défini par v dans le voisinage V_0 de x_0 si $v(x_0) \neq 0$.

Dém: Par le thm de redressement $\exists W \subset M$, $x_0 \in W$, et $\phi: W \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tq $d\phi(v) = e_1$.



Par la proposition, $\exists V \subset W$ un voisinage de x_0 et $I \subset \mathbb{R}$, $0 \in I$, un intervalle ouvert tq $G^{e_1}(I \times V) \subset W$
 $\Rightarrow (I, \phi^{-1}(V), g)$ est un flot local pour $g(t, x) = \phi^{-1}(G^{e_1}(t, \phi(x)))$

AL - Géom :Dépendance continue et différentiabilité par rapport au paramètre :

Supposons qu'on a une famille lisse de champs de vecteurs sur M paramétrée par $a \in A$ (une variété).

$\pi: TM \rightarrow M$ ic: $v: M \times A \longrightarrow TM$ tq $\pi(v(x, a)) = x \quad \forall x \in M, a \in A$
 $\downarrow$
 π Elle nous donne une famille d'EDO :

$$\dot{x} = v(x, a) \quad x \in M, a \in A$$

Thm : Soit $v(x_0, a_0) \neq 0$, $x_0 \in M$, $a_0 \in A$

$\Rightarrow \exists W \subset M$ un voisinage ouvert de x_0 , $\mathcal{U} \subset A$ un voisinage ouvert de a_0 et $\delta > 0$ tq la solution $\varphi_{a, t_0, x}(t)$ de $\dot{x} = v(x, a)$ vérifiant $\varphi_{a, t_0, x}(t_0) = x$ est lisse par rapport à

$$\forall x \in W, a \in \mathcal{U}, t, t_0 \in \mathbb{R} : |t - t_0| < \delta$$

$$\text{ic: } W \times \mathcal{U} \times (-\delta, \delta)^2 \longrightarrow M \text{ est lisse.}$$

Dém : Considérons le champ de vecteurs sur $M \times A$

$$\begin{cases} \dot{x} = v(x, a) \\ \dot{a} = 0 \end{cases} \quad (v(x_0, a_0), 0) \neq 0$$

par hypothèse

$$g^{t-t_0}: W \times \mathcal{U} \longrightarrow M \times A$$

La différentiabilité du flot local



Rap: Corollaires du théorème du redressement.

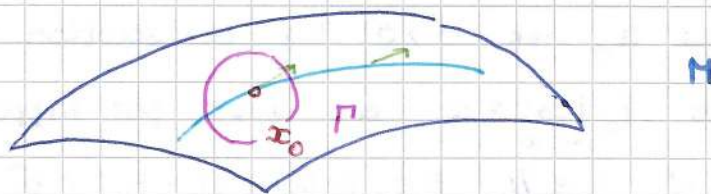
Dépendance continue et la différentiabilité par rapport aux conditions initiales et au paramètre.

Aujourd'hui:

Théorème de prolongement

$\dot{x} = v(x)$ sur M $t_0 \in \mathbb{R}$ $x_0 \in M$

Soit $\Gamma \subset M$ un ss-ensemble



Déf: Si $\exists$ une solution $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow M$ tq $\varphi(t_0) = x_0$, on dit qu'on peut indéfiniment prolonger une solution vérifiant $\varphi(t_0) = x_0$.

Si $\exists \varphi: (a, +\infty) \rightarrow M$, $a < t_0$, une solution tq $\varphi(t_0) = x_0$ on dit qu'elle se prolonge indéfiniment en avant.

— " —: $(-\infty, b) \rightarrow M$, $b > t_0$, — " — en arrière.

Si $\exists \varphi: (a, b) \rightarrow M$, $t_0 \in (a, b)$, on dit qu'une solution (vérifiant $\varphi(t_0) = x_0$) est prolongeable jusqu'à Γ

en avant si $\exists T \in [t_0, b) : \varphi(T) \in \Gamma$

en arrière si $\exists T \in (a, t_0] : \varphi(T) \in \Gamma$

AL- Géom :

Soient M une variété, v un champ de vecteurs sur M

Thm. : Soient $F \subset M$ compact, $t_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \in F$. Supposons que v ne possède pas de points singuliers dans M .

Alors une solution de $\dot{x} = v(x)$ peut être prolongée en avant (ou en arrière) soit indéfiniment, soit jusqu'à $\Gamma = \partial F$.

Démo :

Notons $T = \sup \{ \tau > t_0 \mid \exists \varphi : I \rightarrow F : [t_0, \tau] \subset I \text{ et } \varphi(t_0) = x_0 \}$

$x_0 \in \partial F \Rightarrow$ prolongement jusqu'à $\Gamma = \partial F$ à t , sinon $x \in \text{Int}(F)$

Supposons $t_0 < T < +\infty \Rightarrow T > t_0$

F compact $\Rightarrow \exists$ une suite $t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k < \dots < T$ tq

$x = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi(t_k) \in F$ existe.

$\exists$ un flot local $((-\delta, \delta), V_0, g)$, $V_0 \ni x$ un voisinage ouvert, $\delta > 0$, $g : (-\delta, \delta) \times V_0 \rightarrow M$

$\Rightarrow \exists k : \varphi(t_k) \in V_0$ et $T - t_k < \delta$

$\Rightarrow \exists \psi : (T - \delta, T + \delta) \rightarrow M$ une solution telle que $\psi(t_k) = \varphi(t_k)$

$\Rightarrow \psi$ peut être prolongée sur $[t_0, T + \delta]$

$\Rightarrow$ On a $\psi(T) \in F$, si $\psi(T) \notin \partial F \Rightarrow \psi(T) \in \text{Int}(F)$

$\Rightarrow T < \sup \{ \tau \mid \exists g : [t_0, \tau] \rightarrow F \text{ solution} \}$



Redressement pour les EDO non-autonômes:

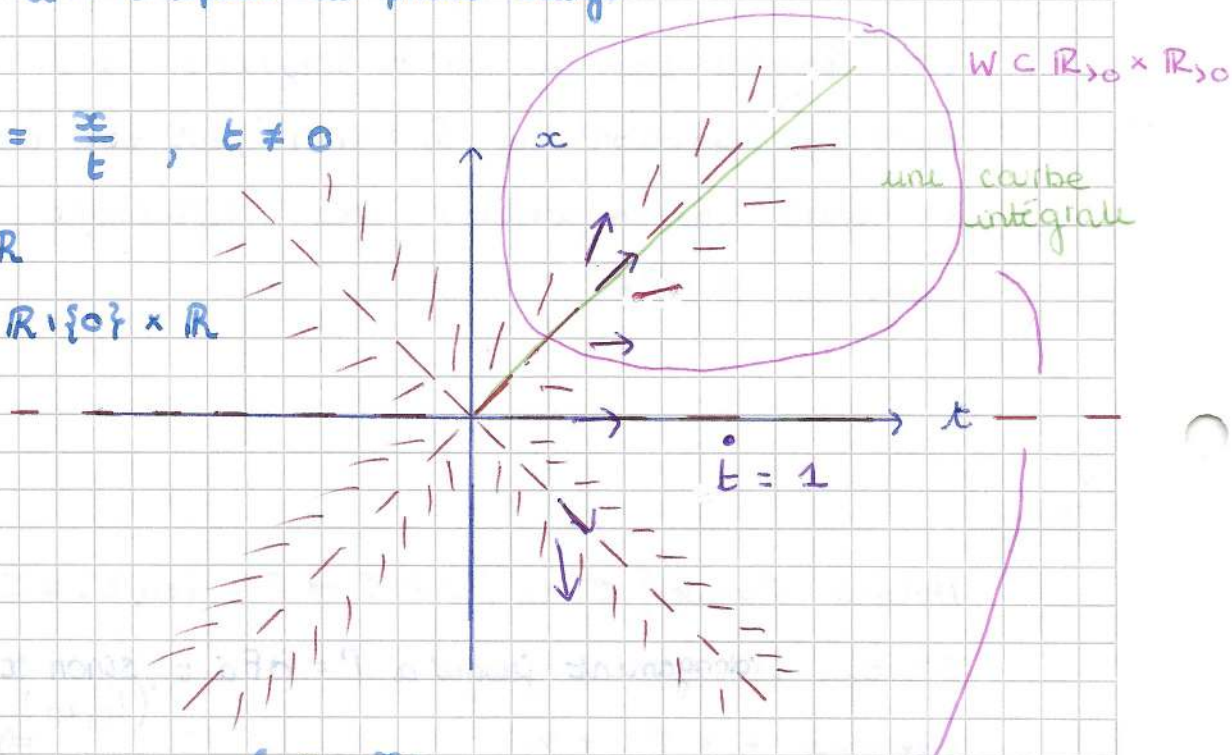
$\dot{x} = v(t, x)$ un champ de droite (en fibre tangent de Π)
 $(t, x) \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R} \times \Pi$

$\mathcal{U}$ - l'espace de phase élargi

Ex: $\dot{x} = \frac{x}{t}, t \neq 0$

$x \in \mathbb{R}$

$\mathcal{U} = \mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R}$



$x = x(s)$

$t = t(s)$

$$\begin{cases} \dot{x} = x/t \\ \dot{t} = 1 \end{cases}$$

la dérivée par rapport à ds

$$\frac{\dot{x}}{x} = \frac{\dot{t}}{t}$$

Si $x > 0, t > 0$

$u = \log x$

$\dot{u} = \frac{\dot{x}}{x}$

$v = \log t$

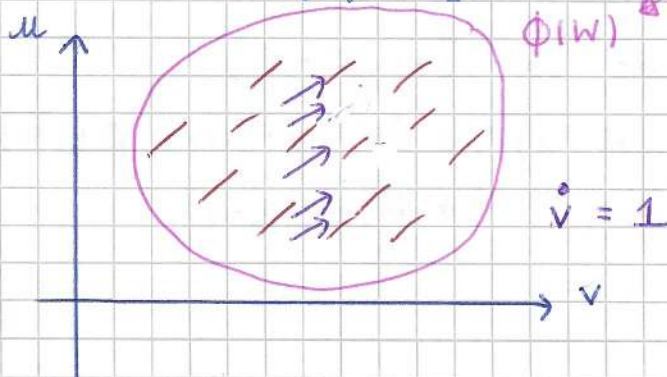
$\dot{v} = \dot{t}/t$

(t, x)

ϕ

$(\log t, \log x)$

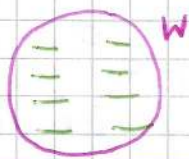
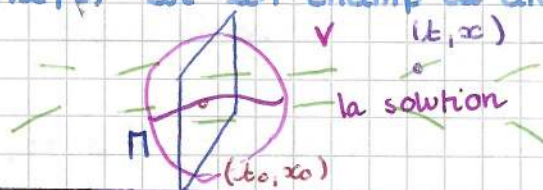
$$\dot{u} = \dot{v} \quad \begin{cases} \dot{u} = 1 \\ \dot{v} = 1 \end{cases}$$



AL - Géom :

Soit $\dot{x} = v(t, x)$ une EDO sur $\mathcal{U} \subset \mathbb{R} \times \Pi$ ouvert

$(t_0, x_0) \in \mathcal{U}$, $\frac{dx}{dt} = v(x, t)$ est un champ de droites en $\mathcal{U}$.

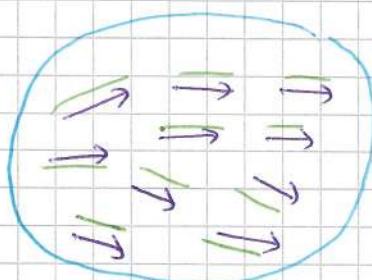
 $\mathbb{R}^{n+1}$ $\mathbb{R}$  $v(t, x)$

la solution

 (t_0, x_0) $\mathbb{R}$

Thm : $\exists$ un voisinage ouvert $V \ni (t_0, x_0)$, $V \subset \mathcal{U}$ et un difféomorphisme $\phi: V \rightarrow W$ sur un domaine ouvert $W \subset \mathbb{R}^{n+1}$ tq $\phi(t, x) = (t, y)$ et $d\phi$ envoie le champ de droite $v(x, t)$ à $dy_i/dt = 0$ $i=1, \dots, n$ (le difféomorphisme conserve t)

le 25.05.20

Dém : $\mathcal{U} \subset \mathbb{R} \times \Pi$

On remplace $dx/dt = v(t, x)$ par $\begin{cases} dx/ds = v(t, x) \\ dt/ds = 1 \end{cases}$ (*)

$(t_0, x_0) \in \mathcal{U}$ admet un flot local $(-\delta, \delta), V_0, g$

$(t_0, x_0) \in V_0$, $V_0 \subset \mathcal{U}$, $g: (-\delta, \delta) \times V_0 \rightarrow \mathcal{U} \subset \mathbb{R} \times \Pi$

$(s, t, x) \mapsto g(s, t, x)$

$g(s, t, x) = (a(s, t, x), b(s, t, x))$

$\left. \frac{dg(s, t, x)}{ds} \right|_{s=0} = (1, v(t, x))$ (flot local)

$g(0, t, v) = (t, v) \Rightarrow a(s, t, v) = t + s$

Soit $(t_0, x_0) \in I \times A \subset V_0$ un voisinage carré

$t_0 \in I$, $x_0 \in A$, $I \subset (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$

Définissons $\Psi: I \times A \longrightarrow \mathcal{U} \subset \mathbb{R} \times M$ par $\Psi(t, x) = g(t - t_0, t_0, x)$

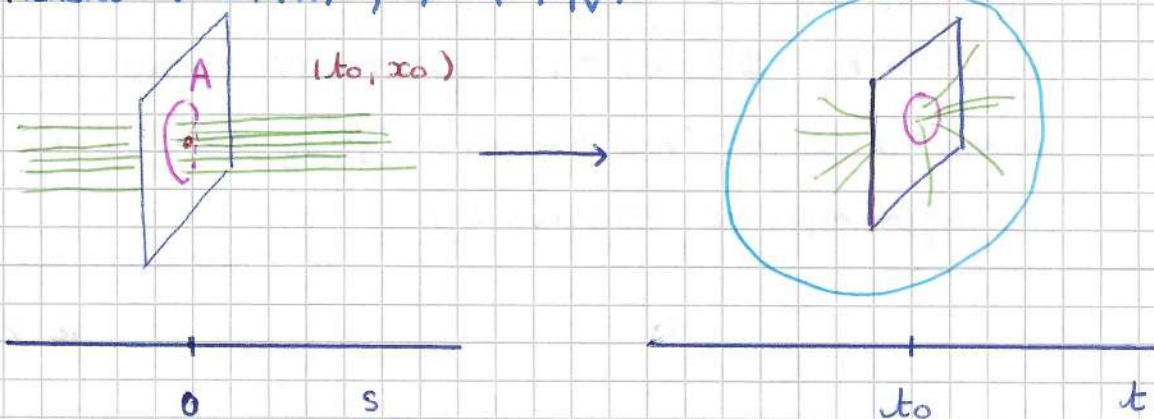
$d\Psi|_{(t_0, x_0)}$ est bijective.

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & a_1 & \dots & a_n \\ a_1 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ a_n & & & 1 \end{pmatrix}$$

$v(t_0, x_0) = (a_1, \dots, a_n)$

$\Rightarrow \exists$ un voisinage $W \ni (t_0, x_0)$ tq $\Psi|_W$ est un difféomorphisme sur son image.

Prends $V = \Psi(W)$, $\phi = (\Psi|_V)^{-1}$



Thm: $\dot{x} = v(t, x)$ sur $\mathcal{U} \subset \mathbb{R} \times M$ admet une solution φ vérifiant $\varphi(t_0) = x_0 \quad \forall (t_0, x_0) \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R} \times M$

Thm: Deux solutions de $\dot{x} = v(t, x)$ vérifiant la même condition initiale se confondent sur l'intersection de leurs intervalles de définition. (pas de condition $v(t_0, x_0) \neq 0$)

AL-Géom :

Au lieu du flot local pour les EDOs non-autonome, on peut définir :

Déf : Famille locale de transformations , $V_0 \subset M$ ouvert

$$g_{t_1}^{t_2} : V_0 \longrightarrow M, t_1, t_2 \in I \quad (g : I \times I \times V_0 \longrightarrow M \text{ lisse})$$

un difféomorphisme sur son image.

$$- \forall x \in V_0, \varphi_x^{t_1} : I \longrightarrow M \text{ défini par } \varphi_x(t) = g_{t_1}^t(x)$$

est une solution de $\dot{x} = v(x, t)$

$$- g_{t_1}^{t_3}(x) = g_{t_1}^{t_2} g_{t_2}^{t_3}(x) \quad \text{si } g_{t_1}^{t_2}(x) \in V_0$$

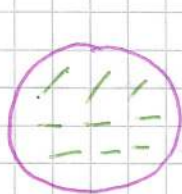
$$- g_{t_1}^{t_1}(x) = x \quad \forall t \in I$$

Thm : $\forall$ champ de droites $v(t, x)$ sur $\mathcal{U} \subset \mathbb{R} \times M$ et

$\forall (t_0, x_0) \in \mathcal{U}$, $\exists$ une famille locale de transformations

$$g : I \times I \times V_0 \longrightarrow M, x_0 \in V_0, t_0 \in I$$

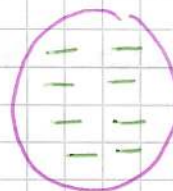
Pr : Le théorème du redressement



V



$W \subset \mathbb{R}^{n+1}$



la restriction du flot (global)

$$g_{t_1}^{t_2}(x) = x$$



Soit A une variété et $v(t, x, a)$ une famille de champs de droites paramétrée par A .

(localement donné par un champ de vecteurs)

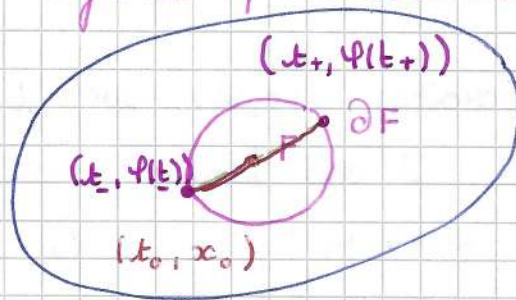
Eq d π_A envoie toute droite en $T_{(t, x, a)} \mathbb{R} \times M \times A$

$\Downarrow$ le champ de droites est tangent aux $\mathbb{R} \times M \times \{a\} \forall a$

Cor: Soit $\dot{x} = v(t, x, a)$, $a \in A$ une famille de champs de vecteurs sur $\mathcal{U} \subset \mathbb{R} \times M$, $(t_0, x_0) \in \mathcal{U}$.

Alors, $\exists V_0 \ni x_0$, $I \ni t_0$ ouverts et une famille (de solutions de $\dot{x} = v(t, x, a)$) $\varphi_{t, x, a} : I \rightarrow M$, $t \in I$, $x \in M$ avec $\varphi(t) = x$ tq $\varphi'(\tau) = v(\tau, \varphi(\tau), a) \forall \tau \in I$ et $\varphi(\tau) \in M$ est lisse par rapport à t, x, a, τ .

Théorème de Prolongation pour EDO non-autonome.



$\mathcal{U} \subset \mathbb{R} \times M$

$F \subset \mathcal{U}$ compact

$(t_0, x_0) \in \text{Int}(F)$ $\dot{x} = v(t, x)$ sur $\mathcal{U}$

Prop: $\exists$ une solution $\varphi : I \rightarrow M$, $t_-, t_+ \in I$ tq $\varphi(t_0) = x_0$, $t_- < t_0 < t_+$ et $\varphi(t_-), \varphi(t_+) \in \partial F$.

$(t_-, \varphi(t_-)), (t_+, \varphi(t_+)) \in \partial F$

Dém: (Cor)

$\begin{cases} \dot{x} = v(t, x, a) \\ \dot{a} = 0 \end{cases}$ une EDO non-autonome

$\exists$ famille locale $\Rightarrow$ le thm



AL- Géom :

Dém: $t_+ = \sup \{ \tau > t \mid \exists \text{ solution } \varphi: I \rightarrow M \text{ tq } \varphi(t_0) = x_0$
 $\text{et } \varphi([t_0, \tau]) \subset F \}$

Si $t_+ \notin \partial F$

$\Rightarrow$ Soit $\varphi(t_+)$ n'est pas bien défini

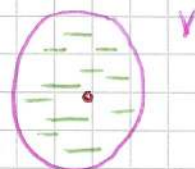
mais pour $t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k < \dots < t_+$ tq

$$\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = t_+$$

$\exists$ une sous-suite avec $\lim_{k \rightarrow +\infty} (t_k, \varphi(t_k)) = p \in F$

Mais $\exists$ un voisinage de $p \in W$

et un difféo de redressement



$\Rightarrow$ C'est possible de prolonger φ après t_+

$\varphi(t_+) \in \text{Int } F$, on a une contradiction avec la déf. du supréum



Fin le 25.05.20

