21.12.2017.

Des situations aux représentations - Des élèves aux enseignants

Katarina Gvozdic

Equipe IDEA

1. Les représentations en mathématiques chez les élèves

2. Les représentations des enseignants

3. L’apprentissage à l’école – chez l’élève et chez l’enseignant

1. Les représentations des élèves

Les stratégies de résolution de problèmes

Stratégies informelles (Verschaffel & De Corte, 1997)

- Stimulation (avec objets, double comptage, fait numériques…)
- Essais et erreur

→Exclusion de l'application flexible des principes mathématiques

→Théories de modèles mentaux (Johnson-Laird, 1983) – simulation mentale fidèle au monde réel

The Situation Strategy First Framework

(Brissiaud & Sander, 2010)

Si-problème

Nicolas va en récréation avec ses 42 billes.

Pendant la récréation, il perd 3 billes.

Combien Nicolas a-t-il de billes maintenant

[42 - 3 = □]

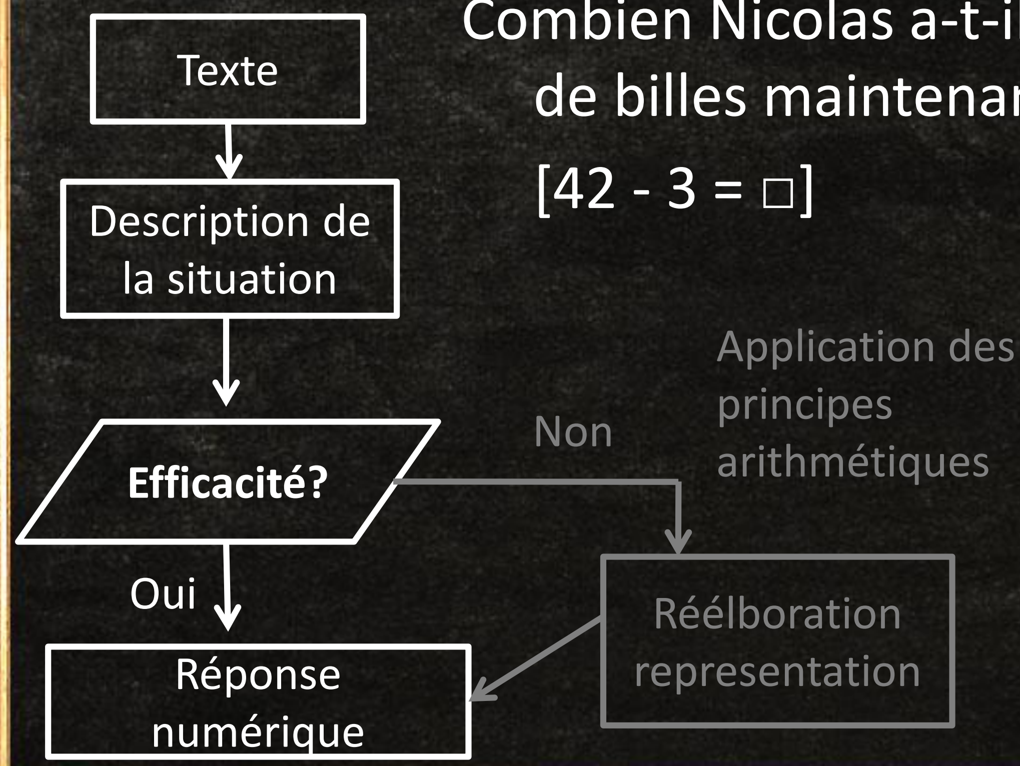
MA-problème

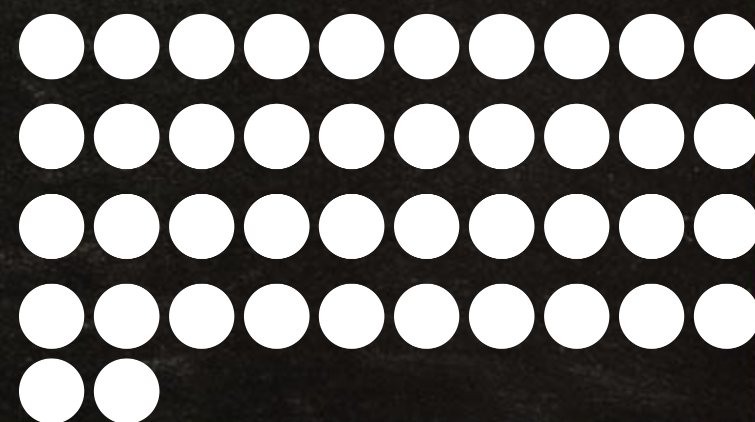
Nicolas va en récréation avec ses 42 billes.

Pendant la récréation, il perd 39 billes.

Combien Nicolas a-t-il de billes maintenant

[42 - 39 = □]





Si-problème

Nicolas va en récréation avec ses 42 billes.

Pendant la récréation, il perd 3 billes.

Combien Nicolas a-t-il de billes maintenant

[42 - 3 = □]

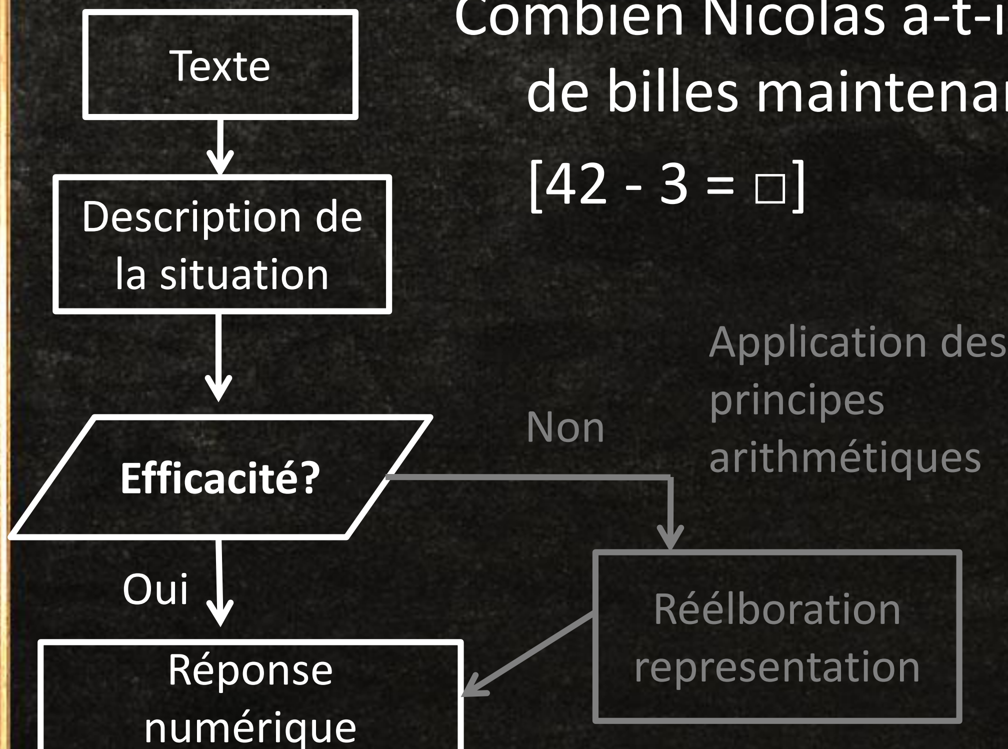
MA-problème

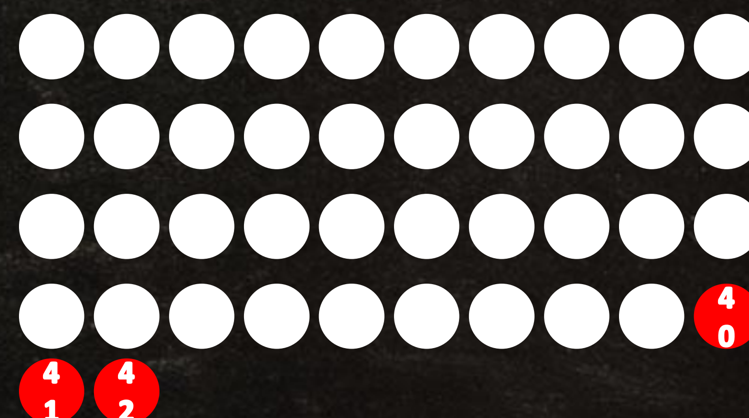
Nicolas va en récréation avec ses 42 billes.

Pendant la récréation, il perd 39 billes.

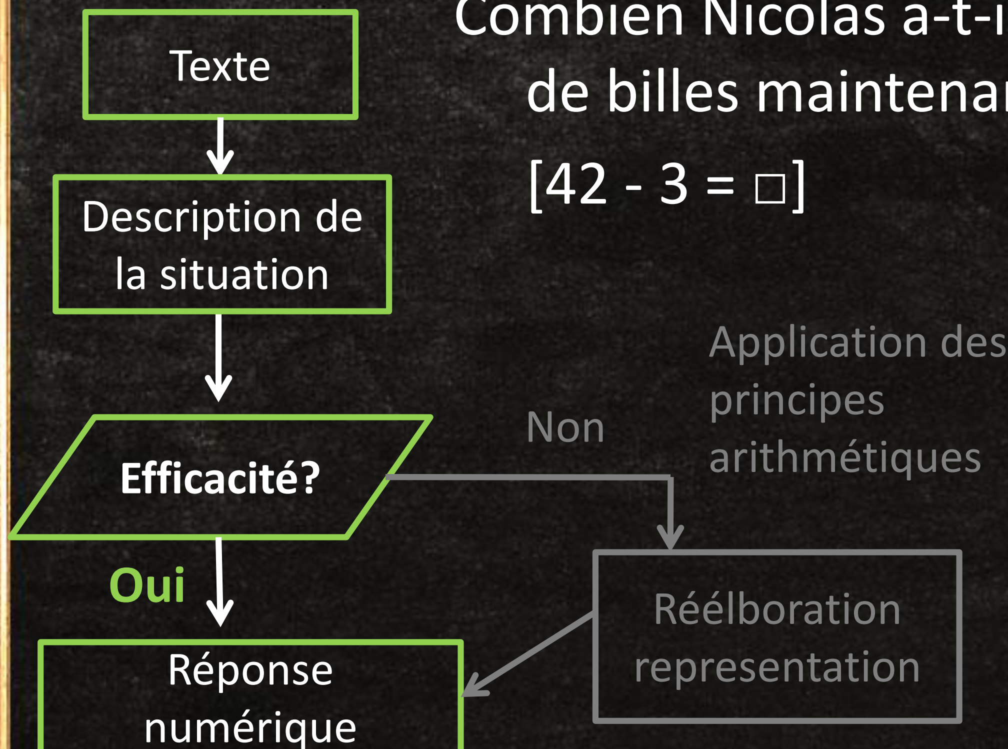
Combien Nicolas a-t-il de billes maintenant

[42 - 39 = □]

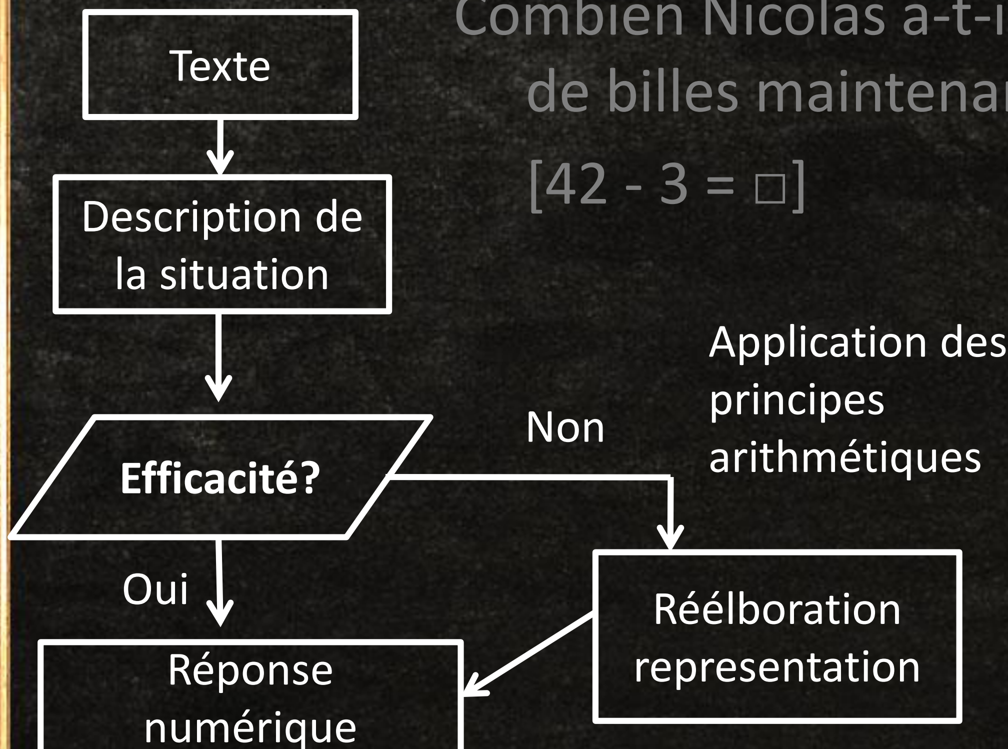


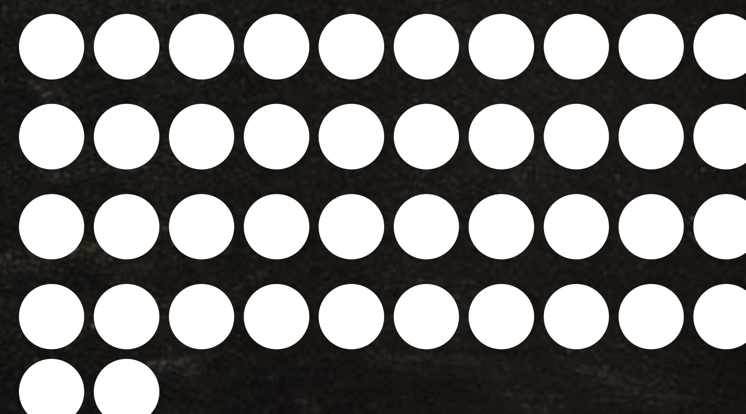


Si-problème	MA-problème
Nicolas va en récréation avec ses 42 billes.	Nicolas va en récréation avec ses 42 billes.
Pendant la récréation, il perd 3 billes.	Pendant la récréation, il perd 39 billes.
Combien Nicolas a-t-il de billes maintenant	Combien Nicolas a-t-il de billes maintenant
[42 - 3 = □]	[42 - 39 = □]



Si-problème	MA-problème
Nicolas va en récréation avec ses 42 billes.	Nicolas va en récréation avec ses 42 billes.
Pendant la récréation, il perd 3 billes.	Pendant la récréation, il perd 39 billes.
Combien Nicolas a-t-il de billes maintenant	Combien Nicolas a-t-il de billes maintenant
[42 - 3 = □]	[42 - 39 = □]





Si-problème

Nicolas va en récréation avec ses 42 billes.

Pendant la récréation, il perd 3 billes.

Combien Nicolas a-t-il de billes maintenant

[42 - 3 = □]

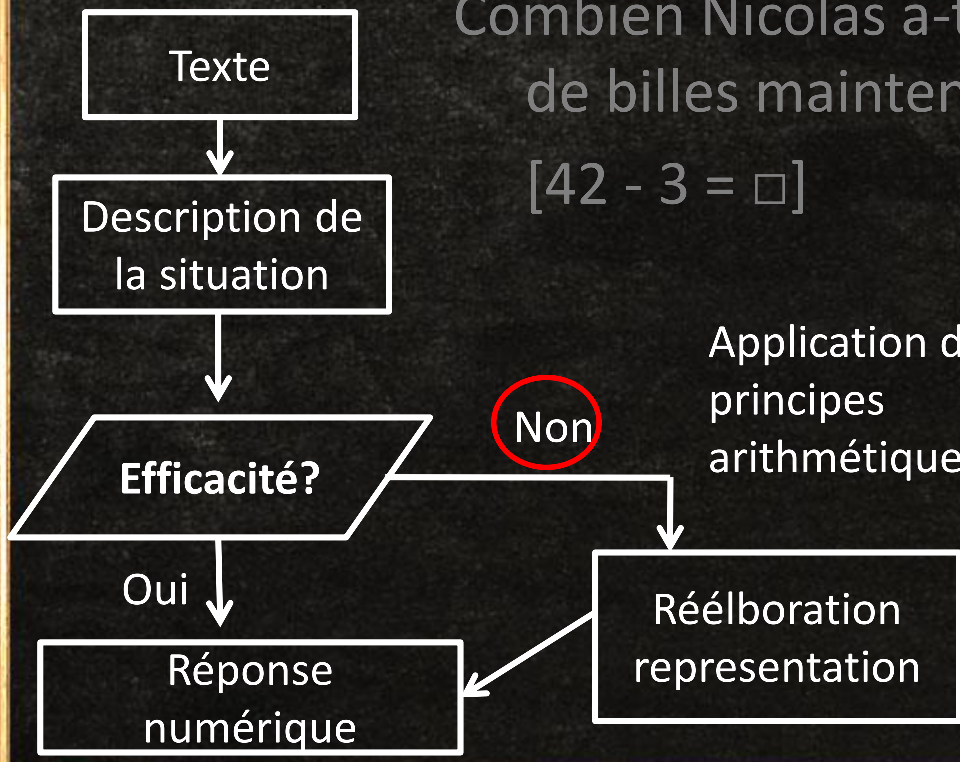
MA-problème

Nicolas va en récréation avec ses 42 billes.

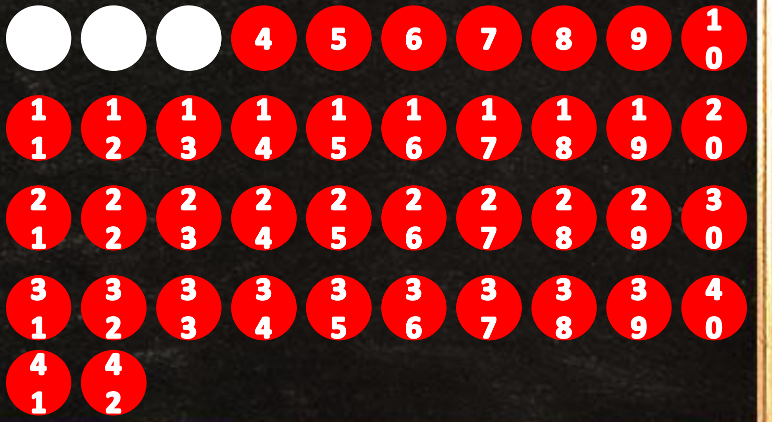
Pendant la récréation, il perd 39 billes.

Combien Nicolas a-t-il de billes maintenant

[42 - 39 = □]



Application des principes arithmétiques



Si-problème

Nicolas va en récréation avec ses 42 billes.

Pendant la récréation, il perd 3 billes.

Combien Nicolas a-t-il de billes maintenant

[42 - 3 = □]

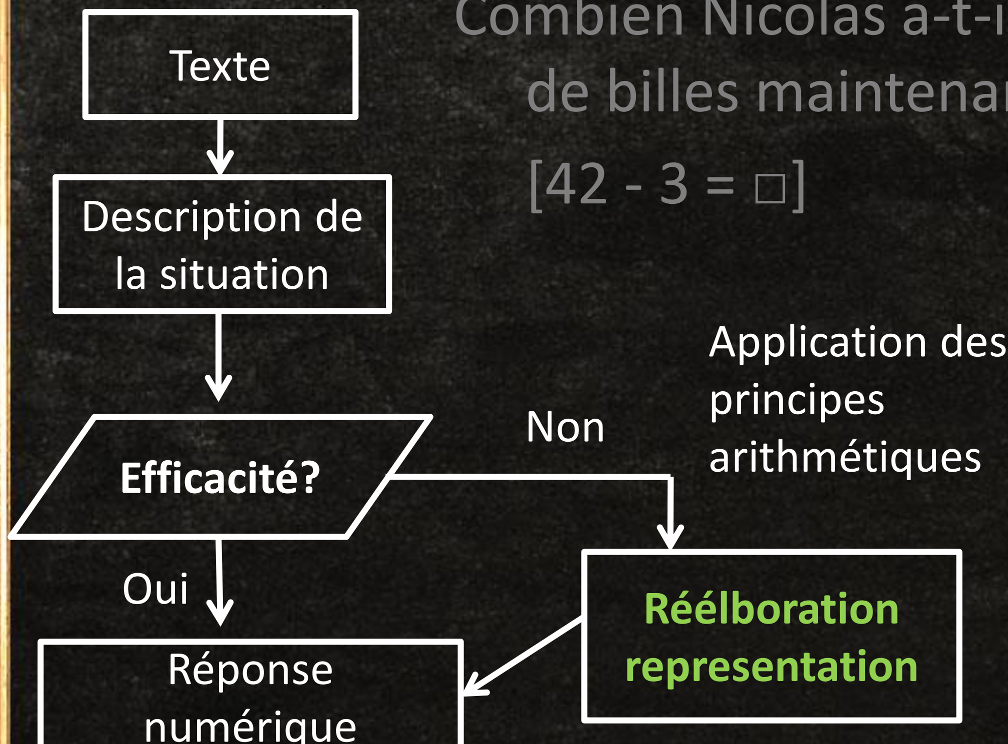
MA-problème

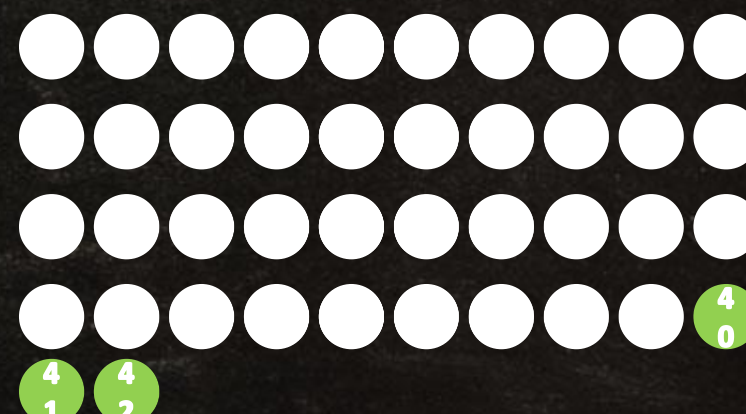
Nicolas va en récréation avec ses 42 billes.

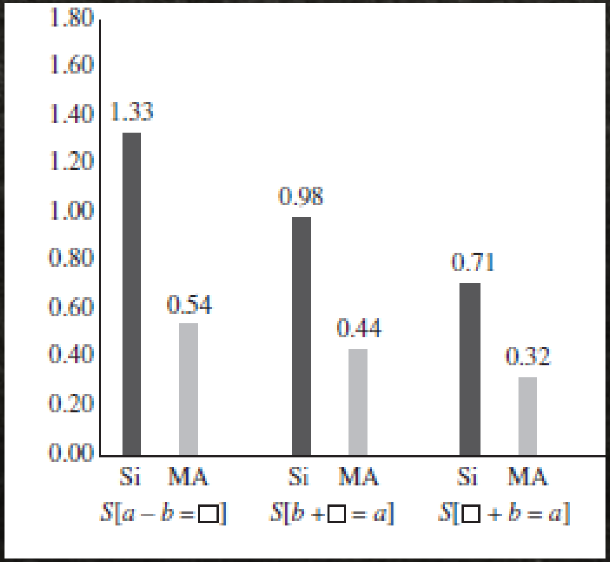
Pendant la récréation, il perd 39 billes.

Combien Nicolas a-t-il de billes maintenant

[42 - 39 = □]







- Même à la fin de l'année : Si > MA
- Principes arithmétiques → problèmes MA

Les Analogies de Simulation

- Lorsque la simulation mentale de la situation spontanément évoquée par l'énoncé mène à la solution, l'analogie de simulation est facilitatrice alors que lorsque la simulation n'est pas praticable, c'est un facteur de difficulté.

Stratégies de calcul mental

42 – 39

– Soustraction directe

42 – 39 =

– Addition à trous (addition indirecte / soustraction par addition)

39 + ? = 42

Switch model

(Peters, De Smedt, Torbeyns, Ghesquière, & Verschaffel, 2013)

M – S = D

- Amplitude de S :

  S < D vs. S > D (42 – 3 = 38 vs. 42 – 38 = 3)

- Distance numérique entre S & D :

  Petit vs. Grande (42 – 20 = 22 vs. 42 – 38 = 3)

- Format de présentation :

  Soustraction (M – S = ?) vs. Addition (S + ? = M)

  (42 – 3 = ? vs. 3 + ? = 42)

Switch model

- Avantage computationnel selon conditions numériques
  - « Switch » en fonction de :
    - * amplitude de S
      - » S < D vs. S > D (42 – 3 = 38 vs. 42 – 38 = 3)
    - * distance numérique entre S & D
      - » Petit vs. **Grande** (42 – 20 = 22 vs. 42 – 38 = 3)
    - format de présentation
- Pas d’explication de l’échec sur les problèmes MA du cadre SSF
- Lien avec les problèmes verbaux ?

Classification sémantique des problèmes à structure additive

- **Problème de comparaison**

  comparant +/- différence = comparé

Pierre a 27 euros. Jacques a 31 euros. Combien Jacques a-t-il d'euros de plus que Pierre ?

- **Problème de combinaison**

  partie 1 + partie 2 = tout

Dans le panier il y a 29 oranges et il y a des poires. Au total, il y a 32 fruits dans le panier. Combien de poires y-a-t-il ?

- **Problème de transformation**

  état initial
  ↓
  transformation
  ↓
  état final

Pierre a 39 billes. Il en gagne d'autres. Maintenant il en a 42. Combien en a-t-il gagné ?

- **Problème d'égalisation**

Pierre a 27 euros. Jacques a 31 euros. Combien de bille a-t-il besoin Pierre pour avoir autant de billes que Jacques ?

Analogies de substitution

Métaphores conceptuelles d'arithmétique (Lakoff and Núñez, 2000)

- Collection d'objets
  - Relations partie-tout (Sophian, 2007)
    - → soustraire = **enlever** (Fischbein, 1989;Lakoff and Núñez, 2000)
- Trajet le long d'un chemin
  - Représentation ordinale (Gamo, Richard & Sander, 2010)
    - → Mètre étalon (Lakoff and Núñez, 2000) / soustraire = déterminer la **distance** (Selter, Prediger, Nührenbörger, & Hußmann, 2012)

Persistance des connaissances naïves (Vamvakoussi, Van Dooren, & Verschaffel, 2013)

Etudes

Problèmes dynamiques → simulation mentale

Problèmes statiques → pas de simulation ?

- Expérience 1 :
  - distinction de problèmes Si/MA à des problèmes de complément, comparaison et égalisation.
- Expérience 2 :
- stratégies des élèves avec des protocoles verbaux
- Expérience 3 :
  - distinction Si/MA avec les problèmes sans énoncés verbaux

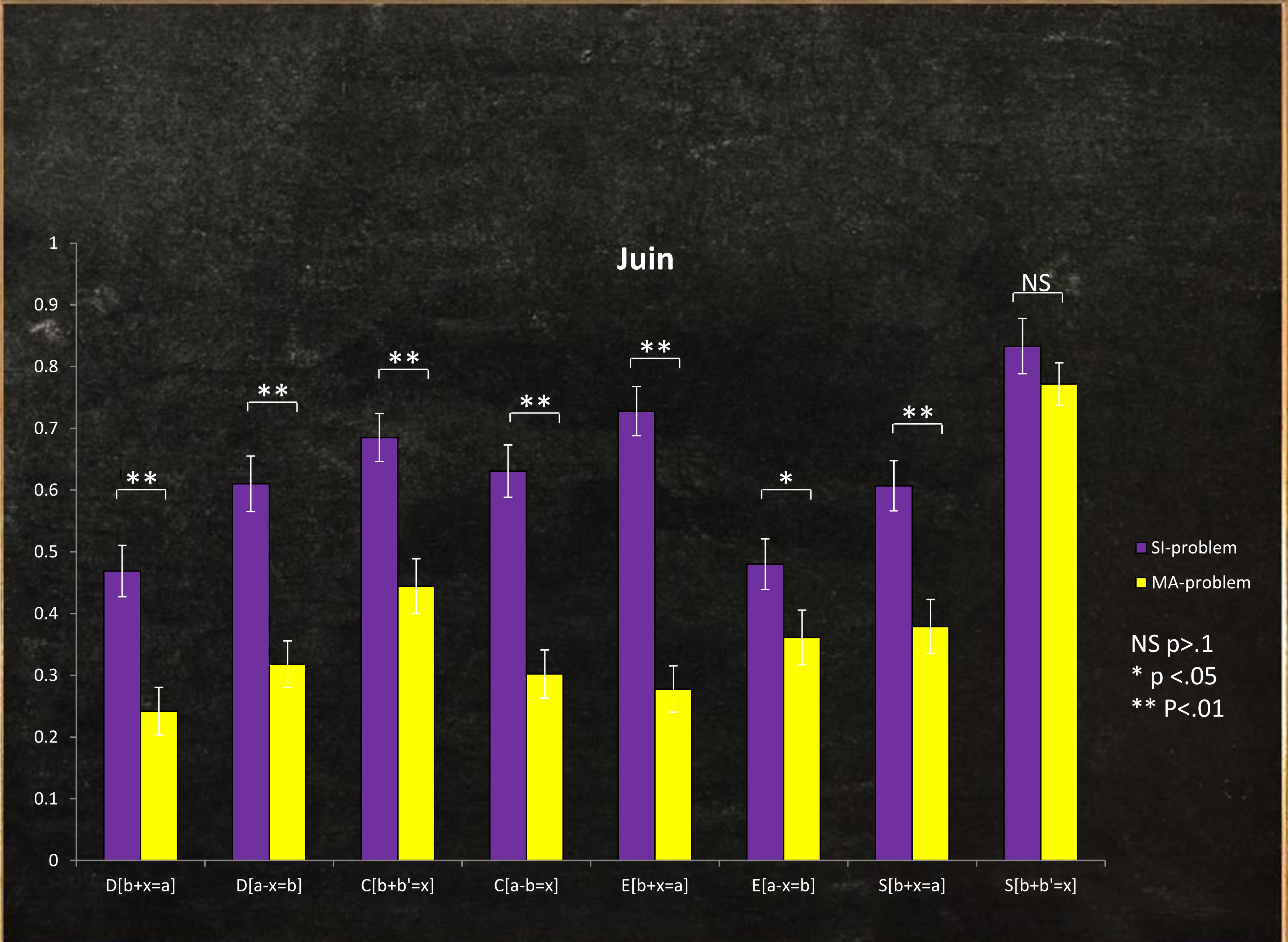
Expérience 1

- 13 classes de CE1 (273 enfants, âge=7.62)

- 8 problèmes : problèmes de complément (2), comparaison (4) et égalisation (2)
  – soit version Si
  – soit version MA

- Mesure : Réponse

Taux de succès	Janvier	Juin
Si-problèmes	47.86%	65.53%
MA-problèmes	28.25%	44.86%



Juin
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
**
**
**
**
**
*
**
NS
D[b+x=a]
D[a-x=b]
C[b+b'=x]
C[a-b=x]
E[b+x=a]
E[a-x=b]
S[b+x=a]
S[b+b'=x]
SI-problem
MA-problem
NS p>.1
* p <.05
** P<.01

Expérience 2

- 42 élèves de CE1 (7.93 ans (sd = 0.26, 23 filles)

→protocoles verbaux

→Problèmes de complément (2), compariason (4) et égalisation (2)

→Si-score : 1pt stratégie SI sur pb SI

→MA-score : 1pt stratégie MA sur pb MA

	SI-problème	MA-problème
Taux de réussite	63 %	28%

Problem type	Si-score	MA-score
Si-problem	2.05	0.31
MA-problem	0.26	1.13

Expérience 3

- 75 élèves CE1 (8.01 ans, sd = 0.34, 32 filles)

Calcul	Si-problème	MA-problème
Addition	27 + 4 =	4 + 27 =
Soustraction	31 - 4 =	31 - 27 =
Addition à trous	27 + ? = 31	4 + ? = 31
Soustraction à trous	31 - ? = 27	31 - ?= 4

	SI-problème	MA-problème
Taux de réussite	67%	40.33%

- Conclusion :

- La simulation mentale - pas une simple conséquence d'une sémantique dynamique du problème

- Une re-représentation est nécessaire pour réussir aux problème MA

- Stratégie simulation → représentation de la situation arithmétique

2. Les représentations des enseignants

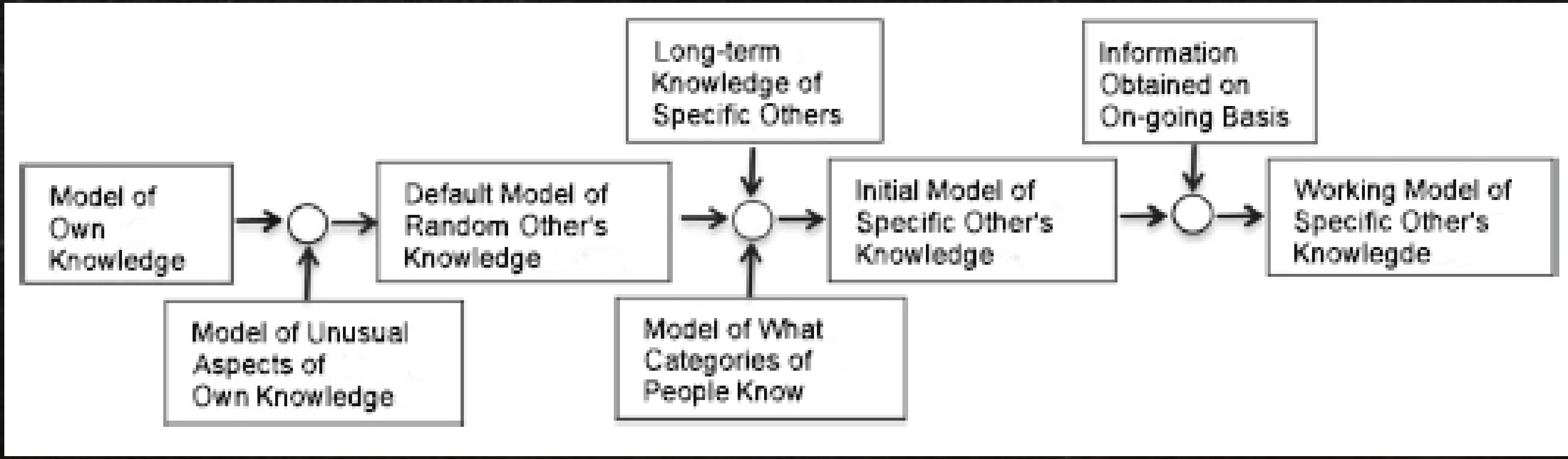
- *Pedagogical content knowledge* *(Shulman, 1986)*

  (Connaissances pédagogiques sur le contenu)

  - Connaissances des stratégies d’enseignement
  - Connaissances des conceptions (erronées) des élèves

- Compétences diagnostiques des enseignants *(Prediger, 2010)*
  - Intérêt pour les processus d'élèves
  - Attitude interprétative
  - Connaissances sur les processus généraux d'apprentissage
  - Connaissances spécifiques au contenu

- « Expert blind spot » - « Tâche aveugle de l'expert » *(Nathan & Petrosino, 2003)*
- Reprise du modèle de Nickerson – assomptions sur les connaissances des autres (Ostermann, Leuders & Nuckles, 2017)



→ Importance donnée à la compréhension des conceptions des élèves et leurs mauvaises conceptions

→ Conceptions chez les enseignants ?

- Persistance des conceptions intuitives chez les adultes (Vamvakoussi, Van Dooren, & Verschaffel, 2013)

Etude 1

- Inventez deux énoncés de problème de **soustraction**, les plus différents possibles, dont la solution s'obtient par une et une seule opération de soustraction
- 37 enseignants
- Énoncé 1 :
  - 60 % - problème de perte (transformation)
    - *« Paul a 15 voitures. Il en prête 5 à son copain. Combien lui reste-il de voitures? »*
- Énoncé 2 :
  - 25 % - problème de perte (transformation)

73 % problème de perte au moins une fois

11 % uniquement problème de perte

- Inventez un énoncé de problème de **soustraction**, dont la solution s'obtient par une et une seule opération de soustraction et QUI DECRIT UN GAIN.
- 43 % - ajout inconnu

« Au début de la journée la boulangère a 50 euros dans sa caisse. A la fin de la journée elle a 223 euros caisse dans la. Combien a-t-elle gagné en une journée? »

- 10% - pas de réponse

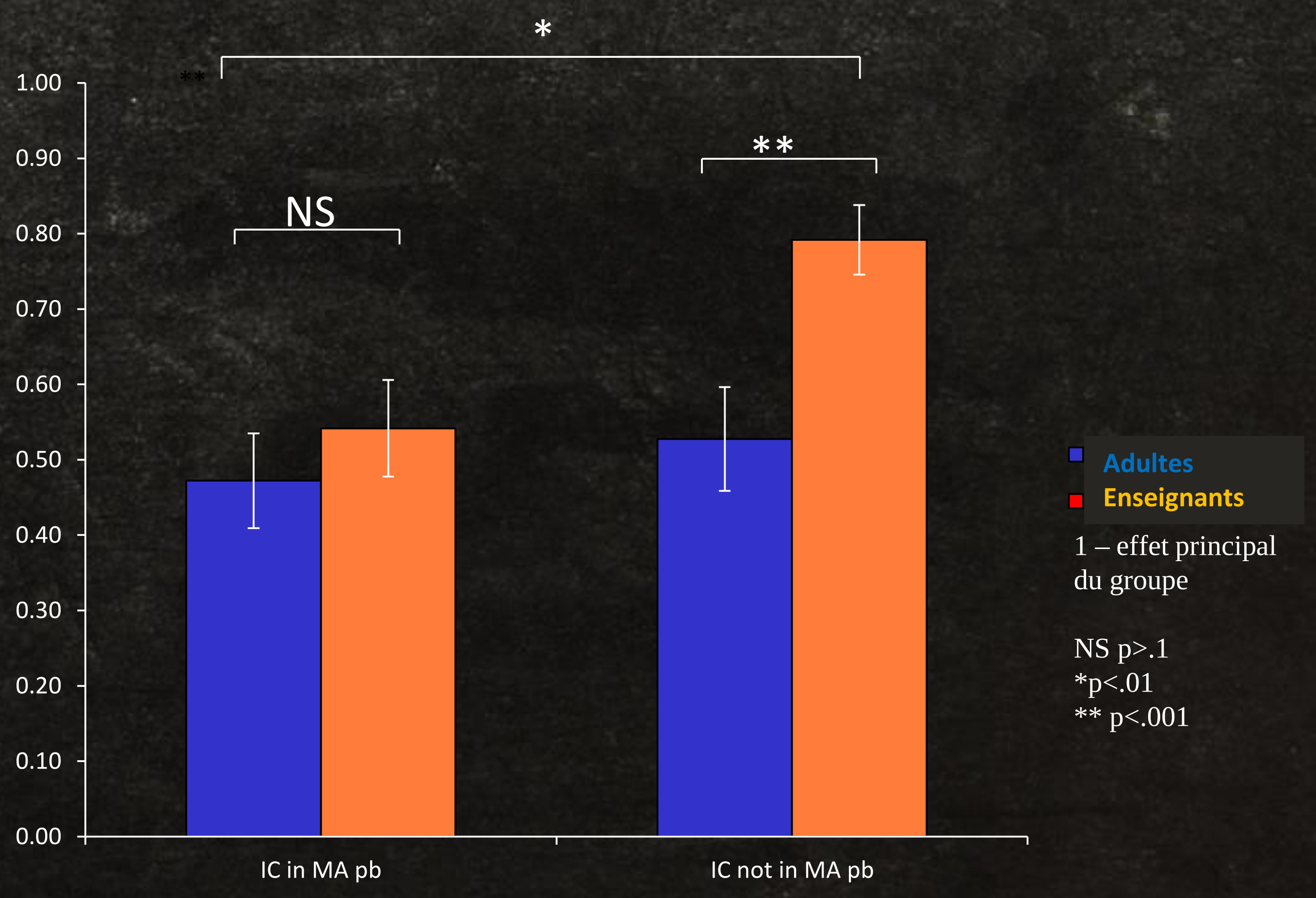
Etude 2

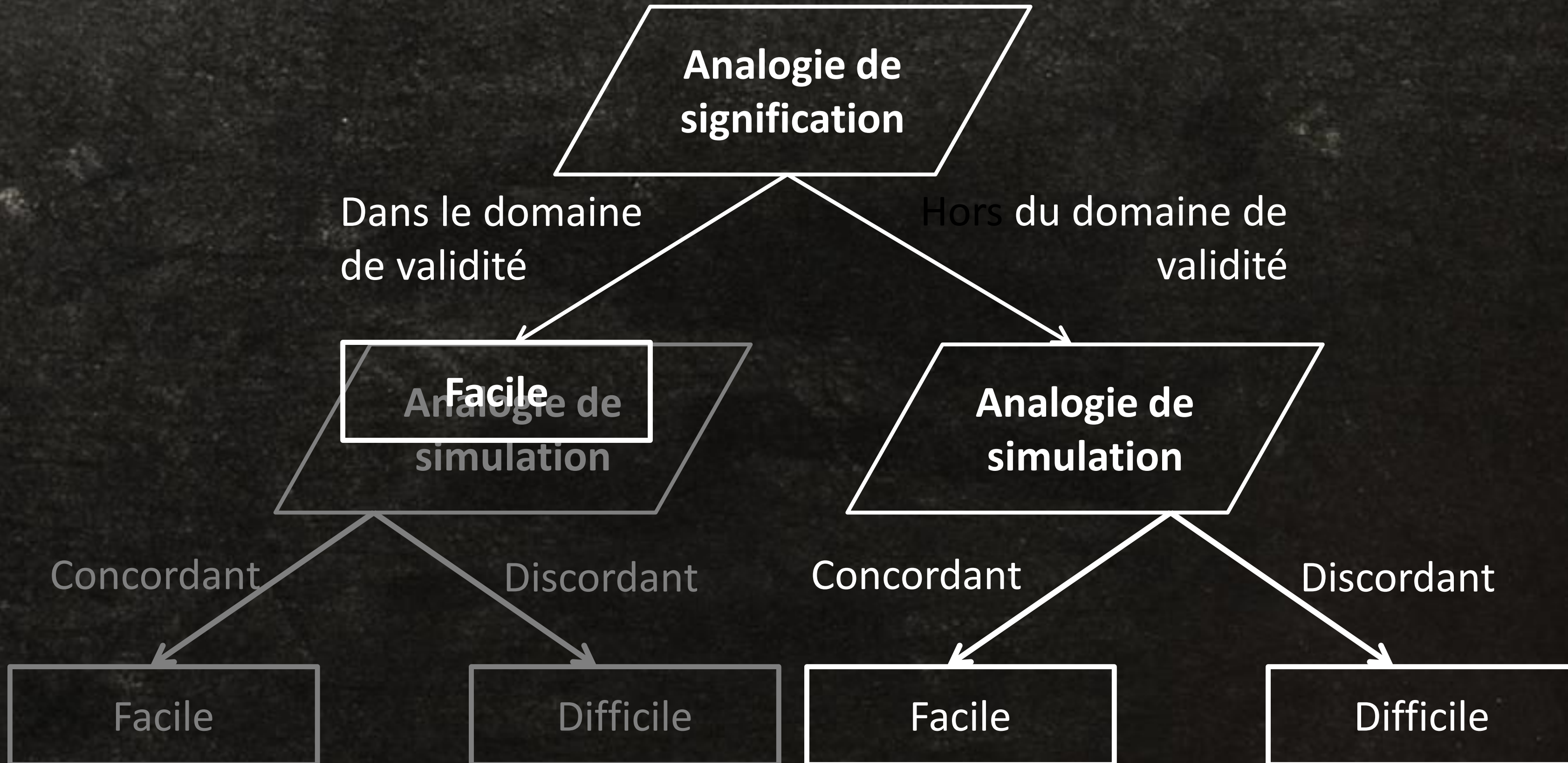
– 36 enseignants et 36 adultes tout venants
– Appariement des problèmes Si et MA

A. Pierre a 39 billes. Il en gagne d'autres. Maintenant il en a 42. Combien en a-t-il gagné ? (70%)

B. Nicolas va en récréation avec ses 42 billes. Pendant la récréation, il perd 39 billes. Combien Nicolas a-t-il de billes maintenant ? (37%)

Item	1	2	3	4
Problème Si	Dans le domaine de validité de la CI	Hors du domaine de validité de la CI	Dans le domaine de validité de la CI	Hors du domaine de validité de la CI
Problème MA	Dans le domaine de validité de la CI	Dans le domaine de validité de la CI	Hors du domaine de validité de la CI	Hors du domaine de validité de la CI

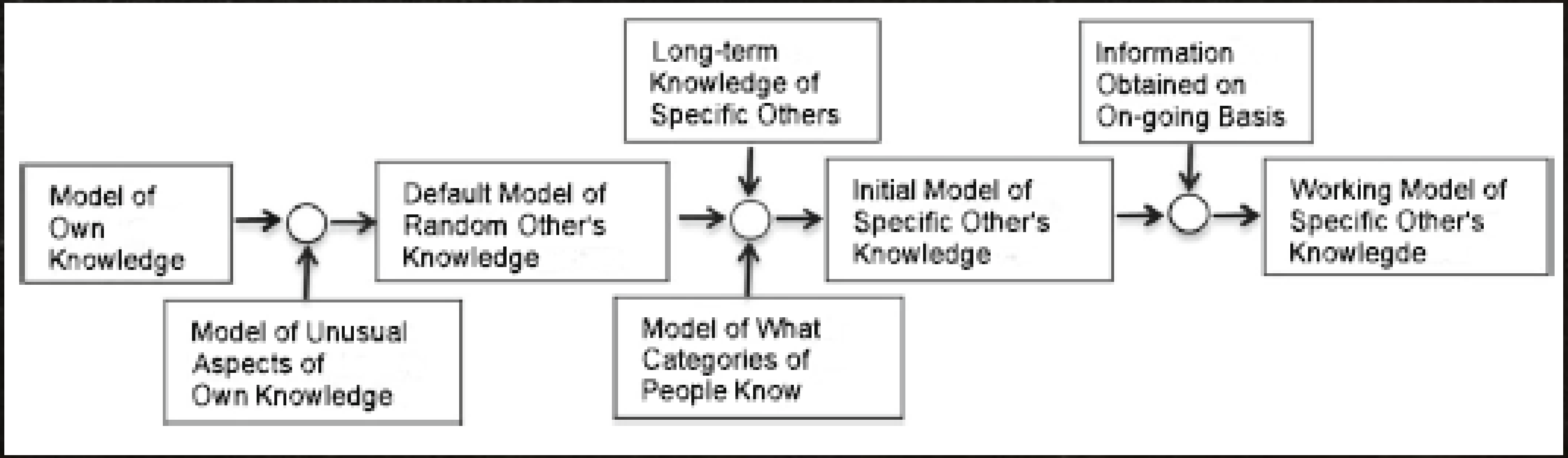

*
**
1.00
0.90
0.80
0.70
0.60
0.50
0.40
0.30
0.20
0.10
0.00
NS
**
IC in MA pb
IC not in MA pb
Adultes
Enseignants
1 – effet principal du groupe
NS p>.1
*p<.01
** p<.001


Analogie de signification
Dans le domaine de validité
Hors du domaine de validité
Facile
Analogie de simulation
Analogie de simulation
Concordant
Discordant
Concordant
Discordant
Facile
Difficile
Facile
Difficile

A. Pierre a 39 billes. Il en gagne d'autres. Maintenant il en a 42. Combien en a-t-il gagné ? (70%)

B. Nicolas va en récréation avec ses 42 billes. Pendant la récréation, il perd 39 billes. Combien Nicolas a-t-il de billes maintenant ? (37%)

- Analogies de substitution en mathématiques présentes chez les enseignants
  - Et s'expriment dans leur interprétation des stratégies chez les élèves
- « Tâche aveugle naïve »



3. L’apprentissage à l’école

Dispositif pédagogique ACE-ArithmEcole

- Classes de CP & CE1 (primaire 1 & 2)
- Construction des notions de nombre et d'opération arithmétiques

- 4 domaines :
  - Situations
  - Calcul mental
  - Estimation, gradeurs et mesures
  - Résolution de Problèmes

- Objectif Résolution de problèmes :

  Amener les élèves à se détacher de leurs stratégies intuitives et appliquer leur connaissances arithmétiques

Progression annuelle

Période 2

– **Problème de combinaison**

partie 1 + partie 2 = tout

→ **Initiation à la résolution de problèmes**

Période 3

– **Problème de comparaison**

comparant +/- différence = comparé

→**Notion de la différence**

Période 4

– **Problème de combinaison**

partie 1 + partie 2 = tout

→ **Recodage sémantique par équivalence des procédures**

Période 5

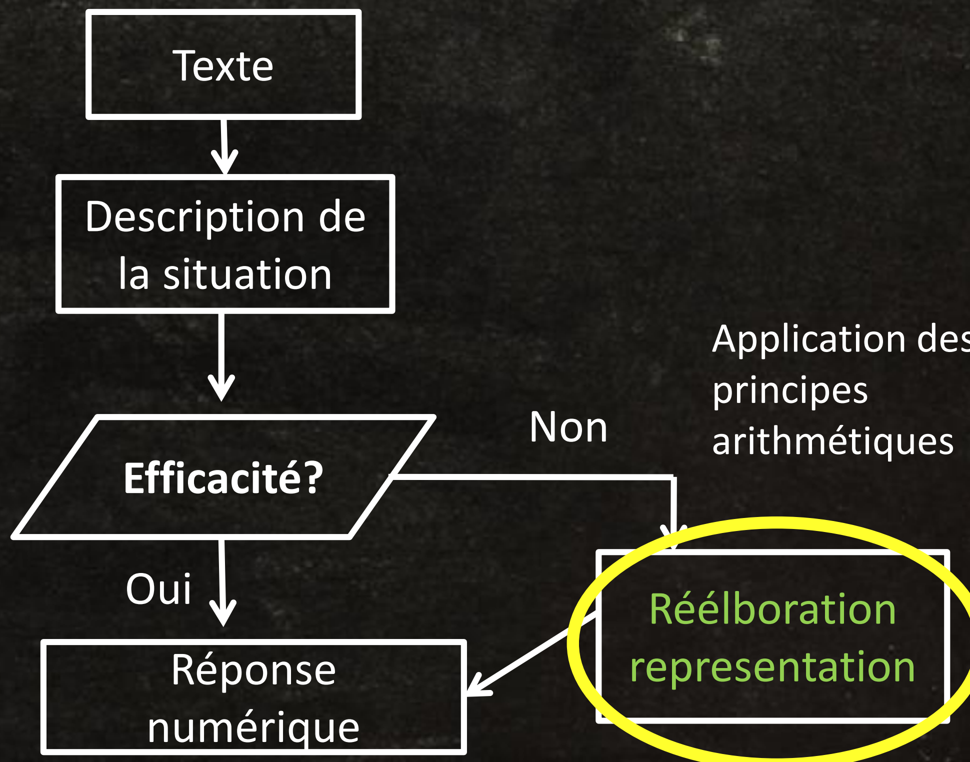
– **Problème de transformation**

état initial → transformation → état final

→ **Chercher la stratégie la plus facile**

Dispositif pédagogique

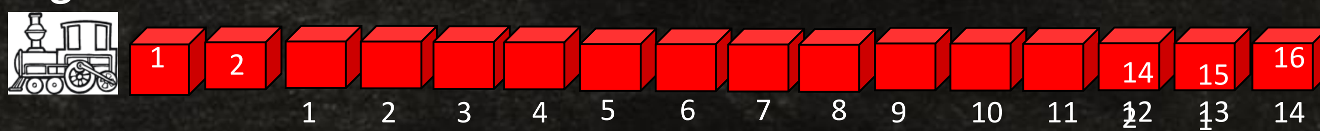
Equivalence des procédures :
« chercher la stratégies la plus facile pour trouver la réponse »

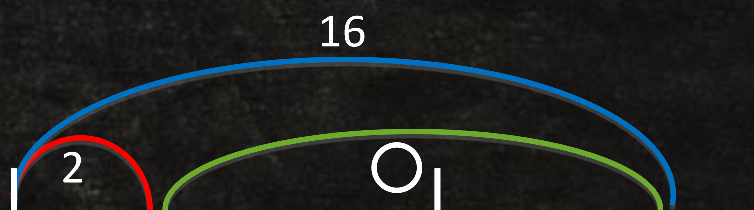


Dispositif pédagogique

Problème MA - discordant avec la simulation mentale

- *« Fabio et Maé ont chacun des wagons. Fabio a **2** wagons et il construit un train avec Maé, avec tous leurs wagons réunis. Ensemble, ils construisent un train de **16** wagons en tout. Combien de wagons sont à Maé? »*





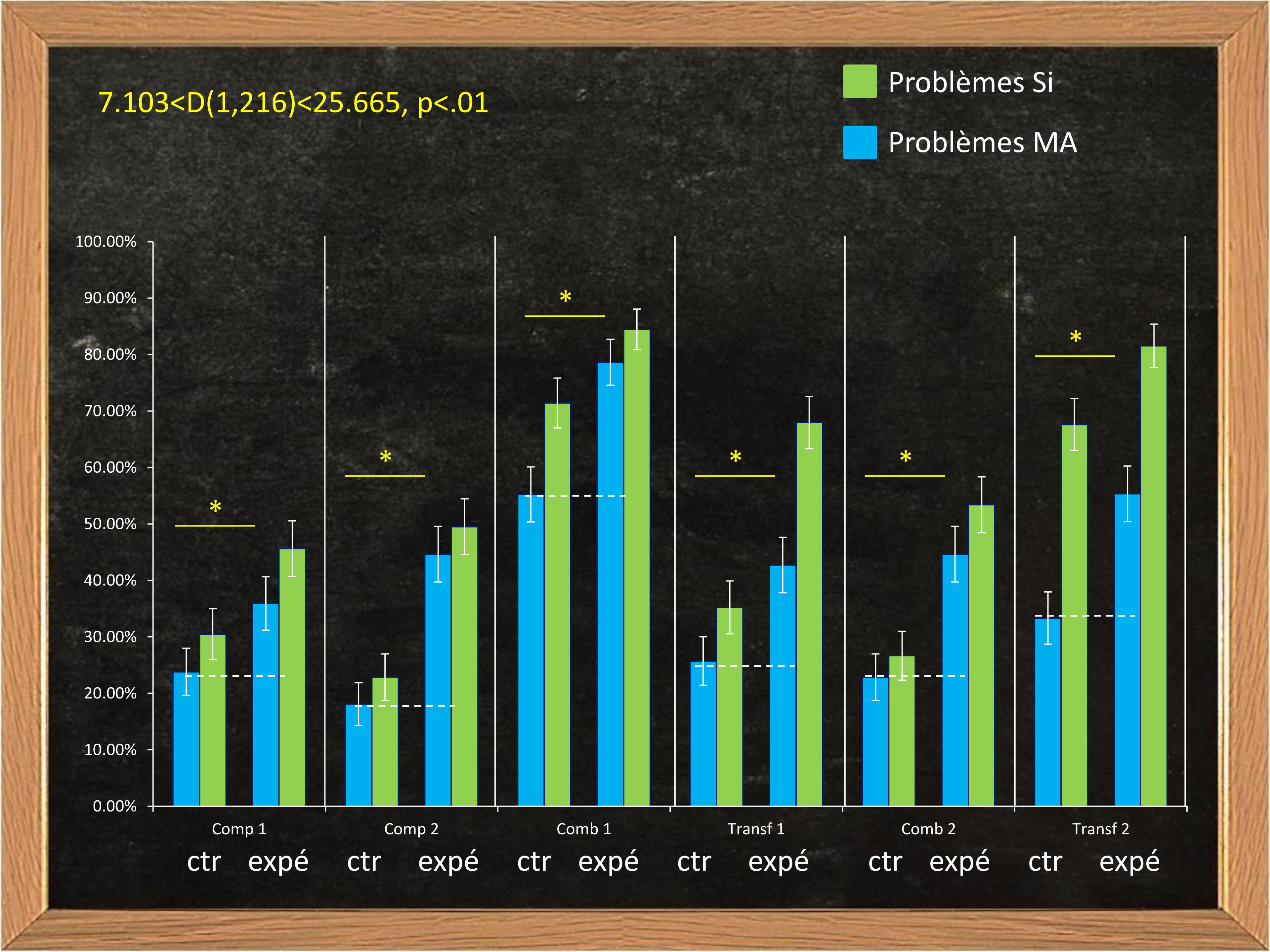
2+__=16

16	
2	**14**

16-2=__

Etude 1 – classes de CP

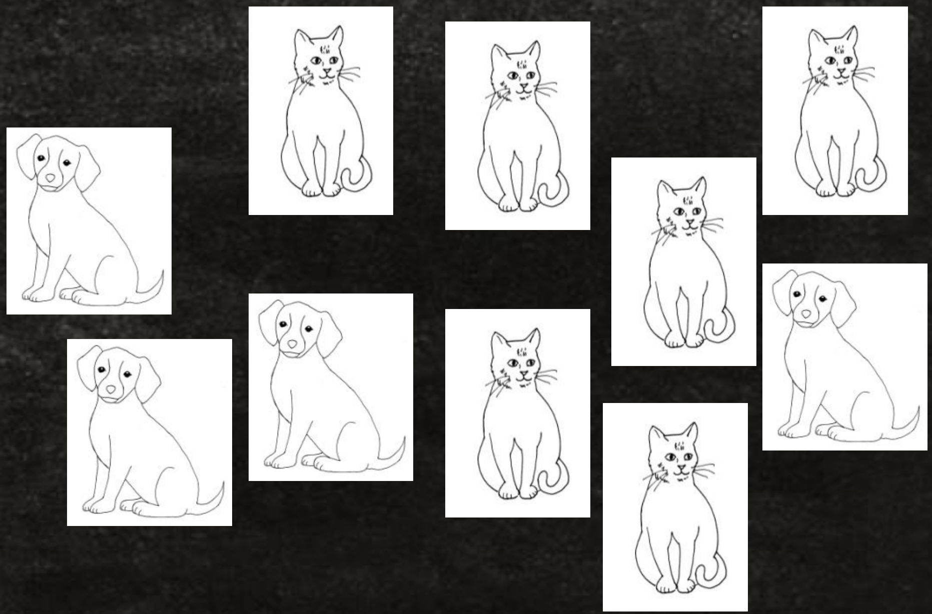
- 215 élèves de CP (108 dans la groupe expérimentale)
- Test de fin d’année sur les problèmes Si et MA
- Tâches contrôles



7.103<D(1,216)<25.665, p<.01
Problèmes Si
Problèmes MA
100.00%
90.00%
80.00%
70.00%
60.00%
50.00%
40.00%
30.00%
20.00%
10.00%
0.00%
*
*
*
*
*
*
Comp 1
Comp 2
Comb 1
Transf 1
Comb 2
Transf 2
ctr expé
ctr expé
ctr expé
ctr expé
ctr expé
ctr expé

	Score maximal	Classes contrôles	Classes expérimentaux	
Reproduction de figures	5	1.90	2.04	NS
Reconnaissance des figures	4.5	2.24	2.74	NS
Sélection de la bonne carte	2.5	1.33	1.44	NS
Comptage	2	1.81	1.77	NS
Trouver l'intrus	4	3.17	3.32	NS
Tâche d'inclusion de classe	2	0.75	1.22	*
TOTAL	20	11.08	12.43	

Tâche d'inclusion de classe



- _6_ chats
- _4_ chiens
- Est-ce qu'il y a plus de chats ou d'animaux ?

- Travailler sur l’équivalence entre les différents stratégies de favorise la flexibilité dans les choix des stratégies chez les élèves

- La réélaboration des représentations semble un pas crucial dans l’acquisition des concepts arithmétiques

Merci pour votre attention !

Katarina.Gvozdic@unige.ch