

# QUELS APPRENTISSAGES/SAVOIRS EN RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ?

Maud Chanudet  
Stéphane Favier  
1 février 2018

# CONSTAT

Existence de nombreux dispositifs:

- situations de recherche en classe
- math en Jeans
- problème ouvert
- enseignements scientifiques fondés sur l'investigation
- atelier de recherche en mathématiques
- maths à modeler
- problème pour chercher
- narration de recherche
- etc...

- initier les élèves à la démarche scientifique/expérimentale
- transposer en classe les pratiques des mathématiciens.

# SUR LA DÉMARCHE SCIENTIFIQUE (HERSANT, 2010)

**Un paradoxe** : la démarche scientifique est désignée comme un objectif d'apprentissage en mathématiques mais il n'y a pas d'explicitation des savoirs mathématiques précis en jeu dans cette démarche puisque le quadruplet - essayer, conjecturer, tester, prouver - qui définit la démarche ne peut être considéré comme un savoir mathématique. (p. 19)

→ Absence d'identification des **savoirs mathématiques** en jeu dans la démarche scientifique

→ Flous qui accompagnent les **objectifs d'apprentissage** qui sont difficiles à isoler et expliciter

# QUESTIONS

Qu'est-ce qui peut être transposé de la pratique du chercheur ?

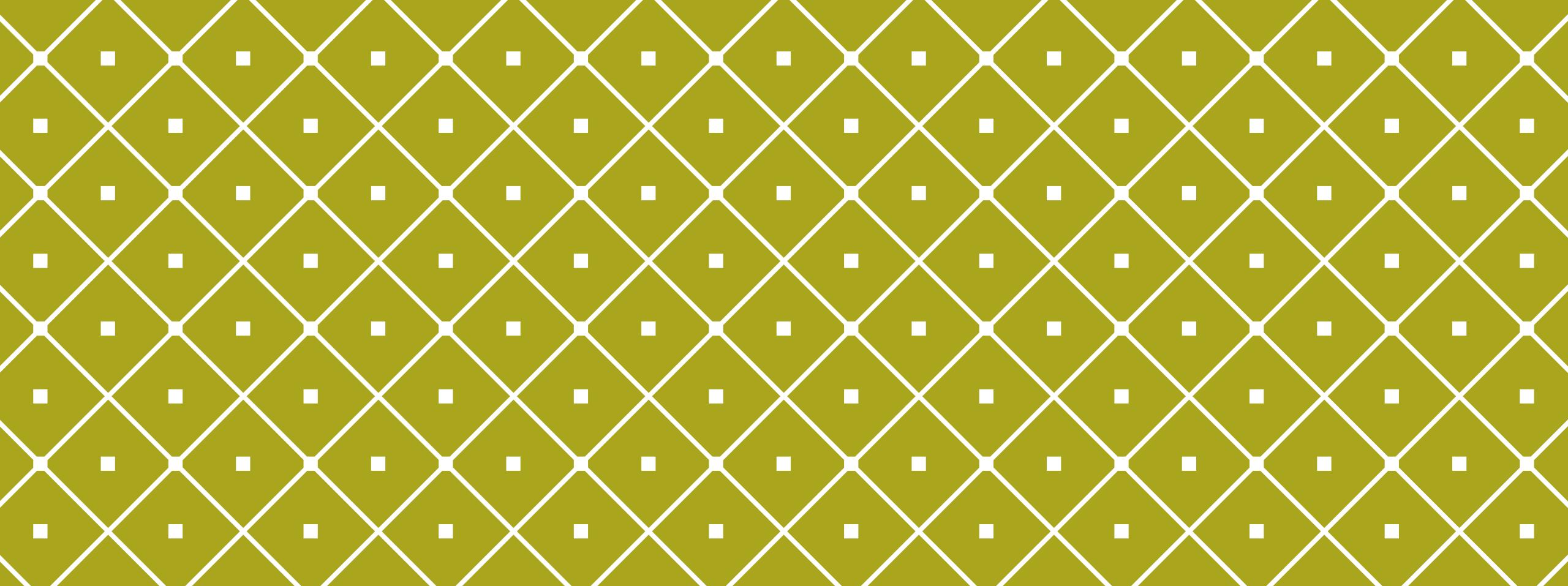
Quels sont les **apprentissages** visés dans les différents dispositifs ?

Quels sont les **savoirs** à enseigner ?

→ 1<sup>er</sup> temps de travail: quels apprentissages et quels savoirs identifiez-vous dans le problème distribué ?

# PLAN

- 1- Les différents dispositifs et les apprentissages visés
- 2- Caractérisation(s) de la Démarche Expérimentale
- 3- De la Démarche Expérimentale à la résolution de problèmes



# APPRENTISSAGES VISÉS DANS DIFFÉRENTS DISPOSITIFS

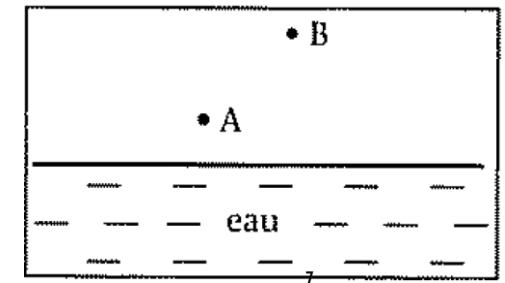
# PROBLÈME OUVERT (ARSAC, GERMAIN, MANTE, 1991)

Caractéristiques :

- L'énoncé est court.
- L'énoncé n'induit ni la méthode, ni la solution
- Le problème se trouve dans un domaine conceptuel avec lequel les élèves ont assez de familiarité.

Exemples :

1. Déterminer en fonction de  $n$  le nombre maximum de cordes que l'on peut tracer à l'aide de  $n$  points placés sur un cercle.
2. Quel chemin est le plus court pour aller de A à B en passant par l'eau ?



# PROBLÈME OUVERT

Apprentissages visés :

- la **démarche scientifique** (essayer, conjecturer, tester, prouver)
- les **règles du débat**.

# SITUATION DE RECHERCHE EN CLASSE (GRENIER, PAYAN, 2003)

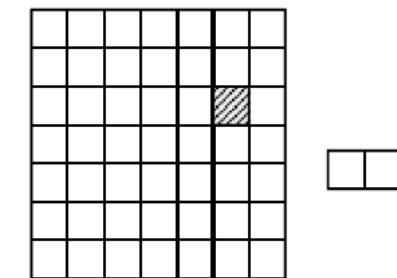
Caractéristiques :

- **Une SiRC s'inscrit dans une problématique de recherche** ; la question dont elle est issue n'est pas nécessairement close.
- **La question initiale est facile d'accès à des niveaux différents**, ce qui impose que l'énoncé doit être non mathématique ou peu mathématisé.
- **Des stratégies initiales existent, qui ne résolvent pas (complètement) la question.**
- **Plusieurs stratégies d'avancée dans la recherche et plusieurs développements sont possibles**, par essais-erreurs, étude de cas particuliers, etc..
- **Une question résolue peut renvoyer à une nouvelle question** : critère de « non-fin » de la situation. On peut changer les hypothèses (un contre-exemple ne clôt pas le problème), on peut changer la question.

# SITUATION DE RECHERCHE EN CLASSE

Exemple : Peut-on toujours pavier, à l'aide de dominos, un carré de taille quelconque privé d'une case (la case pouvant être choisie n'importe où) ?

2 autres pb suivent (*variation de la forme du domino, puis de la surface à recouvrir*)



Objectif : apprentissage des **savoir-faire fondamentaux pour faire des mathématiques**, tels expérimenter, étudier des cas particuliers, modéliser, formuler des conjectures et les étudier par la production d'exemples et contre-exemples, argumenter, distinguer condition nécessaire/condition suffisante, définir, prouver

Apprentissages visés : **ceux constitutifs de toute activité de recherche en mathématiques (argumenter, conjecturer, prouver, modéliser, structurer)**

# ENSEIGNEMENT SCIENTIFIQUE FONDÉ SUR L'INVESTIGATION (GRANGEAT, 2013)

Caractéristiques :

- une activité de résolution de problèmes ouverts ;
- une part significative d'expérimentation et de recherche d'information ;
- une possibilité d'autorégulation des apprentissages, laissant plus d'autonomie aux élèves ;
- un appui sur les débats scientifiques entre pairs.

A voir comme une manière d'enseigner, parmi d'autres, plus que comme un dispositif spécifique.

# ENSEIGNEMENT SCIENTIFIQUE FONDÉ SUR L'INVESTIGATION

Modèle de conception et mise en œuvre pour l'enseignant, construit sur 4 variables :

- 1) la problématisation des savoirs,
- 2) la responsabilité scientifique dévolue à la classe,
- 3) **l'explication des apprentissages**,
- 4) la richesse du milieu de l'élève relativement à la pratique scientifique

Modèle d'action scientifique de l'élève reposant sur 4 blocs d'action :

- **expérimenter** (choisir des cas particuliers, ni trop simples, ni trop complexes, formuler des conjectures concernant ces cas particuliers, valider ou invalider ces conjectures, etc.)
- **généraliser** (dégager le généralisable du particulier, preuve d'une existence par un exemple, etc.)
- **questionner** (se poser des questions, proposer de nouveaux problèmes, etc. )
- **communiquer** (argumenter, débattre, donner une preuve acceptable par la communauté, etc. )

# ENSEIGNEMENT SCIENTIFIQUE FONDÉ SUR L'INVESTIGATION

Apprentissages visés :

- savoirs de type **démarche, savoirs transversaux**
- mise en œuvre d'**actions scientifiques.**

# INTÉRÊTS

Ces différents dispositifs:

- accordent beaucoup d'importance à la **dimension expérimentale** des mathématiques.
- ne limitent pas le travail « de la nécessité en mathématiques à l'utilisation de raisonnement hypothético-déductifs où elle est masquée par l'utilisation de théorèmes » (Hersant, 2010)

# CRITIQUES (HERSANT, 2010)

Le Problème-Ouvert (PO) a pour but l'acquisition de « **la Démarche Scientifique** », Hersant interroge :

- **l'unicité** de la Démarche Scientifique (Ex : rapport entre essais et preuve)
- **la scientificité** : selon Arsac, Germain et Mante vs Bachelard

# CRITIQUES (HERSANT, 2010)

- PO : rôle des essais est non explicité
- SiRC: la place accordée aux expérimentations n'est pas explicite tandis que celle des composantes conjecture et preuve qui sont étiquetés comme des savoirs transversaux l'est, mais, là encore, sans que ces deux éléments semblent reliés entre-eux

# CRITIQUES (HERSANT, 2010)

Flou concernant les savoirs susceptibles d'être institutionnalisés :

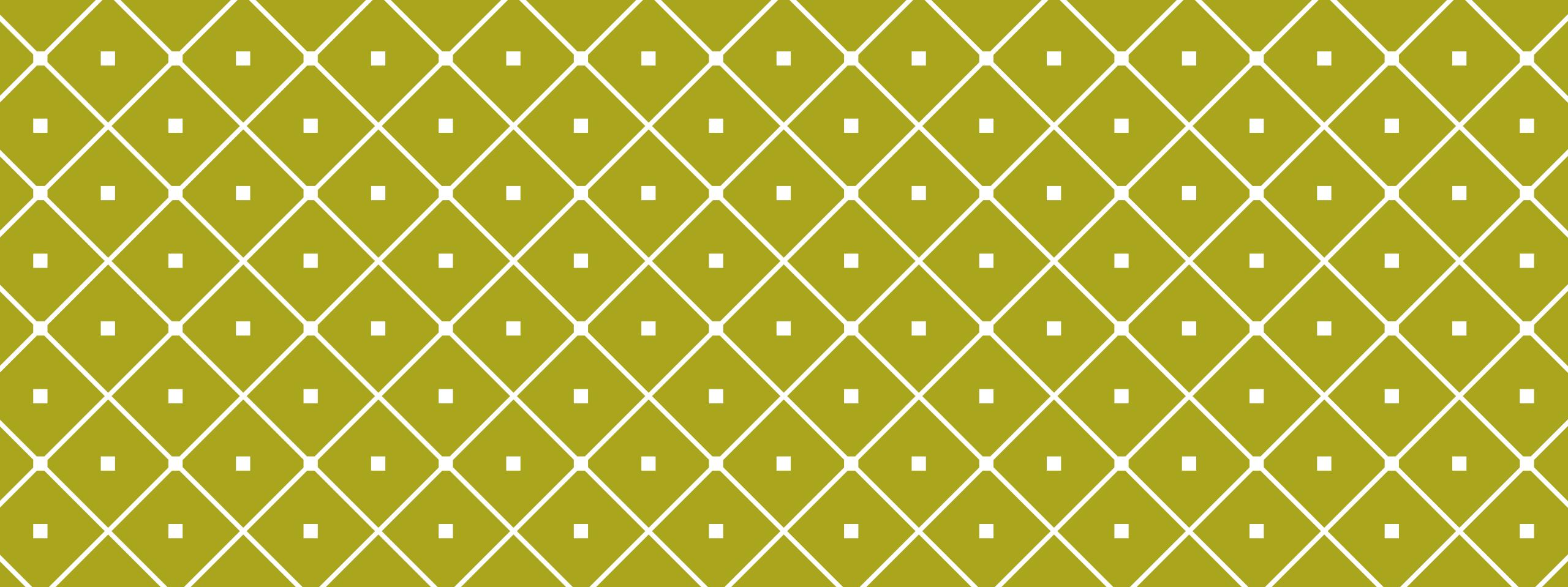
- PO : règles du débat et règles du raisonnement p.30
- SiRC : visent l'apprentissage de « savoirs transversaux »

par ex pour Godot (2006) : un problème peut avoir ou pas une solution, distinction entre condition nécessaire et condition suffisante, type de preuve comme la preuve par exhaustivité de cas...

→ ces savoirs ne sont pas du même ordre

# CRITIQUES

- Conclusion : « Dans ces dispositifs, l'explicitation de savoirs concernant l'activité de recherche en mathématiques et plus particulièrement sa dimension scientifique semble difficile. » (p.31)
- Ces problèmes pour chercher sont **peu fondés du point de vue épistémologique** (Houdelement, 2009)



# CARACTÉRISATION(S) DE LA DÉMARCHE EXPÉIMENTALE

# DÉMARCHE EXPÉIMENTALE (PERRIN, 2007)

**Méthode / démarche expérimentale :**  
une succession d'étapes, éventuellement répétées

- expérience,
- observation de l'expérience,
- formulation de conjectures,
- tentative de preuve,
- contre-expérience, production éventuelle de contre-exemples,
- formulation de nouvelles conjectures,
- nouvelle tentative de preuve, etc.

# DÉMARCHE EXPÉRIMENTALE (HERSANT, 2010)

Principe 1 : On ne peut pas parler de démarche scientifique comme triplet (essais, conjecture, preuve) en toute généralité.

Principe 2 Le caractère scientifique d'une démarche réside dans l'articulation expérience – conjecture – preuve.

Principe 3: La démarche expérimentale en mathématiques renvoie à la dialectique inductif – déductif et à la tension entre le registre des faits (empirique) et le registre des nécessités.

# PROPOSITIONS DE SAVOIRS À TRAVAILLER (HERSANT, 2010)

Sur la **place de l'expérience** (par / à la conjecture, à la preuve) :

- l'expérience permet de produire des faits nouveaux, distincts des données du problème. Il faut les fonder sur des raisons;
- l'observation des faits issus de l'expérience et des raisons qui fondent l'expérience permet de produire des conjectures plus ou moins dégagées de la contingence;
- parfois les faits produits par l'expérience et les raisons qui fondent l'expérience suffisent à prouver (ex. raisonnement par exhaustivité des cas).

# DÉMARCHE EXPÉIMENTALE (HERSANT, 2010)

## Registre des nécessités

- *Raisons de l'expérience*
- *Autres raisons*

## Problème

- *Données*
- *Contraintes*

Conjecture

Preuve

## Registre des faits

- *Résultat de l'expérience*

# PROPOSITIONS DE SAVOIRS À TRAVAILLER (HERSANT, 2010)

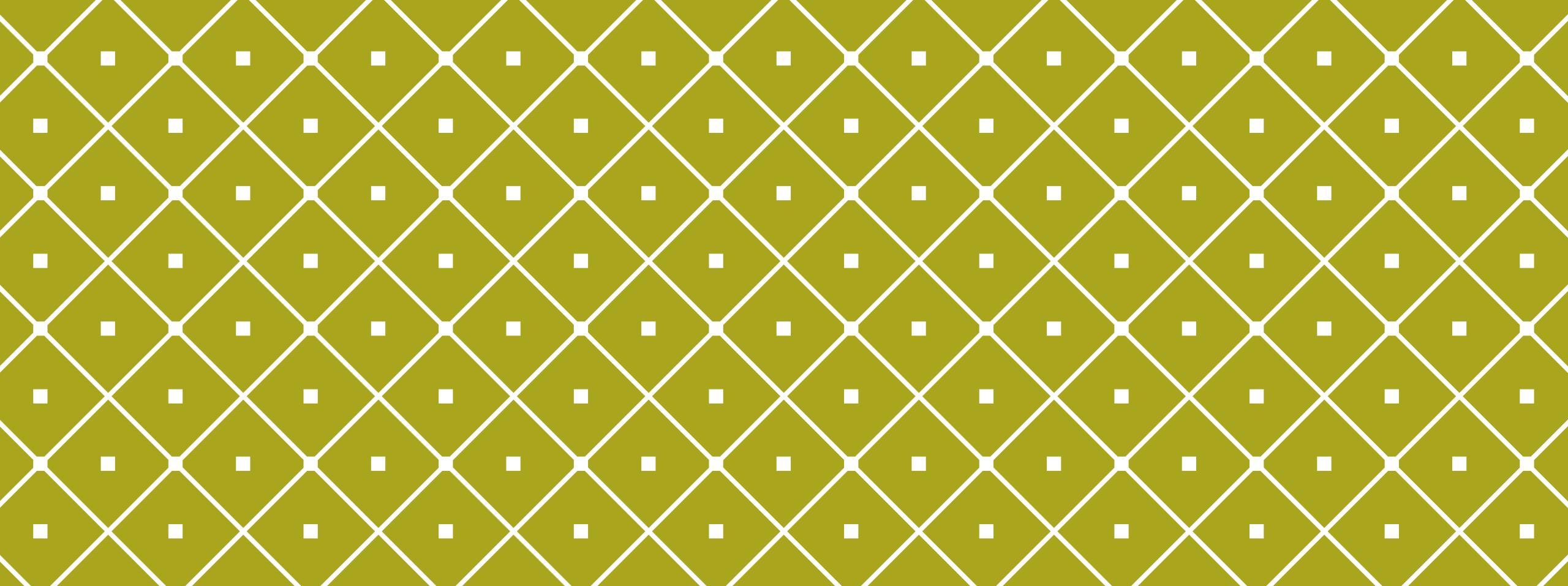
Sur le positionnement en **plausible**, **possible**, **pas possible** et leurs relations avec le registre des faits et le registre des raisons :

- Le **plausible** relève d'un procédé d'induction à partir d'une observation des faits produits par l'expérience, dans un mouvement qui essaie de se dégager de la contingence mais qui demeure non apodictique.
- Le **possible** qui correspond souvent à un **problème d'existence** formulé en utilisant un quantificateur existentiel (montrer qu'il existe...) relève soit uniquement des faits issus de l'expérience, soit de nécessités déduites de théorèmes qui encapsulent des nécessités.
- **L'impossible** qui renvoie à un **problème d'universalité**, formulé en utilisant un quantificateur universel, requiert la mobilisation du registre des raisons et souvent un raisonnement par l'absurde ou par analyse-synthèse.

# PROPOSITIONS DE SAVOIRS À TRAVAILLER (HERSANT, 2010)

Sur l'établissement du vrai et du faux en mathématiques :

- Un **fait issu d'une expérience peut invalider une conjecture** (contre-exemple) ou la **valider** (preuve par ostension).
- Des faits issus de l'expérience et des raisons extérieures à cette expérience peuvent être tous les deux nécessaires pour valider une conjecture.
- Lorsqu'on ne peut pas trouver de fait ou de raisonnement pour déterminer si une conjecture est vraie ou fausse, on dit qu'elle est **indéterminée**.
- Le registre des raisons associé aux données du problème permet de valider une conjecture, en particulier en utilisant un raisonnement hypothético-déductif.



# DE LA DÉMARCHE EXPÉRIMENTALE A LA RÉSOLUTION DE PROBLÈMES

# UNE PLACE POUR LES PROBLÈMES POUR CHERCHER (HOUDEMENT, 2009)

4 objectifs possibles pour les activités de type « problèmes pour chercher » :

- le **réinvestissement de savoirs**,
- l'apprentissage de **raisonsnements**,
- l'apprentissage de **validations**,
- l'apprentissage de la **modélisation**.

# L'APPRENTISSAGE DE RAISONNEMENTS

## (HOUDEMENT, 2009; WEIL BARAIS, 2001)

**Raisonnement** : toute suite organisée d'inférences conduisant à une conclusion ; l'inférence consistant en la production d'informations nouvelles à partir d'informations déjà là et de connaissances avérées en mémoire.

Deux types de raisonnement :

- **non canoniques** (qui ne suivent pas des règles bien établies) : analogie, en contexte.
- canoniques :
  - déductif : **implication logique, le raisonnement par disjonction de cas, le raisonnement par l'absurde et le raisonnement par récurrence,**
  - inductif : **raisonnement expérimental**

# L'APPRENTISSAGE DE MODE DE VALIDATIONS (HOUDEMONT, 2009)

Pour engager les élèves dans un rapport à la vérité, par :

- un **contrôle par calcul** et par **soumission aux différentes contraintes de l'énoncé**,
- la **vérification sémantique** (mathématisation des informations), **pragmatique** (confrontation au réel), **syntaxique** (organisation et transformation formelle des écritures),
- la réponse résultant d'une **recherche exhaustive** repose sur la vérification que la méthode utilisée a parcouru l'ensemble des cas possibles
- la **construction d'un véritable processus de preuve**.

Au secondaire 1, objectif de passer de la preuve pragmatique (Balacheff, 1987) à la preuve intellectuelle.

# AU BOULOT

→ 2<sup>ème</sup> temps de travail: Reprise du travail avec le matériel proposé

Quels apprentissages et quels savoirs proposeriez-vous au sujet du problème distribué?

→ Discussion

# AU BOULOT

→ 3<sup>ème</sup> temps de travail: **Caractériser les apprentissages en jeu et les savoirs dans les problèmes suivants :**

## Ecole primaire : Carré-triangle

Un jeu est constitué de cartes qui représentent soit un carré, soit un triangle. Les 23 élèves de la classe tirent chacun une carte et la dépose, sans la regarder, dans une boîte. L'enseignant compte le nombre total de côtés de toutes les figures des cartes contenues dans la boîte. Il en trouve 85. Combien y a-t-il de triangles et de carrés dans la boîte ?

## Secondaire 1 : Les billes

Samantha a acheté neuf billes. Toutes les billes ont une masse de 5 g, sauf une dont la masse vaut 6 g. Samantha veut retrouver cette bille; elle a à sa disposition uniquement une balance à deux plateaux. En utilisant au maximum trois fois la balance, comment peut-elle s'y prendre pour découvrir avec certitude la bille de 6 g ?

# AU BOULOT

Secondaire 1 : On peut monter un escalier une ou deux marches à la fois.

De combien de façons différentes peut-on monter un escalier de une marche ?  
de deux marches ? de trois marches ? de quatre marches ? de cinq marches ?

De combien de façons différentes peut-on monter un escalier de 20 marches ?

# BIBLIOGRAPHIE

Arsac, G., Germain, G., & Mante, M. (1991). *Problème ouvert et situation-problème*. Université Claude Bernard Lyon I.

Bachelard, G. (1938). *La formation de l'Esprit Scientifique*. Vrin. París.

Godot, K. (2006) Situations de recherche pour la classe: des outils pour donner du sens à l'activité de recherche en mathématique au fil de la scolarité. In : *Actes du colloque EMF*. Université de Sherbrooke.

Grangeat, M. (2013). Modéliser les enseignements scientifiques fondés sur les démarches d'investigation: développement des compétences professionnelles, apport du travail collectif.

Grenier, D., & Payan, C. (2003). Situations de recherche en “classe”, essai de caractérisation et proposition de modélisation. *Cahiers du Séminaire National de Didactique des Mathématiques*.

Hersant, M. (2010). Empirisme et rationalité au cycle 3, vers la preuve en mathématiques. *Mémoire complémentaire HDR*, Université de Nantes, Nantes.

Houdelement, C. (2009). Une place pour les problèmes pour chercher. In *Annales de didactique et de sciences cognitives* (Vol. 14, pp. 31-59)

Perrin, D. (2007). L'expérimentation en mathématiques. *Petit x*, 73(6), 34

Weil-Barais, A. (2001). Comment l'homme apprend-il, raisonne-t-il, juge-t-il et résout-il des problèmes. *L'homme cognitif*. Paris: Presses universitaires de France.