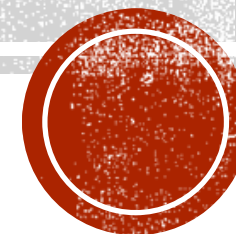


Modes de raisonnement et de preuve en résolution de problèmes en mathématiques

Maud Chanudet, maud.chanudet@unige.ch
Stéphane Favier, stephane.favier@unige.ch

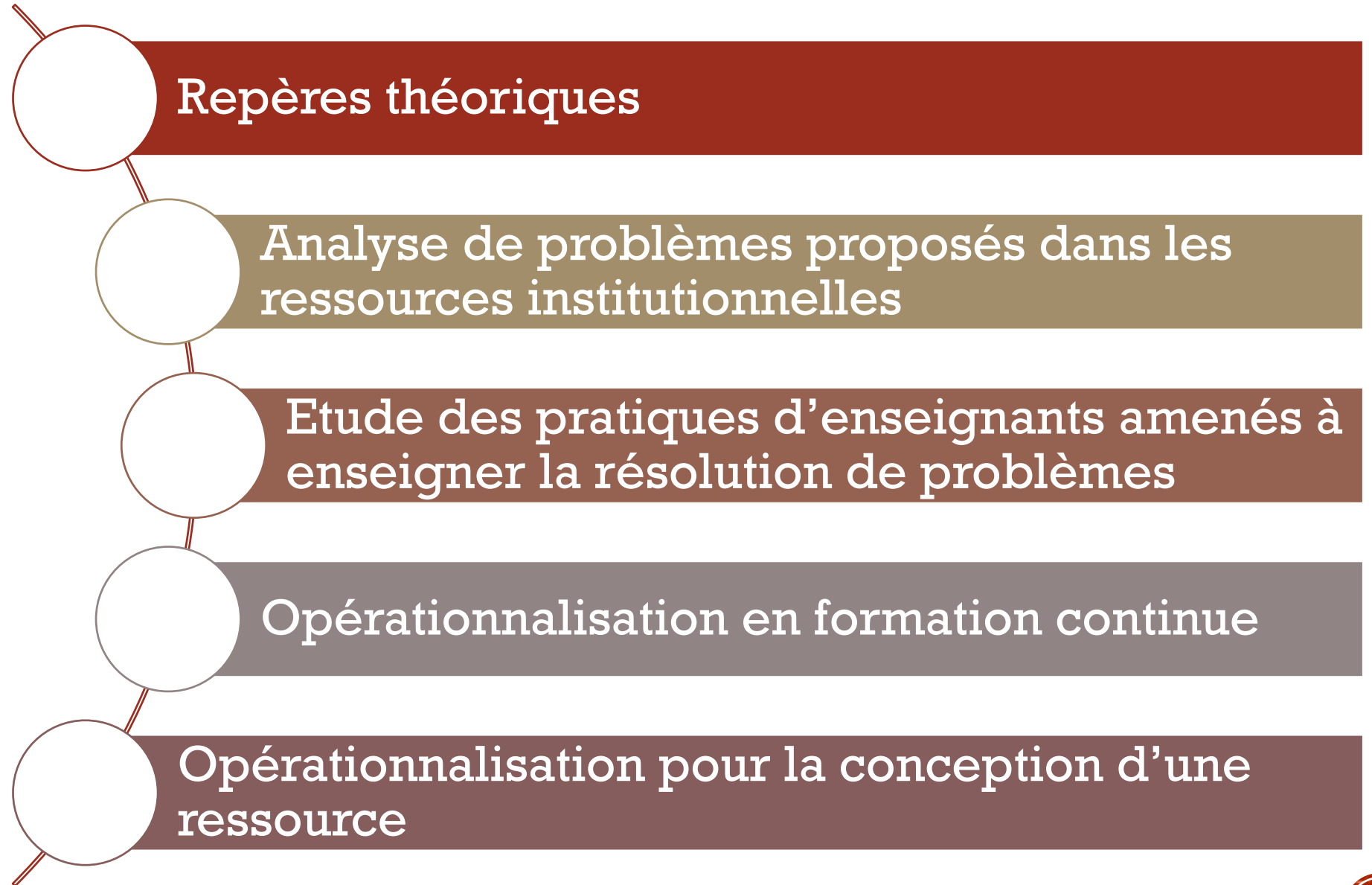


Journées romandes des formateurs en didactique des mathématiques

Connaissances mathématiques et connaissances didactiques des enseignants

Crêt Bérard, vendredi 31 janvier 2020

PLAN



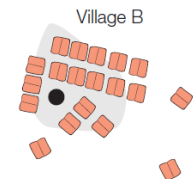
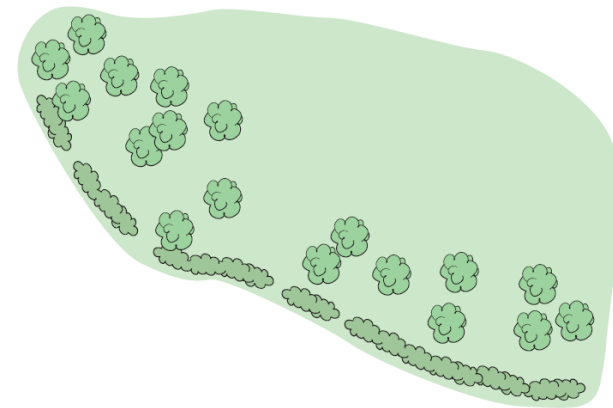
PLAN



LA RÉOLUTION DE PROBLÈMES EN MATHÉMATIQUES

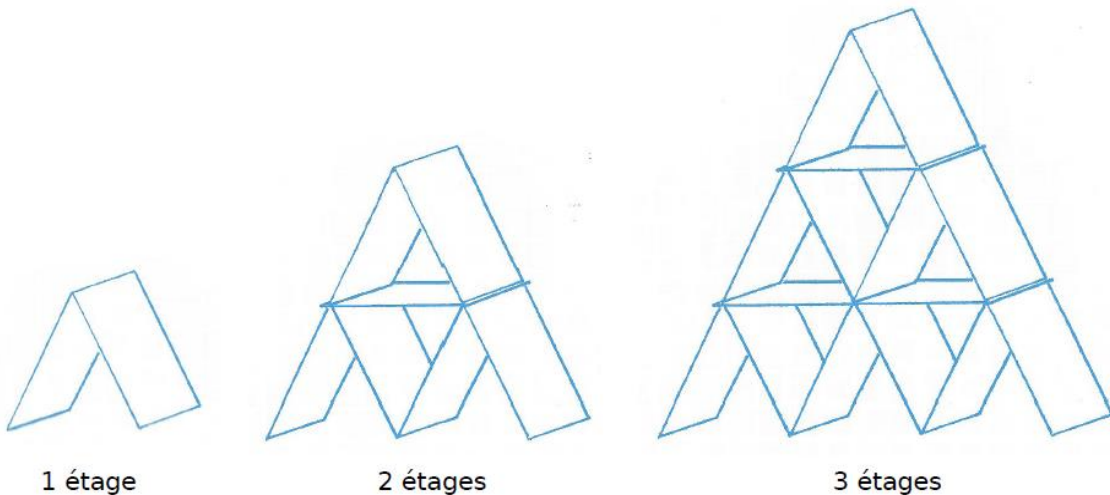
Outil, moyen de développer et d'évaluer les apprentissages

Deux villages envisagent la construction d'une déchetterie commune. Pour des raisons de calme et de tranquillité, celle-ci devra être construite à l'orée de la forêt, mais obligatoirement à égale distance des deux localités. Où la déchetterie devra-t-elle être construite ?



LA RÉOLUTION DE PROBLÈMES EN MATHÉMATIQUES

Objet
d'enseignement et
d'apprentissage



Pour construire un château de cartes à un étage il faut 2 cartes, pour un château de cartes à deux étages il faut 7 cartes et pour un château de cartes à trois étages il faut 15 cartes. Combien faut-il de cartes pour construire un château à 7 étages ? A 30 étages ? A 100 étages ?

QUELS APPRENTISSAGES EN RÉOLUTION DE PROBLÈMES EN MATHÉMATIQUES?

Objectifs possibles pour les problèmes de type « problèmes pour chercher » :

- Réinvestissement de savoirs
 - Apprentissages liés au raisonnement
 - Apprentissages liés à la validation (*primaire*), à la preuve (*secondaire*)
- + Modélisation

LE RAISONNEMENT EN MATHÉMATIQUES

Différentes manières complémentaires de caractériser le raisonnement en mathématiques :

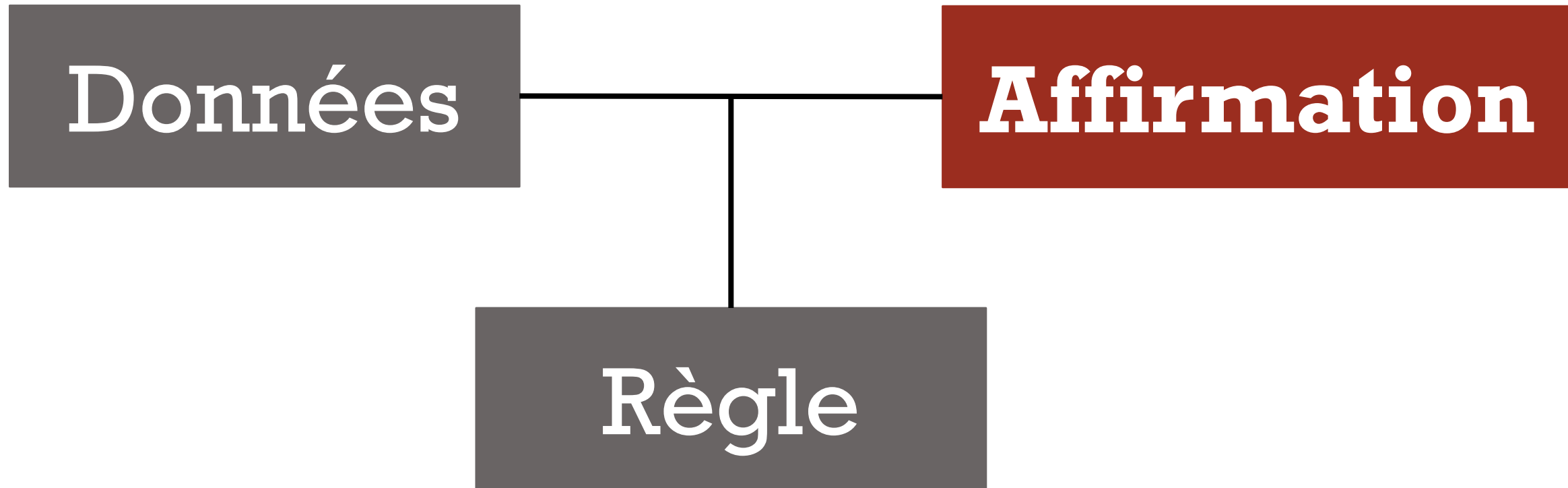
- du point de vue de sa structure logique : comment s'organisent et s'enchainent les pas de raisonnement ?
- du point de vue des processus mobilisés : raisonnement considéré comme un ensemble d'actions dirigées vers un but

LE RAISONNEMENT MATHÉMATIQUE : POINT DE VUE STRUCTUREL

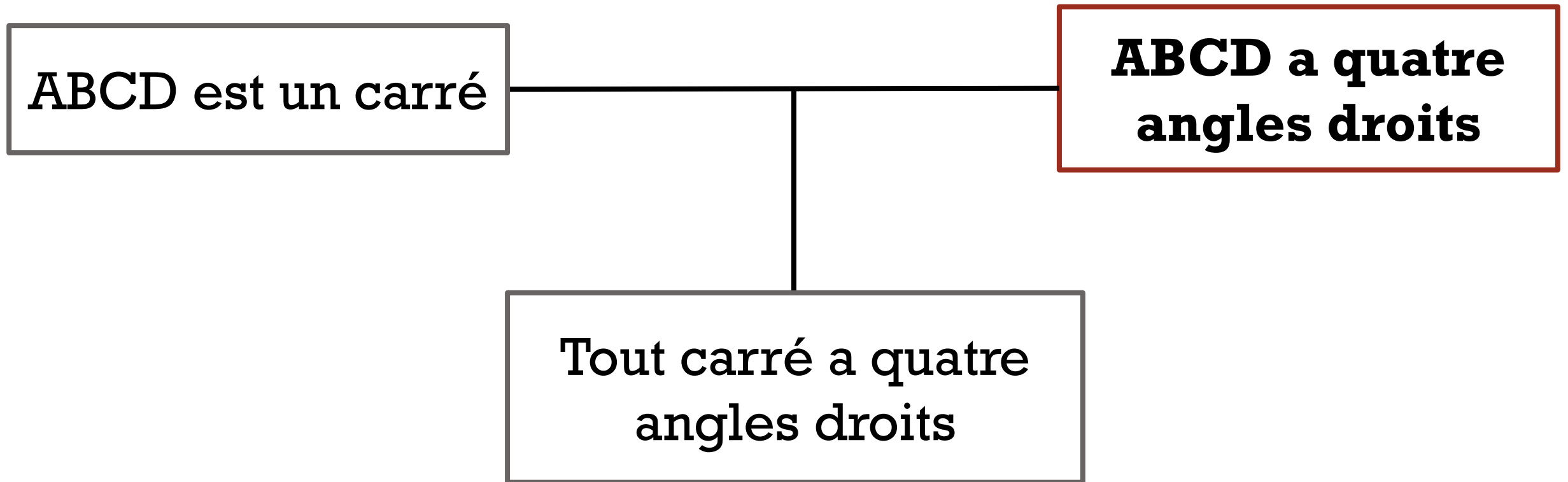
Déductif

Inductif

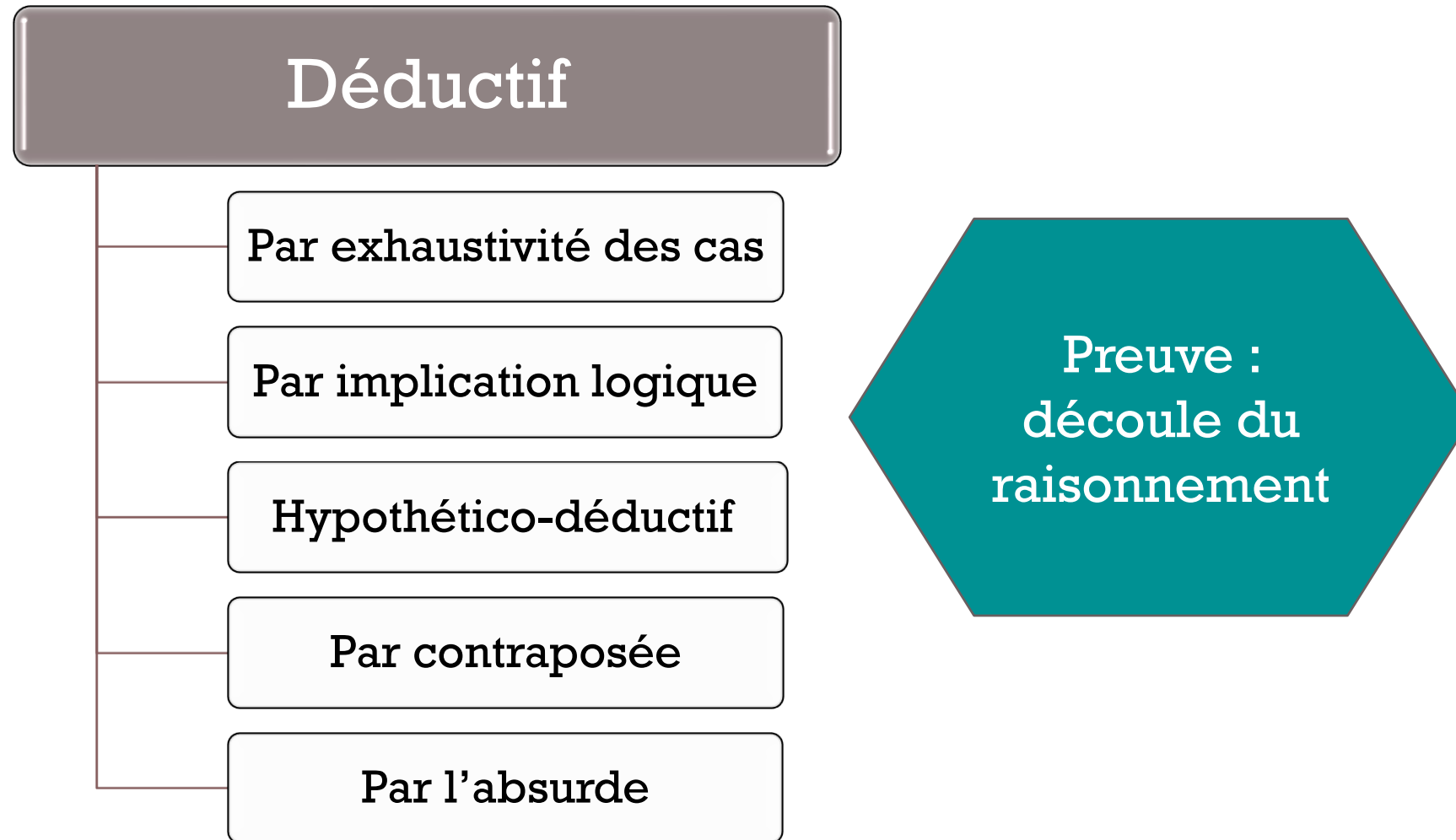
PAS DE RAISONNEMENT DÉDUCTIF



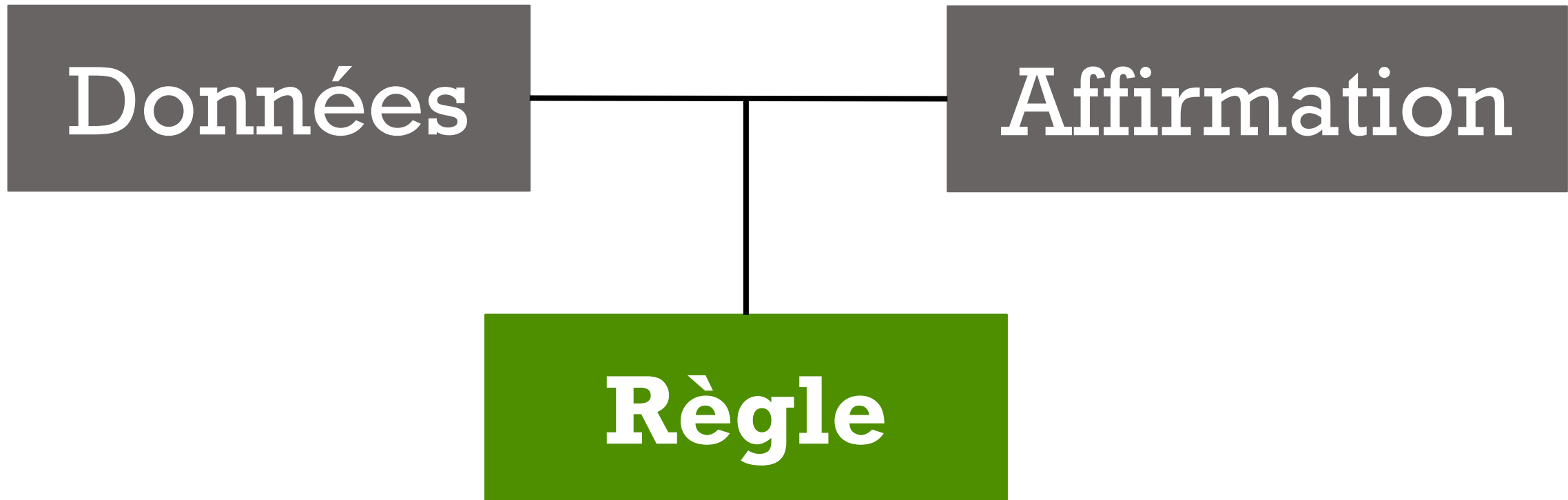
EXEMPLE DE PAS DE RAISONNEMENT DÉDUCTIF



LE RAISONNEMENT MATHÉMATIQUE : POINT DE VUE STRUCTUREL



PAS DE RAISONNEMENT INDUCTIF



Jeannotte, D. (2015). *Raisonnement mathématique : Proposition d'un modèle conceptuel pour l'apprentissage et l'enseignement au primaire et au secondaire* (Thèse de doctorat en éducation). Université du Québec, Montréal.

Gardes, M.- L. (2013). *Étude de processus de recherche de chercheurs, élèves et étudiants, engagés dans la recherche d'un problème non résolu en théorie des nombres* (Thèse de doctorat en mathématiques générales). Université C. Bernard Lyon 1.

EXEMPLE DE PAS DE RAISONNEMENT INDUCTIF

n	n^2-n+11
0	11
1	11
2	13
3	17
4	23
5	31
6	41
7	53

11; 13; 17; 23; 31; 41; 53
sont des nombres
premiers

**n^2-n+11 est toujours
un nombre premier**

LE RAISONNEMENT MATHÉMATIQUE : POINT DE VUE STRUCTUREL

Déductif

Par exhaustivité des cas

Par implication logique

Hypothético-déductif

Par contraposée

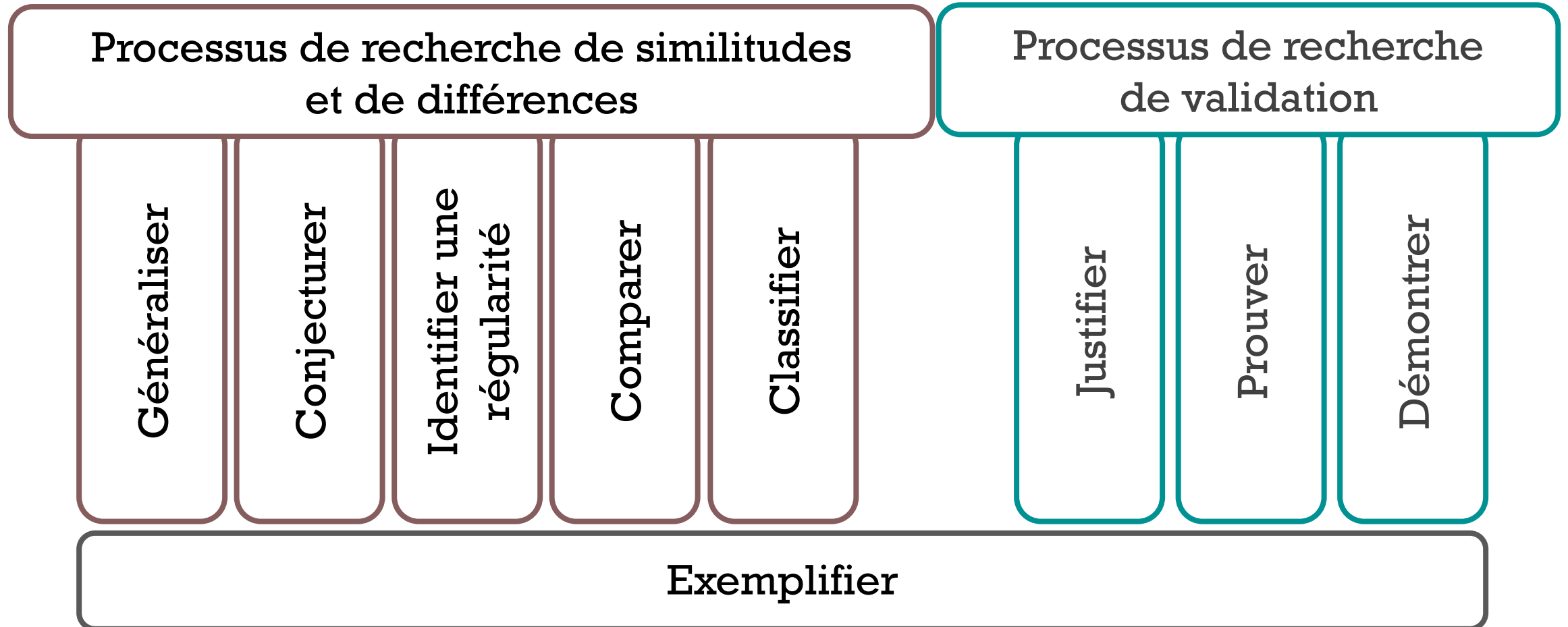
Par l'absurde

Inductif

Localement en jeu dans une
démarche expérimentale

Preuve :
nécessité de
recourir à des
raisonnements
déductifs


LE RAISONNEMENT MATHÉMATIQUE : POINT DE VUE DES PROCESSUS MOBILISÉS



LE RAISONNEMENT MATHÉMATIQUE : POINT DE VUE DES PROCESSUS MOBILISÉS

Les *processus* mobilisés dans les raisonnements permettent de caractériser deux types de démarches :

- Les démarches expérimentales : *exemplifier, identifier une régularité, conjecturer, généraliser*



Preuve :
recours à des
raisonnements
déductifs

- Les démarches d'ajustements d'essais successifs : *exemplifier, comparer l'écart entre le résultat obtenu et attendu*



Preuve par
ostension

PROCESSUS DE VALIDATION, PREUVE

Pour prouver, recours :

- Aux raisonnements déductifs
- A la preuve par ostension : trouver une réponse qui satisfait les conditions du problème (\rightarrow problème d'existence, pex « montrer qu'il existe »).
- Au contre-exemple : trouver un cas qui contredit la conclusion souhaitée à partir des conditions données (\rightarrow invalider des problèmes d'universalité, « toujours » ou « quelque soit » pas forcément explicites).

Modes de raisonnement

Démarche
expérimentale

Ajustements d'essais
successifs

Exhaustivité des cas

Implication logique

Hypothético-déductif

Par contraposée

Par l'absurde

Modes de preuve

Ostension

Contre exemple

SYNTHÈSE DES RAISONNEMENTS ET DÉMARCHES

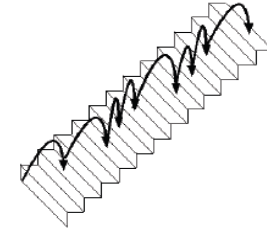
- Démarche expérimentale

fig. 1

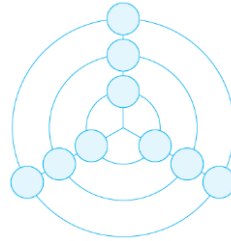
fig. 2

fig. 3

fig. 4



- Ajustements d'essais successifs



- Exhaustivité des cas



1010100

- Implication logique



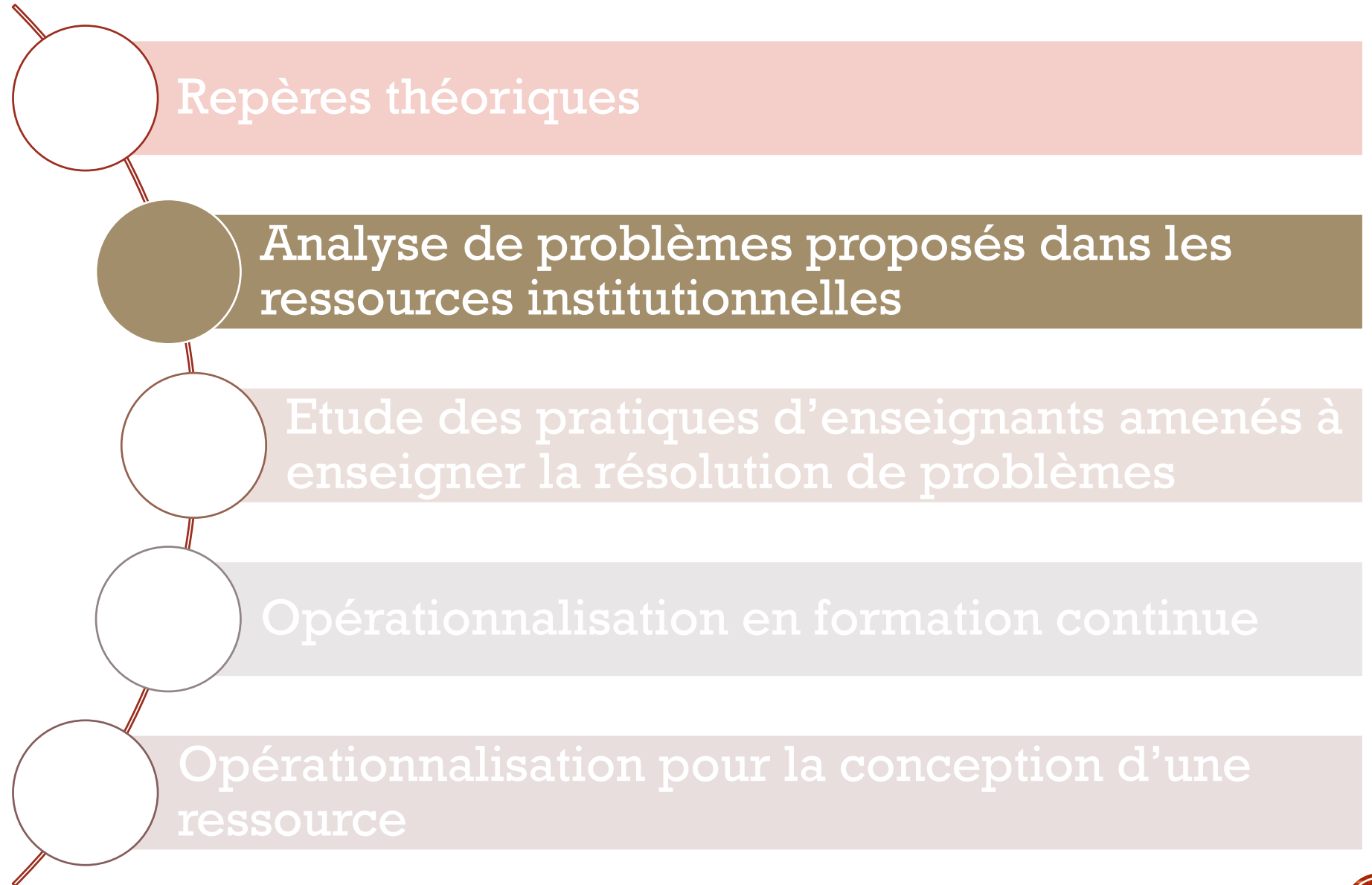
Quel métier !

- Hypothético-déductif

OPÉRATIONNALISATION ET QUESTION

Quels sont les apports de l'identification des modes de raisonnement a priori mis en jeu par des élèves lors de la résolution de problèmes ?

PLAN



PLATEFORME ESPER

Mathématiques 3^e

Mathématiques 3^e > Aide à la résolution de problèmes



PRÉSENTATION

AIDE À LA RÉOLUTION DE PROBLÈMES

ESPACE



NOMBRES



OPÉRATIONS



GRANDEURS ET MESURES



PLATEFORME ESPER

Mathématiques 3^e

Mathématiques 3^e > Aide à la résolution de problèmes



PRÉSENTATION

AIDE À LA RÉOLUTION DE PROBLÈMES

ESPACE >

NOMBRES >

OPÉRATIONS >

GRANDEURS ET MESURES >

Présentation

ARP: Aide à la résolution de problèmes.

L'AIDE À LA RÉOLUTION DE PROBLÈME (ARP) EN 3^e ET 4^e

Consulter

LISTE DES CHAPITRES

1 S'APPROPRIER UN PROBLÈME MATHÉMATIQUE



2 RÉSOUDRE UN PROBLÈME



3 VÉRIFIER LA RÉPONSE D'UN PROBLÈME



4 COMMUNIQUER LE RÉSULTAT DE SA RECHERCHE



Chapitre 2

«Résoudre un problème»

Apprentissage visé	1 Utiliser la stratégie «Ajustements d'essais successifs»	2 Utiliser un tableau, un dessin, une liste,... pour modéliser un problème
Activités d'introduction	<ul style="list-style-type: none">- Tour cachée- Les trois nombres mystères	<ul style="list-style-type: none">- Chez les Martiens
Activités d'entraînement	<ul style="list-style-type: none">- Le robot surprise- Jeu des familles- J'essaie- Les poules et les lapins	<ul style="list-style-type: none">- Les énigmes- Je t'écris
Activités en lien avec divers axes thématiques	<ul style="list-style-type: none">- Famille de nombres (N)- Cache-cache (N)- Premier à 15 (O)- Les robots (G)	<ul style="list-style-type: none">- Chacun sa place! (E)



Chapitre 2

«Résoudre un problème»

Apprentissage visé	1 Utiliser la stratégie «Ajustements d'essais successifs»	2 Utiliser un tableau, un dessin, une liste,... pour modéliser un problème
Activités d'introduction	<ul style="list-style-type: none">- Tour cachée- Les trois nombres mystères	<ul style="list-style-type: none">- Chez les Martiens
Activités d'entraînement	<ul style="list-style-type: none">- Le robot surprise- Jeu des familles- J'essaie- Les poules et les lapins	<ul style="list-style-type: none">- Les énigmes- Je t'écris
Activités en lien avec divers axes thématiques	<ul style="list-style-type: none">- Famille de nombres (N)- Cache-cache (N)- Premier à 15 (O)- Les robots (G)	<ul style="list-style-type: none">- Chacun sa place! (E)



Chez les Martiens

Zora va sur la planète Mars. Elle rencontre 4 Martiens.

Les Martiens ont 2 bouches, 3 bras et 4 jambes.

Combien y a-t-il de bouches, de bras et de jambes en tout dans ce groupe de Martiens?



Il y a ____ bouches, ____ bras et ____ jambes.

Zora va sur la planète Mars. Elle rencontre 4 Martiens.

Les Martiens ont 2 bouches, 3 bras et 4 jambes.

Combien y a-t-il de bouches, de bras et de jambes en tout ?
Martiens?

Toute la situation est représentée

- Aide à la compréhension
- Moyen de trouver la réponse car dénombrement direct possible sur le dessin

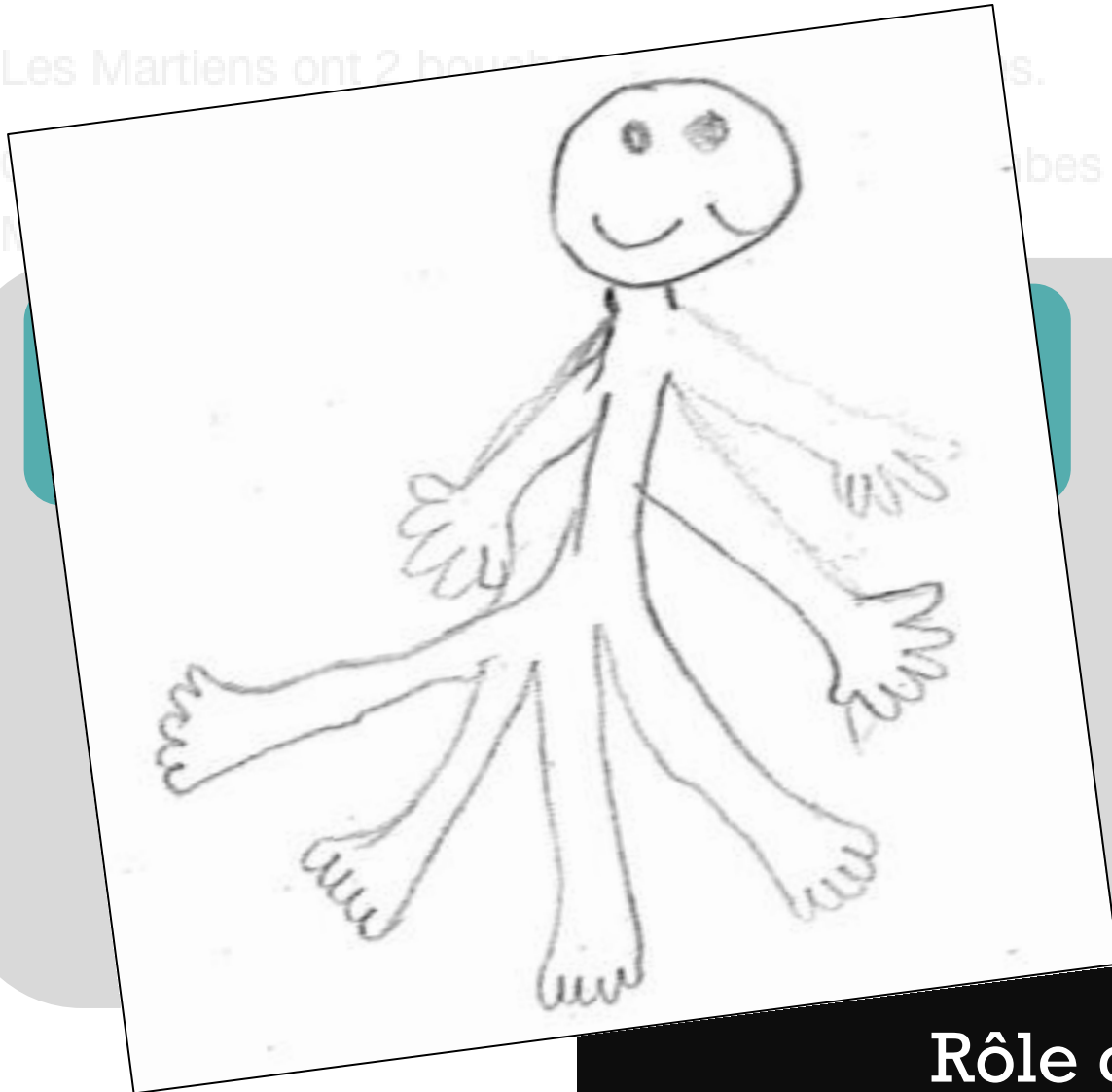
Rôle du dessin



Zora va sur la planète Mars. Elle rencontre 4 Martiens.

Les Martiens ont 2 bouches.

Il y a 4 bouches en tout dans ce groupe de



Un seul martien est représenté

- Aide à la compréhension
- Appui pour trouver la réponse

Rôle du dessin

Les glaces

Le vendeur de glaces propose trois parfums à ses clients: vanille, chocolat et fraise.

Trouve toutes les combinaisons possibles pour les cornets de glace avec 2 boules.

Résous cette énigme en t'aidant d'un dessin.




Il y a ____ possibilités.

- Aide à la compréhension
 - Appui mais pas un moyen en soi de trouver la réponse
- nécessité de recourir à un raisonnement par exhaustivité des cas

Rôle du dessin

Zora va sur la planète Mars. Elle rencontre 4 Martiens.
Les Martiens ont 2 bouches, 3 bras et 4 jambes.
Combien y a-t-il de bouches, de bras et de jambes en tout dans ce groupe de Martiens?




Il y a ____ bouches, ____ bras et ____ jambes.

VS

Les glaces

Le vendeur de glaces propose trois parfums à ses clients :
vanille, chocolat et fraise.
Trouve toutes les combinaisons de parfums possibles pour les
cornets de glace avec 2 boules.

Résous cette énigme en t'aidant d'un dessin ou d'un schéma.



- Le rôle du dessin dépend du mode de raisonnement en jeu.
Identifier le MR en jeu est une **aide pour le diagnostic des difficultés ou des erreurs des élèves.**
- Quel(s) mode(s) de raisonnement sont proposés dans les MER 3P pour cet apprentissage visé?

Activités d'entraînement_ ARP 3P

Nom du problème		Modes de raisonnement
Chez les martiens		Pbm lié à une notion mathématique
Les énigmes	Le marchand	Implication logique
	Les glaces	Exhaustivité des cas
	Les drapeaux	Hypothético-déductif
	Les multicubes	Hypothético-déductif
	Les animaux	Pbm lié à une notion mathématique

MR très variés → rôles du dessin potentiellement différents

→ Quelle mise en œuvre est proposée par les MER?



COMMENTAIRES DIDACTIQUES

Pour la mise en place de chaque AV, on peut identifier trois temps.

1^{er} temps - Rencontre de l'élève avec l'aide

Pour cela, on propose un problème qui nécessite, pour le résoudre, de passer par l'aide proposée. Un travail de groupe peut être mis en place au cours de cette première étape.

On propose un problème qui nécessite, pour le résoudre, de passer par l'aide proposée.

bloquer. Une première mise en commun sera l'occasion de mettre en évidence l'insuffisance des stratégies connues des élèves. Si les élèves ne découvrent pas la stratégie attendue, l'enseignant peut les guider.

Un temps d'institutionnalisation peut clore ce 1^{er} temps⁸.



COMMENTAIRES DIDACTIQUES

Pour la mise en place de chaque AV, on peut identifier trois temps.

1^{er} temps - Rencontre de l'élève avec l'aide

Pour cela, on propose un problème qui nécessite, pour le résoudre, de passer par l'aide proposée. Un travail de groupe peut être mis en place au cours de cette première étape.

On propose un problème qui nécessite, pour le résoudre, de passer par l'aide proposée.

bloquer. Une première mise en commun sera l'occasion de mettre en évidence l'insuffisance des stratégies connues des élèves. Si les élèves ne découvrent pas la stratégie attendue, l'enseignant peut les guider.

Un temps d'institutionnalisation peut clore ce 1^{er} temps⁸.

2^e temps - Des activités d'entraînement sont proposées

Concernant l'appropriation de stratégie de recherche, il est possible de proposer plus tard, dans un 2^e temps, un problème qui se résout en mettant en place la stratégie découverte au cours du 1^{er} temps. On peut demander aux élèves qui bloquent de faire le lien avec le problème résolu au cours de ce 1^{er} temps.

→ Identifier le MR en jeu est une **aide pour l'enseignant au niveau de la planification**



« ENIGMES » DE LA RUBRIQUE ARP DES MER 3P

Quels apports de l'identification des modes de raisonnement a priori mis en jeu par des élèves lors de la résolution des « Enigmes » ?

- Aide pour le diagnostic des difficultés ou des erreurs des élèves
- Aide au niveau de la planification

Chapitre « Recherche et Stratégies » MER 10e

Capacités transversales développées

Communication

- mobiliser des informations et des ressources
- s'exprimer à l'aide de divers types de langages mathématiques
- tenir compte du contexte

Collaboration

- développer l'esprit coopératif
- travailler en équipe
- mener des projets collectifs

Stratégies d'apprentissage

- analyser et améliorer ses démarches de recherche et de résolution de problèmes
- se donner des méthodes de travail efficaces



Stratégies d'apprentissage

- analyser et améliorer ses démarches de recherche et de résolution de problèmes

- développer son inventivité dans la manière d'aborder toute situation
- expérimenter des associations inhabituelles



Réserve d'activités cours de DMS 10^e LS profil S

Programme cantonal Démarches mathématiques et scientifiques (DMS)

Cadre pédagogique

Les Démarches mathématiques et scientifiques (DMS) s'inscrivent dans le domaine Mathématiques et Sciences de la nature (MSN) du Plan d'études romand (PER).

En 10^e, le cours est **centré sur l'étude de la démarche mathématique** et vise au développement des compétences des élèves dans **les stratégies de résolution de problèmes mathématiques**.

L'élève acquiert ainsi une autonomie à gérer une **démarche (mathématique et scientifique) dans son ensemble**: de l'énoncé d'une hypothèse ou d'une conjecture à la validation du modèle, [...].

Le cours contribue au développement des Capacités transversales¹ suivantes :

Chapitre « Recherche et Stratégies » MER 10^e

220 Recherche et stratégies

RS17 Les allumettes

Le premier joueur retire d'un seul tas autant d'allumettes qu'il le désire.
Le second joueur fait de même, et ainsi de suite.
Celui qui retire la dernière allumette gagne.
Existe-t-il une stratégie gagnante?

Tas n° 1

Tas n° 2

RS18 Quel périmètre?

Calcule le périmètre du cercle de centre O, sachant que AB est un diamètre de ce cercle.
AC = 6 cm, BC = 8 cm et la hauteur CH du triangle mesure 4,8 cm.

RS19 A tondre!

Anne et Florence doivent tondre un terrain rectangulaire. Pour le partager en deux parties de même aire, Chris leur propose de planter un piquet en un point quelconque du terrain et de relier ce point aux piquets plantés à chacun des quatre sommets du terrain.
Anne tondra la partie claire sur la figure, Florence la partie foncée.
Le partage est-il équitable?

Réserve d'activités cours de DMS 10^e LS profil S

Spécificité cantonale
Mathématiques 10^e LS profil S
Annexe 1 : Activités

Domaine NO

1. **Toujours premier ?**
Dans l'expression $n^2 - n + 1$, si on remplace n par n'importe quel entier naturel, obtient-on toujours un nombre premier ?

2. **Le carré d'un nombre pair**
Si n est un nombre pair, n^2 est-il toujours un nombre pair ? Justifie ta réponse.

2-BIS **Le carré impair**
Soit n un entier F.

	NO	ES & GM	FA
Initiation à la démonstration	NO1 - NO2 - NO2bis NO5 - NO6 - NO7 N9 - NO10 - NO11 NO12 - NO14- NO16 NO18 - NO22 - NO23	ES2 - ES4 - ES5 ES6 - ES12 - ES13 ES16	FA1 - FA2 - FA4 FA5 - FA7 - FA8 FA9 - FA10
Chaînage avant / arrière		ES1 - ES3 - ES7 ES8 - ES9 - ES10 ES11 - ES14 - ES15 ES17 - ES18	FA3 - FA12
Exemples / contre-exemples	NO1 - NO2 - NO2bis NO3		FA1 - FA2 - FA8 FA10
Exhaustivité	NO4 - NO4bis - NO8 NO13 - NO15 - NO17 NO19 - NO20 - NO21		FA6 - FA11

QUELQUES PRÉCISIONS SUR LA MÉTHODE D'ANALYSE

- Recherche et résolution **complète** de tous les problèmes en adoptant un positionnement du **point de vue de l'élève** (et non pas comme expert)
 - Identification du (des) mode(s) de raisonnement et de preuve mis en jeu
- Possibilité d'identifier plusieurs modes de raisonnement/preuve dans un même problème (succession ou imbrication)

EXTRAIT DE DONNÉES

Problèmes	Raisonnement		Preuve
RS13	Essais-ajustements		Ostension
RS6	Implication logique		Implication logique
NO9	Démarche expérimentale		Pas de moyen de prouver
NO23	Démarche expérimentale		Hypothético-déductif
NO15	Démarche expérimentale	Exhaustivité des cas	Pas de moyen de prouver
ES13	Hypothético-déductif		Hypothético-déductif

EXTRAIT DE DONNÉES

Problèmes	Raisonnement		Preuve
RS13	Essais-ajustements		Ostension
RS6	Implication logique		Implication logique
NO9	Démarche expérimentale		Pas de moyen de prouver
NO23	Démarche expérimentale		Hypothético-déductif
NO15	Démarche expérimentale	Exhaustivité des cas	Pas de moyen de prouver
ES13	Hypothético-déductif		Hypothético-déductif

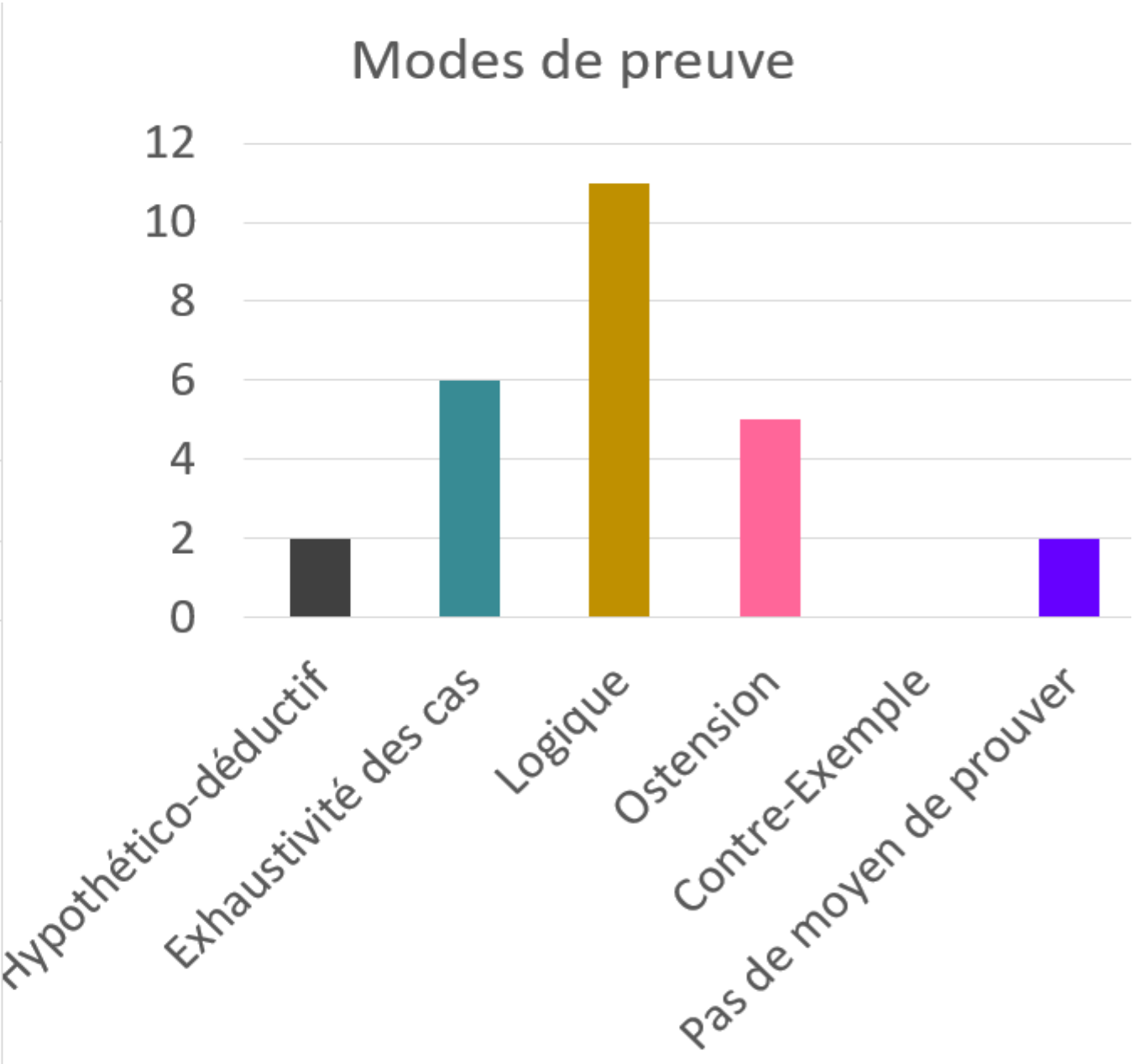
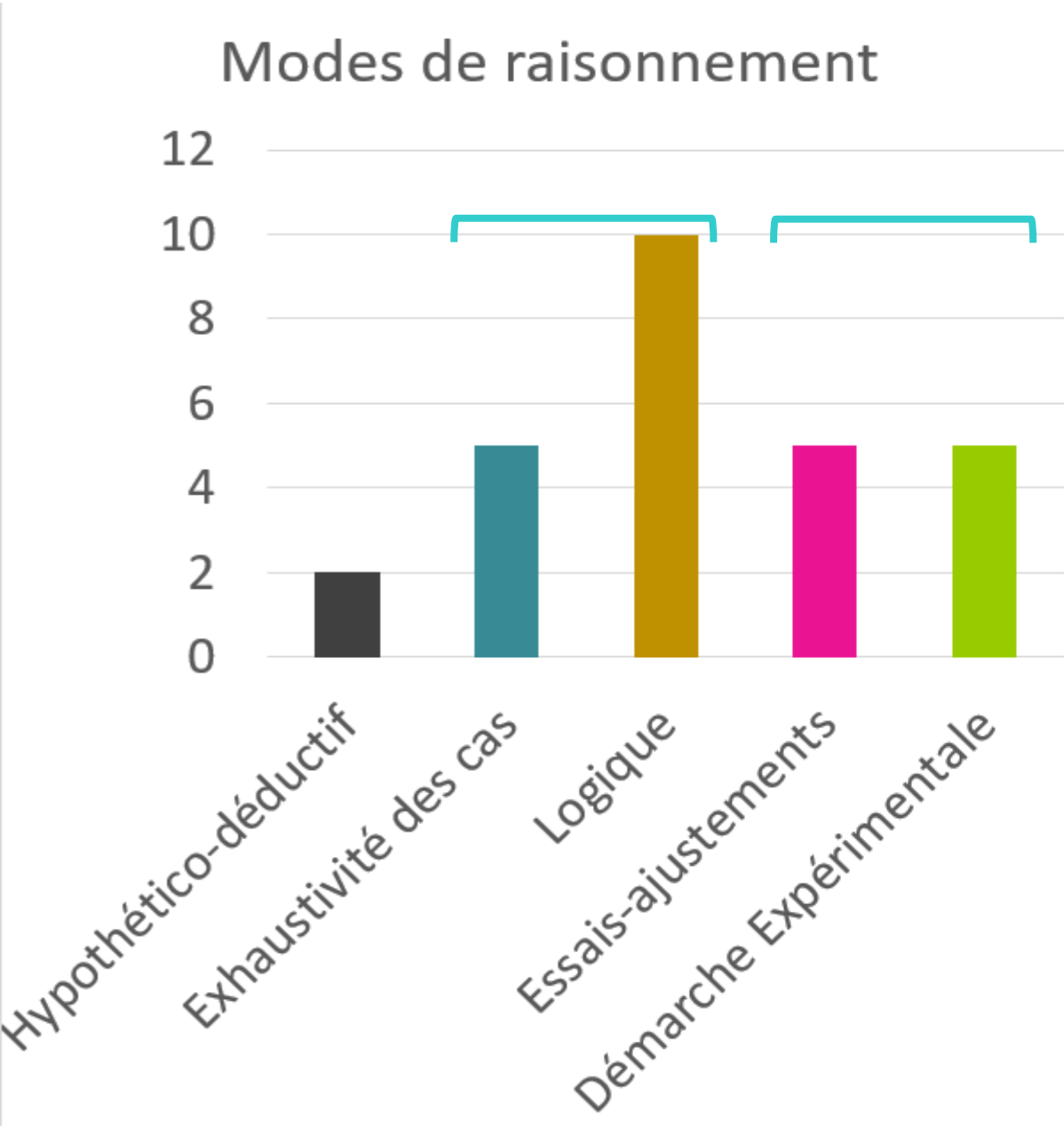
EXTRAIT DE DONNÉES

Problèmes	Raisonnement		Preuve
RS13	Essais-ajustements		Ostension
RS6	Implication logique		Implication logique
NO9	Démarche expérimentale		Pas de moyen de prouver
NO23	Démarche expérimentale		Hypothético-déductif
NO15	Démarche expérimentale	Exhaustivité des cas	Pas de moyen de prouver
ES13	Hypothético-déductif		Hypothético-déductif

EXTRAIT DE DONNÉES

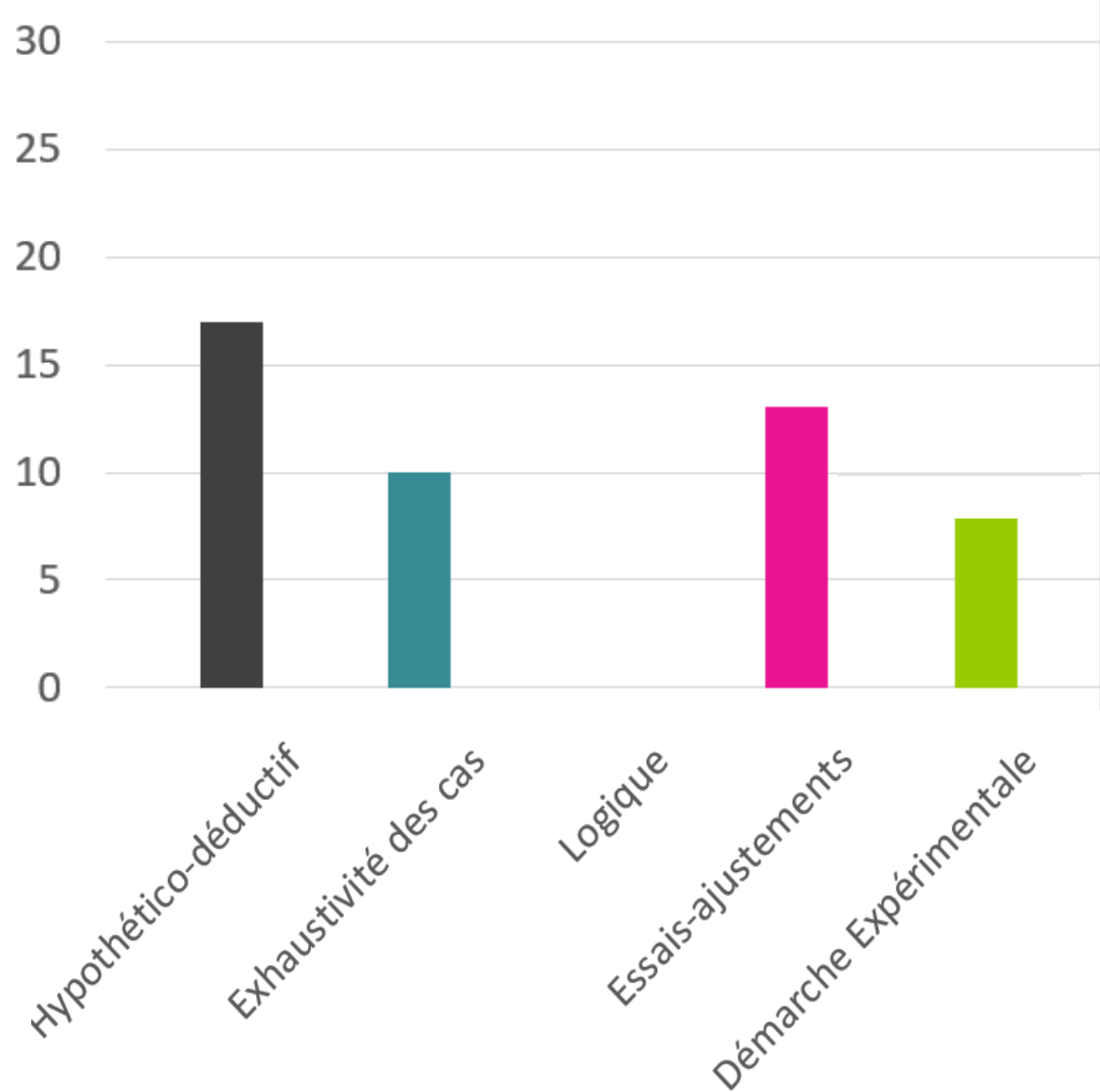
Problèmes	Raisonnement		Preuve
RS13	Essais-ajustements		Ostension
RS6	Implication logique		Implication logique
NO9	Démarche expérimentale		Pas de moyen de prouver
NO23	Démarche expérimentale		Hypothético-déductif
NO15	Démarche expérimentale	Exhaustivité des cas	Pas de moyen de prouver
ES13	Hypothético-déductif		Hypothético-déductif

SYNTHÈSE : CHAPITRE R&S, MER 10^e

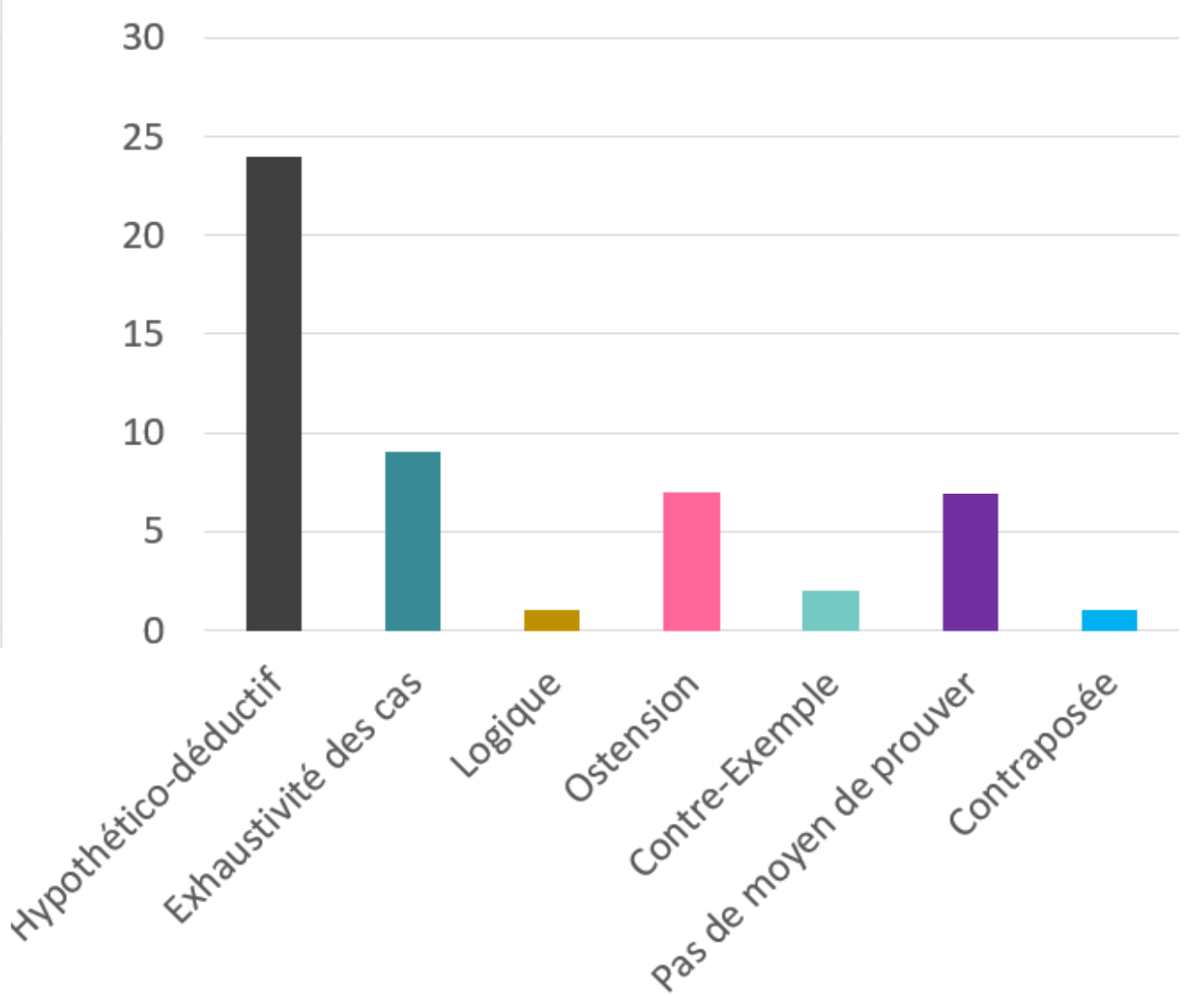


SYNTHÈSE : RÉSERVE D'ACTIVITÉS, DMS 10^e

Modes de raisonnement



Modes de preuve

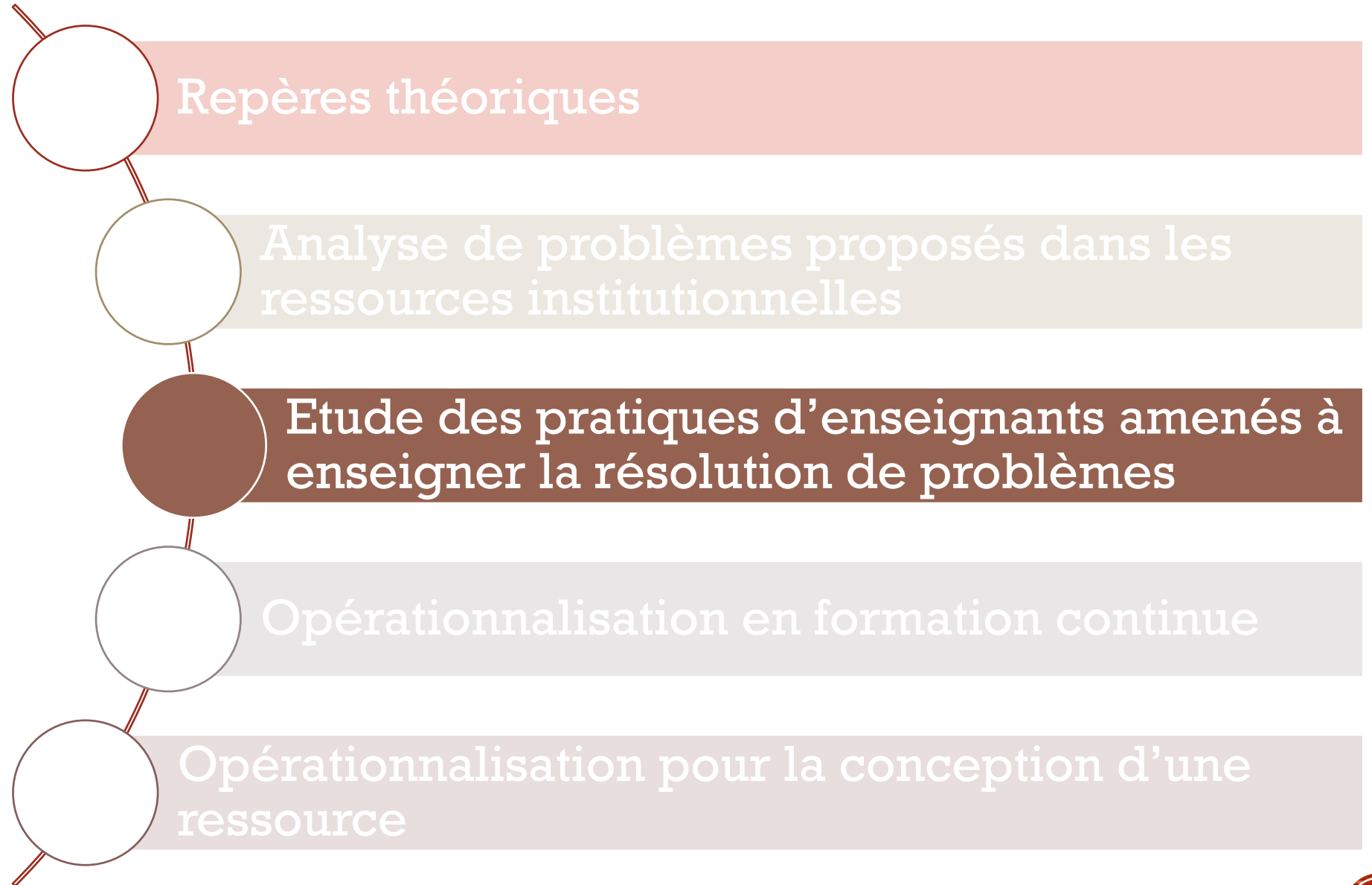


PROBLÈMES R&S ET COURS DMS 10^e

Quels apports de l'identification des modes de raisonnement a priori mis en jeu par des élèves lors de la résolution des problèmes ?

- Mesure du décalage entre les objectifs annoncés pour le cours DMS et les problèmes proposés pour les atteindre

PLAN



En 10^e, le cours est centré sur l'étude de la démarche mathématique et vise au développement des compétences des élèves dans les stratégies de résolution de problèmes mathématiques.

... reconnaît que les Mathématiques sont construites sur des axiomes

... reconnaît que pour résoudre un problème de Mathématiques, on peut suivre la démarche :
essais, formulation de conjecture, tests, preuve

... reconnaît qu'en Mathématiques, une démonstration sert à valider une conjecture qui devient un théorème dont la validation est définitive

... reconnaît que lors d'une modélisation intramathématique, il est nécessaire de démontrer l'équivalence de la formulation du problème et de sa modélisation

... reconnaît que des cheminements différents peuvent mener à une même réponse pour

En 10^e, le cours est centré sur l'étude de la démarche mathématique et vise au développement des compétences des élèves dans les stratégies de résolution de problèmes mathématiques.

... représente une situation à l'aide d'un schéma tel que dessin, croquis, diagramme, tableau, graphique, organigramme algorithmique

... modélise une situation en langage mathématique

... réduit temporairement la complexité d'un problème

... utilise les stratégies de résolution suivantes :

– l'analogie (cf. *Aide-mémoire*, p. 138)

– le tâtonnement – essais, exemples, contre-exemples (cf. *Aide-mémoire*, p. 138)

– le chaînage avant et le chaînage arrière (cf. *Aide-mémoire*, p. 139)

– l'étude systématique des cas et l'exhaustivité des solutions (cf. *Aide-mémoire*, p. 140)

... aborde un problème par essais successifs

... organise un dénombrement

... énonce une conjecture

PROGRAMME CANTONAL, DMS 10^e VERSION 2014

L'objectif n'est pas simplement de résoudre des problèmes «un par un», mais aussi de découvrir et systématiser des méthodes de recherche de problème. En particulier, le but est de placer l'élève dans une situation d'apprentissage où il ou elle devra mettre en œuvre une «démarche scientifique», c'est-à-dire qui l'amène à :

essayer - conjecturer - tester - prouver

ANALYSE DE PRATIQUES ENSEIGNANTES

- Quels modes de raisonnement et de preuve sont travaillés dans les problèmes choisis par les enseignants ?
- Quelle distance par rapport à ce qui est proposé dans les ressources ? Par rapport aux objectifs du cours ?
- Quelle articulation des problèmes sur l'année ?
- Quel lien entre les problèmes pour apprendre et les problèmes pour évaluer ?

DONNÉES RECUEILLIES

3 enseignants (Salomé, Paul et Rémi)

- Ensemble des problèmes proposés pendant l'année
- Ensemble des problèmes proposés en évaluation
- Suivi d'une séquence d'enseignement (entre 3 et 5 séances)
- Entretiens (*ante* et *post* observation)

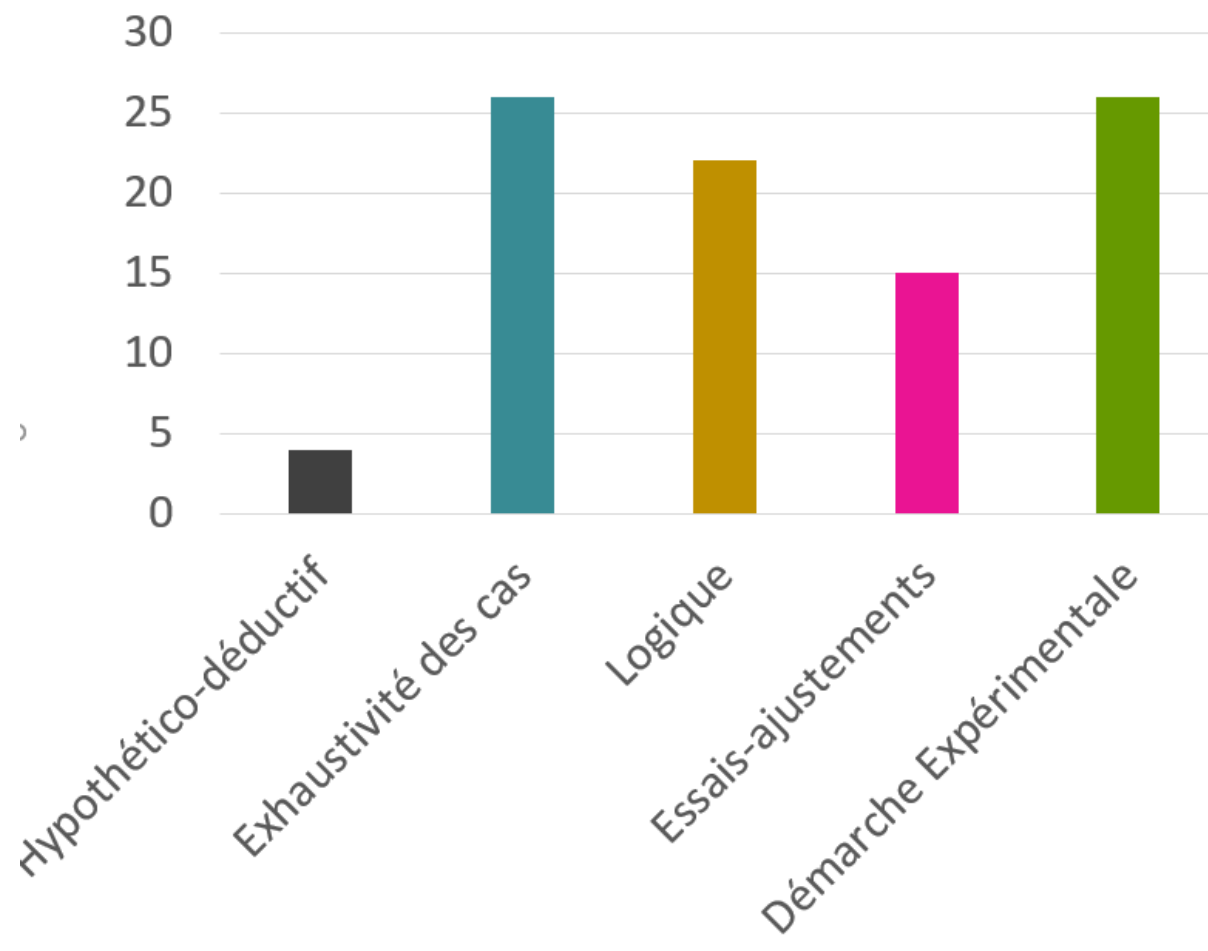


ARTICULATION DES RAISONNEMENTS EN JEU DANS LES PROBLÈMES PROPOSÉS EN CLASSE (SALOMÉ)

Ordre	Nom du problème	Mode de raisonnement	Mode de preuve
1	Truffes au chocolat (RS1)	Exhaustivité des cas Implication logique	Exhaustivité des cas
2	Le caissier imprudent	Exhaustivité des cas	Exhaustivité des cas
3	Le classement (RS3)	Implication logique	Implication logique
4	Le trésor ou bombe (RS10)	Exhaustivité des cas Implication logique	Implication logique
5	La famille Belledent (RS 5)	Implication logique	Implication logique
6	Quel métier (RS6)	Implication logique	Implication logique
7	En avion (RS11)	Implication logique	Implication logique
8	Eugène Catalan	Exhaustivité des cas	Exhaustivité des cas
9	Les billes	Essais-ajustements	Ostension
10	Enfin	Démarche expérimentale	Pas de moyen de prouver

TYPES DE RAISONNEMENTS EN JEU DANS LES PROBLÈMES PROPOSÉS EN CLASSE (SALOMÉ)

Mode de raisonnement



Distance par rapport aux ressources
Plus grande proximité par rapport aux
objectifs visés dans le cours

ARTICULATION ENTRE PROBLÈMES POUR APPRENDRE ET PROBLÈMES POUR ÉVALUER (SALOMÉ)

Ordre	Nom du problème	Mode de raisonnement	Mode de preuve
1	Truffes au chocolat (RS1)	Exhaustivité des cas Implication logique	Exhaustivité des cas
2	Le caissier imprudent	Exhaustivité des cas	Exhaustivité des cas
3	Le classement (RS3)	Implication logique	Implication logique
4	Evaluation	Exhaustivité des cas Implication logique	Implication logique
5	La famille Belledent (RS 5)	Implication logique	Implication logique

ARTICULATION ENTRE PROBLÈMES POUR APPRENDRE ET PROBLÈMES POUR ÉVALUER (SALOMÉ)

Pour l'évaluation :

- choix de problèmes mettant en jeu des stratégies déjà travaillées
- évaluation de la capacité des élèves à les mobiliser face à un problème nouveau

SYNTHÈSE DES PRATIQUES DES 3 ENSEIGNANTS

Critères choix des pb

Articulation des pb

Critères choix pb en
évaluation

Articulation pb pour
apprendre / pb pour
évaluer

Objectifs
d'apprentissage visés

SYNTHÈSE DES PRATIQUES DES 3 ENSEIGNANTS

	Salomé
Critères choix des pb	Les stratégies de résolution en jeu
Articulation des pb	Structurée (stratégies : consécutif + alternance)
Critères choix pb en évaluation	Les stratégies de résolution (déjà travaillées)
Articulation pb pour apprendre / pb pour évaluer	Oui
Objectifs d'apprentissage visés	Stratégies de résolution

SYNTHÈSE DES PRATIQUES DES 3 ENSEIGNANTS

	Salomé	Rémi
Critères choix des pb	Les stratégies de résolution en jeu	Le temps estimé pour la résolution (<45 min)
Articulation des pb	Structurée (stratégies : consécutif + alternance)	Non organisée
Critères choix pb en évaluation	Les stratégies de résolution (déjà travaillées)	Pb motivant Appropriation facile
Articulation pb pour apprendre / pb pour évaluer	Oui	Aucune
Objectifs d'apprentissage visés	Stratégies de résolution	Collaboration Persévérance

SYNTHÈSE DES PRATIQUES DES 3 ENSEIGNANTS

	Salomé	Rémi	Paul
Critères choix des pb	Les stratégies de résolution en jeu	Le temps estimé pour la résolution (<45 min)	Leur « narrabilité » Potentiel de recherche
Articulation des pb	Structurée (stratégies : consécutif + alternance)	Non organisée	Non organisée
Critères choix pb en évaluation	Les stratégies de résolution (déjà travaillées)	Pb motivant Appropriation facile	Leur « narrabilité »
Articulation pb pour apprendre / pb pour évaluer	Oui	Aucune	Aucune
Objectifs d'apprentissage visés	Stratégies de résolution	Collaboration Persévérance	Explicitation de la recherche

Quels apports des modes de raisonnement dans l'analyse des pratiques enseignantes ?

- Outil pour les enseignants pour :
 - Choisir les problèmes (à partir de critères mathématiques)
 - Identifier et viser des apprentissages (associés à la résolution de problèmes)
 - Organiser une progression
 - Choisir les problèmes pour l'évaluation et les articuler avec le reste des problèmes travaillés en classe

PLAN



POINT DE DÉPART DU RECYCLAGE

- Constats :
 - difficultés des enseignants à définir des objectifs d'apprentissage pour le cours de DMS, à organiser leur enseignement, à évaluer
 - ressource peu claire, liste de problèmes non organisée
- Objectifs : proposer un outil pour choisir des problèmes et organiser la planification pour ce cours
- Question : comment permettre aux enseignants de se l'approprier ?

CONTENU DU RECYCLAGE

Limites de la classification actuelle

Limites de la classification actuelle

	NO	ES & GM	FA
Initiation à la démonstration	NO1 - NO2 - NO2bis NO5 - NO6 - NO7 N9 - NO10 - NO11 NO12 - NO14- NO16 NO18 - NO22 - NO23	ES2 - ES4 - ES5 ES6 - ES12 - ES13 ES16	FA1 - FA2 – FA4 FA5 - FA7 - FA8 FA9 - FA10
Chaînage avant / arrière		ES1 - ES3 - ES7 ES8 - ES9 - ES10 ES11 - ES14 - ES15 ES17 - ES18	FA3 - FA12
Exemples / contre-exemples	NO1 - NO2 - NO2bis NO3		FA1 - FA2 - FA8 FA10
Exhaustivité	NO4 - NO4bis - NO8 NO13 - NO15 - NO17 NO19 - NO20 - NO21		FA6 - FA11

Limites de la classification actuelle

Intitulé peu
explicite

	NO	ES & GM	FA
Initiation à la démonstration	NO1 - NO2 - NO2bis NO5 - NO6 - NO7 N9 - NO10 - NO11 NO12 - NO14- NO16 NO18 - NO22 - NO23	ES2 - ES4 - ES5 ES6 - ES12 - ES13 ES16	FA1 - FA2 – FA4 FA5 - FA7 - FA8 FA9 - FA10
Chaînage avant / arrière		ES1 - ES3 - ES7 ES8 - ES9 - ES10 ES11 - ES14 - ES15 ES17 - ES18	FA3 - FA12
Exemples / contre-exemples	NO1 - NO2 - NO2bis NO3		FA1 - FA2 - FA8 FA10
Exhaustivité	NO4 - NO4bis - NO8 NO13 - NO15 - NO17 NO19 - NO20 - NO21		FA6 - FA11

Limites de la classification actuelle

	NO	ES & GM	FA
Initiation à la démonstration	NO1 - NO2 - NO2bis NO5 - NO6 - NO7 N9 - NO10 - NO11 NO12 - NO14- NO16 NO18 - NO22 - NO23	ES2 - ES4 - ES5 ES6 - ES12 - ES13 ES16	FA1 - FA2 – FA4 FA5 - FA7 - FA8 FA9 - FA10
Chaînage avant / arrière		ES1 - ES3 - ES7 ES8 - ES9 - ES10 ES11 - ES14 - ES15 ES17 - ES18	FA3 - FA12
Exemples / contre-exemples	NO1 - NO2 - NO2bis NO3		FA1 - FA2 - FA8 FA10
Exhaustivité	NO4 - NO4bis - NO8 NO13 - NO15 - NO17 NO19 - NO20 - NO21		FA6 - FA11

Regroupement
peu
opérationnel

Limites de la classification actuelle

Etude de quatre problèmes (FA8, FA10, NO1, NO2) classés dans Exemples/contre-exemples.

	NO	ES & GM	FA
Initiation à la démonstration	NO1 - NO2 - NO2bis NO5 - NO6 - NO7 N9 - NO10 - NO11 NO12 - NO14- NO16 NO18 - NO22 - NO23	ES2 - ES4 - ES5 ES6 - ES12 - ES13 ES16	FA1 - FA2 - FA4 FA5 - FA7 - FA8 FA9 - FA10
Chaînage avant / arrière		ES1 - ES3 - ES7 ES8 - ES9 - ES10 ES11 - ES14 - ES15 ES17 - ES18	FA3 - FA12
Exemples / contre-exemples	NO1 - NO2 - NO2bis NO3		FA1 - FA2 - FA8 FA10
Exhaustivité	NO4 - NO4bis - NO8 NO13 - NO15 - NO17 NO19 - NO20 - NO21		FA6 - FA11

Regroupement
peu
opérationnel

Limites de la classification actuelle

Etude de quatre problèmes (FA8, FA10, NO1, NO2) classés dans Exemples/contre-exemples.

Regroupement
peu
opérationnel

	NO	ES & GM	FA
Initiation à la démonstration	NO1 - NO2 - NO2bis NO5 - NO6 - NO7 N9 - NO10 - NO11 NO12 - NO14- NO16 NO18 - NO22 - NO23	ES2 - ES4 - ES5 ES6 - ES12 - ES13 ES16	FA1 - FA2 - FA4 FA5 - FA7 - FA8 FA9 - FA10
Chaînage avant / arrière		ES1 - ES3 - ES7 ES8 - ES9 - ES10 ES11 - ES14 - ES15 ES17 - ES18	FA3 - FA12
Exemples / contre-exemples	NO1 - NO2 - NO2bis NO3		FA1 - FA2 - FA8 FA10
Exhaustivité	NO4 - NO4bis - NO8 NO13 - NO15 - NO17 NO19 - NO20 - NO21		FA6 - FA11

Pour chacun d'eux : le résoudre et **identifier le rôle des exemples et contre-exemples.**

ENONCÉS DES PROBLÈMES

1. Toujours premier ?

Dans l'expression $n^2 - n + 1$, si on remplace n par n'importe quel entier naturel, obtient-on toujours un nombre premier ?

Trouver un contre-exemple

2. Le carré d'un nombre pair

Si n est un nombre pair, n^2 est-il toujours un nombre pair ? Justifie ta réponse.

Tester une conjecture

8. Les nombres glissants

Un nombre glissant est un nombre qui peut se décomposer en la somme de deux entiers naturels non nuls, pas nécessairement distincts, tels que la somme de leurs inverses s'écrive avec les chiffres du nombre de départ, dans le même ordre et précédés de 0 et d'une virgule.

Exemple : $20 = 10 + 10$ et $\frac{1}{10} + \frac{1}{10} = 0,20 \rightarrow 20$ est donc un nombre glissant.

Quels sont les nombres glissants à deux chiffres ?

Aide pour s'appropriier le problème

10. 2010

Nicolas a additionné les entiers successifs, de 1 à p , avec sa calculatrice. Il a trouvé 2010. Son professeur lui déclare : « Tu en as oublié un ! ». Lequel ?

Exemple qui prouve (ostension)



Limites de la classification actuelle

NO1

Trouver un contre-exemple

NO2

Tester une conjecture

FA8

Aide pour s'appropriier le problème

FA10

Exemple qui prouve (ostension)

Limites de la classification actuelle

NO1

Trouver un contre-exemple

NO2

Tester une conjecture

FA8

Aide pour s'approprier le problème

FA10

Exemple qui prouve (ostension)

Raisonnement
Preuve

Grande diversité des objectifs travaillés à partir de ces problèmes pourtant classés dans la même catégorie → même constat que pour ARP en 3P

CONTENU DU RECYCLAGE

Limites de la classification actuelle

CONTENU DU RECYCLAGE

Limites de la classification actuelle

Présentation des modes de
raisonnement

CONTENU DU RECYCLAGE

Limites de la classification actuelle

Présentation des modes de
raisonnement

Appropriation des modes de
raisonnement

CONTENU DU RECYCLAGE

Limites de la classification actuelle

Présentation des modes de
raisonnement

Appropriation des modes de
raisonnement

Planification par mode de
raisonnement

Démarche Expérimentale

Les réverbères

Le long d'un grand boulevard, il y a 250 réverbères éteints, tous du même côté de la route. Au pied de chacun se trouve un bouton. Si on appuie une fois dessus, le lampadaire s'allume, si on appuie à nouveau, alors il s'éteint. L'allumeur de réverbères décide de les allumer selon l'algorithme suivant :

En partant du premier réverbère, il appuie sur tous les boutons.
Puis il revient au début du boulevard et en partant du troisième, il appuie sur 1 bouton sur 2.
Puis il revient au début du boulevard et en partant du troisième, il appuie sur 1 bouton sur 3.
Puis il revient au début du boulevard et en partant du quatrième, il appuie sur 1 bouton sur 4.
Et ainsi de suite jusqu'au deux cent cinquantième réverbère.



A la fin, quels sont les réverbères allumés ?

GROUPE démarche expérimentale

NO8.

Sommes et produits

On s'intéresse aux diverses façons d'écrire un nombre comme la somme de deux autres nombres entiers naturels (pour éviter les répétitions, les nombres sont écrits dans l'ordre croissant). Par exemple :

$5 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1$, $5 = 1 + 1 + 1 + 2$, $5 = 1 + 1 + 3$, $5 = 1 + 2 + 2$, $5 = 1 + 4$, $5 = 2 + 3$
sont les six décompositions possibles du nombre 5. Quels sont les produits correspondants ? Lequel est le plus grand ?

A chacune des sommes ainsi écrites, on associe le produit de ses termes. Les résultats obtenus pour 5 sont 1, 2, 3, 4 et 6.

- Quelles sont les décompositions possibles du nombre 7 ? Quels sont les produits correspondants ? Lequel est le plus grand ?
- On s'intéresse à présent aux décompositions du nombre 28 où apparaît le nombre 1. On appelle P le produit associé. Trouver une décomposition dont le produit associé est supérieur à P .
- On considère une décomposition quelconque du nombre 28 où apparaît le nombre 5. On appelle R le produit associé. Trouver une décomposition dont le produit associé est supérieur à R .
- Quelles décompositions de 28 donnent le plus grand produit associé ?

RS2. Le chiffre des unités

Quel est le chiffre des unités de 7^{2013} ?

Implication logique

Truffes au chocolat

On a reçu une boîte contenant vingt truffes au chocolat. On a mangé.

GROUPE Implication logique

La vérité une fois et s'est trompé une fois.

Il a mangé de truffes au chocolat ?

Le tournoi

Quatre des six finalistes du cross de l'école.

Il est arrivé, Paulette était déjà là.

Après Jacques, Claude et Marcel.

Juste avant Marcel. Françoise était déjà là, mais elle n'a pas pu être la première !

Quelle course ?

Le dessert

On a tous eu un dessert différent aujourd'hui.

Le même jour n'ont pas voulu la glace.

Dans le flan au caramel de sa sœur.

Une partie de sa crème au chocolat.

Le coffre

On a trouvé un trésor, un autre trésor, et le dernier est vide.

Sachant que seule l'étiquette du coffre contenant le trésor dit la vérité, dans quel coffre se trouve le trésor ?



Essais-ajustements

RS8 Les neuf billes

Samantha a acheté neuf billes.

Toutes les billes ont une masse de 5 g, sauf une dont la masse vaut 6 g. Samantha veut retrouver cette bille ; elle a à sa disposition uniquement une balance à deux plateaux.

En utilisant au maximum trois fois la balance, comment peut-elle s'y prendre pour découvrir avec certitude la bille de 6 g ?

RS13 La cible

Place tous les nombres de 1 à 9 dans les petits disques colorés de façon que la somme des nombres se trouvant sur chaque cercle concentrique et sur chaque rayon soit toujours la même.



GROUPE essais ajustements

ES8.

Le milieu du segment

Soient d_1 et d_2 deux demi-droites de même origine O et soit P un point contenu dans le secteur angulaire défini par ces deux demi-droites. Déterminer deux points M et N respectivement sur d_1 et d_2 tels que P soit le milieu du segment (MN) .

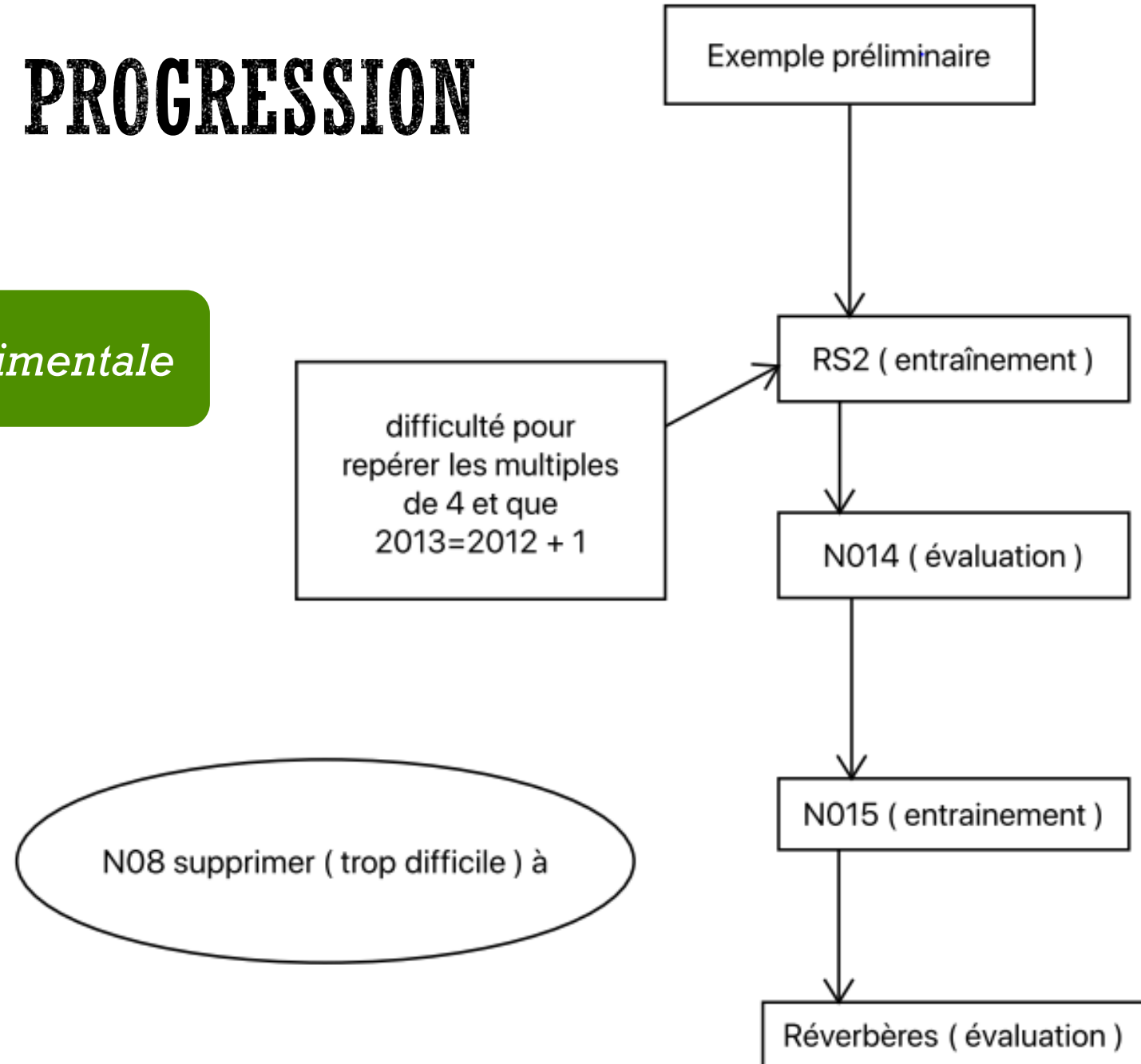
ES7.

Géométrie minimaliste

Soient d_1 et d_2 deux demi-droites de même origine O et soit P un point contenu dans le secteur angulaire défini par ces deux demi-droites. Construire le triangle de plus petit périmètre, de sommet P et dont les deux autres sommets sont respectivement sur chacune des demi-droites.

PROPOSITION DE PROGRESSION

GROUPE *démarche expérimentale*



PROPOSITION DE PROGRESSION

GROUPE *Implication logique*

PERIODE 1

- RS 6 (À utiliser pour institutionaliser les tableaux)
RS 3 (À nécessité de revenir sur les données)
RS 1 → (avec narration à terminer en devoir)

PERIODE 2

corrections narrations et mise en commun

PERIODE 3 + 4

- Evaluation: • RS 5 avec des traces de la demande mais sans narration
• RS 10 avec narration.

CONTENU DU RECYCLAGE

Limites de la classification actuelle

Présentation des modes de
raisonnement

Appropriation des modes de
raisonnement

Planification par mode de
raisonnement

Implication
logique

Hypothético-
déductif

Exhaustivité
des cas

Essais
ajustements

Démarche
expérimentale

*Un mode de raisonnement par groupe
puis mutualisation du travail de chaque groupe*

CONTENU DU RECYCLAGE

Limites de la classification actuelle

Présentation des modes de
raisonnement

Appropriation des modes de
raisonnement

Planification par mode de
raisonnement

Implication
logique

Hypothético-
déductif

Exhaustivité
des cas

Essais
ajustements

Démarche
expérimentale

*Un mode de raisonnement par groupe
puis mutualisation du travail de chaque groupe*

Réflexion sur la planification
annuelle

QUESTION DE LA PLANIFICATION



...

A L'ISSUE DU RECYCLAGE

Les participants repartent avec :

- Des **critères mathématiques de classement** et d'**organisation** des problèmes en terme d'apprentissage qu'ils ont pu s'approprier
- Une sélection de problèmes classés par objectif d'apprentissage

issus des ressources institutionnelles

- Chapitre R&S 10^e

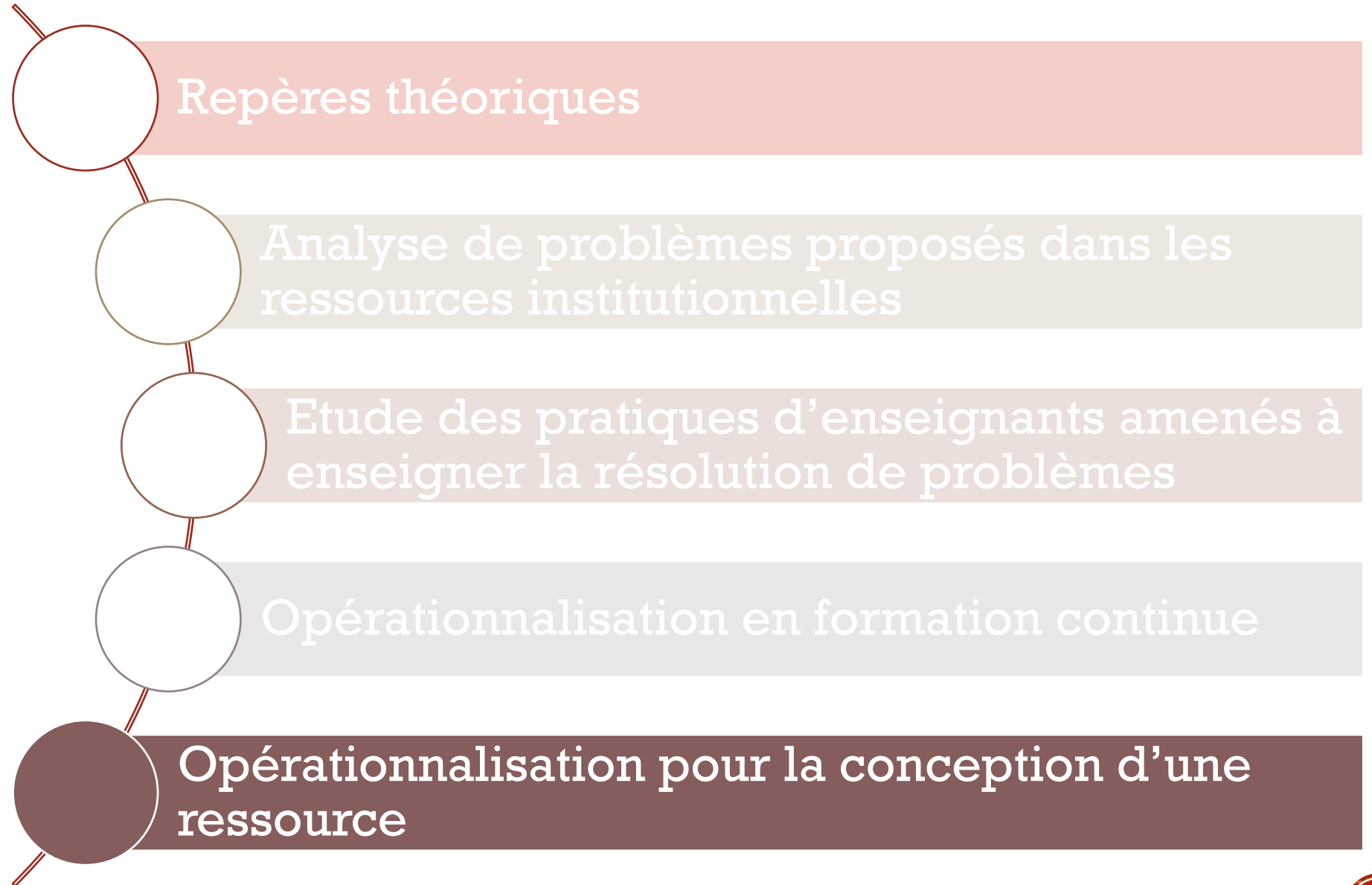
- Réserve activités cours DMS

+

problèmes
complémentaires

- Des éléments de réflexion pour élaborer une planification annuelle

PLAN



CONCEPTION D'UNE RESSOURCE À DESTINATION DES ENSEIGNANTS DE DMS

Analyse, élimination ou reformulation des problèmes

Classement des problèmes en fonction des MR

Ajout de nouveaux problèmes en veillant à l'équilibre
des MR représentés et aux objectifs du cours

Expérimentations

Mise en forme de la
ressource

Tests de certains
problèmes en classe

CONCEPTION D'UNE RESSOURCE À DESTINATION DES ENSEIGNANTS DE DMS

Pour chaque problème, quels éléments intégrer ?

- le MR et/ou MP ?
- une solution ?
- des exemples de productions d'élèves ?
- des difficultés d'élèves ?

Quels éléments pour favoriser l'appropriation en dehors du cadre de FC ?

- définitions des MR / MP et ???
- illustration par certains problèmes

Organisation de l'ensemble des problèmes :

- par type de MR ou MP ?
- sous forme de planification ?
- suggestion de problème pour l'évaluation
- suggestion d'institutionnalisation

Merci de votre attention



BIBLIOGRAPHIE

- Chanudet, M. (2019). *Étude des pratiques évaluatives des enseignants dans le cadre d'un enseignement centré sur la résolution de problèmes en mathématiques* (Thèse de doctorat en sciences de l'éducation). Université de Genève.
- Gardes, M.- L. (2013). *Étude de processus de recherche de chercheurs, élèves et étudiants, engagés dans la recherche d'un problème non résolu en théorie des nombres* (Thèse de doctorat en mathématiques générales). Université C. Bernard Lyon 1
- Houdement, C. (2009). Une place pour les problèmes pour chercher. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 14, 31-59.
- Jeannotte, D. (2015). *Raisonnement mathématique : Proposition d'un modèle conceptuel pour l'apprentissage et l'enseignement au primaire et au secondaire* (Thèse de doctorat en éducation). Université du Québec, Montréal.