Analyse des problèmes ARP (cycle 2) du point de vue de l'activité mathématique

Atelier GRFDM

Mickael Da Ronch (HEP-VS), Marie-Line Gardes (HEP-VD) &
Ismaïl Mili (Uni-FR)

HEP | PH FR

HEPVS | PHVS
Haute école pédagogique du Valais
Pädagogische Hochschule Wallis

hep/ haute école pédagogique vaud

Le plus grand produit

Parmi les décompositions additives d'un entier naturel, trouver celle(s) dont le produit des termes est le plus grand.

Le nombre 23 peut s'écrire de plusieurs façons comme la somme d'entiers : par exemple, $23 = 11+5+7$.
Trouver parmi ces sommes, celle dont le produit des termes est maximum.
Et avec d'autres nombres ?

Le plus grand produit

? A-t-on fait des maths ? Lesquelles ? Et pourquoi ?

Conjecture

Généralisation

Formulation

Preuve

Expérimentation

Décomposition des nombres

Validation

Propriété des opérations

Division euclidienne

Argumentation

Le plus grand produit

0 - L 75 Le plus grand produit

a) Choisis des nombres naturels dont la somme est 25.
Calcule le produit de ces nombres.

b) Choisis d'autres nombres, dont la somme est toujours 25, mais dont le produit est plus grand que le précédent.

Quel est le plus grand produit que l'on peut obtenir ?

Enjeu

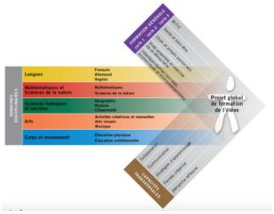
Comprendre le vocabulaire mathématique lié aux opérations.

ARP

- Utiliser la stratégie « Ajustements d'essais successifs »
- Utiliser la stratégie « Recherche de toutes les solutions »

Le plus grand produit

Nombres	*Opérations*
MSN 22 Poser et résoudre des problèmes pour construire et structurer des représentations des nombres rationnels… **Mathématiques**	**MSN 23** Résoudre des problèmes additifs et multiplicatifs… **Mathématiques**



ÉLÉMENTS POUR LA RÉSOLUTION DE PROBLÈMES

Résolution de problèmes numériques en lien avec les ensembles de nombres travaillés, l'écriture de ces nombres et les opérations étudiées, notamment : (A, B, C, D, E, F, G)

- tri et organisation des informations *(liste, tableau, schéma, croquis,…)*
- mise en œuvre d'une démarche de résolution
- ajustement d'essais successifs
- pose d'une conjecture, puis validation ou réfutation
- déduction d'une ou plusieurs informations nouvelles à partir de celles qui sont connues
- réduction temporaire de la complexité d'un problème
- vérification, puis communication d'une démarche et d'un résultat en utilisant un vocabulaire, une syntaxe ainsi que des symboles adéquats
- acceptation ou refus d'un résultat par l'estimation de l'ordre de grandeur, la connaissance des opérations ou la confrontation au réel ¶

- Traduction des données d'un problème en opérations arithmétiques, en utilisant au besoin des parenthèses : additions, soustractions, multiplications et divisions
- Utilisation des propriétés de l'addition et de la multiplication (commutativité, associativité, distributivité), et décomposition des nombres (additive, soustractive, multiplicative) pour organiser et effectuer des calculs de manière efficace ainsi que pour donner des estimations

Le plus grand produit

Source originale : Arsac, G., & Mante, M. (2007). *Les pratiques du problème ouvert*. Lyon, France: SCEREN-CRDP Académie de Lyon.

Site du Groupe DREAM : https://math.univ-lyon1.fr/dream/

https://math.univ-lyon1.fr/dream/?page_id=1368

Activité mathématique : de quoi parle-t-on ?

- Résoudre des problèmes (Brousseau, 1997 ; Chevallard, 1998 ; Halmos, 1980 ; Thurston, 1994)
- Accepter une certaine forme de responsabilité scientifique face à l'enjeu de vérité et de la nécessité de la preuve (Da Ronch, 2022 ; Gandit, 2008)
- Différentes composantes : expérimentation, formulation et validation (Brousseau, 1997)
- Mobilisation de connaissances mathématiques spécifiques

Que dit le PER sur l'activité mathématique ?

Activité mathématique : et dans le PER ?

Le Plan d'Etudes Romand (PER) met l'emphase sur la résolution de problèmes et certaines composantes de l'activité mathématique.

C'est dans ces buts que le domaine choisit de développer la résolution de problèmes et la posture scientifique. Elles visent, toutes deux, à permettre aux élèves :

- d'acquérir un certain nombre de notions, de concepts et de modèles scientifiques développés progressivement par l'humanité et de réaliser la manière dont les savoirs scientifiques se sont construits ;
- d'identifier des questions, de développer progressivement la capacité de problématiser des situations, de mobiliser des outils et des démarches, de tirer des conclusions fondées sur des faits, notamment en vue de comprendre le monde naturel et de prendre des décisions à son propos, ainsi que de comprendre les changements qui sont apportés par l'activité humaine ;
- de se montrer capable d'évaluer des faits, de faire la distinction entre théories et observations, et d'estimer le degré de confiance que l'on peut avoir dans les explications proposées.

adéquat à la résolution des problèmes issus de ces disciplines. Elles promeuvent enfin une attitude de recherche par essai-erreur, généralisation, conjecture et validation. En cela, leur pratique développe des capacités d'imaginer des stratégies, d'organiser et de structurer des savoirs, de faire des liens entre les champs de connaissance, compétences porteuses d'un certain type de créativité.

Notre question d’étude

?

Existe-t-il dans les MER des énoncés qui permettent de travailler ces pans de l’activité mathématique mentionnés dans le PER ?

Le cas échéant, sous quelles conditions ?

Notre question d'étude

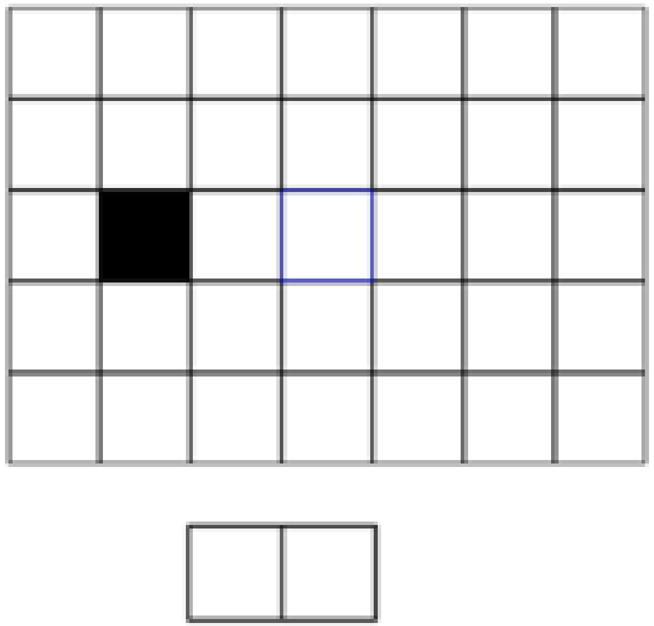
- **Corpus important** : analyse *a priori* trop « couteuse », besoin d'un critère « plus économique »

- **Critère « candidat »** : nature des variables présentes dans l'énoncé

Nature des variables

- Une **variable de recherche** est un paramètre du problème qui n’est pas fixé initialement dans l’énoncé ou par l’enseignant mais qui est à la charge de l’élève. (Godot, 2005 ; Da Ronch, 2022)

- Une **variable didactique est un paramètre** d’une situation d’apprentissage que l’enseignant peut faire varier pour influencer la manière dont les élèves vont interagir avec le problème proposé. (Brousseau, 1998)



Pourquoi ce critère-là ?

Variable de recherche
À la charge de l'élève

↓

Une condition nécessaire pour déclencher une activité mathématique

- avec des boucles itératives d'expérimentation, formulation et validation
- mise en œuvre

à la charge de l'élève

Potentiel fort

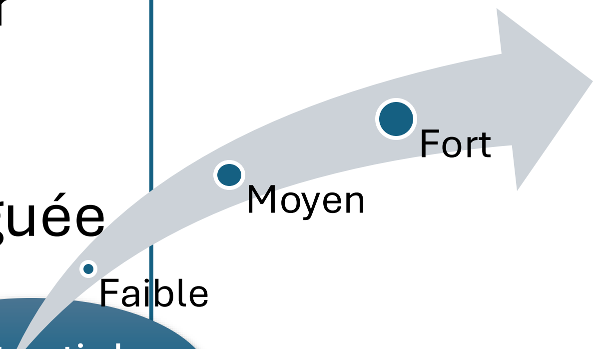
Variable didactique
À la charge de l'enseignant

↓

Certaines valeurs peuvent déclencher une activité mathématique

- mise en œuvre « guidée » par l'enseignant ou les consignes dispensées

→ La responsabilité est déléguée par les choix de l'enseignant.



Potentiel **à discuter**

Quels indicateurs pour ce critère ?

Nature des variables présentes dans l'énoncé

Code 3 : existence d'une variable de recherche dans l'énoncé du problème

Parmi les décompositions additives d'un entier naturel, trouver celle(s) dont le produit des termes est le plus grand.

Quels indicateurs pour ce critère ?

Nature des variables présentes dans l'énoncé

Code 2 : présence d'une variable didactique avec plusieurs valeurs dans l'énoncé du problème

La corde à nœuds

« À l'aide de la corde à nœuds que vous avez reçue, quels sont les différents triangles dont chaque sommet est l'un des nœuds que l'on peut réaliser ? Notez sur votre feuille les informations nécessaires pour présenter les résultats de votre recherche une fois revenus en classe. Vous n'aurez plus alors la corde avec vous. »

« À l'aide de la corde à nœuds que vous avez reçue, quels sont les différents quadrilatères que l'on peut réaliser ? Notez sur la feuille tous ceux que vous pouvez construire ainsi que leur nom le plus précis. »

Quels indicateurs pour ce critère ?

Nature des variables présentes dans l'énoncé

Code 1 : présence d'une variable didactique avec une valeur fixée dans l'énoncé mais qui peut être modifiée par l'enseignant

0 - L 75 Le plus grand produit

a) Choisis des nombres naturels dont la somme est 25.
Calcule le produit de ces nombres.

b) Choisis d'autres nombres, dont la somme est toujours 25, mais dont le produit est plus grand que le précédent.

Quel est le plus grand produit que l'on peut obtenir ?

Quels indicateurs pour ce critère ?

Nature des variables présentes dans l'énoncé

Code 0 : présence de variable mais dont le changement de valeur modifie le savoir visé

Résous ces problèmes en notant dans ton cahier les calculs que tu fais.

A. Célia achète deux croissants à 1.10 franc pièce, un pain à 4.50 francs et une pâtisserie pour son dessert.
Elle paye avec un billet de 20 francs et elle reçoit 9.80 francs en retour.
Quel est le prix de sa pâtisserie ?

De nouvelles questions d’étude

La construction de ce critère soulève deux questions :

1) Ce critère est-il **fiable** ?

→ *A-t-on des résultats similaires entre codeurs différents ?*

2) Ce critère est-il **valide** ?

→ *Ce critère suffit-il et permet-il de prédire l’activité des élèves ?*

A vous de jouer !

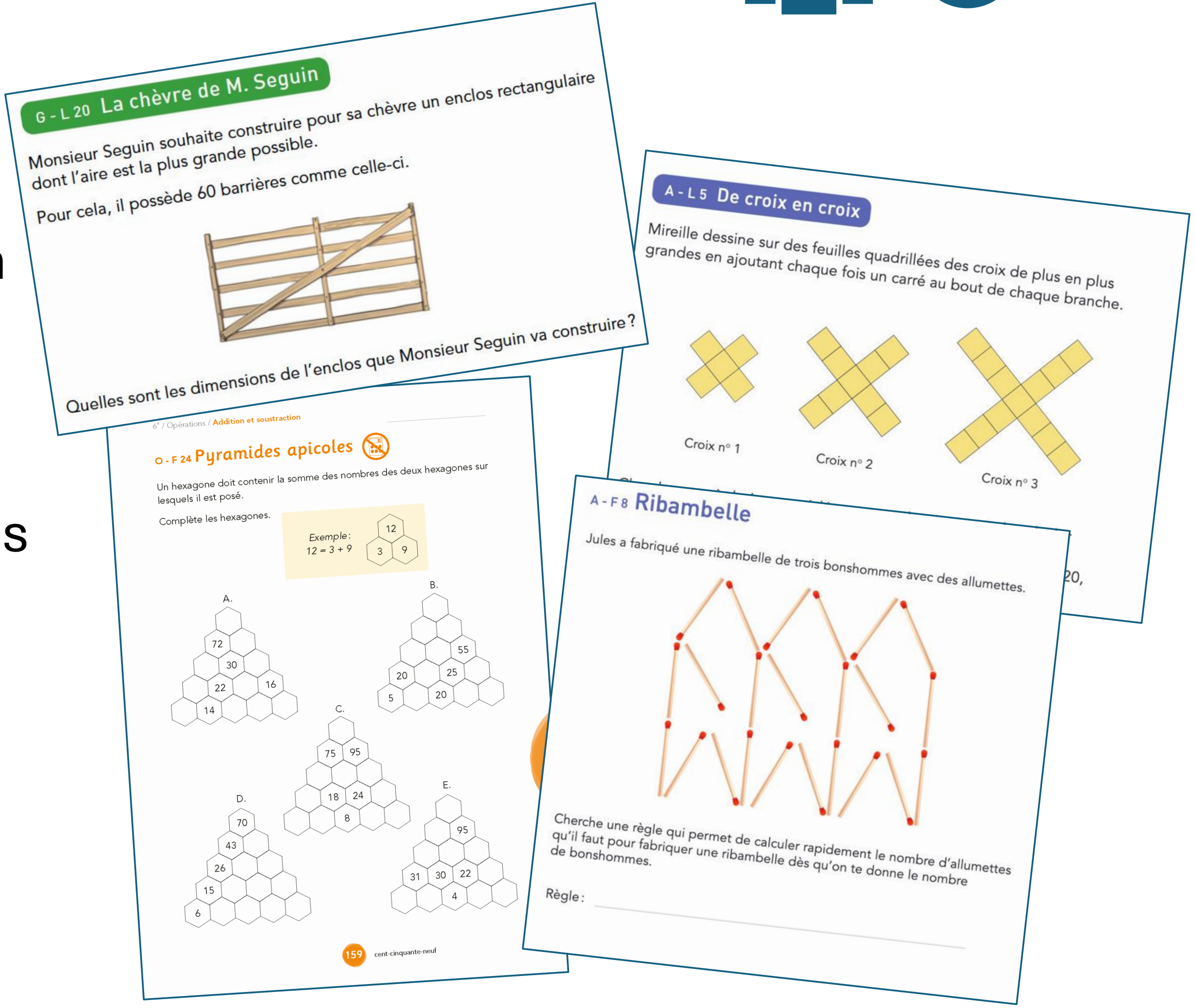
8H – Espace : La chèvre de M.Seguin

7H – ARP : De croix en croix

5H – Opérations : Pyramides apicoles

7H – ARP : Ribambelle

...et plus si affinités !



...et plus si affinités !

O-L 55 Achats de livres	• 5H – Opérations : Achats de livres
G-L 4 Quelle bille est l'intruse ?	• 5H – Grandeurs et Mesures : Quelle bille est l'intruse ?
Tous les nombres	• 6H – ARP : Tous les nombres
A-L 1 Les bracelets d'Annie	• 6H – ARP : Les bracelets d'Annie
N-L 10 Code secret	• 6H – Nombres : Code secret
N - L 15 Le moins d'opérations	• 7H – Nombres : Le moins d'opérations
E - F 27 Côté commun	• 8H – Espace : Côté commun

Discussion

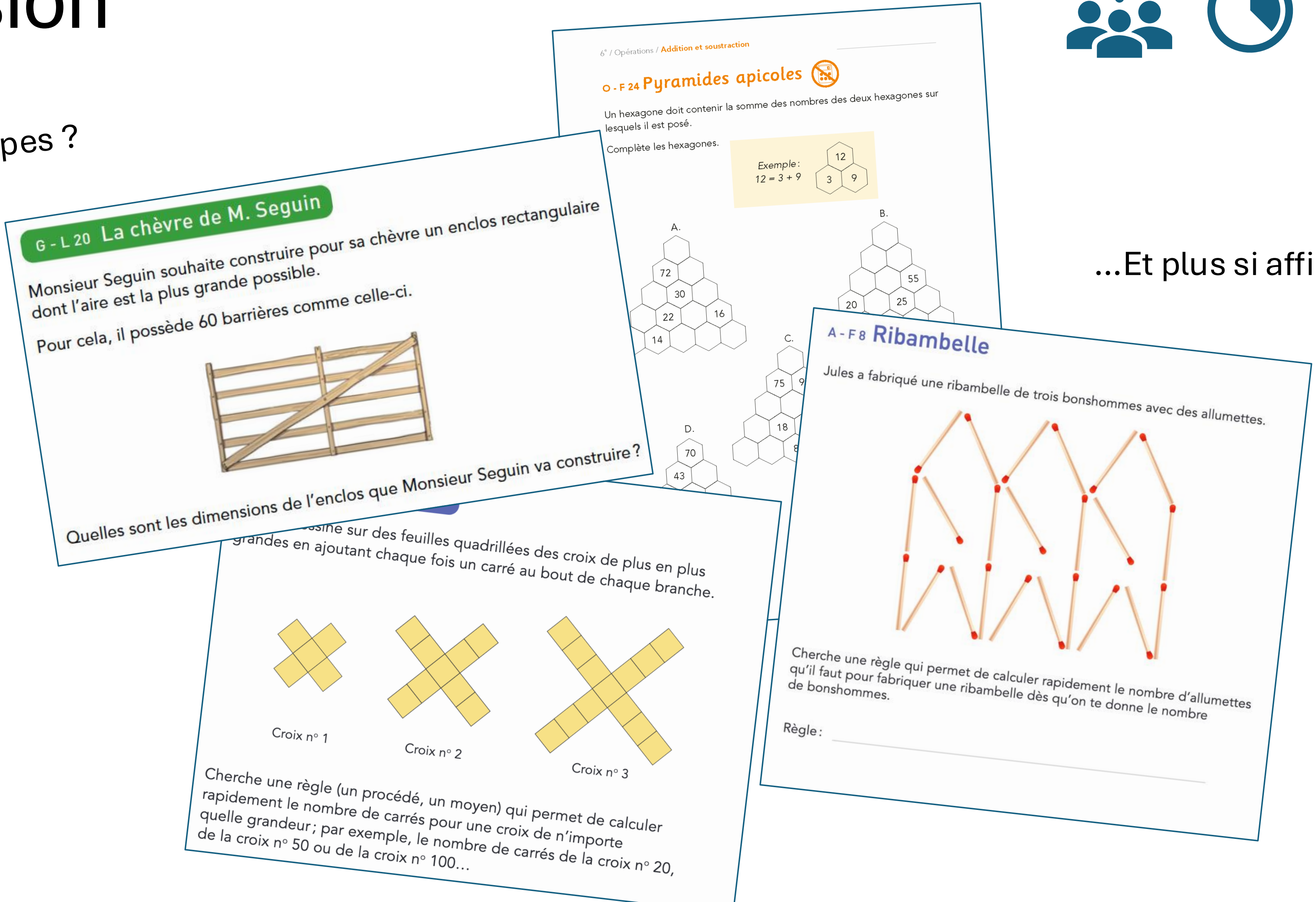
Débat dans les groupes ?

Difficultés pour coder ?

Des questions sur le critère ?

D'autres retours ?

...Et plus si affinités !



6e / Opérations / Addition et soustraction

O - F 24 Pyramides apicoles

Un hexagone doit contenir la somme des nombres des deux hexagones sur lesquels il est posé.

Complète les hexagones.

Exemple : 12 = 3 + 9

G - L 20 La chèvre de M. Seguin

Monsieur Seguin souhaite construire pour sa chèvre un enclos rectangulaire dont l'aire est la plus grande possible.

Pour cela, il possède 60 barrières comme celle-ci.

Quelles sont les dimensions de l'enclos que Monsieur Seguin va construire ?

ssine sur des feuilles quadrillées des croix de plus en plus grandes en ajoutant chaque fois un carré au bout de chaque branche.

Croix n° 1

Croix n° 2

Croix n° 3

Cherche une règle (un procédé, un moyen) qui permet de calculer rapidement le nombre de carrés pour une croix de n'importe quelle grandeur ; par exemple, le nombre de carrés de la croix n° 20, de la croix n° 50 ou de la croix n° 100...

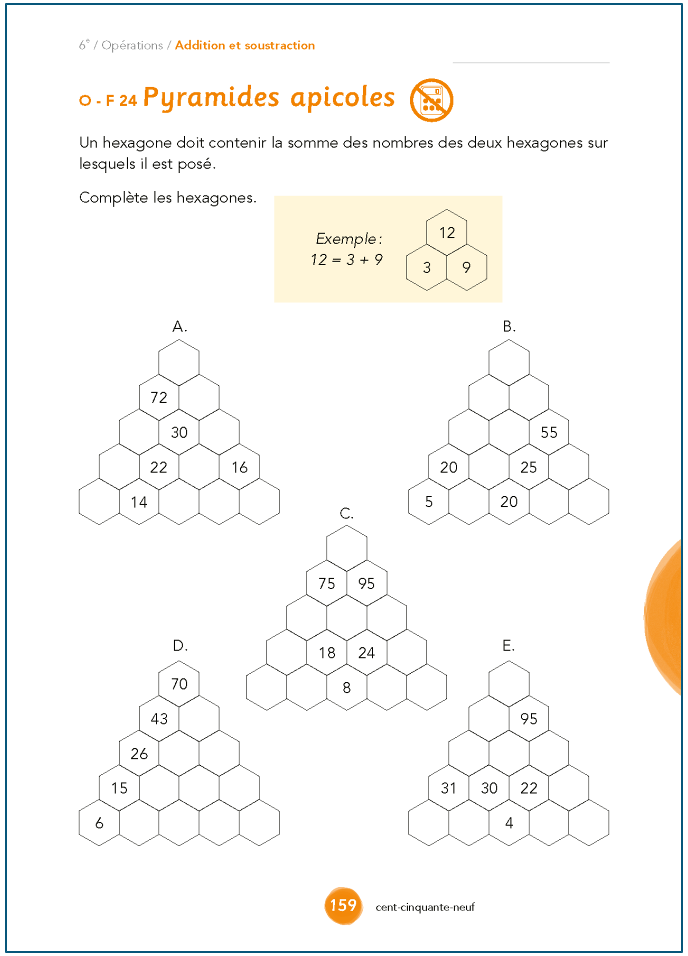
A - F 8 Ribambelle

Jules a fabriqué une ribambelle de trois bonshommes avec des allumettes.

Cherche une règle qui permet de calculer rapidement le nombre d'allumettes qu'il faut pour fabriquer une ribambelle dès qu'on te donne le nombre de bonshommes.

Règle :

Discussion


6e / Opérations / Addition et soustraction

O - F 24 Pyramides apicoles

Un hexagone doit contenir la somme des nombres des deux hexagones sur lesquels il est posé.

Complète les hexagones.

159 cent-cinquante-neuf

Code 0 : présence de variable mais dont le changement de valeur modifie le savoir visé

G - L 20 La chèvre de M. Seguin

Monsieur Seguin souhaite construire pour sa chèvre un enclos rectangulaire dont l'aire est la plus grande possible.

Pour cela, il possède 60 barrières comme celle-ci.

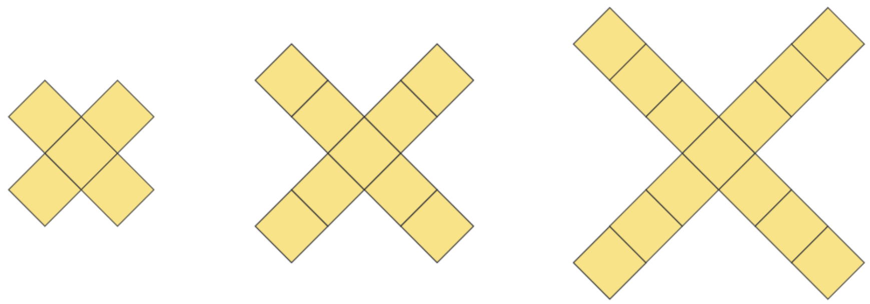
Quelles sont les dimensions de l'enclos que Monsieur Seguin va construire ?

Code 1 : présence d'une variable didactique avec une valeur fixée dans l'énoncé mais qui peut être modifiée par l'enseignant

Discussion

A - L 5 De croix en croix

Mireille dessine sur des feuilles quadrillées des croix de plus en plus grandes en ajoutant chaque fois un carré au bout de chaque branche.



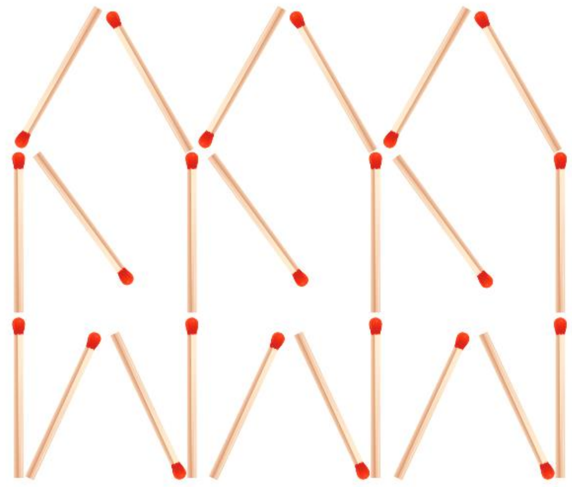
Croix n° 1 Croix n° 2 Croix n° 3

Cherche une règle (un procédé, un moyen) qui permet de calculer rapidement le nombre de carrés pour une croix de n'importe quelle grandeur ; par exemple, le nombre de carrés de la croix n° 20, de la croix n° 50 ou de la croix n° 100…

Code 2 : présence d'une variable didactique avec plusieurs valeurs dans l'énoncé du problème

A - F 8 Ribambelle

Jules a fabriqué une ribambelle de trois bonshommes avec des allumettes.



Cherche une règle qui permet de calculer rapidement le nombre d'allumettes qu'il faut pour fabriquer une ribambelle dès qu'on te donne le nombre de bonshommes.

Règle : ____________________

Code 3 : existence d'une variable de recherche dans l'énoncé du problème

Méthode

- Analyse de l’ensemble des énoncés ARP du cycle II : **312 énoncés**
- Codage en parallèle par les trois auteurs, avec un **échantillon initial de 10 items** par degré à des fins de calibrage
- **Fiabilité** (vue comme similitude inter-codeurs) mesurée avec le coeff. Kappa de Fleiss qui détermine cet accord sur des catégories discrètes – échelle de 0 à 1 (Fleiss, 1971)
- Dimensions de l’étude (4 catégories pour 312 énoncés) dans le domaine d’application du test
- **Interprétation** : correspondance jugée significative si $\kappa > 0{,}41$, importante si $\kappa > 0.61$ (voir table de Landis and Koch, 1977)
- **Test de significativité** : calcul de la **P-**valeur indiquant si l'accord est significatif

Résultats

- **268** énoncés codés de manière identique par les trois codeurs.
- **44** énoncés ont été codés avec différents codages :
  - Toujours 2 codeurs en accord
  - Différence de codage de 1 dans chacun de ces cas
- **Proportion** significative d’accord (P_acc) entre codeurs **(P_acc≈86%)**
- Utilisation du ***Kappa de Fleiss non pondéré***
- **Interprétation :** fiabilité importante de nos critères avec **$\kappa \approx 0.7$** sur l’ensemble du corpus
- **Test de significativité : p-**valeur**=0 (<0,05)**

```
> kappa_result <- kappam.fleiss(data)
> print(kappa_result)
 Fleiss' Kappa for m Raters

 Subjects = 311
   Raters = 3
    Kappa = 0.69

        z = 23.1
  p-value = 0
```

Résultats

Répartition des énoncés

	Code 3	Code 2	Code 1	Code 0	Total	Remarques
5H	0	0	11	63	**74**	10 énoncés avec solutions multiples (jamais mentionnées)
6H	0	1	8	59	**68**	13 énoncés avec solution multiples, 5 énoncés avec solutions multiples où on impose de ne trouver qu'une solution
7H	1	3	10	77	**91**	Les énoncés codés 2 et 3 sont tous dans ARP (Chap 2 ; AV 4) – *Problème de Pattern*
8H	0	1	10	68	**79**	15 énoncés avec solutions multiples

Des problèmes ?

DÉFINITION : UN PROBLÈME, C'EST DIFFICILE, ÇA RÉSISTE

XIVe siècle. Emprunté, par l'intermédiaire du latin problema, « problème, question à résoudre », du grec problêma, « saillie, promontoire », puis « tâche, question, problème », lui-même dérivé de proballein, « jeter devant soi, lancer », puis « proposer une tâche, poser une question ». (Dictionnaire de l'académie française)

Une question mathématique

Problème

Dimension cognitive
Robuste et abordable

La situation doit véritablement poser « problème » à la personne qui la découvre : si la personne connaît d'emblée la démarche qui lui fournira la réponse, il n'y a pas de problème à résoudre. Cela signifie donc que la situation seule ne suffit pas pour définir le problème. D'autres facteurs doivent également être pris en compte : les acquis de la personne qui découvre la situation, le contexte dans lequel elle se trouve, les apprentissages qui ont été réalisés au préalable. (Fagnant & Demonty, 2016 p. 10)

Dimension didactique
Connaissances des élèves

Dimension épistémologique

Activité mathématique

Conclusion

Sur le critère

- Critère fiable
- Critère efficient et opérationnel
- Transférable à d'autres chercheurs et sur d'autres corpus

Sur le corpus

- Peu d'énoncés à fort potentiel pour développer une activité mathématique
- Si potentiel il y a, concentré sur un seul type de tâche (Problème de Pattern)
- Besoin de gestes professionnels forts pour déclencher une activité math chez les élèves

Ouvertures

1) Il reste à déterminer si ce critère est **valide** (en termes prédictifs : l’activité des élèves correspond-elle à ce qui est anticipé ?)

2) Pour peu que les résultats obtenus s’avèrent vérifiés dans les classes, besoin de les décliner dans la formation des enseignants : comment outiller les (futurs) enseignants pour **moduler les activités proposées dans les MER** afin de travailler les pans requis de l’activité mathématique (PER) ?

Merci

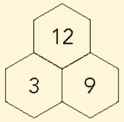
5P – Code 0 - Opérations

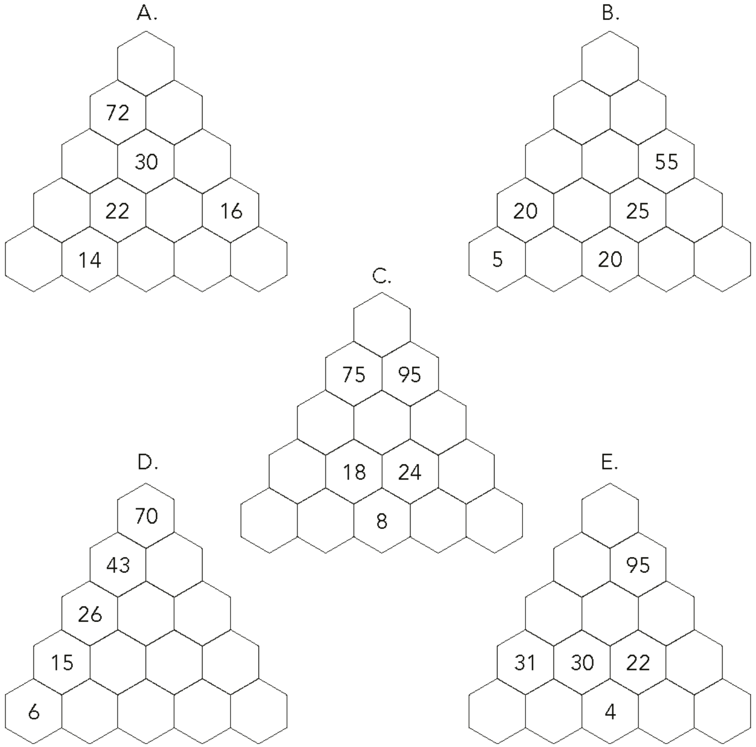
O - F 24 Pyramides apicoles

Un hexagone doit contenir la somme des nombres des deux hexagones sur lesquels il est posé.

Complète les hexagones.

Exemple :
12 = 3 + 9

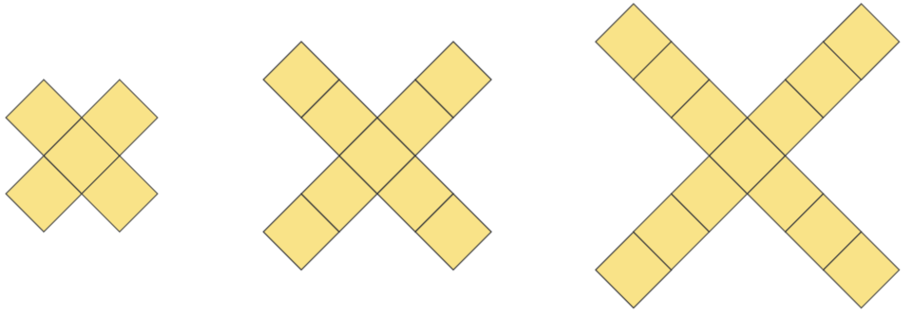




7P – Code 2 - ARP

A - L 5 De croix en croix

Mireille dessine sur des feuilles quadrillées des croix de plus en plus grandes en ajoutant chaque fois un carré au bout de chaque branche.



Croix n° 1 Croix n° 2 Croix n° 3

Cherche une règle (un procédé, un moyen) qui permet de calculer rapidement le nombre de carrés pour une croix de n'importe quelle grandeur ; par exemple, le nombre de carrés de la croix n° 20, de la croix n° 50 ou de la croix n° 100…

8P – Code 1 - Espace

G - L 20 La chèvre de M. Seguin

Monsieur Seguin souhaite construire pour sa chèvre un enclos rectangulaire dont l'aire est la plus grande possible.

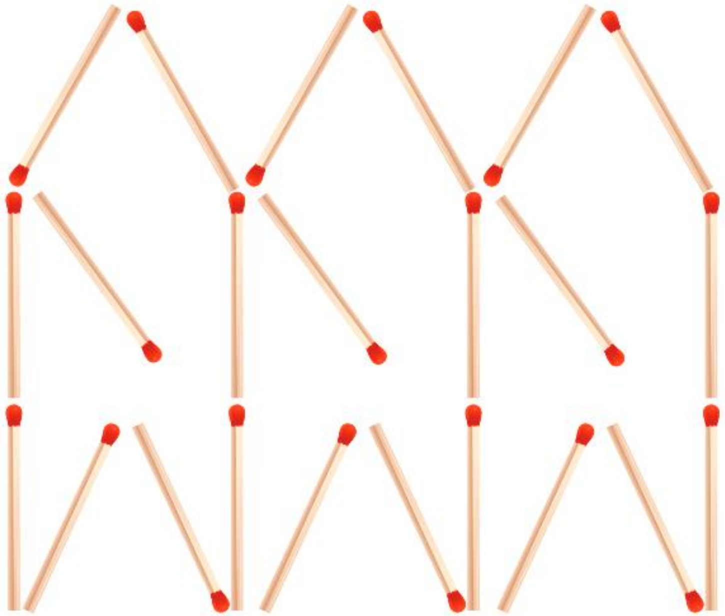
Pour cela, il possède 60 barrières comme celle-ci.

Quelles sont les dimensions de l'enclos que Monsieur Seguin va construire ?

7P – Code 3 - ARP

A - F 8 Ribambelle

Jules a fabriqué une ribambelle de trois bonshommes avec des allumettes.



Cherche une règle qui permet de calculer rapidement le nombre d'allumettes qu'il faut pour fabriquer une ribambelle dès qu'on te donne le nombre de bonshommes.

Règle : ______________________________

5P – code 0 - Opérations

O-L 55 Achats de livres

Le secrétaire de l'école a acheté des livres pour des classes de l'école.
Voici le tableau qu'il a complété pour cette commande :

Livre	Nombre d'élèves	Classe	Prix du livre
La pomme	22	3e	15 francs
Les douze étoiles	28	4e	11 francs
Vive les maths	25	5e	13 francs

Combien le secrétaire a-t-il payé en tout ?

5P – Code 1 - GM

G-L4 Quelle bille est l'intruse ?

Tu as reçu 6 billes.
Toutes les billes ont la même masse sauf une qui est plus lourde.

Tu disposes d'une balance à deux plateaux.

Comment vas-tu faire pour trouver à coup sûr la bille la plus lourde en faisant le moins de pesées possible ?

6P – Code 0 - N

N-L 10 Code secret

Amélie a un code secret pour ouvrir son coffre à trésors.

- C'est un nombre pair de 4 chiffres.
- Si on additionne les 4 chiffres de ce nombre, on obtient 8.
- Le chiffre des milliers et le chiffre des unités sont les mêmes.
- Si on additionne le chiffre des milliers et le chiffre des unités de ce nombre, on obtient le chiffre des centaines.
- Le chiffre des dizaines est plus petit que le chiffre des centaines.

Quel code permet d'ouvrir le coffre à trésors d'Amélie ?

6P – Code 1 - ARP

A-L 1 Les bracelets d'Annie

A. Annie possède trois bracelets, un vert, un violet et un rose.
Chaque jour, elle les met à son poignet en disposant les couleurs différemment et sans croiser les bracelets, par exemple :

De combien de manières différentes peut-elle les disposer ?

Montre ce que tu fais pour répondre.

B. Annie fabrique un quatrième bracelet jaune.

De combien de manières différentes peut-elle disposer ses quatre bracelets ?

6P – Code 2 - ARP

Tous les nombres

Tous les nombres

Activité précédente | Introduction | Activité suivante

Nombre d'élèves

Individuellement

Consigne (ou règle)

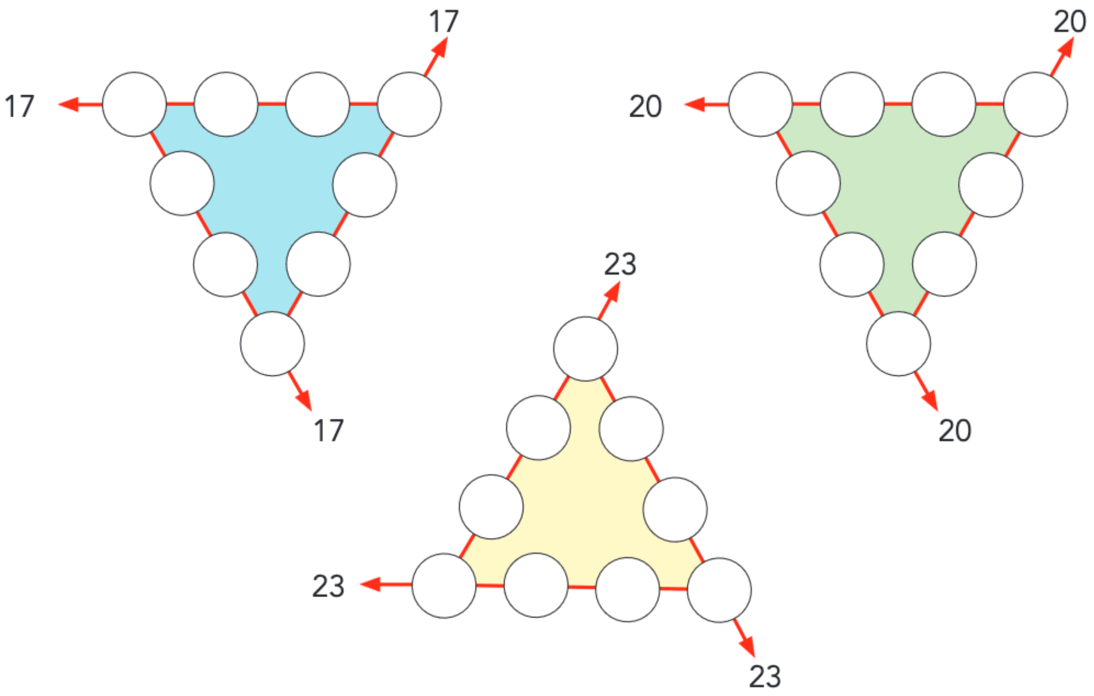
« Écrivez tous les nombres de trois chiffres dont la somme des chiffres est égale à 5. »

7P – Code 0 - Opérations

0 - F 25 Triangles magiques

Dans chacun de ces triangles, il faut placer tous les nombres naturels de 1 à 9 pour que la somme des termes de chaque côté soit la même.

Complète ces triangles en respectant les sommes indiquées.



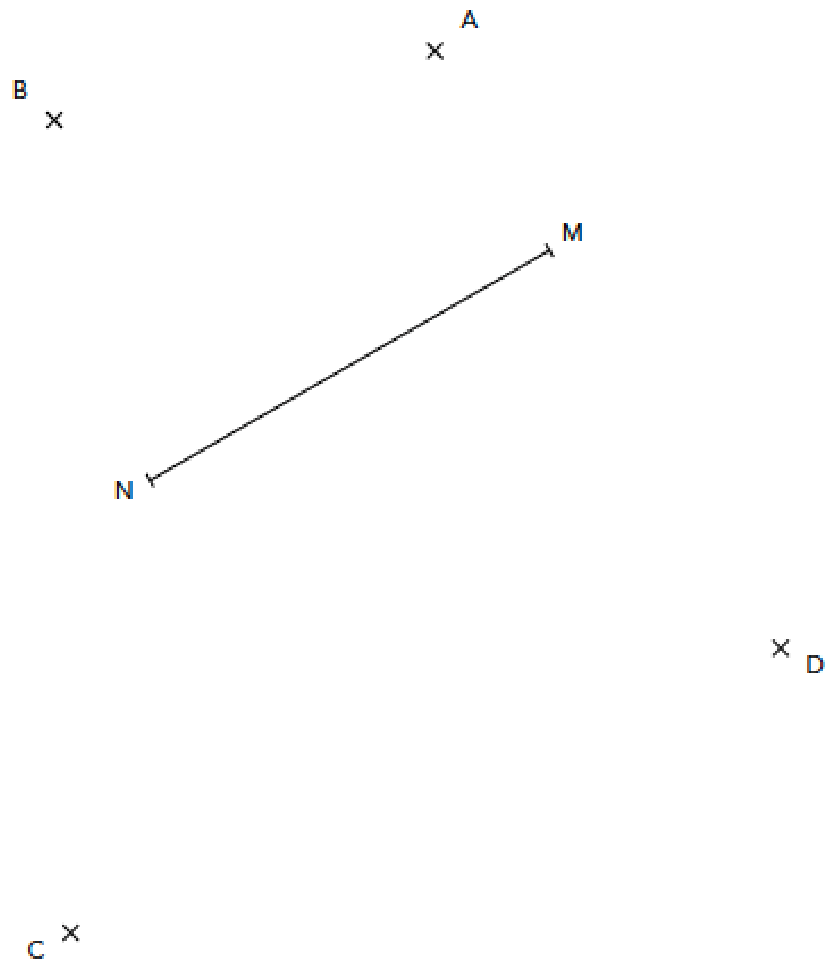
8P – Code 0 - Espace

E - F 27 Côté commun

Construis quatre quadrilatères: un carré, un losange, un trapèze isocèle et un rectangle dont la largeur mesure la moitié de la longueur.

Chacun de ces quadrilatères a un seul côté en commun MN et un troisième sommet déjà dessiné: A, B, C ou D.

Construis-les de couleurs différentes.



8P – Code 2 - GM

« À l'aide de la corde à nœuds que vous avez reçue, quels sont les différents triangles dont chaque sommet est l'un des nœuds que l'on peut réaliser ? Notez sur votre feuille les informations nécessaires pour présenter les résultats de votre recherche une fois revenus en classe. Vous n'aurez plus alors la corde avec vous. »

« À l'aide de la corde à nœuds que vous avez reçue, quels sont les différents quadrilatères que l'on peut réaliser ? Notez sur la feuille tous ceux que vous pouvez construire ainsi que leur nom le plus précis. »

Nombre d'élèves

Par groupes de 3 à 4 élèves

Matériel

Pour chaque groupe

- 1 corde à 13 nœuds (cordelette non élastique de 7 mètres environ avec des nœuds disposés régulièrement tous les demi-mètres) ;

  À la place des nœuds, on peut aussi coller à intervalles réguliers des perles en bois dont le diamètre du trou correspond au diamètre de la cordelette.

  Il est également possible de proposer une corde plus longue avec une distance de 1 mètre entre les nœuds. ;
- feuilles blanches et instruments de géométrie.

7P – Code 1 - Nombres

N - L 15 Le moins d'opérations

A. Écris sur ta calculatrice un nombre de trois chiffres tous différents.

À partir de ce nombre, tu vas devoir effectuer une série d'opérations pour obtenir 0 mais en respectant les règles suivantes :

- tu ne peux utiliser que les touches 1 , 0 , − , + et = ;
- pour chaque opération, tu ne peux utiliser qu'une seule fois la touche + ou la touche − ;
- tu dois faire le moins d'opérations possible.

Note dans ton cahier les calculs que tu fais.

B. Même problème, mais en partant d'un nombre de quatre chiffres tous différents.

C. Même problème, mais en partant d'un nombre de cinq chiffres tous différents.