Le débat en classe de mathématiques

HAUTE ÉCOLE PÉDAGOGIQUE BEJUNE

hep/ haute école pédagogique vaud

UNIVERSITÉ DE GENÈVE
FACULTÉ DE PSYCHOLOGIE ET DES SCIENCES DE L'ÉDUCATION

HEPVS | PHVS
Haute école péda...
Pädagogische Hochschule Wallis

Journées romandes des formatrices et format... didactique des mathématiques

Centre international John Knox - Genève

Valérie Batteau, Jimmy Serment, Jana Trgalová et Christine Scalisi Neyroud

Jeudi 5 février 2026 – 14h-15h30 et 16h - 17h30

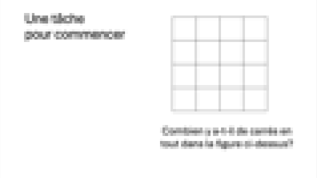
UER MS – HEP Vaud

Objectifs

- POURQUOI : enjeux du débat en classe de mathématiques
- QUOI : débat scientifique, débat mathématique
- COMMENT : conditions pour faire vivre le débat en classe de mathématiques

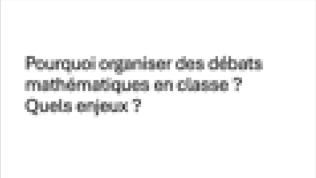
Programme

- Mise en activité

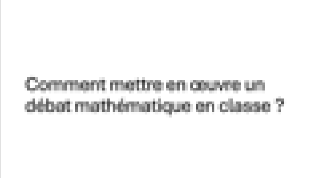


- Preuve

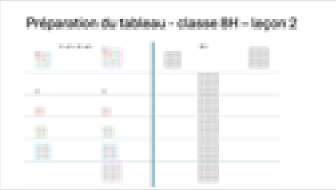
- Apports sur le débat (définition et enjeux)



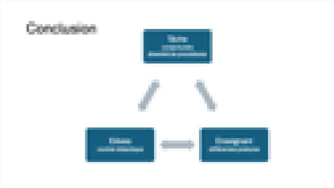
- Mise en œuvre d'un débat en classe et planification du tableau



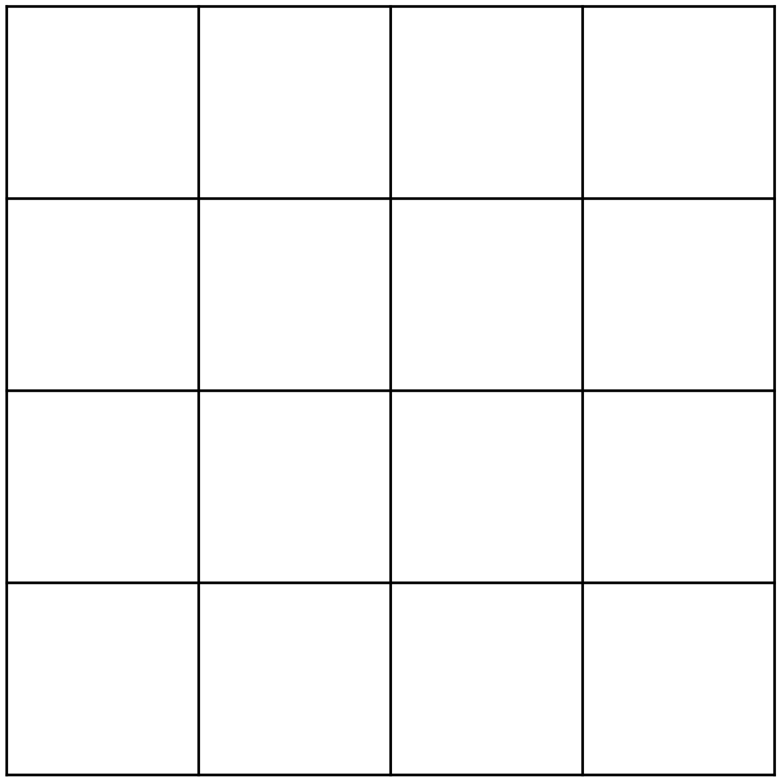
- Témoignages classes



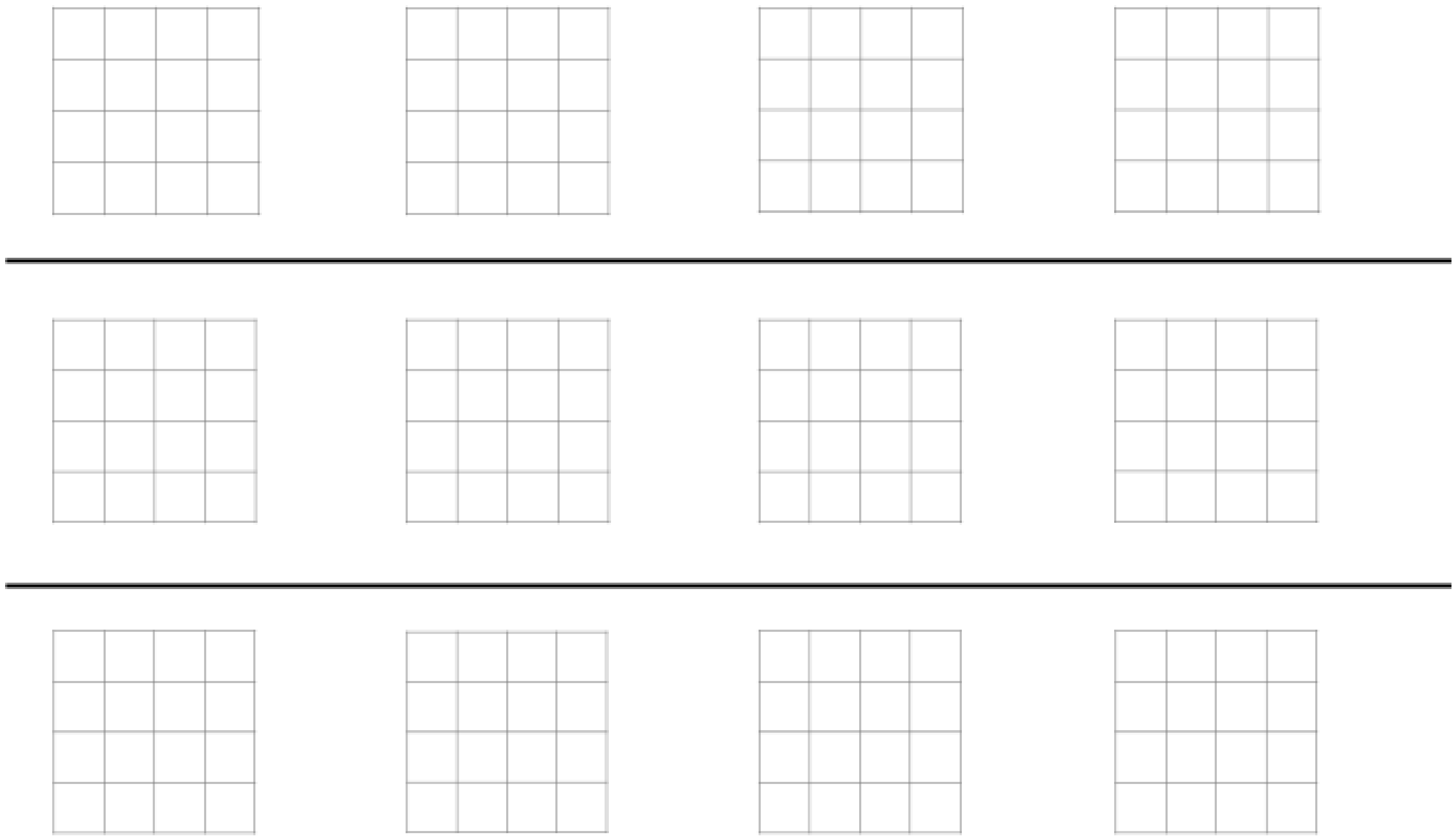
- Conclusion



Une tâche pour commencer

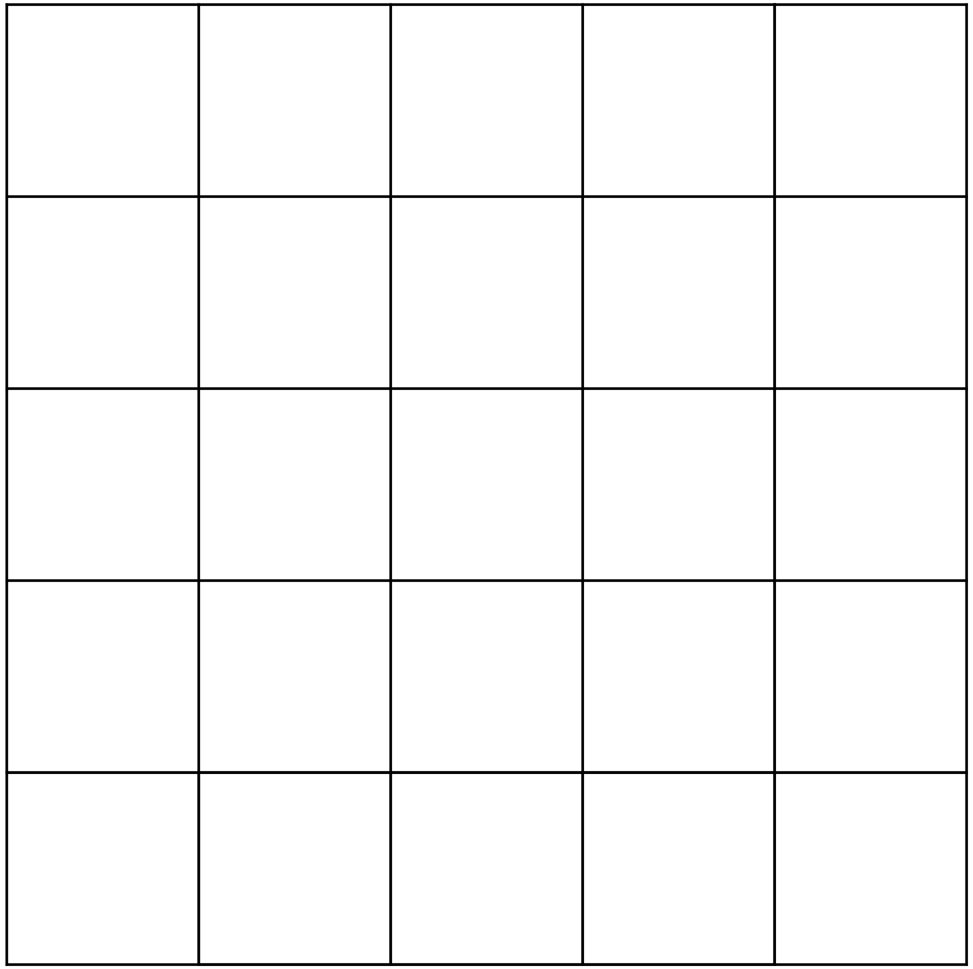


Combien y a-t-il de carrés en tout dans la figure ci-dessus?



Une tâche

Combien y a-t-il de carrés en tout dans la figure ci-contre ?



Questions

Sur quoi peut porter le débat mathématique dans la tâche en classe ?

- sur la validité d’une conjecture
- sur le fait d’être sûr qu’on a bien dénombré ou trouvé tous les carrés
- sur le passage d’un carré de 4 par 4 à un carré de 5 par 5

(Scalisi Neyroud et al., 2025)

Preuve

On prouve la conjecture suivante :

La fonction $f(n) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$ permet de dénombrer tous les carrés dans un carré n par n

Classe de 8H

La preuve repose sur l'analogie entre le raisonnement par récurrence entre 4 et 5 et le raisonnement par récurrence entre n et $n + 1$:

- On prouve pour $n = 1$, $f(1) = 1$
- On suppose que pour $n = 4$, $f(4) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30$
- On prouve que pour $n = 5$, $f(5) = f(4) + 5^2$

Ce raisonnement repose sur le cas $n = 4$ pris comme un exemple générique au sens de Balacheff.

Classe de 9VP

La preuve repose sur des calculs réalisés sur un exemple générique.

Au secondaire 2…

Pour aller plus loin… Par exemple au secondaire 2

- On peut démontrer par récurrence que $f(n) = 12 + 22 + 32 + \cdots + n^2$ avec un raisonnement sur un carré de côté k+1. On utilisera aussi que $1 + 3 + \cdots + (2k + 1)$ $= (k + 1)^2$ qui peut se démontrer également par récurrence.
- Pour calculer $f(n)$ quelle que soit la valeur de n ,

  a) la formule de Faulhaber donne

$$f(n) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$$

  b) Sinon, on cherche le degré du polynôme et ses coefficients. Pour cela, on calcule les dérivées discrètes $(\Delta_1 f)(n) = f(n + 1) - f(n)$ pour trouver le degré (M) du polynôme, puis on résout des équations connaissant les valeurs de $f(n)$

  pour $n = 1; 2; 3; 4$ pour trouver les coefficients du polynôme.

Pour établir que

$$f(n) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$$

n	Nombre de cases	1		2		3		4		5		6
f(n)	Suite trouvée	1 (4)		5		14		30		55		91
f’(n)=f(n+1)-f(n)	1ère différence		4 (3)		9		16		25		36	
f’’(n)=f’(n+1)-f’(n)	2ème différence			5 (2)		7		9		11		
f’’’(n)=f’’(n+1)-f’’(n)	3ème différence				2 (1)		2		2			

Le fait d’arriver à une ligne composée uniquement de nombres identiques nous assure qu’il existe une fonction polynomiale répondant aux conditions du tableau.

Si M est obtenu en 1 étape, la fonction est de la forme $f(n) = an + b$.

Si M est obtenu en 2 étapes, la fonction sera de la forme$f(n) = an^2 + bn + c$.

Si M est obtenu en 3 étapes, la fonction est de la forme $f(n) = an^3 + bn^2 + cn + d$.

M étant le rang où la différence est constante (ici, $M = 3$)

(Genoud, n.d.)

Dans notre cas, M a été obtenu en 3 étapes.
La fonction est donc de la forme $f(n) = an^3 + bn^2 + cn + d$.
D'autre part, on sait que $f(1) = 1, f(2) = 5, f(3) = 14$ et $f(4) = 30$.
D'où on peut tirer un système de 4 équations à 4 inconnues :

$$f(4) = 64a + 16b + 4c + d = 30. f(3) = 27a + 9b + 3c + d = 14. f(2) = 8a + 4b + 2c + d = 5. f(1) = a + b + c + d = 1.$$

1		2		3		4
a+b+c+d (4)		8a+4b+2c+d		27a+9b +3c+d		64a+16b+4c+d
	7a+3b+c (3)		19a+5b+c		37a+7b+c	
		12a+2b (2)		18a+2b		
			6a (1)			

(Genoud, n.d.)

Nombre de cases	1		2		3		4		5		6
Suite trouvée	1 (4)		5		14		30		55		91
1ère différence		4 (3)		9		16		25		36	
2ème différence			5 (2)		7		9		11		
3ème différence				2 (1)		2		2			

1		2		3		4
a+b+c+d (4)		8a+4b+2c+d		27a+9b +3c+d		64a+16b+4c+d
	7a+3b+c (3)		19a+5b+c		37a+7b+c	
		12a+2b (2)		18a+2b		
			6a (1)			

En comparant les deux tableaux, on trouve les valeurs des inconnues :

Des (1), on obtient $6a = 2 => a = \frac{1}{3}$

Des (2), on obtient $12a + 2b = 5 => 4 + 2b = 5 => b = \frac{1}{2}$

Des (3), on obtient $7a + 3b + c = 4 => \frac{7}{3} + \frac{3}{2} + c = 4 => c = \frac{1}{6}$

Des (4), on obtient $a + b + c + d = 1 => d = 0$

Ce qui nous donne la function $f(n) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$

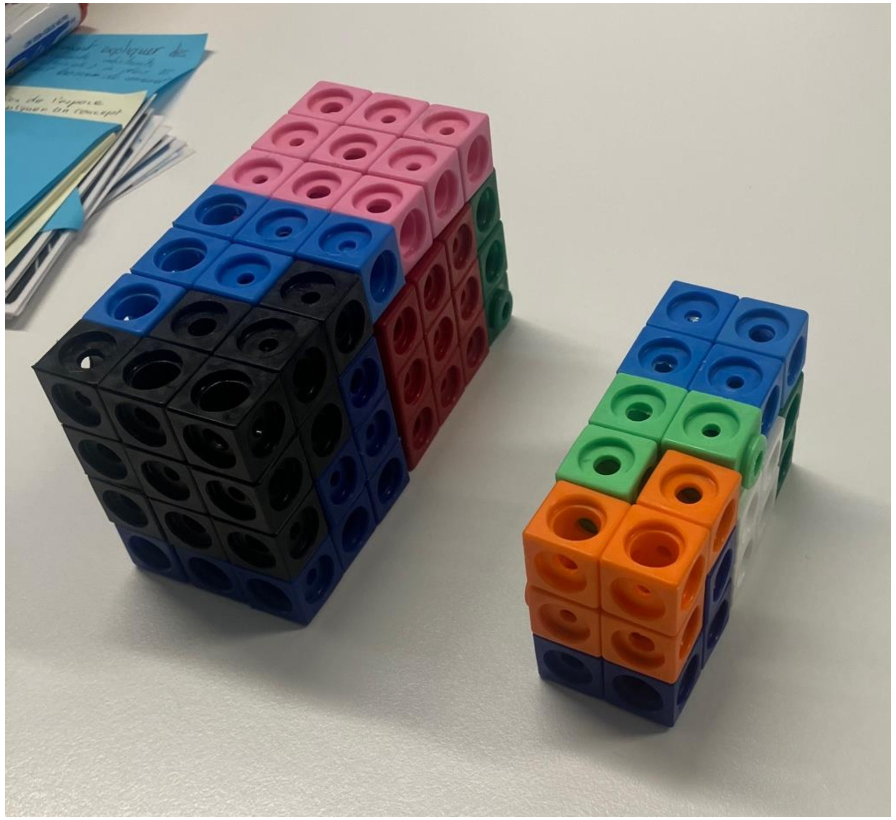
On peut démontrer par calcul algébrique que $f(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ou encore

$f(n) = \frac{n(n+\frac{1}{2})(n+1)}{3}$

(Genoud, n.d.)

X		f(x)	1ère différence		2e différence		3e différence	
1	1	1						
2	1+4	5	5-1	4				
3	1+4+9	14	14-5	9	9-4	5		
4	1+4+9+16	30	30-14	16	16-9	7	7-5	2
5	1+4+9+16+25	55	55-30	25	25-16	9	9-7	2

“Preuve” visuelle



Les cas $n = 3$ et $n = 2$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{\boldsymbol{n(n+1)(2n+1)}}{\boldsymbol{6}}$$

$\boldsymbol{n(n+1)(2n+1)}$ correspond au volume d'un pavé droit de dimensions $n, n+1$ et $2n + 1$

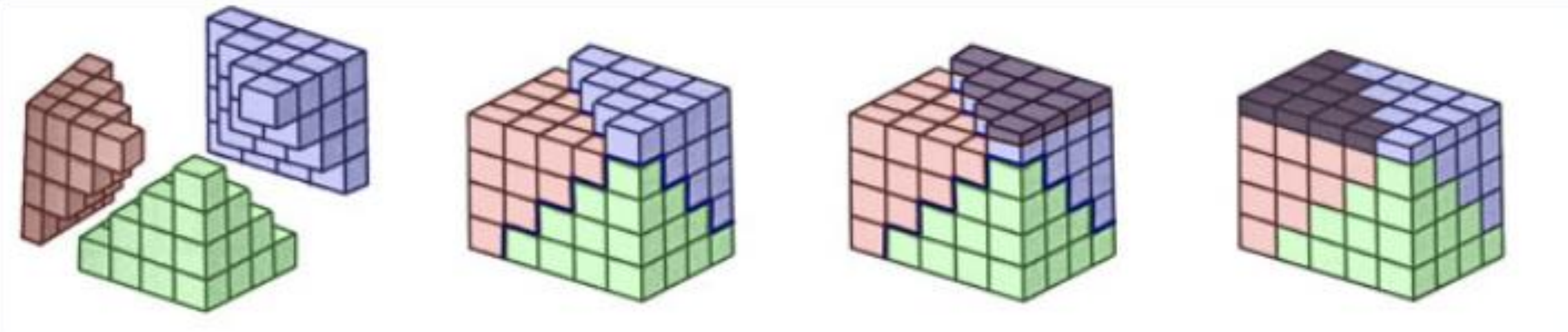
Chacune des pièces constituant le pavé est composée de $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$ petits cubes.

Somme des puissances des entiers [modifier | modifier le code]

Les formules donnant la somme des puissances *k*-ièmes des n premiers entiers (formules de Faulhaber) peuvent être démontrées visuellement pour k = 1, 2 ou 3 ; la jolie preuve visuelle ci-dessous[4] illustre le fait que

$$1+4+9+\cdots+n^2 = \frac{n(n+\frac{1}{2})(n+1)}{3};$$

elle demande cependant une observation plus attentive que la précédente pour être convaincante.



Les trois pyramides ont pour même volume la somme des carrés de 1 à *n* (*n* = 4 dans cette illustration) ; le parallélépipède final est de côtés *n*, *n*+1 et *n*+1/2, d'où la formule de Faulhaber pour la somme des carrés.

Débat

- discussion entre interlocuteurs exposant souvent des idées opposées sur un sujet donné

Débat scientifique

- débat entre membres de la communauté scientifique au sujet d’une question dans le but de trouver un consensus
- les règles d'un débat scientifique reposent sur des arguments scientifiques (pas sur des opinions ou des croyances)

Débat mathématique

- débat entre membres de la communauté mathématique au sujet de la validité d’une conjecture
- un débat mathématique repose sur des règles spécifiques

Le débat, il faut des règles

- Chacun peut (mais personne ne doit) prendre la parole, mais tout le monde doit participer, fut-ce en débat privé et par des hochements de tête.
- Chacun s'adresse à l'ensemble du groupe, et non au formateur :
  - On s'exprime pour être entendu de tous, en se tournant et regardant le groupe.
  - On annonce sa thèse (« Je pense que. . . ») avant de l'argumenter (« Voilà mes raisons. . . »).
- Chacun est soucieux de connaitre l'avis des autres :
  - On écoute avec respect celui qui prend le risque de s'exprimer (pas de débat privé, pas de lecture, ...).
  - On se tourne et regarde le locuteur.
  - On réagit sans détour mais avec respect (« Je ne comprends pas tel argument... », « Je ne suis pas d'accord avec telle affirmation », « Je me trompe peut-être, mais... »)
- On s'interdit les arguments d'autorité (« Moi, en tant que..., je vous dis que... »).
- On peut aller au tableau pour s'expliquer.

(Benaicha et al., 2021)

Débat avec des règles spécifiques (9-11H)

Règles du débat mathématique

Définitions

En mathématiques, pour prouver qu'une affirmation est vraie, on s'appuie sur un certain nombre de règles appelées **règles du débat mathématique**. Voici les principales :

- Une affirmation est soit vraie, soit fausse ; il n'y a pas d'exception.
- Des exemples, même nombreux, qui vérifient une affirmation ne suffisent pas à prouver que cette affirmation est vraie.
- Un contre-exemple suffit à prouver qu'une affirmation est fausse.
- Une mesure sur un dessin ou une constatation « à vue d'œil » ne suffisent pas à prouver qu'une affirmation géométrique est vraie ou fausse.

Un contre-exemple est un exemple qui contredit une affirmation. Il suffit d'un seul contre-exemple pour déclarer fausse une affirmation universelle (du type tous les nombres, quel que soit …).

Aide-Mémoire Secondaire 1 (2024, p.16)

Pourquoi organiser des débats mathématiques en classe ? Quels enjeux ?

Enjeux du débat mathématique en classe

- Rationalité du quotidien et des mathématiques
  - *« [les élèves] peuvent par exemple traiter des contre-exemples comme des exceptions à une conjecture sans remettre en cause cette conjecture » (Georget, 2009, p.94)*
  - *« il s’agit avant tout de montrer aux élèves l’intérêt propre de la rationalité mathématique » (ibid.)*
- Débat mathématique - moyen de faire passer les élèves du monde de la rationalité quotidienne au monde de la rationalité mathématique
  - Travailler sur le vrai et le faux
  - Comprendre les règles qui s’appliquent en mathématiques (tiers exclu…)
  - Apprendre à faire une conjecture, la prouver ou la réfuter avec un contre-exemple

Comment mettre en œuvre un débat mathématique en classe ?

Débat mathématique en classe

3 conditions indispensables pour mener un débat mathématique en classe

- Les énoncés travaillés doivent être conjecturaux.
- L’ensemble de la classe doit pouvoir oser émettre des propositions, même fausses, sans se sentir dénigré par le reste de la classe.
- L’enseignant ne doit pas montrer de validation ou de désaccord sur les propositions afin que les élèves puissent réellement douter des propositions des pairs.

(Legrand, 1993; cité par Scalisi Neyroud et al., 2025)

Rôle de l’enseignant pour mener un débat mathématique en classe

- L’enseignant doit veiller en premier lieu aux **enjeux épistémologiques**, c’est-à-dire qu’il doit toujours veiller à ce que le débat soit un enjeu mathématique. Il doit être capable de ramener sa classe sur les objectifs mathématiques au cas où le débat dévierait de sa trajectoire initiale.
- Il a un **rôle social** aussi, il ne doit pas interroger tous les élèves, mais il doit veiller à ce que toutes les idées soient exprimées.
- Son dernier rôle est la **gestion didactique du débat**. L’enseignant doit rythmer le débat pour que tous les élèves puissent comprendre. Pour ce faire, il devra prendre le temps de **noter au tableau les arguments**, ce qui permet de ralentir les échanges oraux, donc de laisser le temps aux élèves les moins rapides de comprendre les arguments. L’écriture au tableau laisse également une **trace**, une mémoire de ce qui a été dit. Tout en restant neutre en notant les arguments au tableau, ceux-ci serviront à la fin du débat comme une **base potentielle pour une institutionnalisation**.

(Legrand, 1993 cité par Scalisi Neyroud et al., 2025)

Organiser un débat en classe : nécessité d’un enseignement en collectif

Posture de l'enseignant

Avant la leçon

- Choisir un problème qui favorise l'apparition de procédures diverses
- Prévoir les procédures diverses des élèves (correctes et erronées) et les observer durant la phase de recherche.
- Préparation du tableau.
- Prévoir « assez mais pas trop » de temps pour la phase de recherche
- Prévoir « pas trop mais assez » de temps pour les phases de débat

Pendant la leçon et avant le débat

- Pendant la recherche, il ne donne aucune indication sur la véracité des propositions
- Observe et retient les diverses argumentations/procédures pour mener le futur débat

Pendant le débat

- Faire communiquer une conjecture intéressante à la classe, avec un support visible.
- Demander l'avis des autres élèves sur la conjecture.
- L'enseignant engage l'argumentation des élèves en choisissant qui va parler, le choix dépend de l'opposition des arguments. Il organise les échanges entre les élèves.
- Il doit être détaché sur le plan scientifique.
- Disposition de la classe favorisant les échanges.

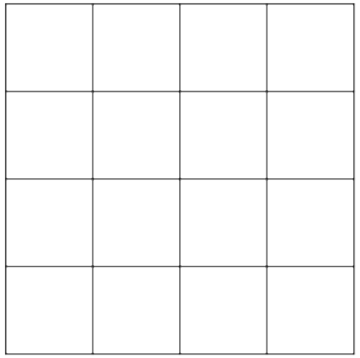
(Essonnier et al., 2026 - à paraître)

Préparation du tableau et de la leçon

Importance de la **planification du tableau**

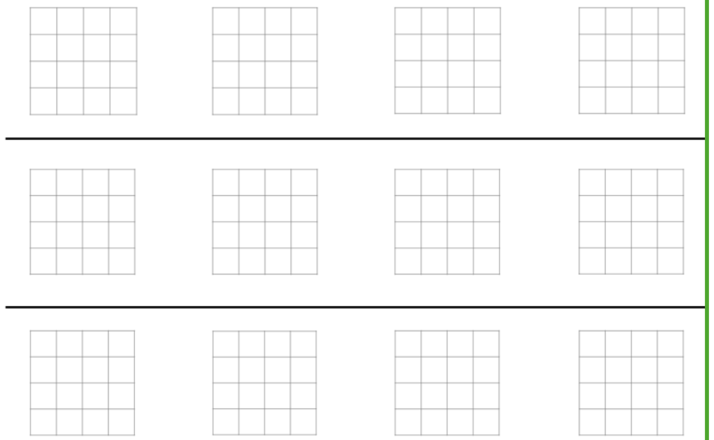
- Moyen de **visibiliser les procédures** (tableau, matériel,…) dans la durée (que les procédures à comparer restent visibles)
- **Structurer l'avancée du débat**
- Construire **collectivement** les connaissances visées
- Le **statut du tableau** peut être modifié par rapport à des pratiques habituelles car on peut être amené à écrire des affirmations erronées

Mise en œuvre du jeu des carrés en classe de 8H (leçon 1) Importance de la planification du tableau (Batteau et Clivaz, 2023)



Combien y a-t-il de carrés en tout?

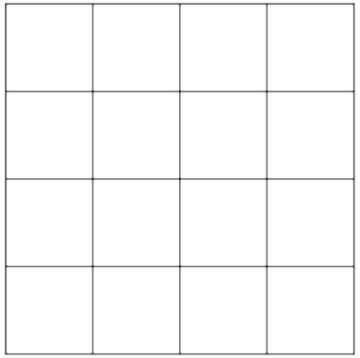
Espace pour 3 élèves
4 carrés à disposition (enlevables)



Espace de texte ou calcul pour les propositions de 3 élèves

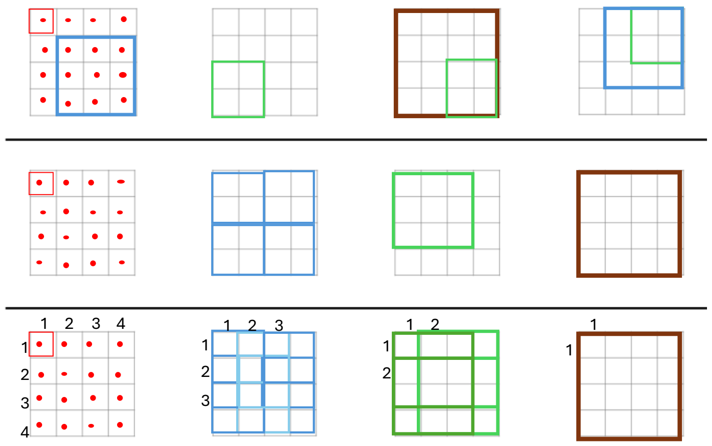
Ce que je retiens:

Mise en œuvre du jeu des carrés en classe de 8H (leçon 1)
Importance de la planification du tableau



Combien y a-t-il de carrés en tout?

Espace pour 3 élèves
4 carrés à disposition (enlevables)



16 rouges
+ 3 verts
+ 2 bleus
+ 1 brun

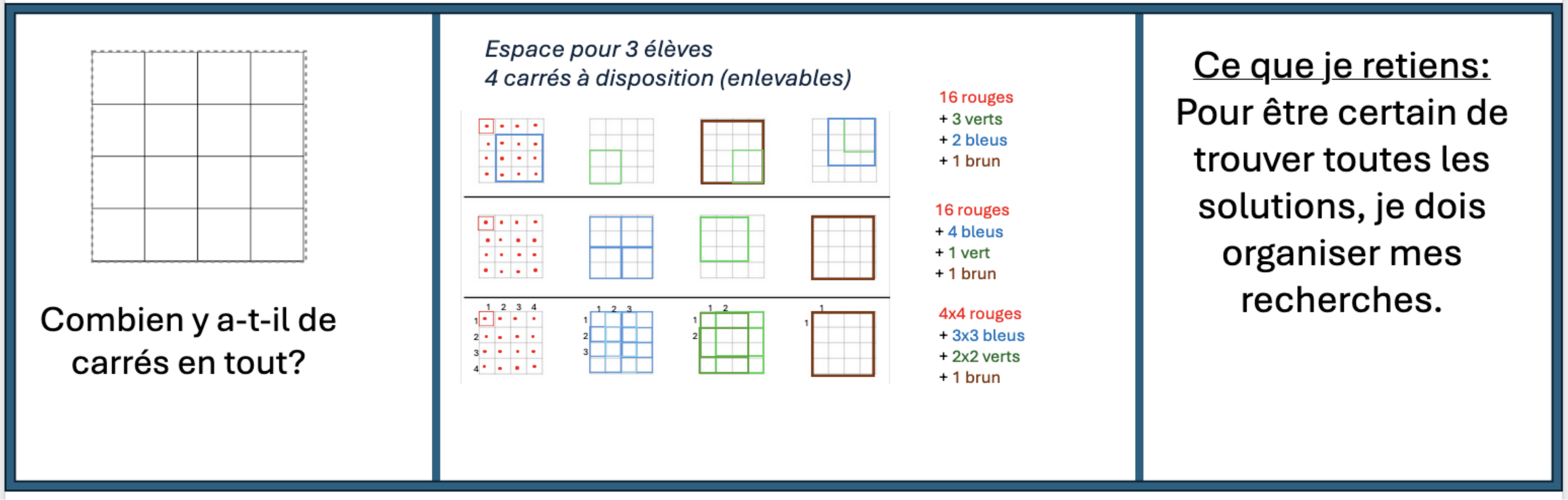
16 rouges
+ 4 bleus
+ 1 vert
+ 1 brun

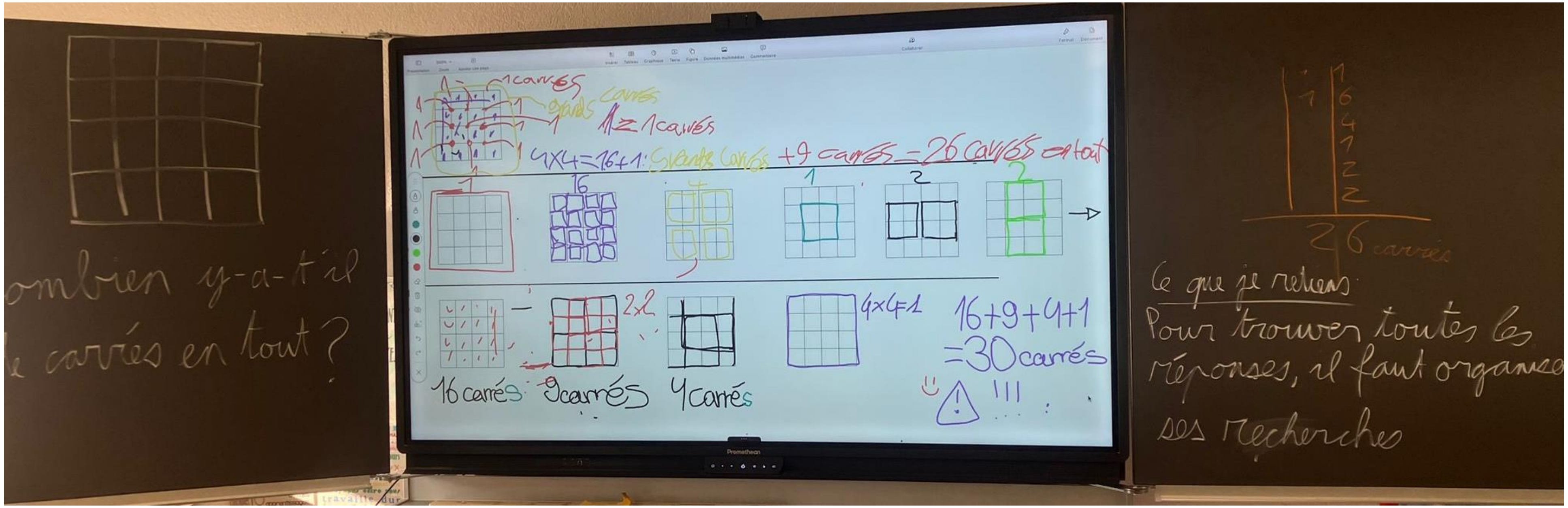
4x4 rouges
+ 3x3 bleus
+ 2x2 verts
+ 1 brun

<u>Ce que je retiens:</u>

Pour être certain de trouver toutes les solutions, je dois organiser mes recherches.

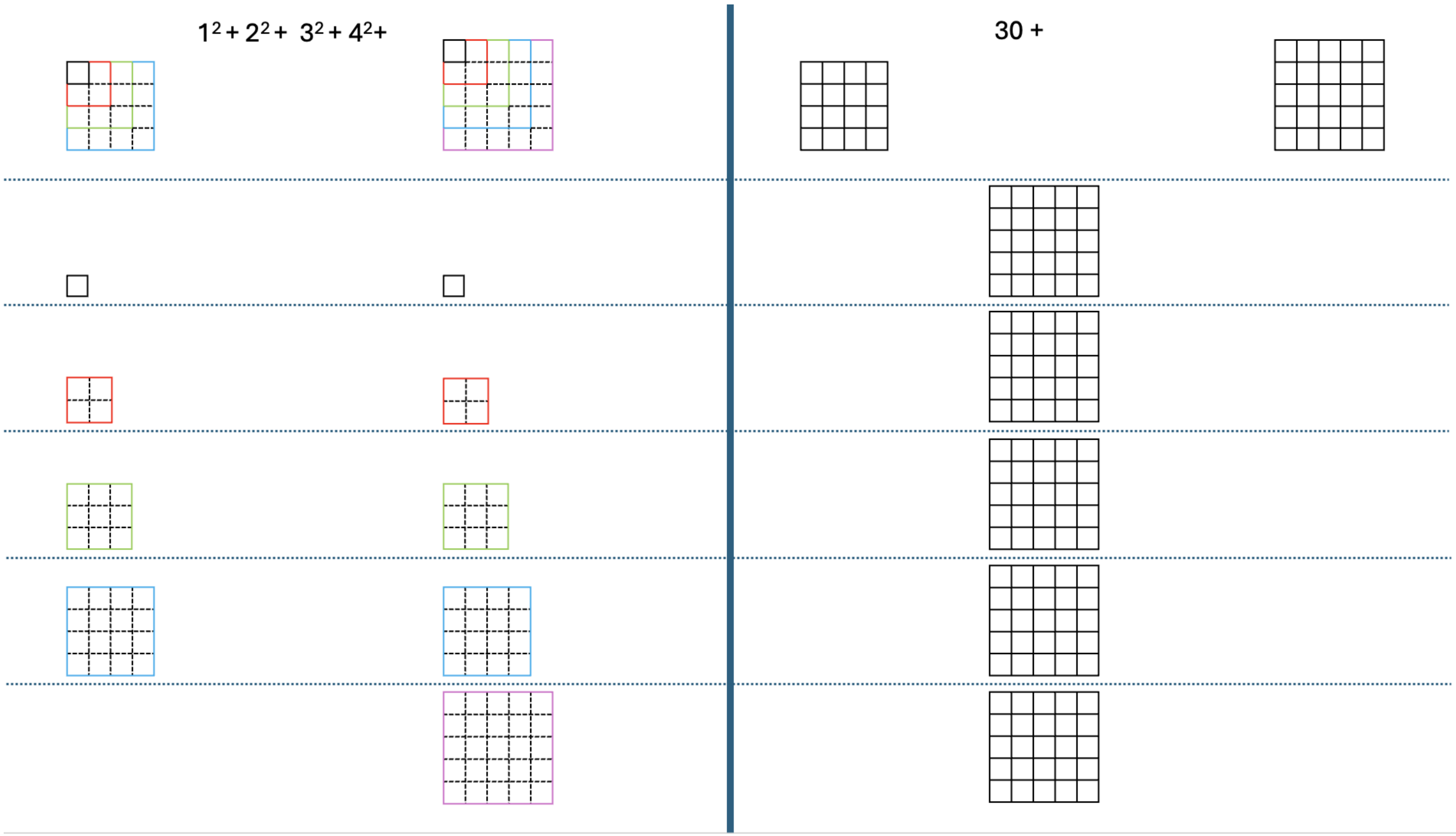
Mise en œuvre du jeu des carrés en classe de 8H (leçon 1)





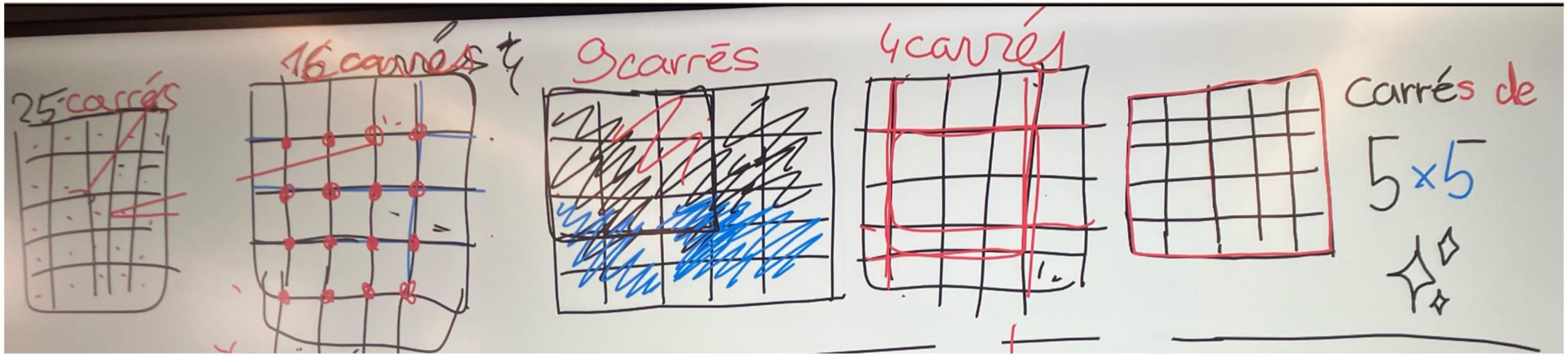
Classe de 8P
Décembre 2025

Préparation du tableau - classe 8H – leçon 2



Préparation du tableau - classe 8H – leçon 2

Comment êtes-vous certains qu'il y a 55 carrés?



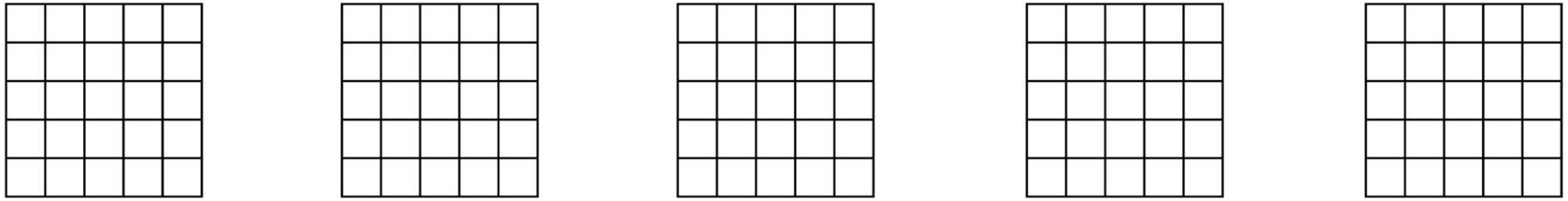
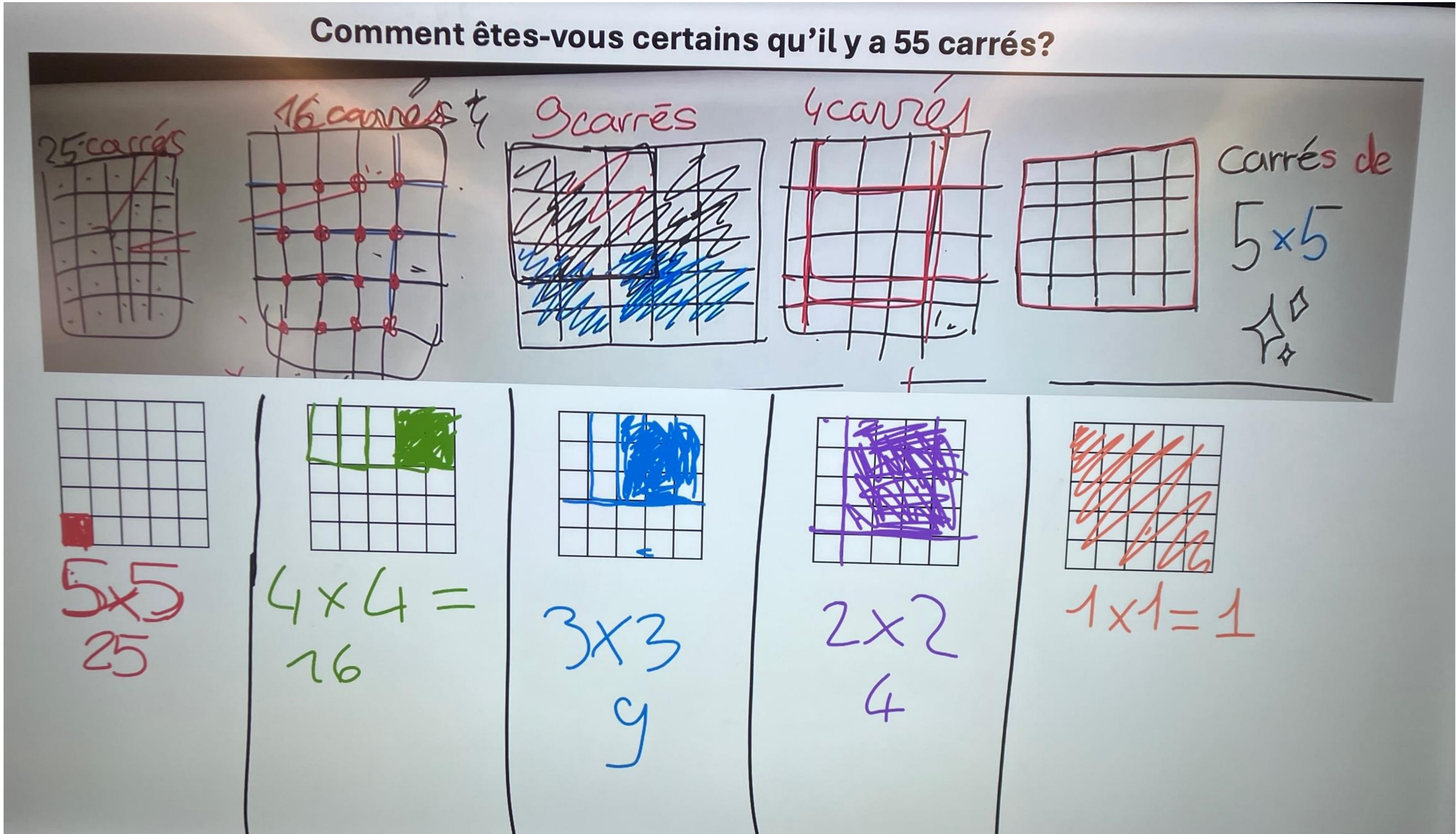


Tableau réalisé - classe 8H – leçon 2



Enjeu du débat mathématique

Comment être sûr qu’on a tous les carrés ?

Preuve liée au dénombrement et non à la formule

Préparation du tableau - classe 8H – leçon 2

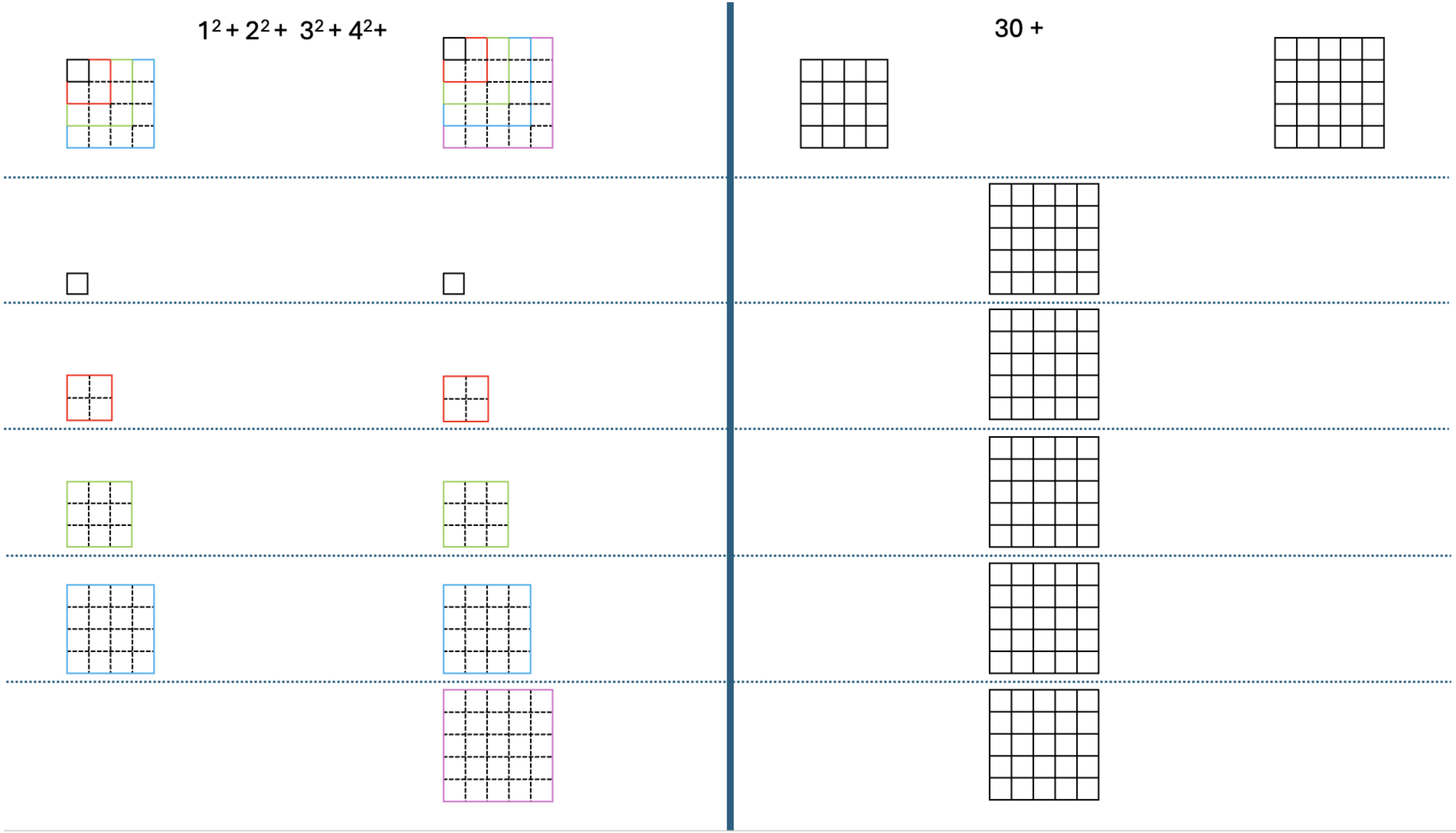
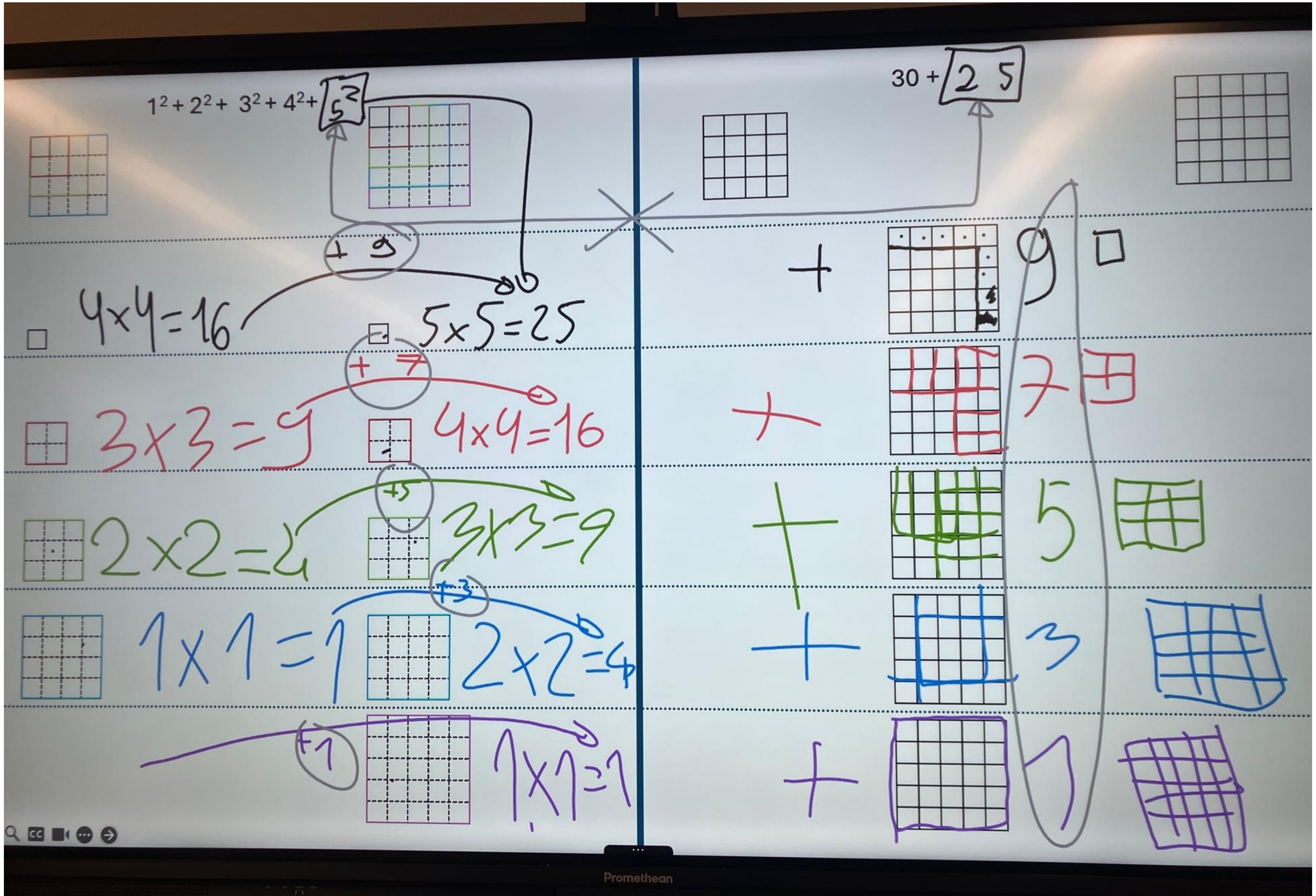


Tableau final - classe 8H – leçon 2



Principe

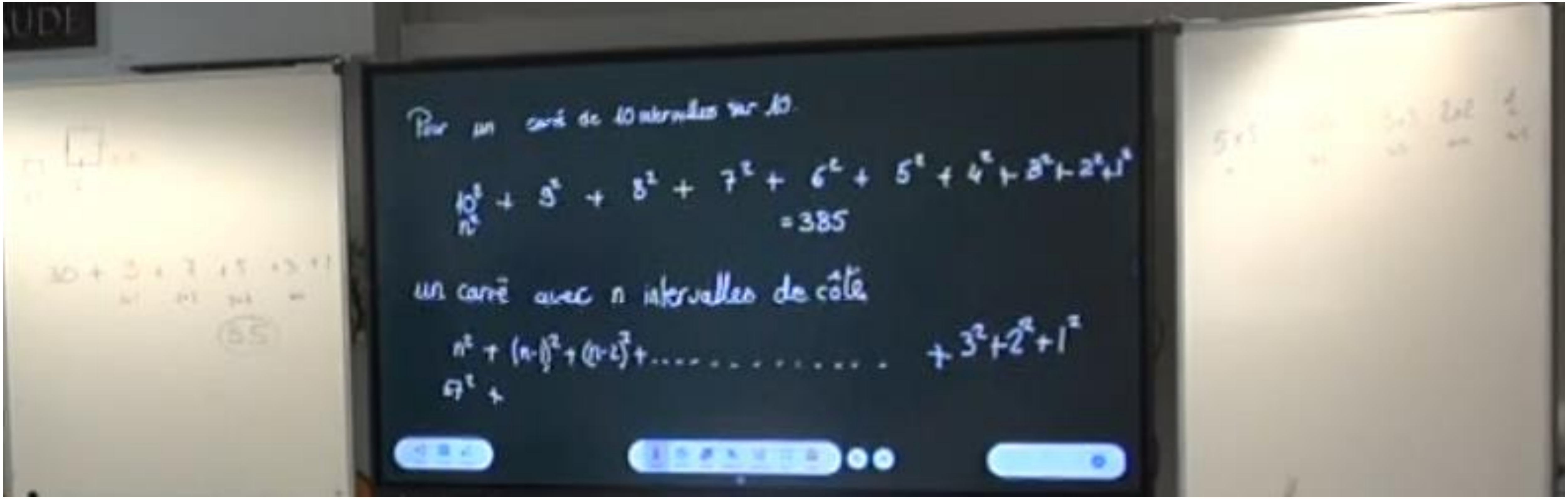
Mise en dialogue des différentes procédures, lien entre la situation, la représentation graphique et la formule.

(Batteau et Clivaz, 2023)

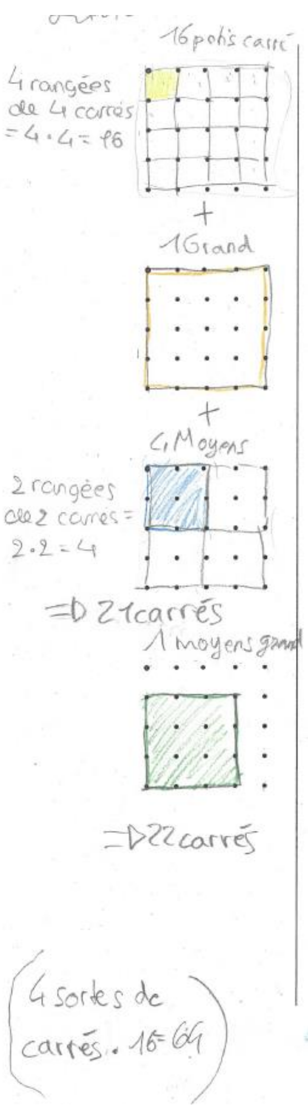
Classe 9VP

- Mise en oeuvre planifiée
  - Combien de carrés en tout dans un carré de 4 par 4?
  - Combien de carrés en tout dans un carré de 5 par 5?
  - Combien de carrés en tout dans un carré de 8 par 8?
  - Combien de carrés en tout dans un carré de 10 par 10?
  - Combien de carrés en tout dans un carré de 50 par 50?
  - Combien de carrés en tout dans un carré qui a n’importe quel nombre de carrés de côté?
  - Institutionnalisation: dans un carré de côté n, il y a $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$

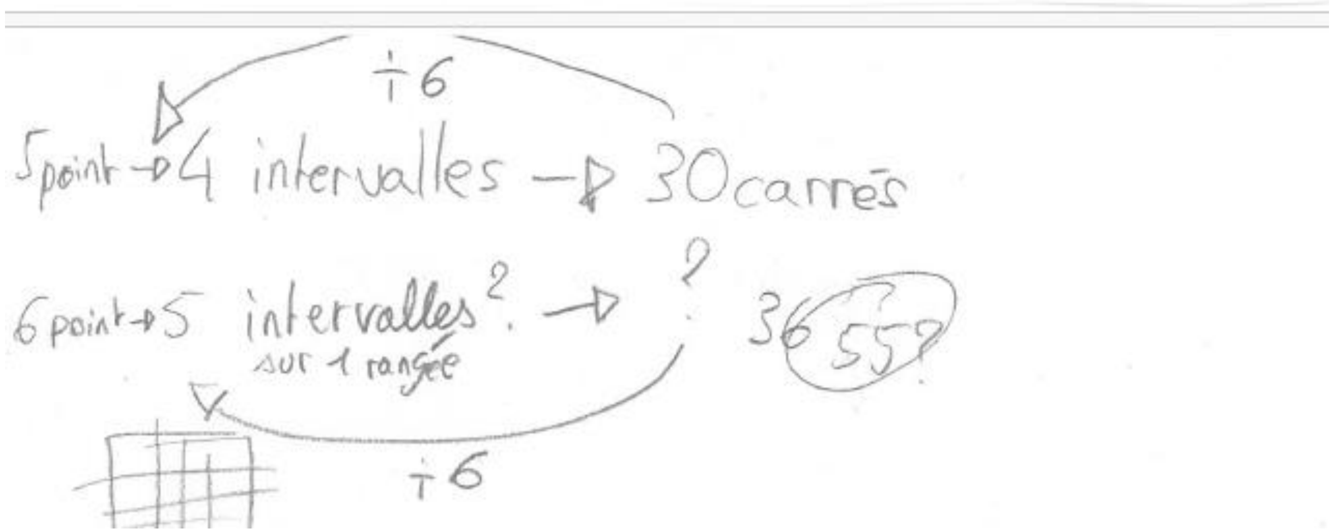
Tableau final – classe 9VP



Productions d’un groupe d’élèves – 9VP

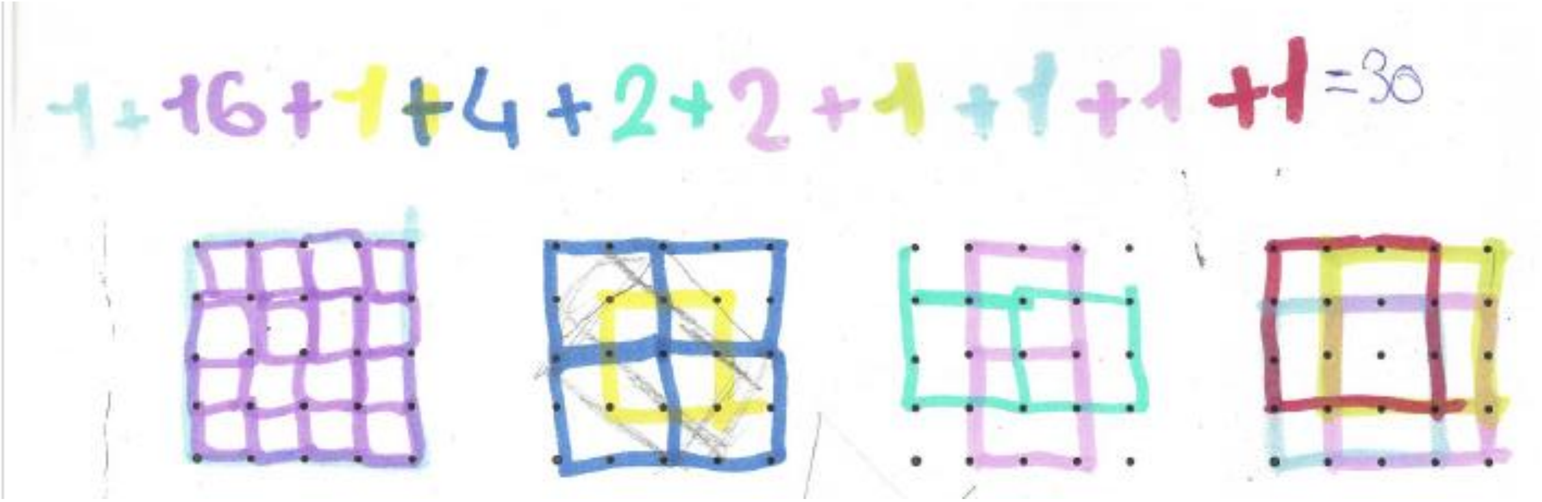


Passage d’un carré de 4 par 4 à un carré de 5 par 5

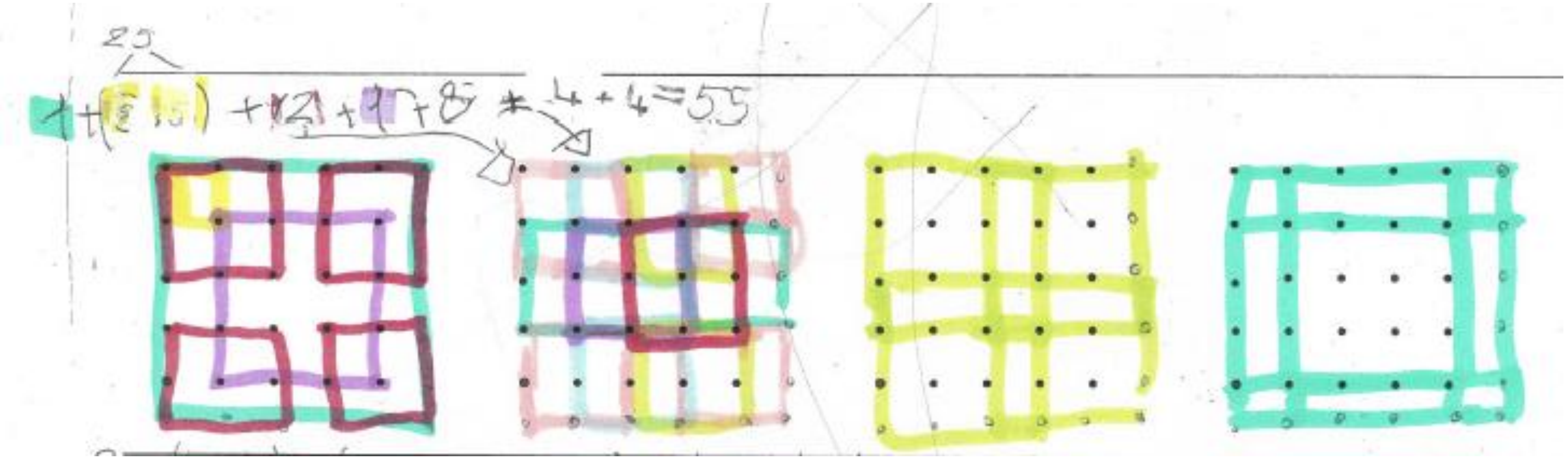


Productions d’un groupe d’élèves – 9VP

Dénombrement des carrés
Pour le carré 4 par 4

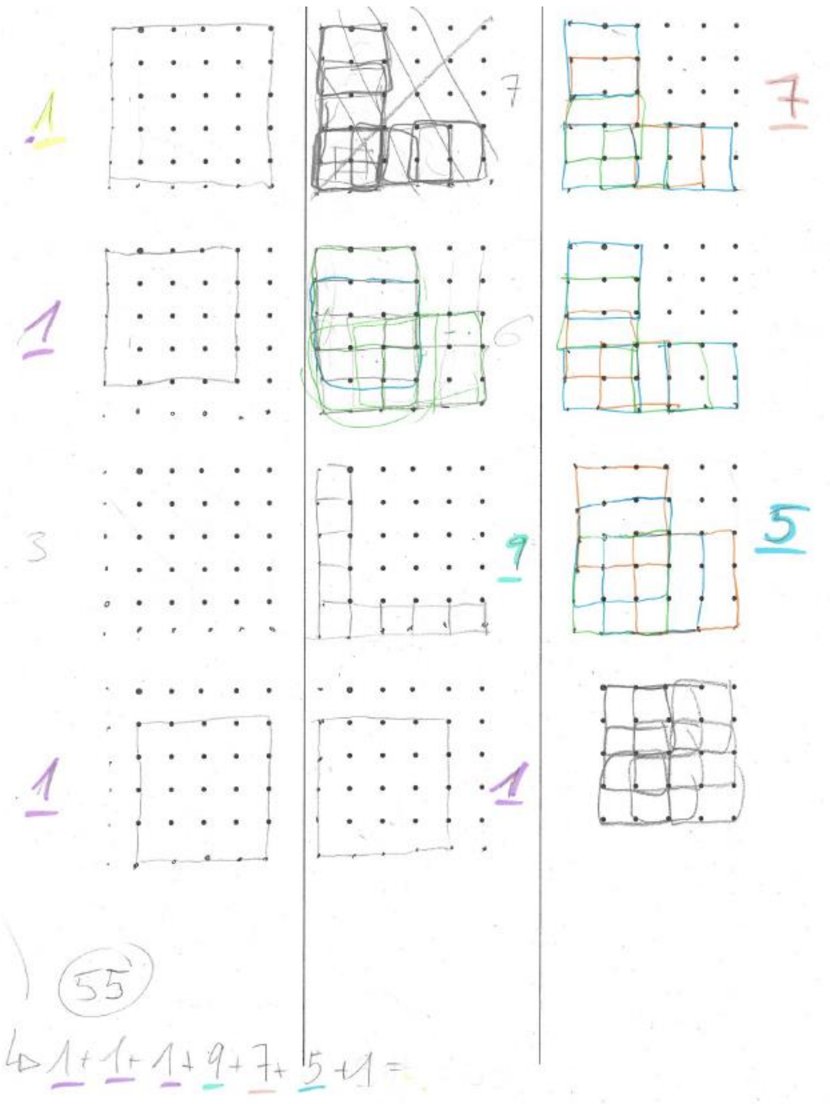


Dénombrement des carrés
Pour le carré 5 par 5

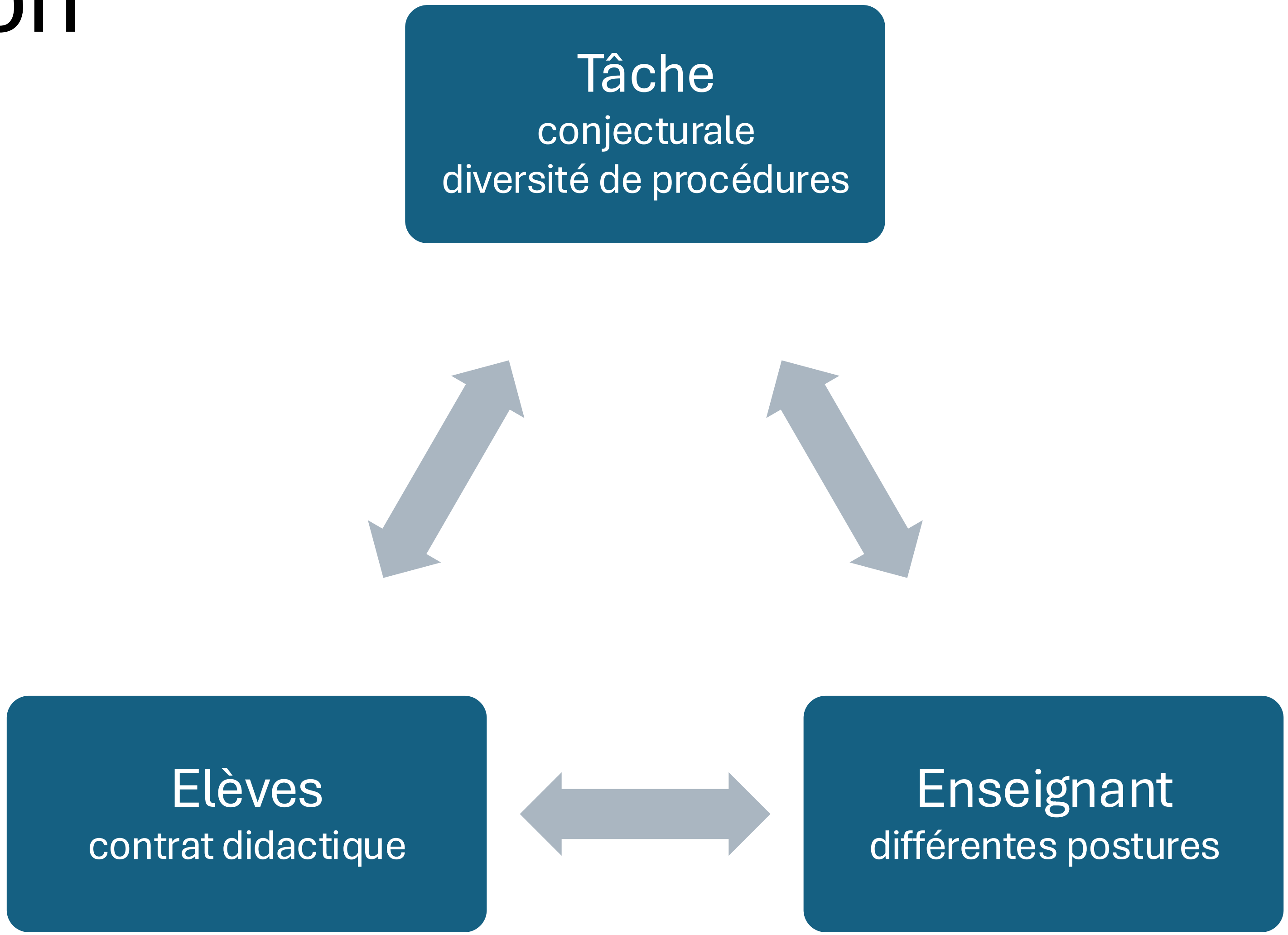


Productions d’un groupe d’élèves – 9VP

Passage du carré de 4 par 4 au carré de 5 par 5



Conclusion


Tâche
conjecturale
diversité de procédures
Elèves
contrat didactique
Enseignant
différentes postures

Bibliographie

- Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics, 18*, 147–176.
- Batteau, V. & Clivaz, S. (2023). De la mise en commun à la mise en dialogue. *Revue de Mathématiques pour l'école (RMé)*, *239*, 27-39.
- Benaïcha, H, Gilbert, T. & Ninove, L. (2021). Vivre des débats mathématiques au secondaire, une contribution à l'éducation à la citoyenneté. *Communication présentée au 46e Congrès de la SBPMef.* https://www.sbpm.be/wp-content/uploads/2021/07/SBPM-DebatsSecondaire-GEM.pdf
- Essonnier, N., Gandit, M., Mossuz, L. & Salmon, J.-C. (2026 - à paraître). Le chercher-débattre-prover dès le cycle 1. In *Actes du 51e colloque COPIRELEM*, Strasbourg.
- Genoud, A. (n.d.). *36. Le nombre de carrés.* https://jeuxmath.ch/solutions/36-carres.pdf
- Georget, J.-Ph. (2009). *Activités de recherche et de preuve entre pairs à l'école élémentaire : perspectives ouvertes par les communautés de pratique d'enseignants*. Thèse de doctorat, Université Paris Diderot.
- Legrand, M. (1993). Débat scientifique en cours de mathématiques. *Repères IREM, 10*, 123-159.
- Scalisi Neyroud, C., Serment, J., Batteau, V., Epp, S., Trgalova, J., & Vialle, L. (2025). Instaurer un débat mathématique en classe de primaire : récit d'une expérimentation autour des transformations géométriques. *Revue de Mathématiques pour l'école (RMé)*, *243*, 19-34. https://doi.org/10.26034/vd.rm.2025.6239

Merci pour votre participation !

HAUTE ÉCOLE PÉDAGOGIQUE BEJUNE

UNIVERSITÉ DE GENÈVE
FACULTÉ DE PSYCHOLOGIE ET DES SCIENCES DE L'ÉDUCATION

hep/ haute école pédagogique vaud

HEPVS | PHVS
Haute école péd…
Pädagogische Hochschule Wallis

Journées romandes des formatrices et formate… didactique des mathématiques

Centre international John Knox - Genève

Valérie Batteau, Jimmy Serment, Jana Trgalová et Christine Scalisi Neyroud

Jeudi 5 février 2026 – 14h-15h30 et 16h - 17h30

UER MS – HEP Vaud