hep/ haute école pédagogique vaud

INSTITUT FRANÇAIS DE L'ÉDUCATION

Journées des Formateurs Romands – 6 février 2026 - Genève

# Travailler la preuve avec les élèves : des exemples à l'école primaire et secondaire

Marie-Line Gardes (HEP-VD)

marie-line.gardes@hepl.ch

LEA ECL@MATHS
LYON RENNES GRENOBLE
ÉCOLE COLLEGE LYCÉE
@pprentissage des mathématiques

IREM

# Quel point de vue sur la preuve ?

# Argumentation *vs* Démonstration

## Argumentation

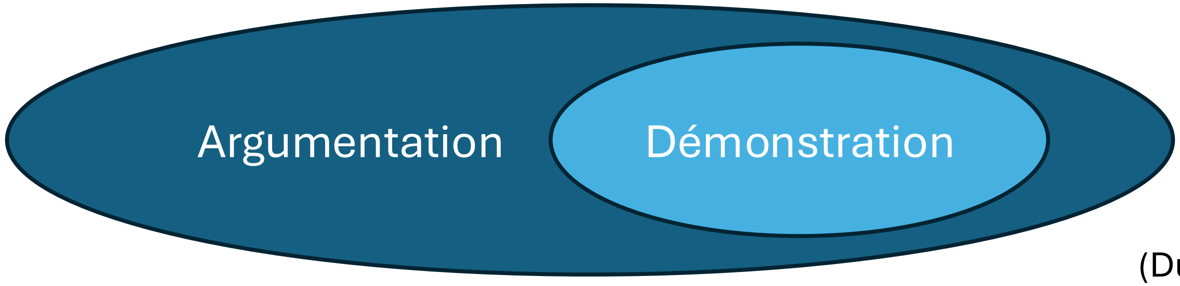
- Raisonnement dont la validité ne peut pas être contrôlée : il n'obéit pas à des contraintes de *validité* mais à des contraintes de ***pertinence***.
- Un *discours* qui modifie la valeur épistémique et non la valeur de vérité d'une proposition.

**Argumenter** : accroitre l'adhésion d'un auditoire aux thèses qu'on leur présente.

## Démonstration

- Tout raisonnement ***valide*** permettant d'établir la justesse (valeur de vérité := vrai) d'une proposition.
- Elle a la structure plus rigide d'un *calcul*, dont l'organisation consiste en un enchaînement de *pas de déduction ou d'inférences*.

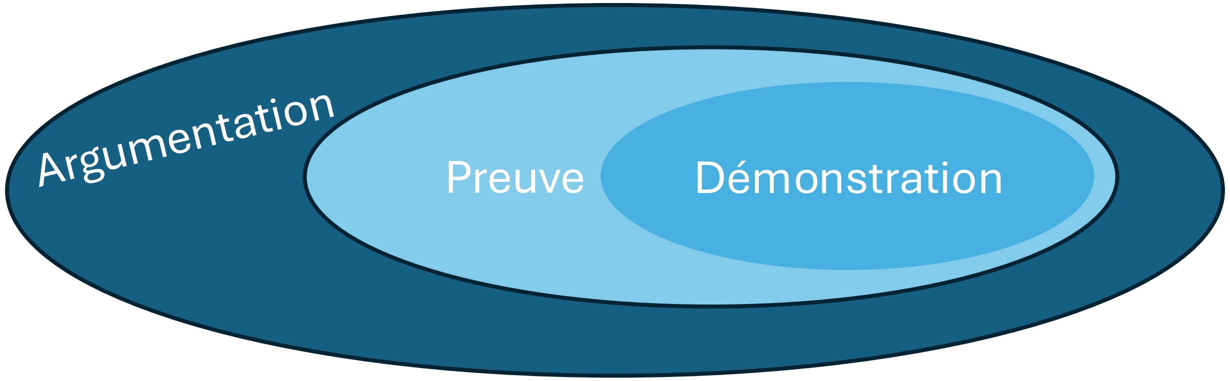
**Démontrer** : produire des arguments pour conclure à la *validité* des propositions.




(Duval et Egret, 1982 ; Balacheff, 1982, 2019)

# Et la preuve ?

**Preuve** : argumentations acceptées par d’autres, à un moment donné.



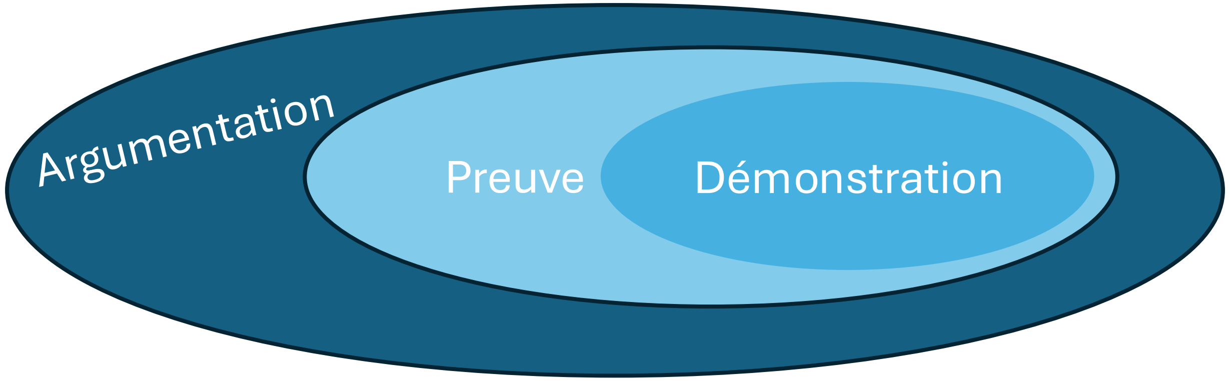

**Démonstration** : preuves particulières qui possèdent les caractéristiques suivantes :

- *Une caractéristique sociale* : ce sont les seules preuves acceptées par la communauté des mathématiciens.
- *Une caractéristique sur la forme* : elles respectent certaines règles : un certain nombre d’énoncés sont considérés comme vrais (axiomes), les autres sont déduits de ceux-ci ou d’énoncés précédemment démontrés à partir de règles de déductions prises dans un ensemble de règles logiques.
- *Les objets mathématiques* sur lesquels ces preuves opèrent ont un *statut théorique*, ils n’appartiennent pas au monde sensible, bien qu’ils y fassent évidemment référence.

(Duval et Egret, 1982 ; Balacheff, 1982, 2019)

# Et la preuve ?

**Preuve** : argumentations acceptées par d'autres, à un moment donné.




**Typologie des preuves**

Un outil pour analyser des preuves produites par les élèves dans des situations de validation

2 catégories de preuves

- Des preuves pragmatiques : preuves intimement liées à l'action et à l'expérience.
- Des preuves intellectuelles : preuves qui montrent que leurs auteurs ont pris du recul par rapport à l'action. La démonstration est une preuve intellectuelle particulière.

(Balacheff, 1982)

# Et la preuve ?

- **Processus de preuve** : recouvre les différents gestes, attitudes, intentions, opérations mentales, afférents à l'action de prouver dans le cadre de la rationalité mathématique, dont certains sont plus ou moins visibles de l'extérieur suivant que cette action a lieu au sein d'un groupe ou dans le domaine privé de la personne.

- **Produit de la preuve** : écrit qui résulte du processus et qui, lui, est destiné à être communiqué à l'extérieur.

(Gandit, 2004)

# Et la preuve ?

La preuve ne peut prendre son sens que par rapport à un **problème** donné, dans la recherche de conjectures et la réduction du doute. (Gandit, 2004)

→Pour développer les activités diverses qu'engage une preuve : **activité de résolution de problème**

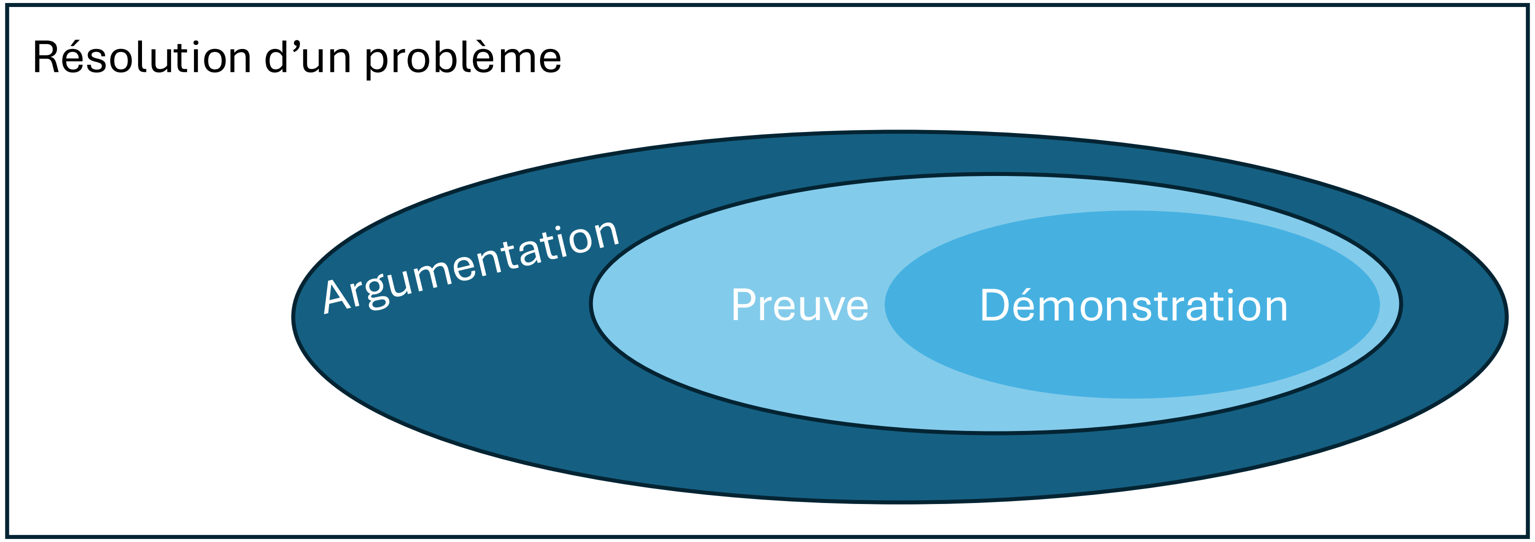
**Incertitude** quant à la validité de la conjecture produite

...mais cela ne suffit pas !

**Enjeu** qui incite à lever l'incertitude.

→ Un enjeu **de vérité**.

# Quel point de vue sur la preuve ?




On va s'intéresser au **processus de preuve**

- développement d'argumentations
- issues du travail des élèves lors de la recherche d'un problème
- avec un enjeu de vérité
- acceptées par des élèves, à un moment donné

# A vous !

## Chercher un problème et produire une preuve.

Cycle 1
Cycle 2

**Combien peut-on faire de tours différentes de 3 étages de 3 couleurs différentes ?**

**Les tours** – *source : LéA-IFE Réseau à l'université - Grenoble et Annecy*

A. Annie possède trois bracelets, un vert, un violet et un rose. Chaque jour, elle les met à son poignet en disposant les couleurs différemment et sans croiser les bracelets, par exemple :

De combien de manières différentes peut-elle les disposer ?

Montre ce que tu fais pour répondre.

B. Annie fabrique un quatrième bracelet jaune.

De combien de manières différentes peut-elle disposer ses quatre bracelets ?

Cycle 2
Sec 1

### Le plus grand produit

**Parmi les décompositions additives d'un entier naturel, trouver celle(s) dont le produit des termes est le plus grand.**

Le nombre 23 peut s'écrire de plusieurs façons comme la somme d'entiers : par exemple, 23 = 11+5+7 .
Trouver parmi ces sommes, celle dont le produit des termes est maximum.
Et avec d'autres nombres ?

**Le plus grand produit** – *source : DREAMaths*
https://math.univ-lyon1.fr/dream/

**Les jetons** – *source : groupe Logique de l'IREM de Paris :* https://irem.u-paris.fr/logique

On dispose de trois jetons de formes différentes (rond, carre et triangle) et de trois couleurs différentes (bleu, vert et rouge). Chaque jeton a une seule couleur.

Voici trois propositions vraies sur ces pièces :
1. Si le jeton rond est bleu, alors le jeton carré est vert.
2. Si le jeton rond est vert, alors le jeton carré est rouge.
3. Si le jeton carré n'est pas bleu, alors le jeton triangulaire est vert.

Donner toutes les solutions (s'il y en a).

Sec 1
Sec 2

Cycle 1
Cycle 2

# Les tours / Les bracelets d'Annie

Combien peut-on faire de tours différentes de 3 étages de 3 couleurs différentes ?

**Les tours** – *source : LéA-IFE Réseau de l'école à l'université - Grenoble et Annecy*

**Les bracelets d'Annie** – *source : ESPER 6ème*

A. Annie possède trois bracelets, un vert, un violet et un rose. Chaque jour, elle les met à son poignet en disposant les couleurs différemment et sans croiser les bracelets, par exemple :

De combien de manières différentes peut-elle les disposer ?

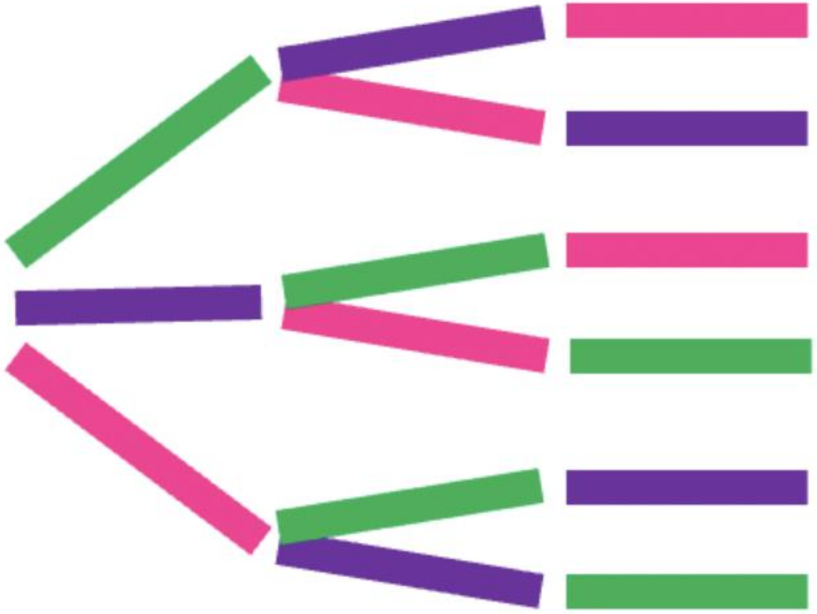
Montre ce que tu fais pour répondre.

B. Annie fabrique un quatrième bracelet jaune.

De combien de manières différentes peut-elle disposer ses quatre bracelets ?

Cycle 1
Cycle 2

# Les tours / Les bracelets d’Annie



On fixe le premier cube : ROUGE
On fait « tourner » les deux autres couleurs BLEU et JAUNE.
ROUGE – BLEU – JAUNE
ROUGE - JAUNE – BLEU
On recommence pour le premier cube BLEU, puis JAUNE.

Pour chaque choix de couleur du premier cube, il reste 2 choix possibles pour la couleur du deuxième cube et un seul choix pour le troisième. Le nombre de tours valides est donc égal à 3 x 2 x 1 = 6.

Pour le premier bracelet, Annie a le choix entre 3 couleurs, pour le deuxième, elle n’a le choix qu’entre 2 couleurs et pour le dernier bracelet, elle prend la couleur qui reste, soit 3 × 2 × 1 = 6 possibilités.

# Les tours / Les bracelets d’Annie

Processus de recherche

- Produire des tours différentes
- Comparer les tours obtenues
- Identifier une régularité / une généralité
- Trouver une organisation pour étudier tous les cas

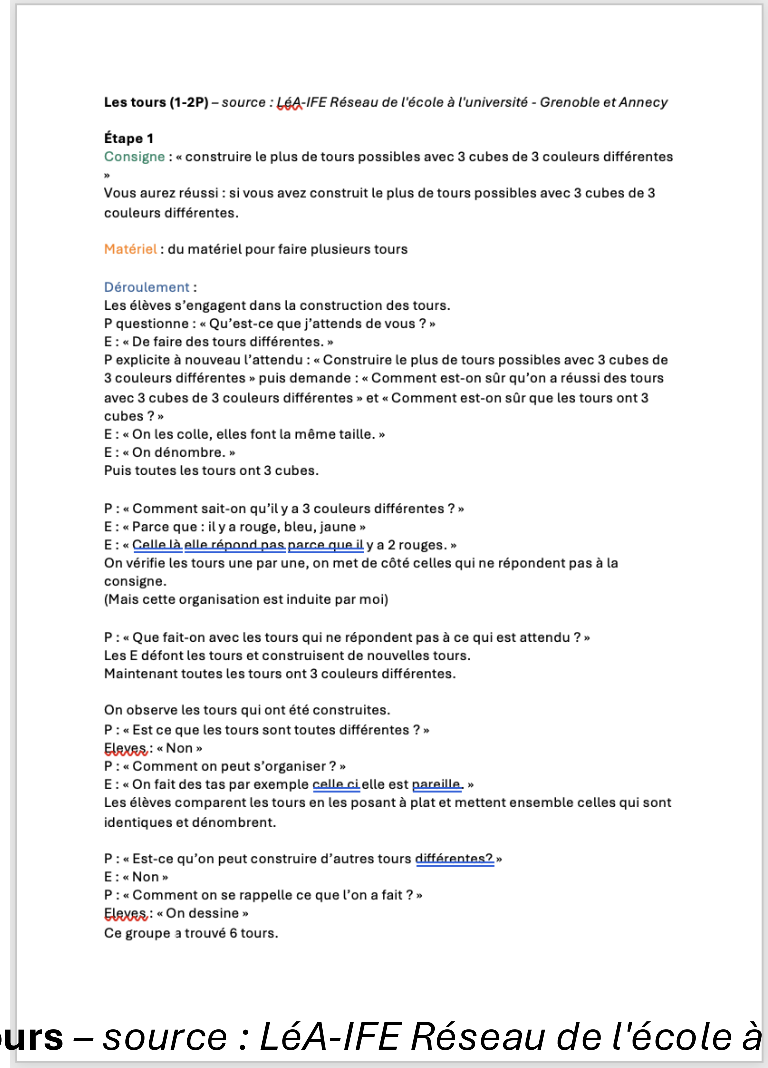
Processus de preuve

- Prouver que 2 tours sont identiques ou différentes
- Valider ou invalider une solution par rapport aux contraintes
- Démontrer qu’on a tous les cas possibles

Es-tu sûr·e ?

1-2P

# Les tours / Les bracelets d’Annie



**Les tours (1-2P)** – *source : LéA-IFE Réseau de l'école à l'université - Grenoble et Annecy*

**Étape 1**
Consigne : « construire le plus de tours possibles avec 3 cubes de 3 couleurs différentes »
Vous aurez réussi : si vous avez construit le plus de tours possibles avec 3 cubes de 3 couleurs différentes.

Matériel : du matériel pour faire plusieurs tours

Déroulement :
Les élèves s’engagent dans la construction des tours.
P questionne : « Qu’est-ce que j’attends de vous ? »
E : « De faire des tours différentes. »
P explicite à nouveau l’attendu : « Construire le plus de tours possibles avec 3 cubes de 3 couleurs différentes » puis demande : « Comment est-on sûr qu’on a réussi des tours avec 3 cubes de 3 couleurs différentes » et « Comment est-on sûr que les tours ont 3 cubes ? »
E : « On les colle, elles font la même taille. »
E : « On dénombre. »
Puis toutes les tours ont 3 cubes.

P : « Comment sait-on qu’il y a 3 couleurs différentes ? »
E : « Parce que : il y a rouge, bleu, jaune »
E : « Celle là elle répond pas parce que il y a 2 rouges. »
On vérifie les tours une par une, on met de côté celles qui ne répondent pas à la consigne.
(Mais cette organisation est induite par moi)

P : « Que fait-on avec les tours qui ne répondent pas à ce qui est attendu ? »
Les E défont les tours et construisent de nouvelles tours.
Maintenant toutes les tours ont 3 couleurs différentes.

On observe les tours qui ont été construites.
P : « Est ce que les tours sont toutes différentes ? »
Eleves : « Non »
P : « Comment on peut s’organiser ? »
E : « On fait des tas par exemple celle ci elle est pareille. »
Les élèves comparent les tours en les posant à plat et mettent ensemble celles qui sont identiques et dénombrent.

P : « Est-ce qu’on peut construire d’autres tours différentes? »
E : « Non »
P : « Comment on se rappelle ce que l’on a fait ? »
Eleves : « On dessine »
Ce groupe a trouvé 6 tours.

**Les tours** – *source : LéA-IFE Réseau de l'école à l'université - Grenoble et Annecy*

« Comment est-on sûr que les tours ont 3 cubes ? »
E : « On les colle, elles font la même taille. »
E : « On dénombre. »
Puis toutes les tours ont 3 cubes.

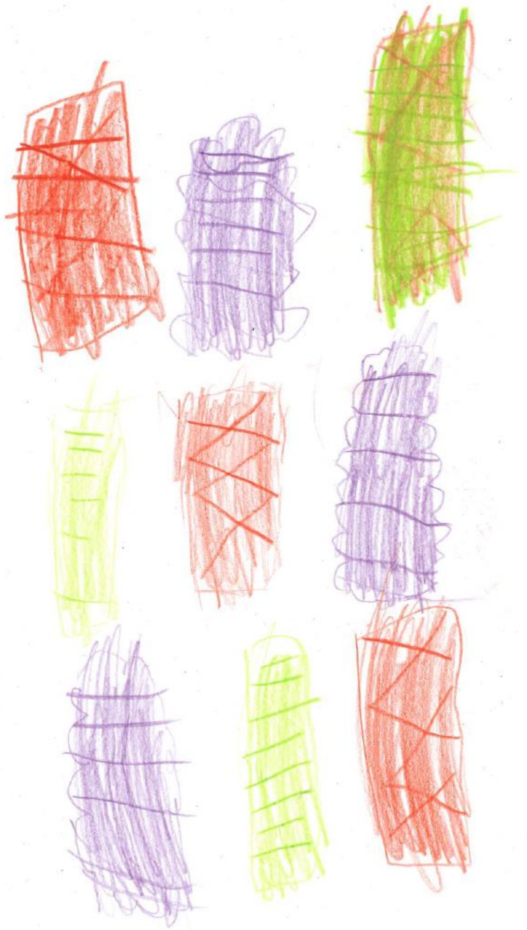
Valider/ Invalider une solution par rapport aux contraintes

P : « Comment sait-on qu’il y a 3 couleurs différentes ? »
E : « Parce que : il y a rouge, bleu, jaune »
E : « Celle là elle répond pas parce que il y a 2 rouges. »

On observe les tours qui ont été construites.
P : « Est ce que les tours sont toutes différentes ? »
Eleves : « Non »
P : « Comment on peut s’organiser ? »
E : « On fait des tas par exemple celle ci elle est pareille. »
Les élèves comparent les tours en les posant à plat et mettent ensemble celles qui sont identiques et dénombrent.

Prouver que 2 tours sont identiques ou différentes

# Les tours / Les bracelets d'Annie

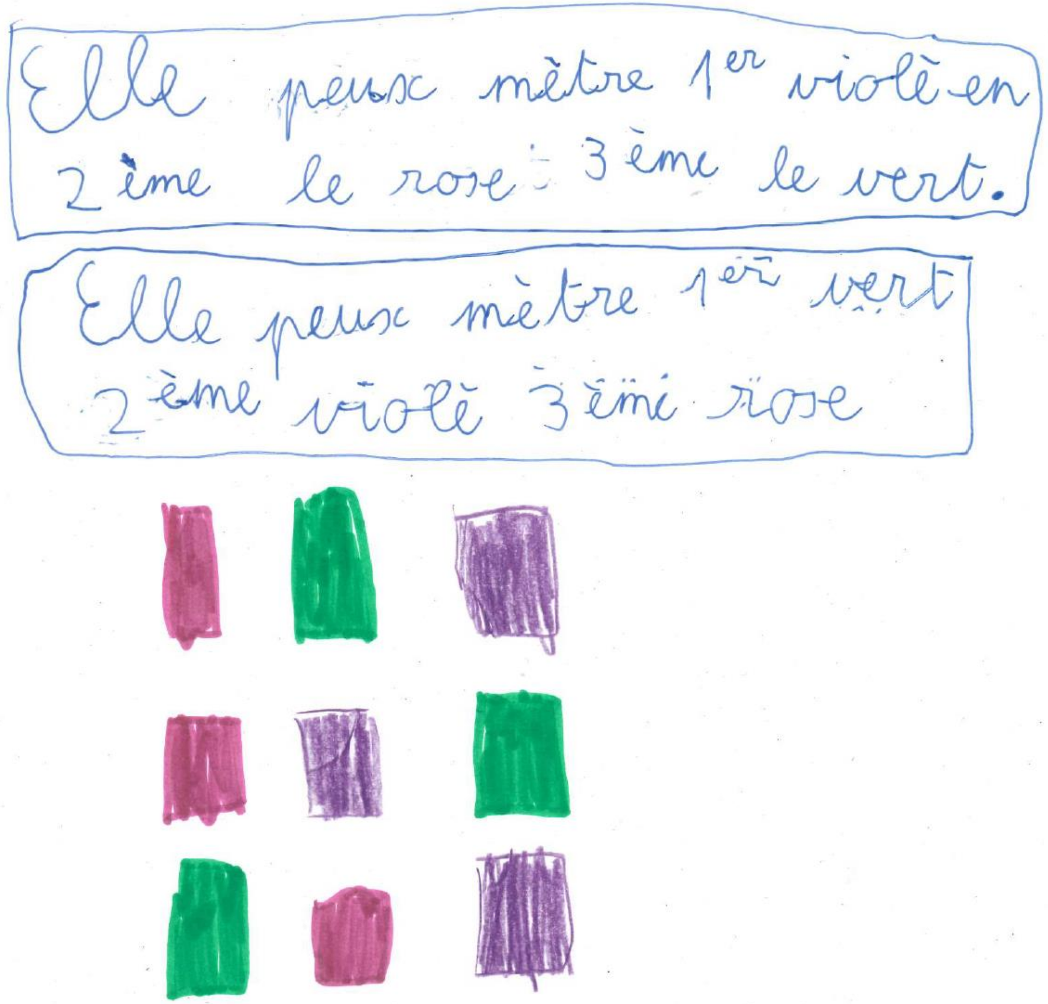


Produire des tours différentes

Comparer les tours obtenues

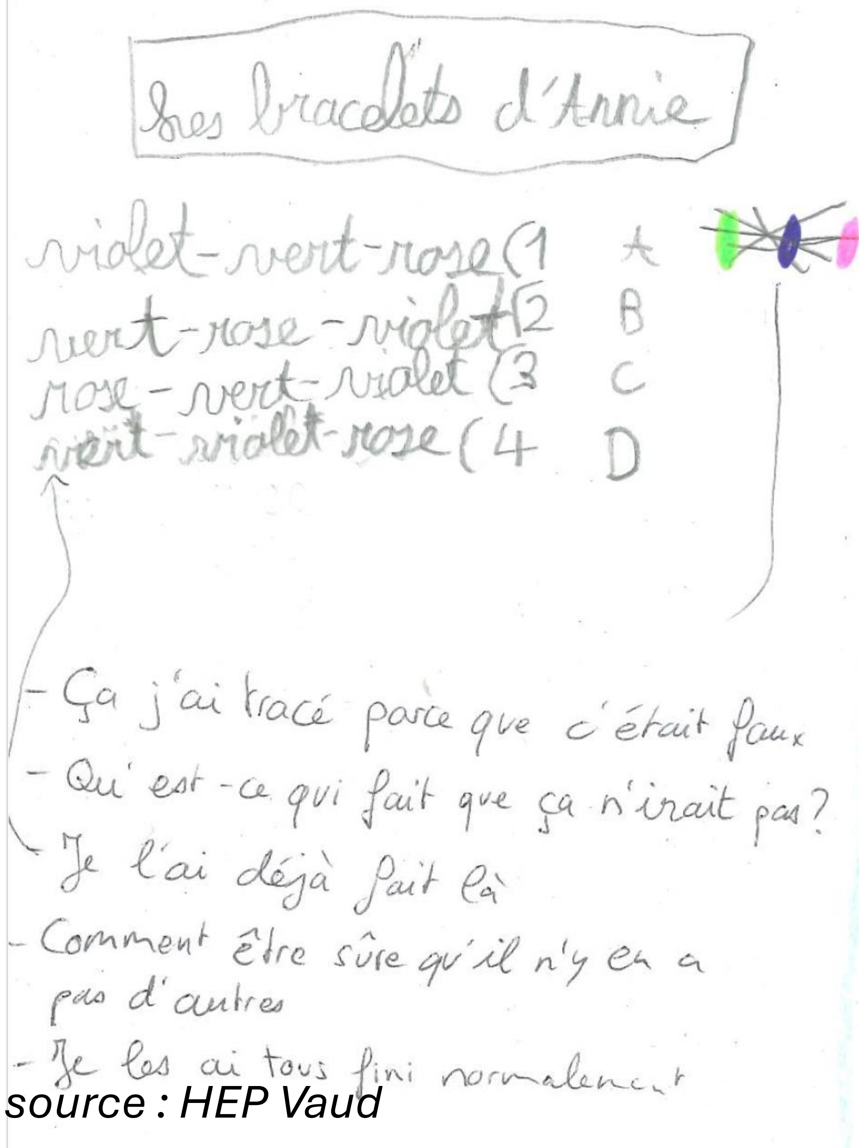
Un début d'organisation pour trouver des solutions différentes

Valider (ou invalider) une solution par rapport aux contraintes




*source : HEP Vaud*

# Les tours / Les bracelets d'Annie


Les bracelets d'Annie

violet-vert-rose (1 A
vert-rose-violet (2 B
rose-vert-violet (3 C
vert-violet-rose (4 D

- Ça j'ai tracé parce que c'était faux
- Qu'est-ce qui fait que ça n'irait pas ?
- Je l'ai déjà fait là
- Comment être sûre qu'il n'y en a pas d'autres
- Je les ai tous fini normalement

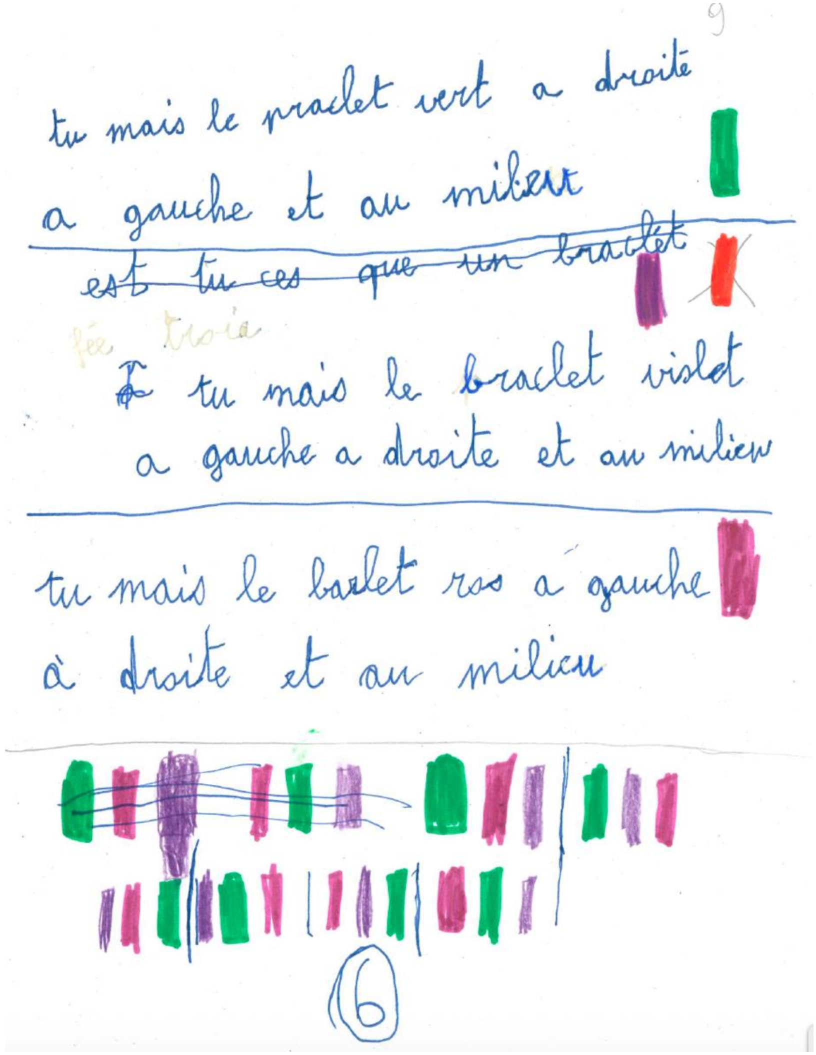
Produire des tours différentes

Comparer les tours obtenues

Un début d'organisation pour trouver des solutions différentes

Valider (ou invalider) une solution par rapport aux contraintes

A-t-on tous les cas possibles ?


tu mais le praclet vert a droite a gauche et au milieu

~~est tu ces que un braclet~~

tu mais le braclet violet a gauche a droite et au milieu

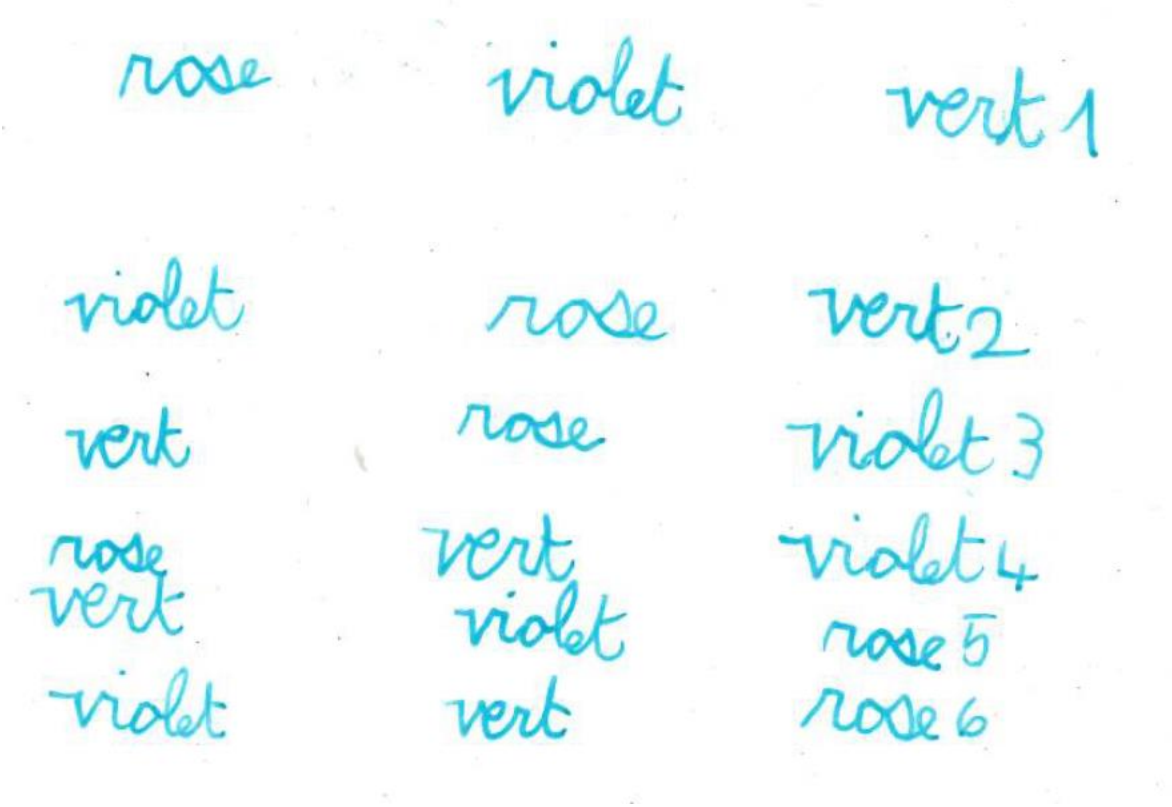
tu mais le barlet ros a gauche à droite et au milieu

6

*source : HEP Vaud*

5-6P

# Les tours / Les bracelets d'Annie




Produire des tours différentes

Une organisation pour trouver toutes les solutions

Valider (ou invalider) une solution par rapport aux contraintes

A-t-on tous les cas possibles ?

*source : HEP Vaud*

Cycle 2
Sec 1

# Le plus grand produit

**Parmi les décompositions additives d'un entier naturel, trouver celle(s) dont le produit des termes est le plus grand.**

Le nombre 23 peut s'écrire de plusieurs façons comme la somme d'entiers : par exemple, 23 = 11+5+7 .
Trouver parmi ces sommes, celle dont le produit des termes est maximum.
Et avec d'autres nombres ?

**Le plus grand produit** – *source : DREAMaths*
[https://math.univ-lyon1.fr/dream/](https://math.univ-lyon1.fr/dream/)

Cycle 2
Sec 1

# Le plus grand produit

Le nombre 23 peut s'écrire de plusieurs façons comme somme d'entiers.
Par exemple $23 = 11 + 5 + 7$.

Trouver parmi ces sommes, celles dont le produit des termes est maximum. Peut-on généraliser ?

✓ Il n'est pas intéressant pour le produit d'avoir des 1 et des 0.

✓Il n'est pas intéressant d'avoir plus de trois 2. En effet, si $6 = 2 + 2 + 2$ alors $P = 8$ et si $6 = 3 + 3$ alors $P = 9$. Donc au maximum, il y a deux 2.

✓ Il n'est pas intéressant d'avoir des 4 car $4 = 2 + 2$ et $2 \times 2 = 4 \times 1$, le produit n'est pas modifié.

✓ Pour $a \geq 5$, il est intéressant de décomposer a en $(a - 3) + 3$. En effet, si $a = (a - 3) + 3$ alors $P = 3(a - 3)$. Comme $a \geq 5$, $3(a - 3) \geq a$. Donc il n'est pas intéressant pour le produit d'avoir des nombres supérieurs à 5.

Il reste donc des 3 !

✓Si on met deux 2, on a $23 - 4 = 19$ et il n'est pas possible de décomposer 19 qu'avec des 3. Donc il n'y a qu'un seul 2.
**Conclusion : $23 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 2$ et $P = 4374$.**

# Le plus grand produit

Cycle 2
Sec 1

**Processus de recherche**

- Produire des produits différents
- Comparer les produits obtenus
- Identifier une régularité / une généralité
- Formulation d'une conjecture : le plus grand produit, c'est quand il y a…

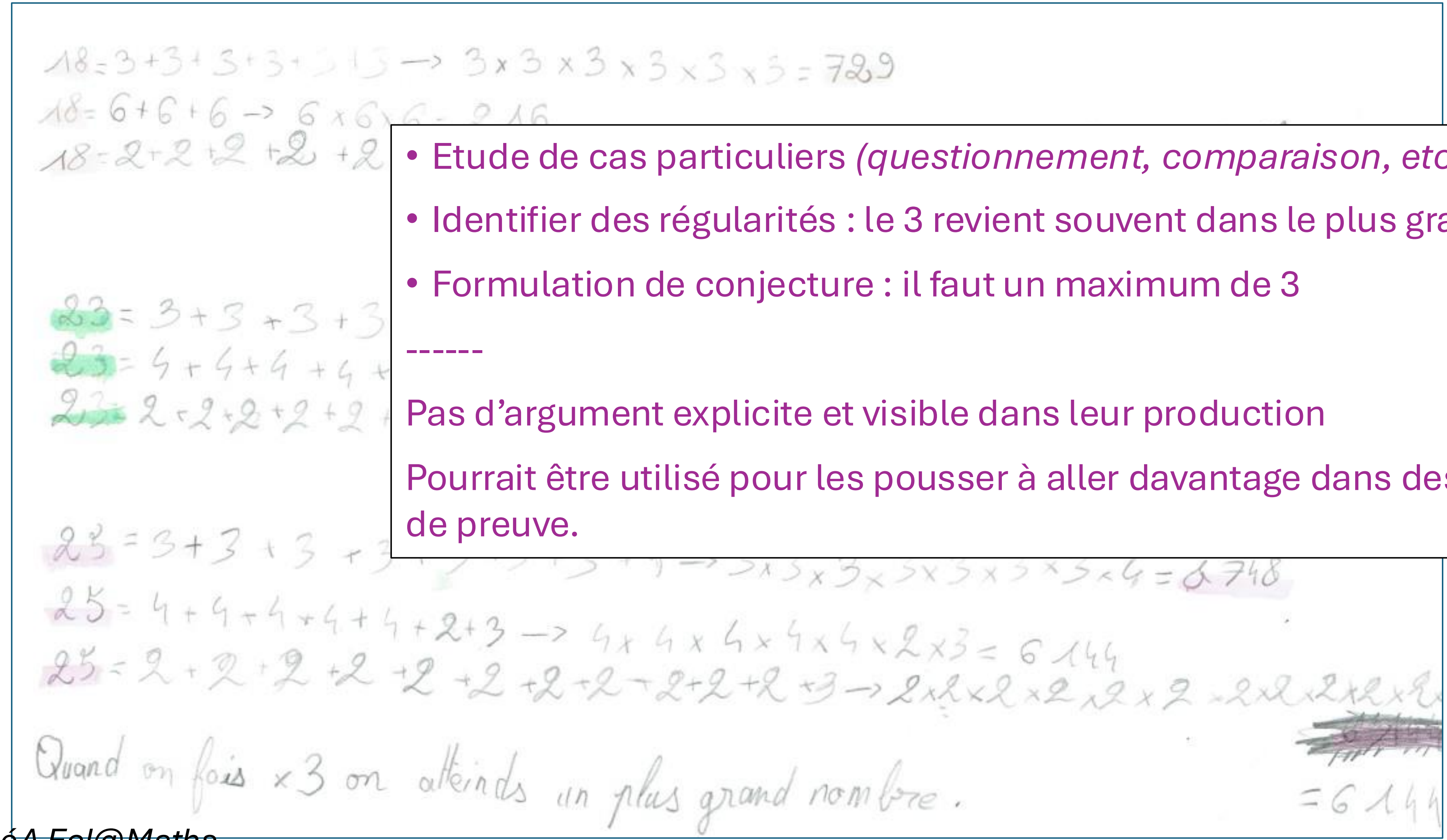
Es-tu sûr·e ?

**Processus de preuve**

- Les rôles de 0 et 1 pour la multiplication et l'addition
- 2 + 2 équivalent à 4 pour le produit
- 3 + 3 est plus intéressant que 6 car …
- 5 est à décomposer en 2 et 3 car …
- Au-delà de 5, décomposition de l'entier pour montrer qu'elle est plus avantageuse pour le produit

# Le plus grand produit






- Etude de cas particuliers *(questionnement, comparaison, etc.)*
- Identifier des régularités : le 3 revient souvent dans le plus grand produit
- Formulation de conjecture : il faut un maximum de 3

------

Pas d'argument explicite et visible dans leur production

Pourrait être utilisé pour les pousser à aller davantage dans des éléments de preuve.

*source : LéA Ecl@Maths*

# Le plus grand

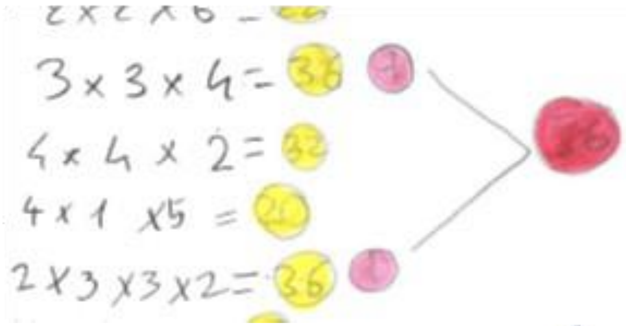


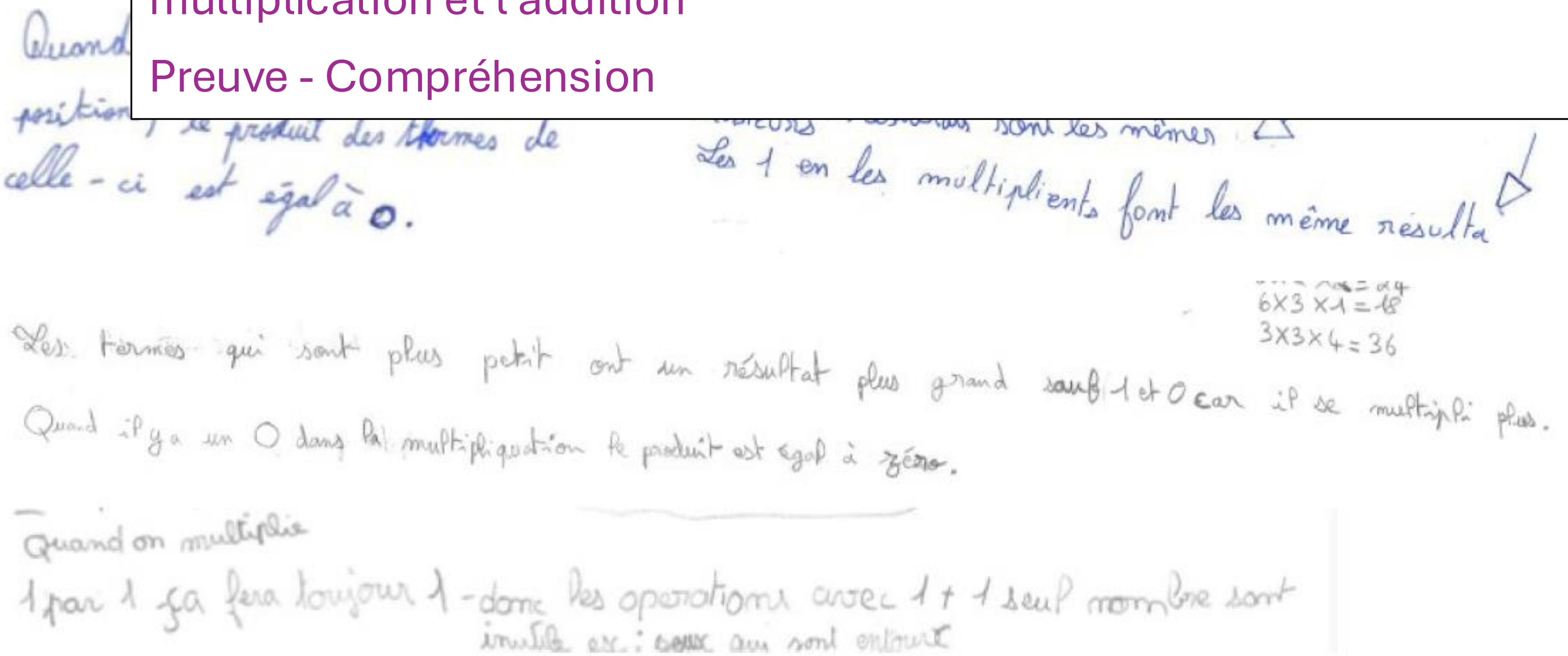
- Etude de cas particuliers *(questionnement, comparaison, etc.)*
- Identifier des régularités : sur le rôle de 0 et 1, 4 *vs* 2x2
- Formulation de conjecture : il ne faut pas de 0 ; 1 ne change pas le produit

----

Des arguments explicites : les rôles particuliers de 0 et 1 dans la multiplication et l'addition

Preuve - Compréhension




*source : LéA Ecl@Maths*

Fin de primaire

Consigne : Parmi les décompositions d'un nombre, quelle est celle dont le produit des termes est le plus élevé.

Si on utilise des 0 le résultat sera = à 0

Si on utilise des 1, le résultat ne change pas

2X2X2=8 → 3 mieux que 2
3X3=9

2X2=4 → 4 est la même chose que les 2

5X5=25 → 2 mieux que 5
2X2X2X2X2=32

6X6=36 → 3 mieux que 6
3X3X3X3=81

7X7= 49 → 2 mieux que 7
2X2X2X2X2X2X2=128

8X8=64 → 2 mieux que 8
2X2X2X2X2X2X2X2=256

9X9=81 → 3 mieux que 9
3X3X3X3X3X3=729

- Etude de cas particuliers *(questionnement, comparaison, etc.)*
- Identifier des régularités : le 3 revient souvent dans le plus grand produit
- Formulation de conjecture : il faut un maximum de 3
- Raisonnement par disjonction des cas

Preuve construite

ex 24 car 8X3=24 24÷3=8 3X3X3X3X3X3X3X3 8 nombre de 3

Pour nombre dans la table de 3+1 (Nombre−1)÷3−1=Y Y nombre de 3+1 seul 4
ex 25 car 8X3+1=25 25−1÷3−1=7 7 nombre de 3+1 seul 4 3X3X3X3X3X3X3X4

Pour nombre dans la table de 3+2 (Nombre−2)÷3=Y Y nombre de 3+1 seul 2
ex : 23 car 3X7+2=23 (23−2)÷3=7 7 nombre de 3+1 seul 2 3X3X3X3X3X3X3X2

source : LéA Ecl@Maths

Fin de primaire

3x3 = 9 . 9x3=27 27x3=81 81x3=243 243x3=729 729x3=2187 2187x2=4374

Pour l'instant notre meilleure nombre est 4374 en faisant 3x3x3x3x3x3x3x2=4374

Pour l'instant notre meilleur nombre pour 24 est 6561 en faisant 3x3x3
x3x3x3 x 3x3

Prénom : Adel

Gabin

Sélyan

JULIA

pour l'instant notre meilleur nombre est:

4x4x4x4 x3x3x4

notre hypotèse est qu'il faut des nombres entre 3,2,5 et 4 pour faire de trop grands nombre car si on fait des trop grand nombre ça fait peu de multiplication comme pour 24 si on fait 9x9x5

- Etude de cas particuliers *(questionnement, comparaison, etc.)*
- Identifier des régularités : rôle de 3 ; relation entre le nombre de nombres et la taille du produit
- Formulation de conjecture : taille du produit en fonction du nombre de nombres

Des éléments pour construire des arguments.

*source : LéA Ecl@Maths*

10ème

Solution :

Pour trouver le plus grand produit il faut le multiplier par le chiffre 3.

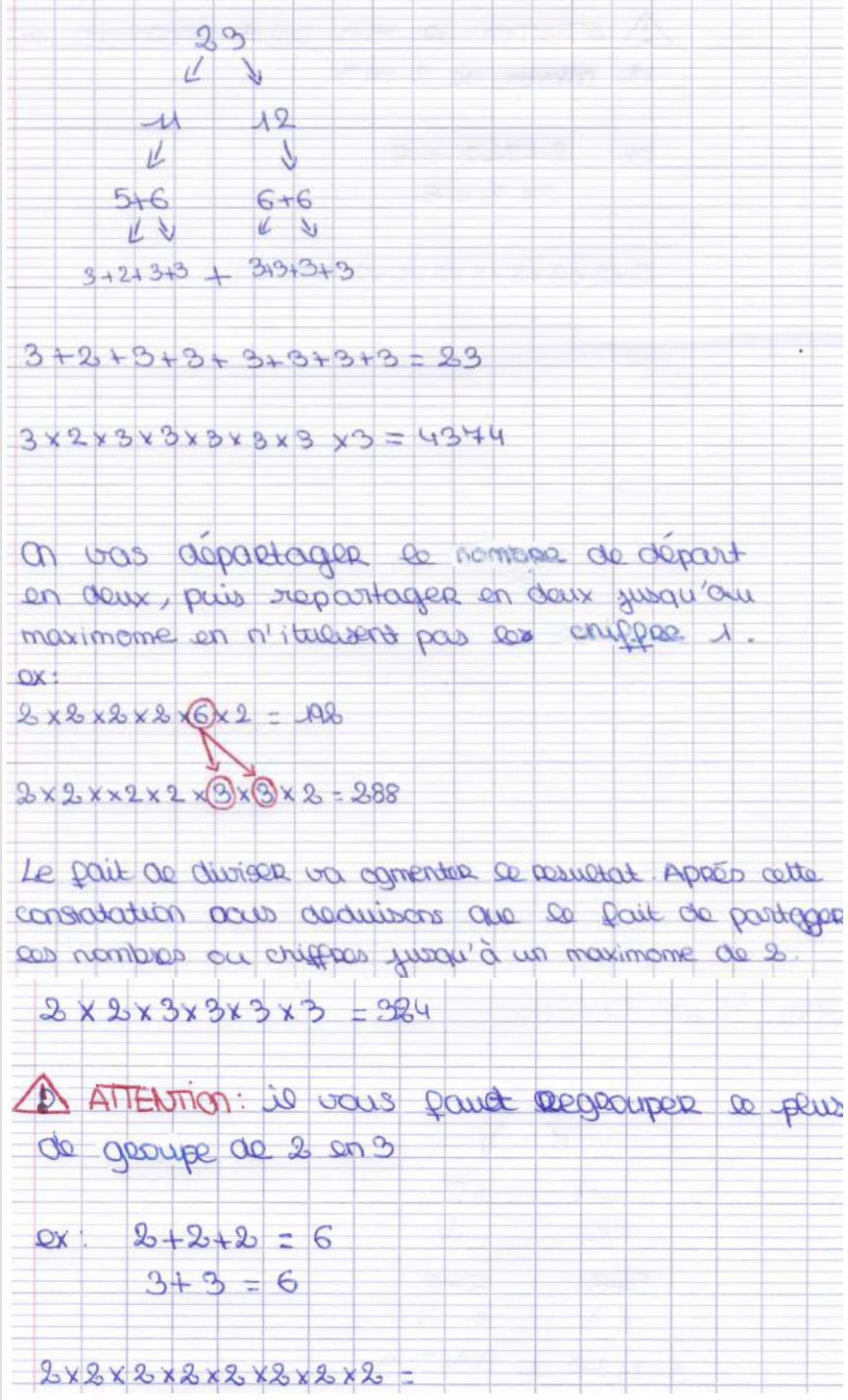
Exemple : Pour 16 = 3x3x3x3x4 = 324

Pour commencer, nous avons calculé avec de gros chiffres "10x10x3" mais ça ne nous a pas rapproché du plus grand résultat. Donc, nous avons essayé avec de petits chiffres tels que 2 ; 3 ou encore 4. Avec le chiffre 3, nous avons réussi à obtenir le plus grand résultat.
Mais ceci ne marche qu'avec les nombres qui sont multiples de 3.
Pour reprendre l'exemple ci-dessus, 16 n'est pas un multiple de 3.
Donc normalement on aurait dû obtenir 3x3x3x3x3x1 = 243.
Mais, ce n'était pas le plus gros résultat, alors nous avons additionné les deux derniers chiffres du calcul qui sont le 3 et le 4. 3+1=4
Donc nous les avons remplacés par le 4.

- Etude de cas particuliers *(questionnement, comparaison, etc.)*
- Identifier des régularités : rôle de 3 ; relation entre le nombre de nombres et la taille du produit ; rôle de 5 ; multiple de 3 ou pas
- Formulation de conjecture : avec des 3, on obtient le plus grand produit

Des arguments explicites

*source : Mémoire INSPE Lyon*


23
11 12
5+6 6+6
3+2+3+3 + 3+3+3+3

3+2+3+3+3+3+3+3 = 23

3x2x3x3x3x3x3 x3 = 4374

On vas départager le nombre de départ en deux, puis repartager en deux jusqu'au maximome en n'utilisant pas les chiffres 1.
ex :
2x2x2x2x6x2 = 192
2x2x2x2x3x3x2 = 288

Le fait de diviser va agmenter le resultat. Après cette constatation nous deduisons que le fait de partager les nombres ou chiffres jusqu'à un maximome de 3.
2x2x3x3x3x3 = 324

ATTENTION : il vous faut regrouper le plus de groupe de 2 en 3

ex : 2+2+2 = 6
3+3 = 6

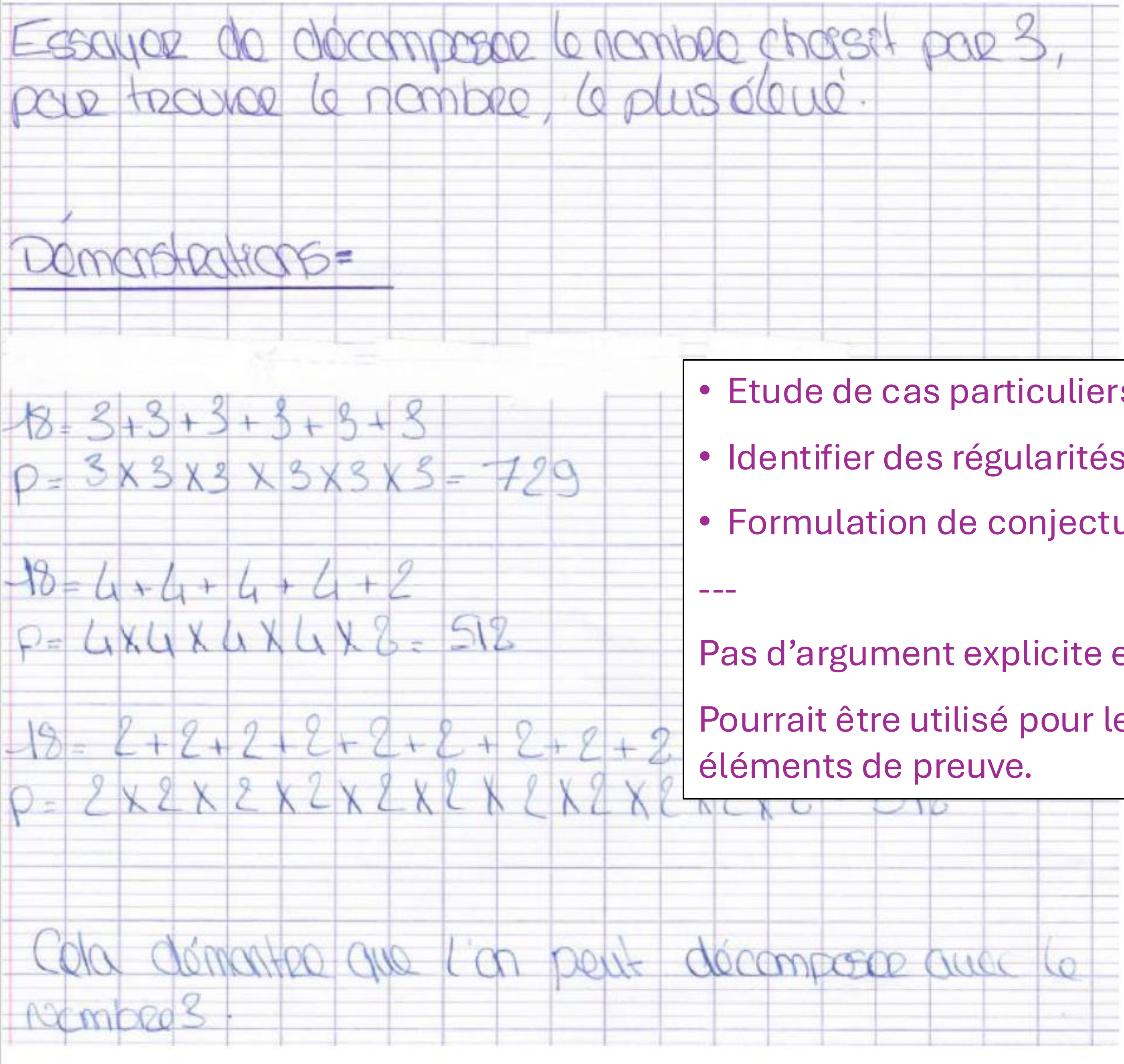
2x2x2x2x2x2x2x2 =

10ème

- Organisation pour trouver des décompositions
- Etude de cas particuliers *(questionnement, comparaison, etc.)*
- Identifier des régularités : 6 *vs* 3x3 ; rôle de 3
- Formulation de conjecture : avec des 3, on obtient le plus grand produit

Des arguments explicites

*source : Mémoire INSPE Lyon*



Essayer de décomposer le nombre choisit par 3, pour trouver le nombre, le plus élevé.

Démonstrations =

18 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3

P = 3 x 3 x 3 x 3 x 3 x 3 = 729

18 = 4 + 4 + 4 + 4 + 2

P = 4 x 4 x 4 x 4 x 2 = 512

18 = 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2

P = 2 x 2 x 2 x 2 x 2 x 2 x 2 x 2 x 2 = 512

Cela démontre que l'on peut décomposer avec le nombre 3.

10ème

- Etude de cas particuliers *(questionnement, comparaison, etc.)*
- Identifier des régularités : rôle de 3
- Formulation de conjecture : avec des 3, on obtient le plus grand produit

---

Pas d'argument explicite et visible dans leur production

Pourrait être utilisé pour les pousser à aller davantage dans des éléments de preuve.

*source : Mémoire INSPE Lyon*

Sec 1
Sec 2

# Les jetons

**Les jetons** – *source : groupe Logique de l'IREM de Paris : https://irem.u-paris.fr/logique*

On dispose de trois jetons de formes différentes (rond, carre et triangle) et de trois couleurs différentes (bleu, vert et rouge). Chaque jeton a une seule couleur.

Voici trois propositions vraies sur ces pièces :

1. Si le jeton rond est bleu, alors le jeton carré est vert.
2. Si le jeton rond est vert, alors le jeton carré est rouge.
3. Si le jeton carré n'est pas bleu, alors le jeton triangulaire est vert.

Donner toutes les solutions (s'il y en a).

| 6 possibilités | Version 1 |
|---|---|
|  | Affirmations 1 & 2 vraies<br>Affirmation 3 fausse |
|  | Affirmation 1 fausse<br>Affirmation 3 vraie<br>Affirmation 2 |
|  | Affirmations 1 & 3 vraies<br>Affirmation 2 fausse |
|  | Affirmations 1 & 2 vraies<br>Affirmation 3 fausse |
|  | Affirmations 1 & 2 vraies<br>Affirmation 3 |
|  | Affirmation 1<br>Affirmation 2 vraie<br>Affirmation 3 fausse |
| Solution(s) | **Une** solution<br> |

- Etude du premier cas : le jeton rond est bleu.

D'après la proposition 1, si le jeton rond est bleu alors le jeton carré est vert.
D'après la proposition 3, le jeton triangulaire est vert ce qui est impossible puisque deux jetons (carré et triangulaire) seraient verts.

- Deuxième cas : le jeton rond est vert.

D'après la proposition 2, si le jeton rond est vert alors le jeton carré est rouge.
D'après la proposition 3, le jeton triangulaire est vert ce qui est impossible puisque deux jetons (rond et triangulaire) seraient verts.

- Troisième cas : le jeton rond est rouge.

Si le jeton carré est vert, alors d'après la proposition 3, le jeton triangulaire est vert. Ceci est impossible puisque deux jetons (carré et triangulaire) seraient verts. Donc le jeton carré est bleu, et le jeton triangulaire est vrai.

Ainsi, la seule solution possible correspond au jeton rond rouge, au jeton carré bleu et au jeton triangulaire vert. On vérifie que cette combinaison rend les trois implications vraies.

# Les jetons

**Processus de recherche**

- Produire des combinaisons différentes
- Etudier différents cas selon la couleur du jeton

**Processus de preuve**

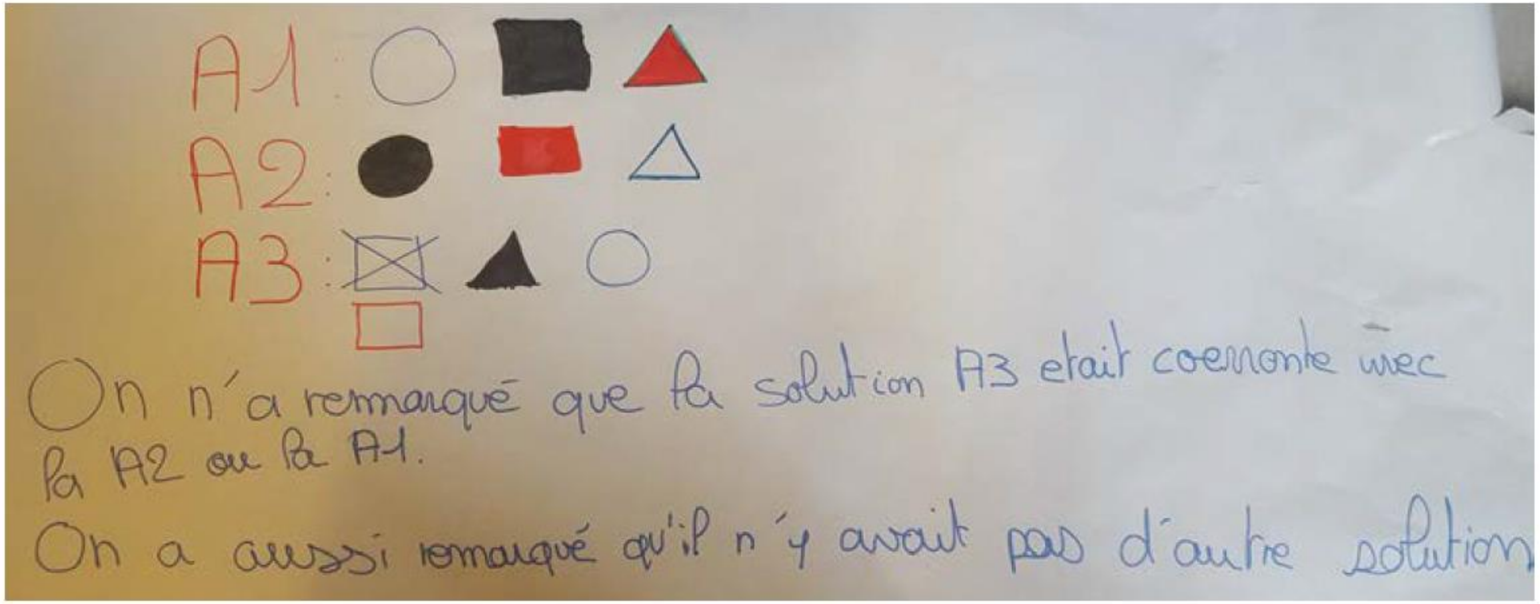
- Valider et invalider une combinaison (implication, contraposée)
- Démontrer que toutes les combinaisons ont été étudiées
- Exhaustion des cas
- Disjonction des cas – sur la couleur possible d'un jeton

Es-tu sûr·e ?

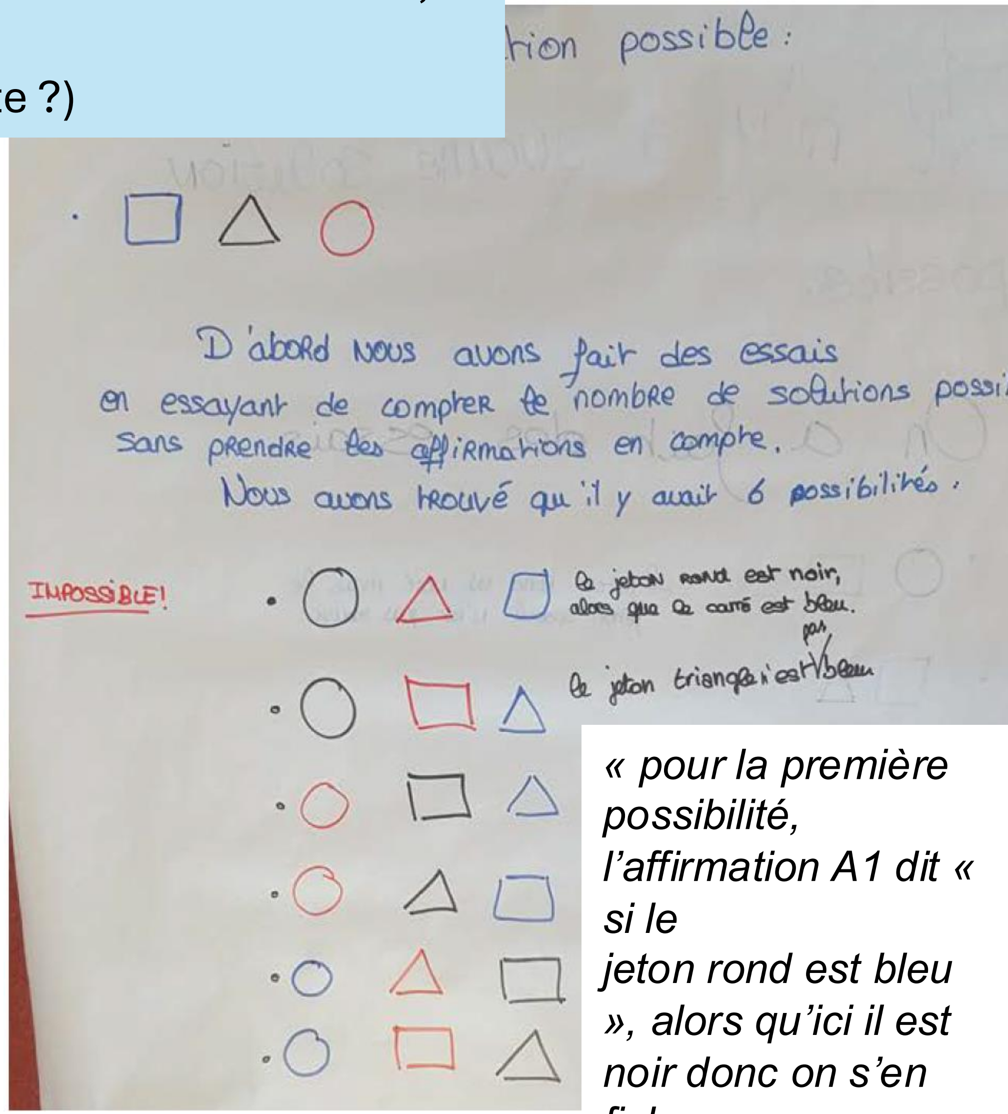
# Les jetons

- Valider et invalider une combinaison (implication, contraposée)
- Affirmation que toutes les combinaisons ont été étudiées, mais pas d'argument
- Exhaustion des cas (étude incomplète ?)

S1




*Reformulation « Si le carré n'est pas bleu ».*
*La solution de ce groupe n'est pas explicitée sur l'affiche.*




*« pour la première possibilité, l'affirmation A1 dit « si le jeton rond est bleu », alors qu'ici il est noir donc on s'en fiche ».*

*source : Mémoire INSPE Lyon*

# Les jetons

- Valider et invalider une combinaison (implication)
- Affirmation que toutes les combinaisons ont été étudiées, mais pas d'argument
- Exhaustion des cas (étude incomplète ?)

On a schématiser les affirmations puis on a chercher toutes les possibilités et on a fonctionner par élimination pour trouver lesquelles sont bonnes.

On est parti sur le fait qu'une seule possibilité fonctionne pour chaque affirmat° :

| | □ | ○ | △ |
|---|---|---|---|
| | B | V | R |
| | B | R | V |
| possible → | R | V | B |
| | V | R | B |
| possible → | R | B | V |
| possible → | V | B | R |

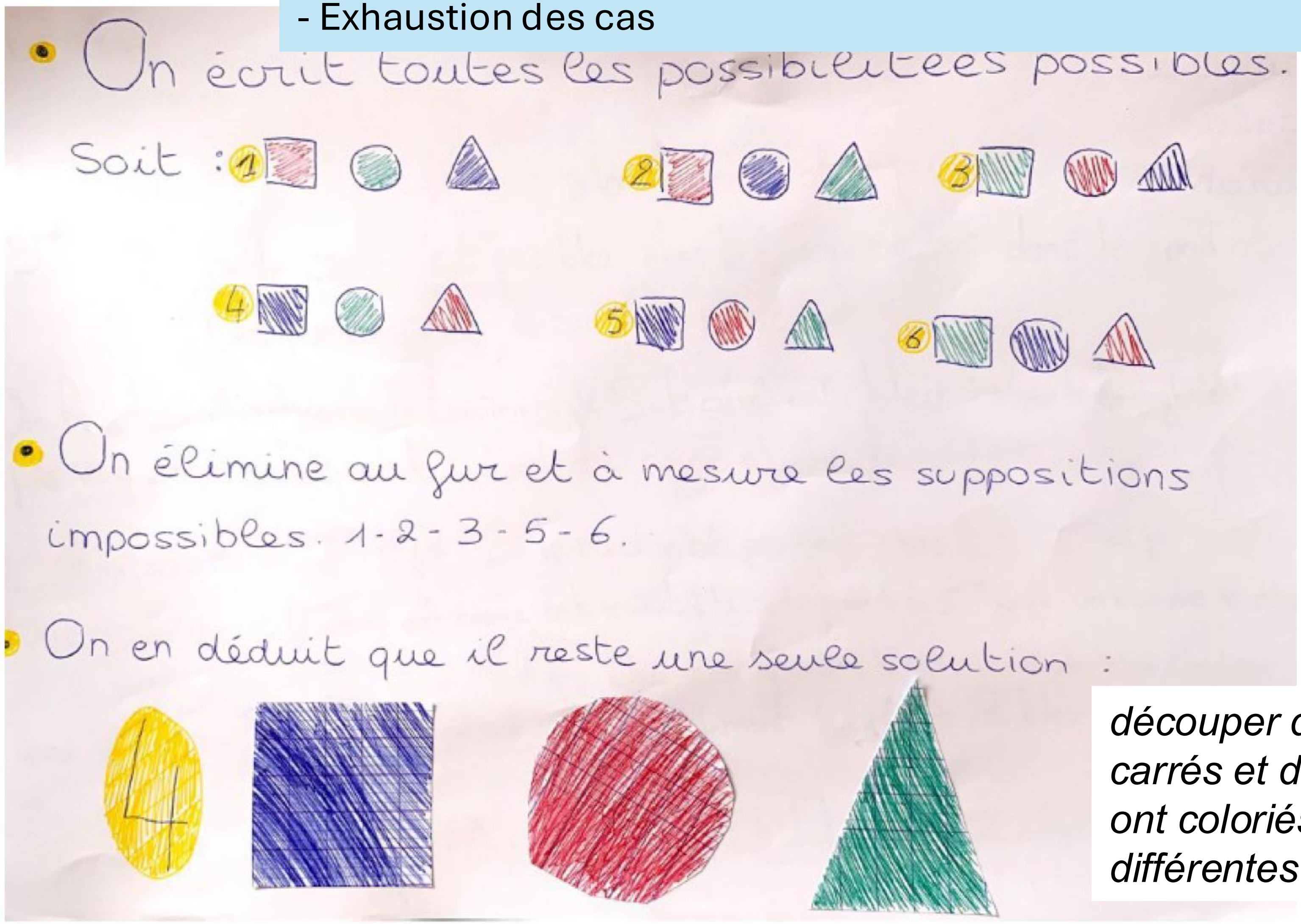
*Prise en compte d'une affirmation vraie à la fois*

*source : Mémoire INSPE Lyon*

# Les jetons

- Valider et invalider une combinaison (implication, contraposée)
- Affirmation que toutes les combinaisons ont été étudiées, mais pas d'argument
- Exhaustion des cas

S2

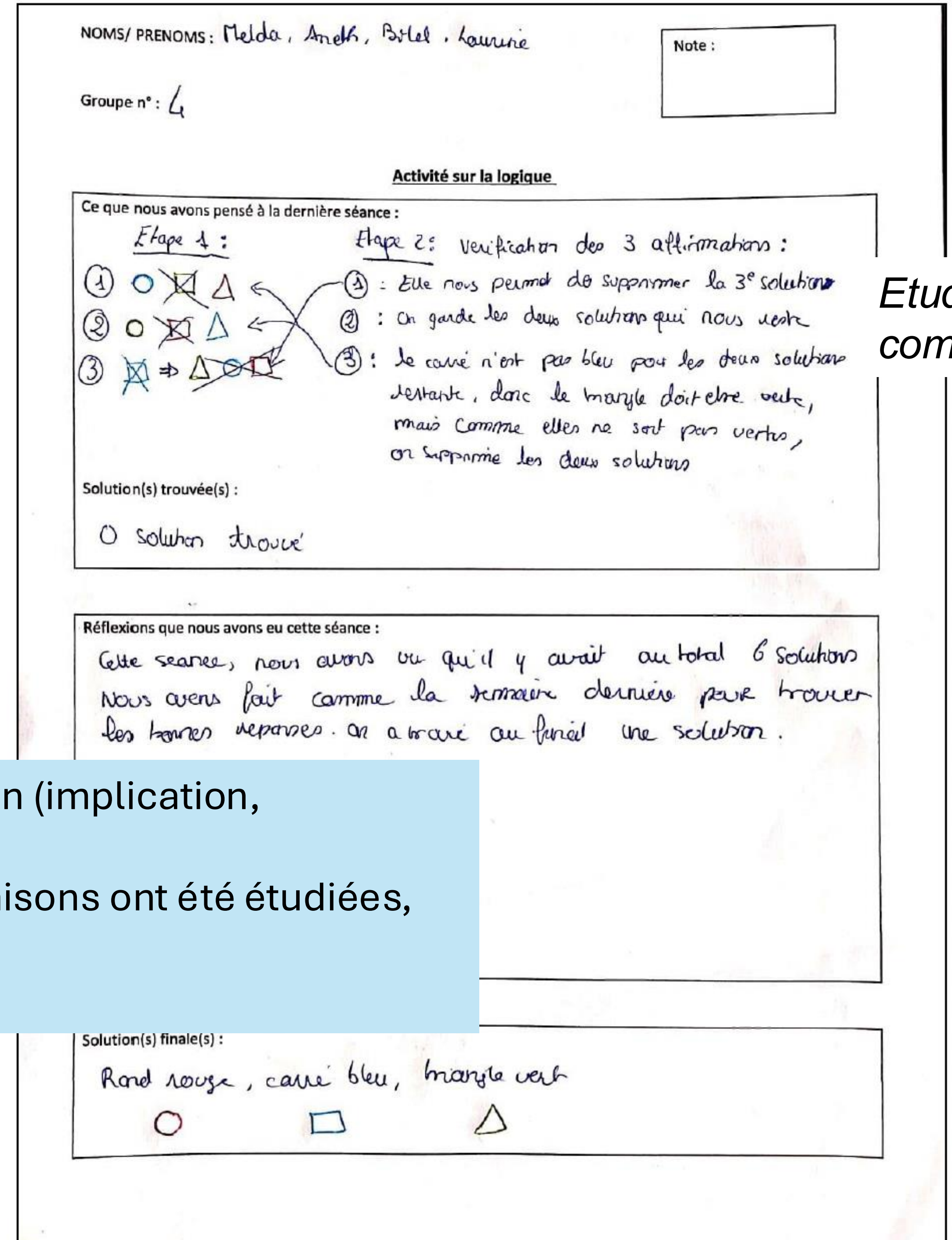



*découper des ronds, des carrés et des triangles qu'elles ont coloriés afin de créer les différentes possibilités.*

*source : Mémoire INSPE Lyon*

# Les jetons

S2


NOMS/ PRENOMS : Melda, Amelh, Bilel, Laurine

Note :

Groupe n° : 4

**Activité sur la logique**

Ce que nous avons pensé à la dernière séance :

Etape 1 :

① ② ③

Etape 2 : Vérification des 3 affirmations :

① : Elle nous permet de supprimer la 3e solution

② : On garde les deux solutions qui nous reste

③ : le carré n'est pas bleu pour les deux solutions restante, donc le triangle doit etre vert, mais comme elles ne sont pas vertes, on supprime les deux solutions

Solution(s) trouvée(s) :

0 solution trouvé

Réflexions que nous avons eu cette séance :

Cette seance, nous avons vu qu'il y avait au total 6 solutions
Nous avons fait comme la semaine dernière pour trouver les bonnes reponses. On a trouvé au final une solution.

Solution(s) finale(s) :

Rond rouge, carré bleu, triangle vert

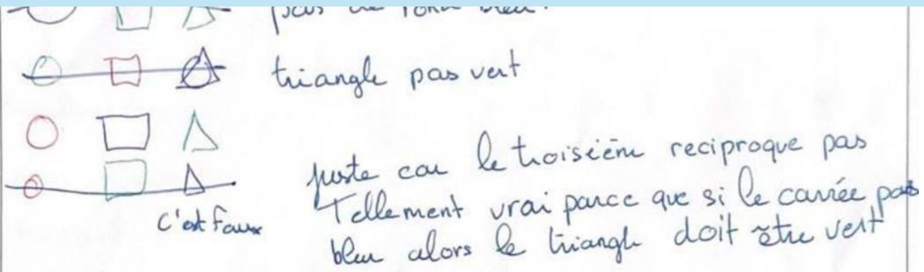
*Etude de seulement 3 combinaisons*

- Valider et invalider une combinaison (implication, contraposée)
- Affirmation que toutes les combinaisons ont été étudiées, mais pas d'argument
- Exhaustion des cas

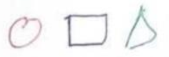
*source : Mémoire INSPE Lyon*

- Valider et invalider une combinaison (implication, contraposée)
- Affirmation que toutes les combinaisons ont été étudiées, mais pas d'argument
- Exhaustion des cas

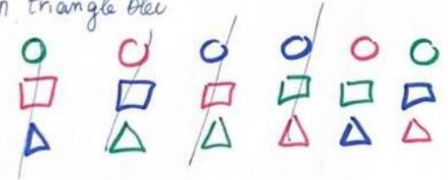
S2



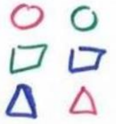

Solution(s) trouvée(s) :



Réflexions que nous avons eu cette séance : On utilise la méthode par élimination
On à pris les possibilités avec les triangles rouges et le carré vert et on les l'à enlever. On a aussi éliminer ceux qui avait un triangle rouge et qui ont un carré autre que vert. On enlève ceux qui ont un rond pas bleu mais un triangle pas vert, On a supprimer ceux qui avaient un carré rouge mais qui n'avais pas un triangle bleu



Solution(s) finale(s) :

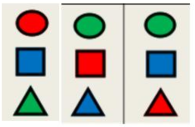


…es les combinaisons on commence par
…alors le jeton triangulaire est rouge*] je

Professeur : Que lui ?

Elève 2 : Oui oui, dans les autres le carré n'est pas vert donc on les compte pas.

Professeur : Très bien, on continue alors qu'est-ce qu'on peut éliminer avec la deuxième proposition [*Si le jeton rond n'est pas bleu, alors le jeton carré est vert.*] ?

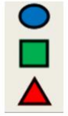
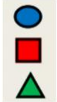
Elève 3 : On barre ces trois-là . 

Elève 4 : Pourquoi eux tous ?

Elève 3 : On voit dans les cas qui restent les possibilités où le rond n'est pas bleu donc rouge ou vert et après si le jeton n'est pas vert on barre, donc on barre ces trois.

Elève 4 : Ah oui, trop fort !

Professeur : Allez plus qu'une proposition [*Si le jeton carré n'est pas rouge, alors le jeton rond est rouge.*]

Elève 4 : Je peux faire ? Merci ! Donc on enlève celle-là  , elle est fausse et on a fini ! Donc la bonne solution c'est elle :  . »

Après cet échange de 10 minutes, les élèves étaient motivés et ont donc très rapidement corrigés le deuxième problème. Une élève a remarqué : « Mais en fait c'est super simple, pourquoi vous ne nous avez pas montré ça avant Madame ? ».

« - En fait Madame, une fois qu'on sait faire il y a plus d'enjeu !

- Mais ça veut dire que même quand la phrase est fausse on peut trouver la solution au problème ? Je ne savais pas qu'en maths quelque chose de faux servait !

- On n'a pas calculé pendant deux heures de maths, j'ai compris ce qu'on a fait à la fin. »

*source : Mémoire INSPE Lyon*

- Valider et invalider une combinaison (implication, contraposée)
- Raisonnement par disjonction des cas sur la couleur possible du jeton rond.

[…] respecté. Ensuite la 2ème affirmation est respecté car notre jeton rond est vert et le jeton carré est rouge. Mais on s'est aperçu que la 3ème affirmation n'est pas respecté car notre carré n'est pas bleu donc le triangle devrait être vert mais il est bleu.

○ □ △ Cette solution ne marche pas, car la 3ème affirmation est respecté mais pas la 1ère car le jeton rond est bleu mais le jeton carré n'est pas vert.

○ □ △ Cette solution ne marche pas, car la 3ème et la 1ère affirmation sont respectés mais pas la 2ème.

○ □ △ Cette solution ne marche pas, car les 2 premières affirmations sont justes mais la 3ème ne marche pas car le triangle est vert donc le carré ne doit pas être bleu.

En conclusion, nous n'avons pas trouvé de solution, donc on suppose que cela n'admet pas de solution.

S2

- Valider et invalider une combinaison (implication, contraposée)
- Affirmation que toutes les combinaisons ont été étudiées, mais pas d'argument
- Exhaustion des cas

J'énumère les 6 possibilités

○ □ △ Si ○ est bleu, alors le jeton □ est vert donc Non

○ □ △ Si □ n'est pas bleu, alors △ doit être vert donc Non

○ □ △ Si □ n'est pas bleu, alors △ doit être vert donc faux

○ □ △ *

○ □ △ Si □ n'est pas bleu, alors △ doit être vert donc faux.

○ □ △ Si ○ est vert, alors □ est rouge

○ □ △

* Aucune des affirmations ne contredit cette possibilité elle est donc juste ce qui n'est pas le cas des cinq autre possibilité.

source : Mesnil,Z., Beaud, S., Barbe, H. (2016). Retour de notions de logique dans les programmes de lycée. Atelier Journée CII Lycée, Bordeaux, 29-01-2016.

# Les tours / Les bracelets d'Annie

Institutionnalisation

- Ce problème a plusieurs solutions.
- Pour prouver qu'on avait trouvé toutes les solutions, sans répétition, nous avons dû organiser la recherche :
    - représentations des tours avec des codages de couleurs car c'est plus efficace que les mots ou le coloriage
    - démarrer en fixant la couleur de deux cubes puis faire varier les deux autres
    - renverser les tours…
- On a dû manipuler et chercher.
- On a vérifié que toutes les solutions trouvées étaient différentes et qu'il ne manquait pas de solution.

Dénombrement

*Institutionnalisation globale, collective (à faire après la résolution de plusieurs problèmes qui ont plusieurs solutions)*

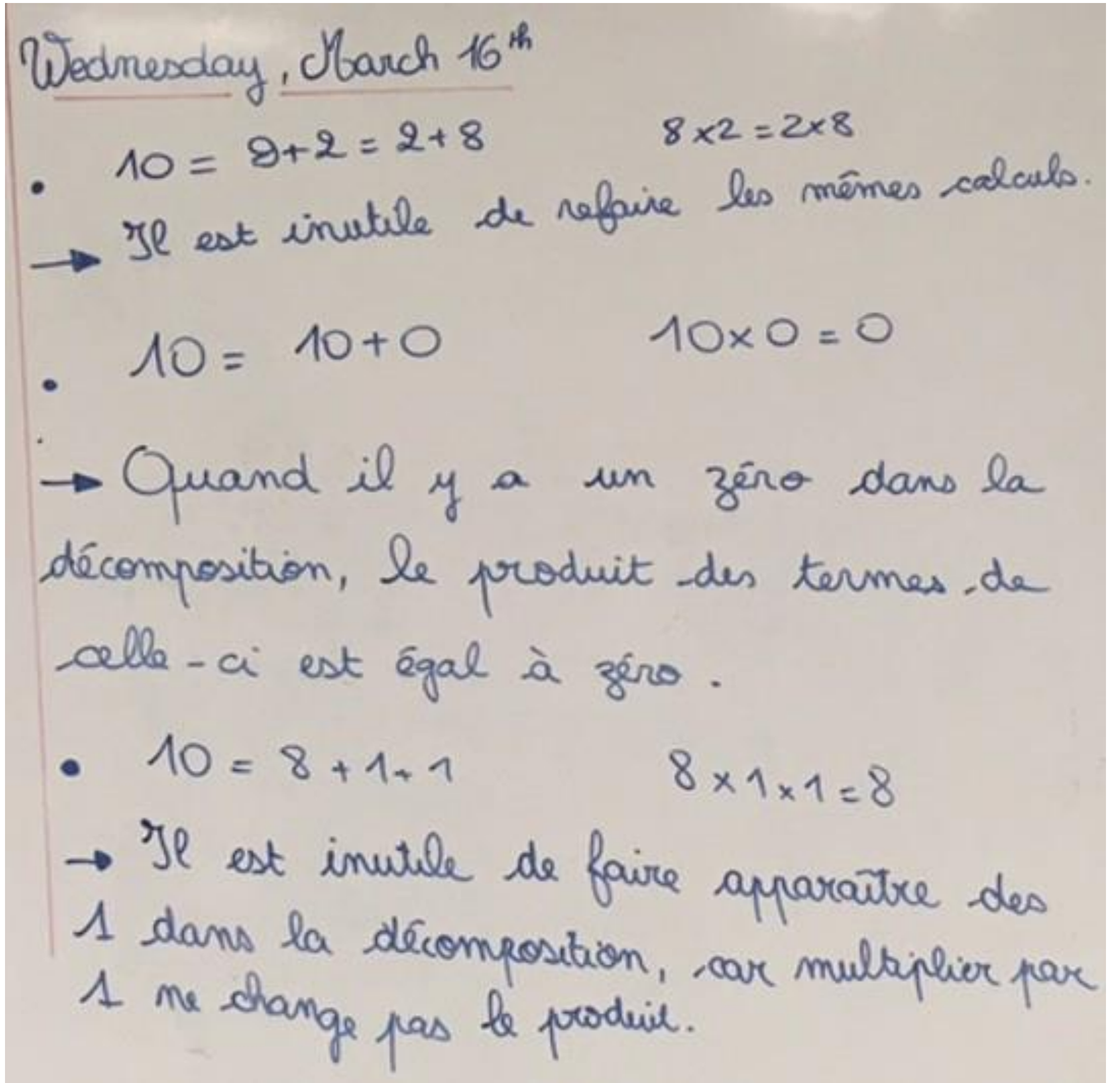
Elle sera constituée de :

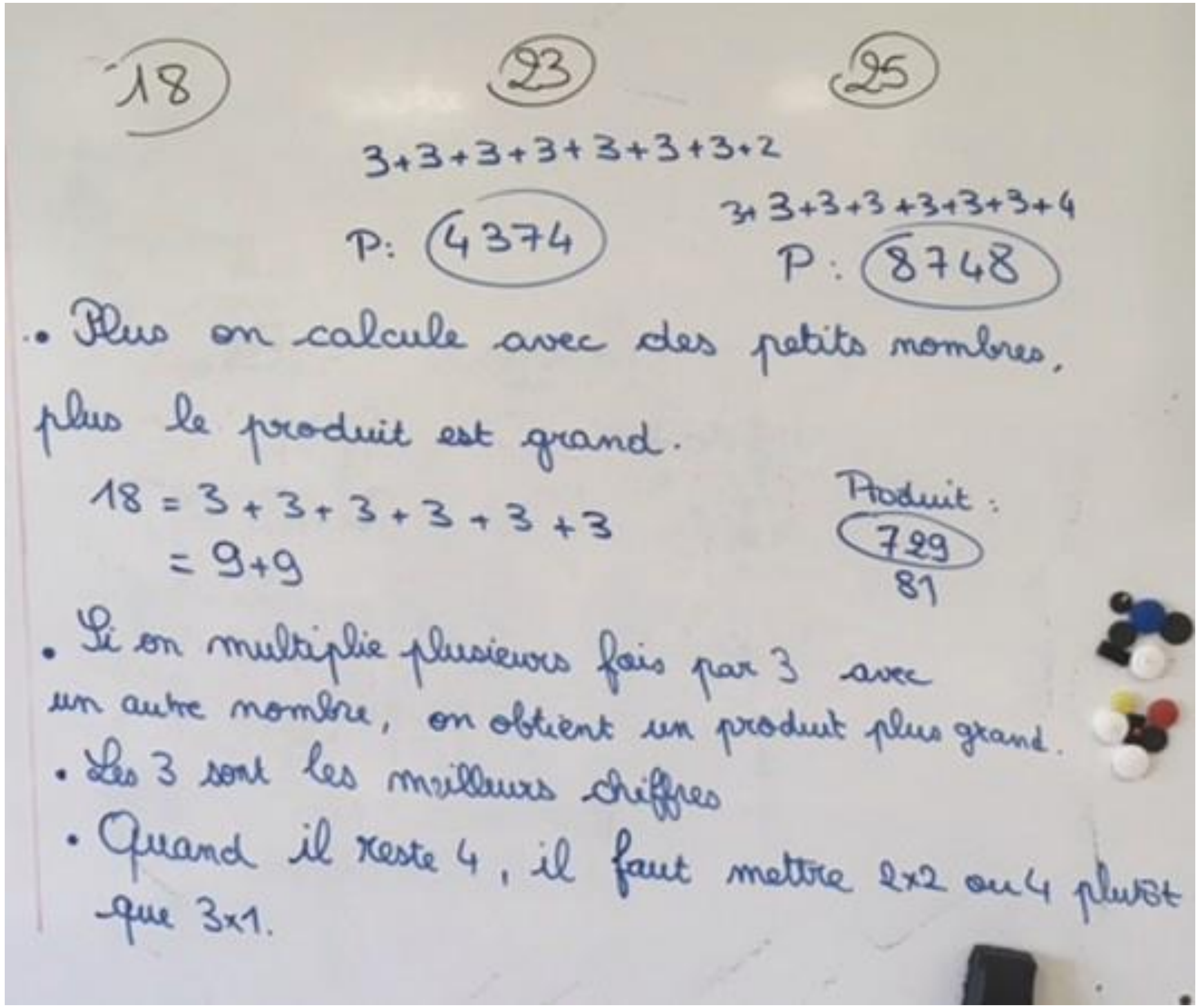
- Un problème peut avoir plusieurs solutions.
- Pour prouver qu'on a trouvé toutes les solutions et qu'elles sont toutes différentes, on doit organiser la recherche et la présentation des solutions.

**Les tours** – *source : LéA-IFE Réseau de l'école à l'université - Grenoble et Annecy*

# Le plus grand produit

Institutionnalisation




*source : LéA Ecl@Maths*

# Le plus grand produit

Institutionnalisation

**C'est quoi chercher en mathématiques :**

- Trouver des méthodes, des techniques
- Être capable de changer de méthode ou de technique
- Utiliser des outils : les amis, la calculette
- Faire des mesures

Renforcement des tables de multiplication
Commutativité de la multiplication
Décomposition additive d'un nombre en plusieurs termes
…
*Ils n'ont jamais autant calculé !*

Propositions de généralisation :

- « ça ne sert à rien de décomposer avec des uns, parce que x1 ça ne fait pas un plus grand produit »
- 1, élément neutre pour la multiplication :

  « le 1 pour la multiplication, c'est comme le 0 pour le + »
- « Pour trouver le plus grand produit, il faut mettre le plus possible de 3 ».
- « Il vaut mieux prendre des petits nombres que des grands nombres »

  Une élève explique :
  - 3 x 2 x 2, c'est plus grand que 3 x 4. L'enseignant lui demande de vérifier. Après avoir constaté son erreur, l'élève choisit un nouvel exemple.
  - 2 x 5, c'est 10 ; c'est plus petit que 2 x 3 x 2 qui fait 12
- « On choisit plutôt 3 que 2 »
- « Quand on a un 1, on choisit plus grand que 3 : c'est ce qu'on a fait avec 25 : on a fait 4 avec 3 et 1 »

*source : LéA Ecl@Maths*

# Les jetons

Institutionnalisation

Elle peut porter sur :

- **des notions de logiques : implication, réciproque, contraposée**
  - Une implication est une proposition mathématique qui peut s’écrire sous la forme « Si P alors Q » où P et Q sont deux propositions, ou encore $P \Longrightarrow Q$. La proposition *P* s’appelle prémisse et la proposition *Q* s’appelle conclusion.
  - La réciproque de l’implication $P \Longrightarrow Q$ est l’implication $Q \Longrightarrow P$.
  - La contraposée de l’implication $P \Longrightarrow Q$ est l’implication $non\ Q \Longrightarrow non\ P$.

- **les valeurs de vérité d’une implication, de sa réciproque et de sa contraposée**
  - Une implication n’est fausse que dans le cas où *P* est vraie et *Q* est fausse.
  - La réciproque n’a pas nécessairement la même valeur de vérité que l’implication.
  - La contraposée a la même valeur de vérité que l’implication.

*source : Gardes (2023)*

# Les jetons

Institutionnalisation

- **le raisonnement par disjonction de cas** : il s’agit d’une forme de raisonnement qui consiste à décomposer la proposition que l'on cherche à démontrer en un nombre fini de cas (sous-propositions) vérifiés indépendamment.

- **le raisonnement par étude de tous les cas possibles** : il consiste, dans le cas où il y a un nombre fini de possibilités de solutions, à tester chacune de ces possibilités afin de toutes les trouver et elles seules.

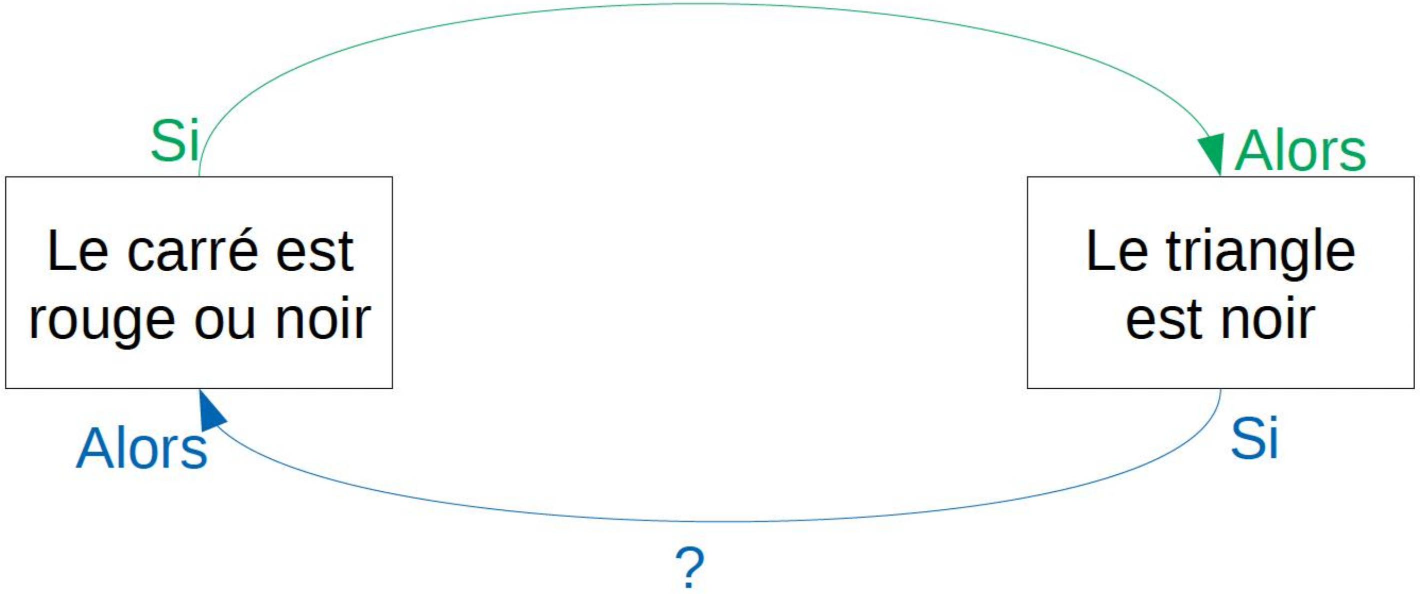
- **la représentation des solutions** : on peut représenter les solutions de plusieurs façons différentes, par exemple avec un schéma, un tableau, un arbre, des lettres, des numéros, etc.

- **chercher** : les essais et les erreurs permettent de trouver des solutions. Les conjectures doivent ensuite être prouvées.

- **argumenter et débattre** : il faut justifier les propositions que l’on donne et les conjectures proposées doivent ensuite être prouvées.

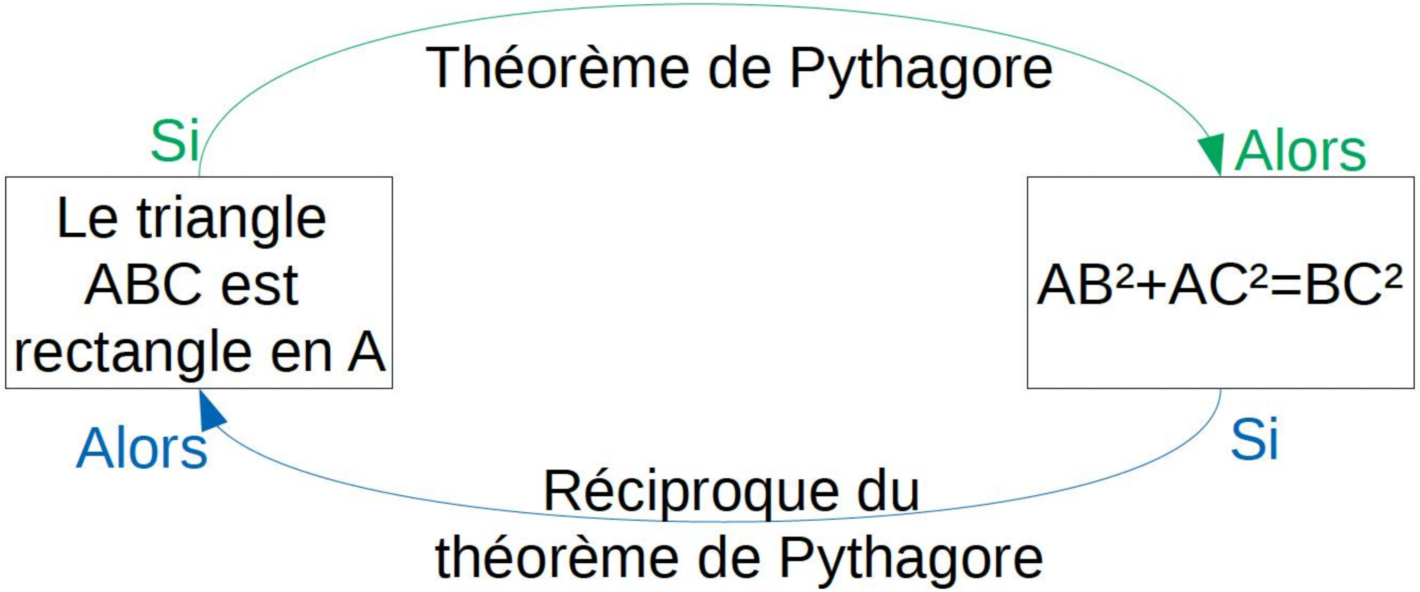
- **communiquer** : pour convaincre, il faut utiliser des arguments mathématiques et expliquer ses stratégies avec un vocabulaire précis. Il est aussi important de comprendre les stratégies des autres groupes pour pouvoir les valider et les comparer entre elles.

*source : Gardes (2023)*




L'élève qui avait énoncé la réciproque de l'affirmation A3 a compris son erreur.

Pour conclure ce débat, j'ai introduit le chapitre que nous allons commencer à la séance suivante (la réciproque du théorème de Pythagore) grâce au schéma suivant :



# Des conditions

1

Un problème mathématique avec les caractéristiques suivantes :

- Un énoncé court
- L'énoncé ne donne ni la méthode, ni la solution
- Le problème se trouve dans un domaine conceptuel familier aux élèves

- Le problème permet de mettre en œuvre une **dimension expérimentale**
- La recherche du problème met en jeu une dialectique entre la mobilisation, l'approfondissement de connaissances et le développement d'heuristiques

(Arsac et Mante, 2007 ; Gardes, 2013, 2018)

# Des conditions

2

Des modalités de mise en œuvre avec un contrat didactique qui nécessite…

- pour l'enseignant·e de ne pas corriger systématiquement les élèves s'ils construisent des tours de manière erronée ;
- pour l'enseignant·e de laisser les élèves prendre en charge la validation des réponses, donc, dans un premier temps, de les laisser exprimer ce qu'ils pensent être une tour valide ;
- pour l'enseignant·e de solliciter les élèves pour qu'ils expriment leur accord ou leur désaccord avec les solutions proposées ;
- pour l'enseignant·e de faire verbaliser les élèves pour qu'ils expliquent leur raisonnement ;
- l'avancement des élèves vers la validation ou l'invalidation des réponses doit l'emporter sur la résolution complète du problème.

(Gandit, 2023)

# Des conditions

3

## Une **progressivité** dans le choix des problèmes, sur un temps long

Période 1

| Séquence principale / Problème de recherche | En rituel - AP | Thème dominant |
|---|---|---|
| **Le nombre de 0 de la factorielle** | Calcul mental dans N et D ; Utilisation de la proportionnalité ; rappels sur les angles | Thème A - Arithmétique |
| Les nombres relatifs | | Thème A |

Période 2

| Séquence principale / Problème de recherche | En rituel - AP | Thème dominant |
|---|---|---|
| Les symétries | Angles et parallélisme ; pourcentages ; Calculs dans Z (+ , - et x) ; initiation Scratch | Thème D |
| **Les triangles** | | Thème D - Triangle |

Période 3

| Séquence principale / Problème de recherche | En rituel - AP | Thème dominant |
|---|---|---|
| **Les triangles (suite)** | Comparaison de relatifs, distance entre deux points, Scratch et coordonnées | Thème A - Nombres et fractions |
| Se repérer | | Thème D |

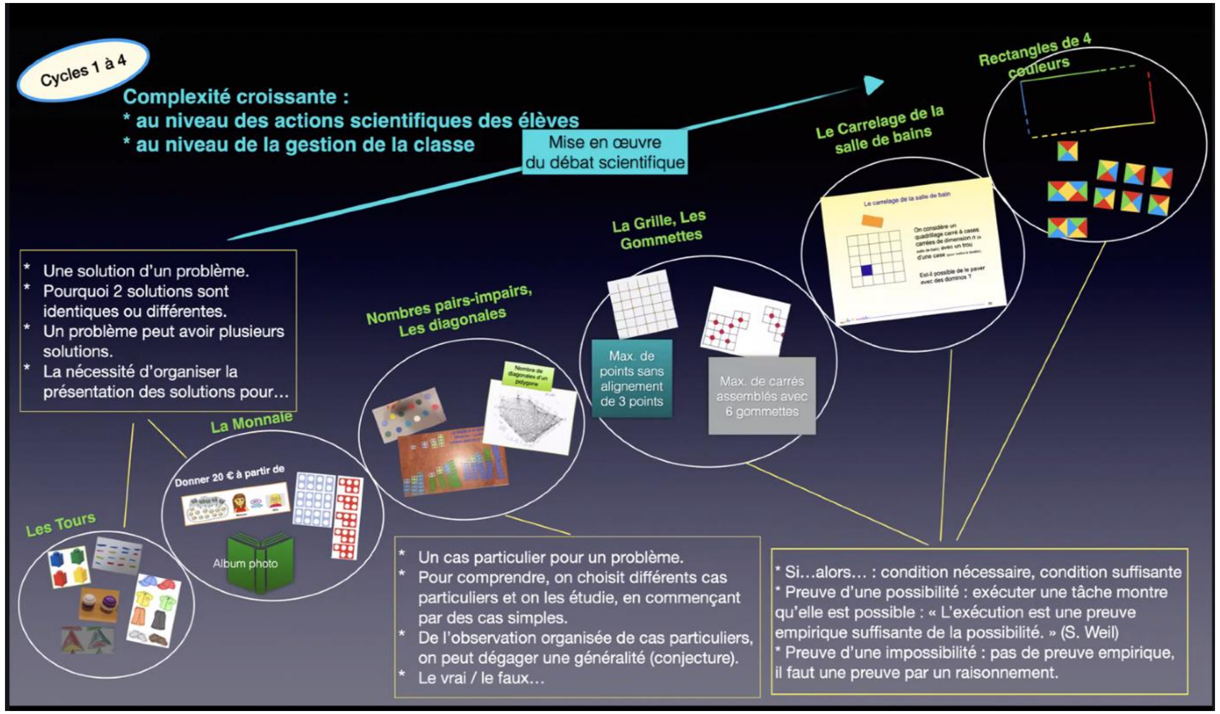
Période 4

| Séquence principale | En rituel | Thème dominant |
|---|---|---|
| **Quel quotient ?** | Calculs de périmètres et conversions d'unités + Repérage dans le plan + Comparaison de fractions | Thème A - Nombres et fractions |
| Les parallélogrammes | | Thème D |

Période 5

| Séquence principale / Problème de recherche | En rituel | Thème dominant |
|---|---|---|
| Gestion de données | Calculs dans Q (+, - et x) + Initiation aux probabilités + rappels sur les volumes | Thème B |
| **L'Aire de l'Antarctique** | | Thème D - Les aires |
| **Le château de cartes** | | Thème A - Calcul littéral |

Source : DREAM




Source : (Gandit, 2026)

# Quelle formation pour les enseignants ?

1. Chercher un problème
Identifier connaissances et heuristiques

2. Analyser des travaux d'élèves sur le même problème : *expliciter les procédures mises en œuvre par les élèves, repérer leurs difficultés, préciser les connaissances mathématiques mobilisées, analyser les méthodes et raisonnements utilisés*
Projection dans la mise en commun, débat et institutionnalisation

3. Identifier les problèmes qui peuvent permettre aux élèves de développer une activité de recherche mathématique
*À partir des caractéristiques d'un problème / Potentiels (Georget, 2009)*

4. Elaborer et mettre en œuvre en classe d'une situation didactique de recherche de problème

- Analyser le travail mathématique des élèves lors d'un débat à partir de verbatim (productions écrites et échanges oraux)
- Gestion d'un débat à partir d'un jeu de rôle (préparation, animation d'un débat, institutionnalisation à partir des échanges et productions des élèves)
- Préparation de la mise en œuvre de la situation en classe, par petits groupes
- Analyse de leur pratique, suite à la mise en œuvre dans leur classe

# Quelle formation pour les enseignants ?

**Compétence 1**

**Analyser** un problème de mathématiques en vue de mettre en évidence les connaissances nécessaires aux raisonnements permettant l'exploration du problème

**Compétence 2**

**Dévoluer** aux élèves les différentes phases d'une recherche de problème

**Compétence 3**

**Repérer** dans les travaux des élèves des connaissances et compétences mathématiques en lien avec les programmes de la classe

**Compétence 4**

**Permettre** aux élèves de débattre scientifiquement

**Compétence 5**

**Construire** son enseignement à partir des productions effectives des élèves

**Compétence 6**

**Analyser** ce qui s'est passé en classe et d'en tirer des pistes concrètes d'enseignement pour améliorer les situations d'apprentissage élaborées et testées

# Conclusion

- Mettre en évidence que l’approche de la preuve peut s’effectuer dès l’entrée à l’école
- Processus de preuve permet de mettre un travail dialectique entre les connaissances et les heuristiques, se renforçant mutuellement
- Des conditions favorisent cette approche de la preuve : temps long, progressivité, caractéristique des problèmes, modalités de mise en œuvre, etc.

# Ressources

- Les tours : https://www.problematheque-csen.fr/fiche-probleme/les-tours/
- Les bracelets d’Annie : https://sites.google.com/view/fcmermath5-6hepvaudrsolutionde?usp=sharing

(une variante : Les triangles colorés https://www.problematheque-csen.fr/fiche-probleme/les-triangles-colores/)

- Le plus grand produit : https://math.univ-lyon1.fr/dream/?p=3404
- Les jetons : https://www.problematheque-csen.fr/fiche-probleme/les-jetons/

Merci