

Teaching and learning Algebra

An international symposium

Geneva Wednesday 7th June 2017

Teaching and learning Algebra An international symposium

Geneva | Wednesday 7th June 2017
Uni Mail | room MR070

9h30-10h45 **From Mesopotamians to Descartes: a brief account of the history of algebra**

JEAN-LUC DORIER

Professor of didactics of mathematics, Equipe DiMaGe, FPSE, UniGe

10h45-12h00 **Revisiting school algebra through visualization and sense making**

ABRAHAM ARCAVI

Weizmann Institute of Science, Israel | Secretary general of ICMI

12h-14h00 Lunch

14h00-15h15 **Learning about teaching Algebra through Lesson Study**

JILL ADLER

SARChI Mathematics Education Chair - University of the Witwatersrand (South Africa) | President of ICMI - Hans Freudenthal ICMI Award 2015

15h30-16h45 **Conception collaborative de ressources pour l'enseignement de l'algèbre élémentaire**

SYLVIE COPPÉ

Maîtresse d'enseignement et de recherche, Equipe DiMaGe, FPSE, UniGe

17h00-18h15 **Le développement de la pensée algébrique chez les jeunes élèves : une approche vygotskienne**

LUIS RADFORD

Université Laurentienne Sudbury, Ontario, Canada | Vice président de l'ICMI - Hans Freudenthal ICMI Award 2011

18h15 Verrée

All presentations will be either in English with French slides or in French with English slides

FACULTÉ DE PSYCHOLOGIE
ET DES SCIENCES DE L'ÉDUCATION

DiMaGe



Nos remerciements à

- Fond national pour la recherche suisse FNRS
- Faculté de psychologie et des sciences de l'éducation (FPSE)
- Section des sciences de l'éducation (SSED)
- Les membres de l'équipe DiMaGe

La Commission internationale de l'enseignement mathématique

- Créée en 1908 au 4^e Congrès international des mathématiques à Rome à l'instigation de David Eugene Smith avec Felix Klein comme premier président.
- Très active à ses débuts elle joue un rôle important dans la réforme de l'enseignement des mathématiques du début du 20^e, puis est mise en veille dans l'entre deux guerres.
- Elle joue à nouveau un rôle important à partir des années 1950 en particulier dans la réforme des maths modernes

L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

REVUE INTERNATIONALE

PARAISANT TOUS LES DEUX MOIS

DIRECTEURS

C.-A. LAISANT

Docteur ès sciences,
Examinateur d'admission à l'École polytechnique
de Paris.

H. FEHR

Docteur ès sciences,
Privat-docent à l'Université de Genève,
Professeur au Collège et à l'École profes-
sionnelle.

COMITÉ DE PATRONAGE

P. APPELL (Paris). — N. BOUGAIEV (Moscou). — MORITZ CANTOR (Heidelberg).
L. CREMONA (Rome). — E. CZUBER (Vienne). — Z.-G. DE GALDEANO (Saragosse).
A.-G. GREENHILL (Woolwich). — F. KLEIN (Göttingen). — V. LIGUINE (Varsovie).
P. MANSION (Gand). — MITTAG-LEFFLER (Stockholm). — G. OLTRAMARE (Genève).
JULIUS PETERSEN (Copenhague). — E. PICARD (Paris). — H. POINCARÉ (Paris).
P.-H. SCHOUTE (Groningue). — C. STEPHANOS (Athènes). — F. GOMES TEIXEIRA (Porto).
A. VASSILIEF (Kasan). — A. ZIWET (Ann-arbor, Michigan, U. S. A.).

TOME PREMIER

PARIS

GEORGES CARRÉ ET C. NAUD, ÉDITEURS

3, RUE RACINE, 3

1899

Le journal
*L'Enseignement
mathématique*, créée
en 1899 par Charles-
Ange Laisant et Henri
Fehr est le journal
officiel de la
commission depuis sa
création
et il est hébergé à la
section des
mathématiques de
l'université de Genève

La Commission internationale de l'enseignement mathématique

- Depuis 1952 c'est une sous commission de la l'Union Mathématique internationale
- Felix Klein (1908-20), Davide Eugène Smith (1928-32), Jacques Hadamard (1932 -39), Albert Chatelet (1952-54), Heinrich Behnke (1955-58), Marshall H. Stone (1959-62), André Lichnerowicz (1963-66), Hans Freudenthal (1967-70), James Lighthill (1971-74), Shokichi Iyanaga (1975-78), Hassler Whitney (1979-1982) Jean-Pierre Kahane (1983-90), Miguel de Guzmán (1991-98), Hyman Bass (1999-2006), Michèle Artigue (2007-09), Bill Barton (2010-12), Ferdinando Arzarello (2013-16)

Comité Exécutif 2017-2021

President : Jill ADLER (South Africa)

Vice-presidents : Merrylin GOOS (Australia)
Luis RADFORD (Canada)

Secretary general : Abraham ARCAVI (Israel)

Members at large : Xu BINYAN (China)
Jean-Luc DORIER (Switzerland)
Zahra GOOYA (Iran)
Anita RAMPAL (India)
Yuriko YAMAMOTO BALDIN (Brazil)

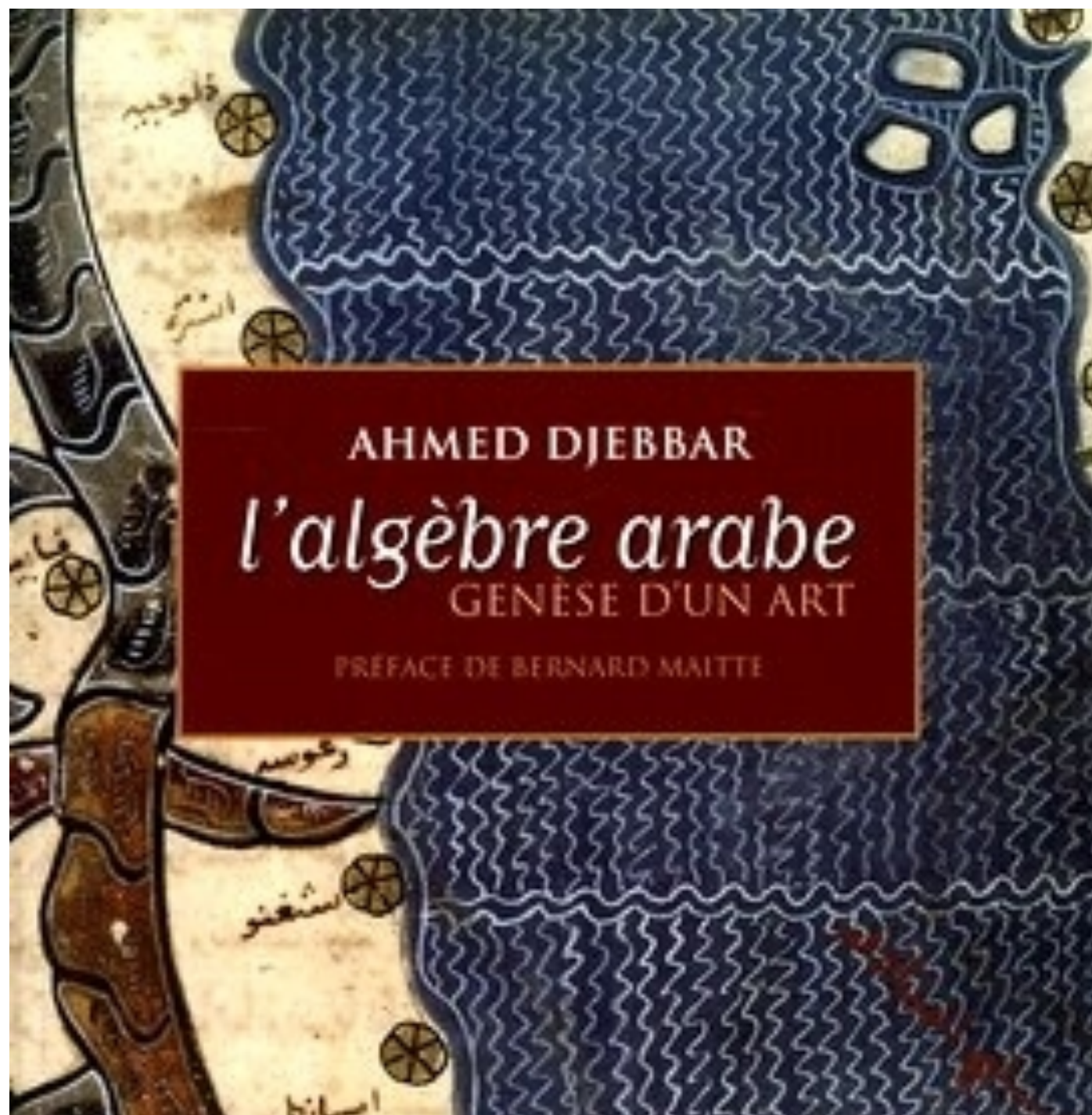
ex-pdt of ICMI Ferdinando ARZARELLO (Italy)

Pdt and sec. of IMU, Shigefumi MORI (Japan) and Helge HOLDEN (Norway),
Alicia DICKENSTEIN (Argentina), vice-president of IMU liaison person for ICMI.

From Mesopotamians to Descartes: a brief account of the history of algebra

Jean-Luc Dorier

Equipe DiMaGe, université de Genève



Rappel

Méthode de Viète ou du discriminant

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ avec } a \neq 0$$

$$a(x^2 + (b/a)x + c/a) = 0 \text{ ssi } (x^2 + (b/a)x + c/a) = 0$$

$$(x + (b/2a))^2 - b^2/4a^2 + c/a = 0$$

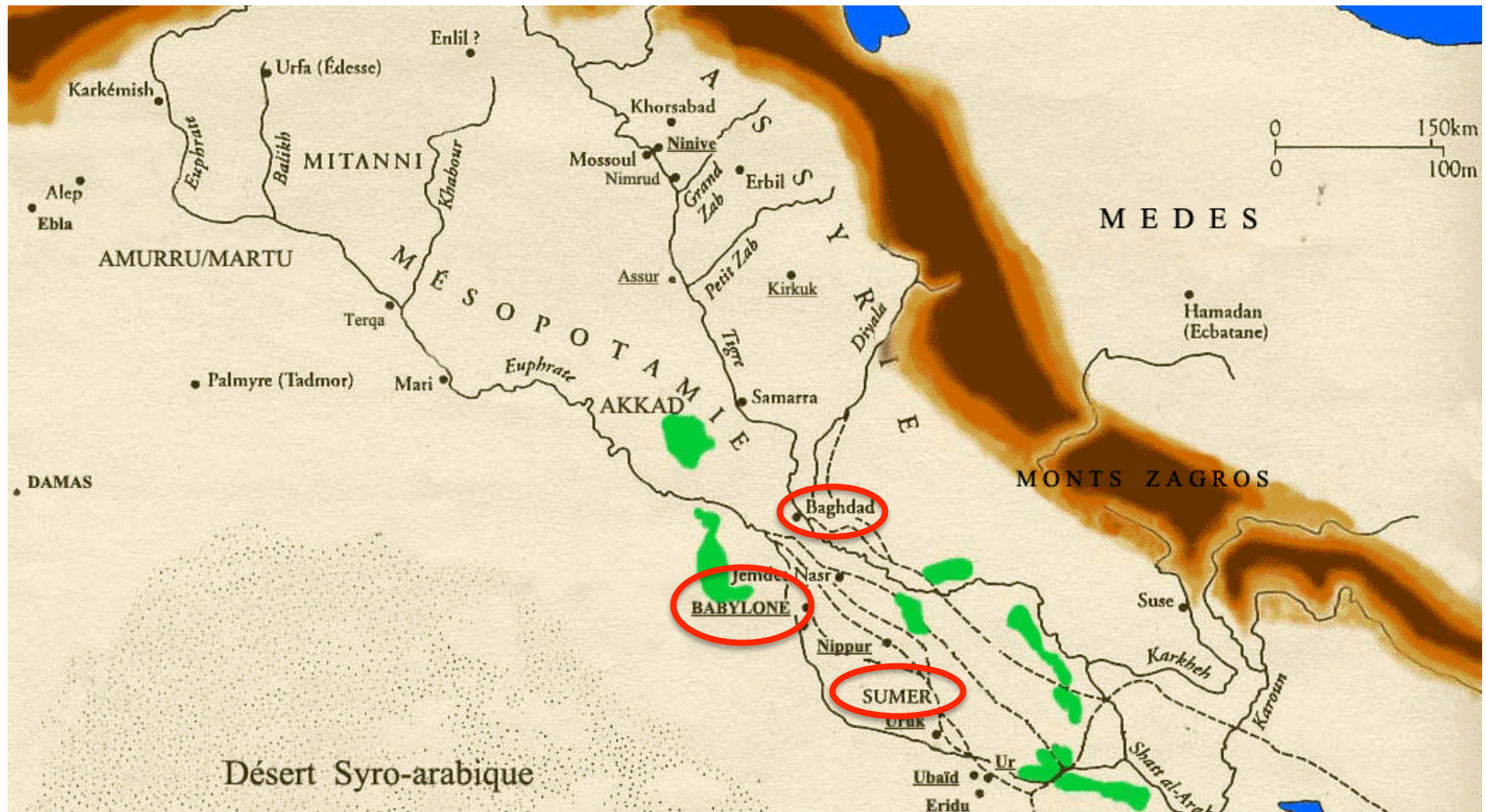
$$(x + (b/2a))^2 = (b^2 - 4ac)/4a^2 = \Delta/4a^2$$

Si $\Delta < 0$ pas de solution

Si $\Delta = 0$ une solution double $x = -b/2a$

Si $\Delta > 0$ deux solutions $x = (-b/2a) \pm \sqrt{\Delta}/2a$

Mésopotamiens et Babyloniens

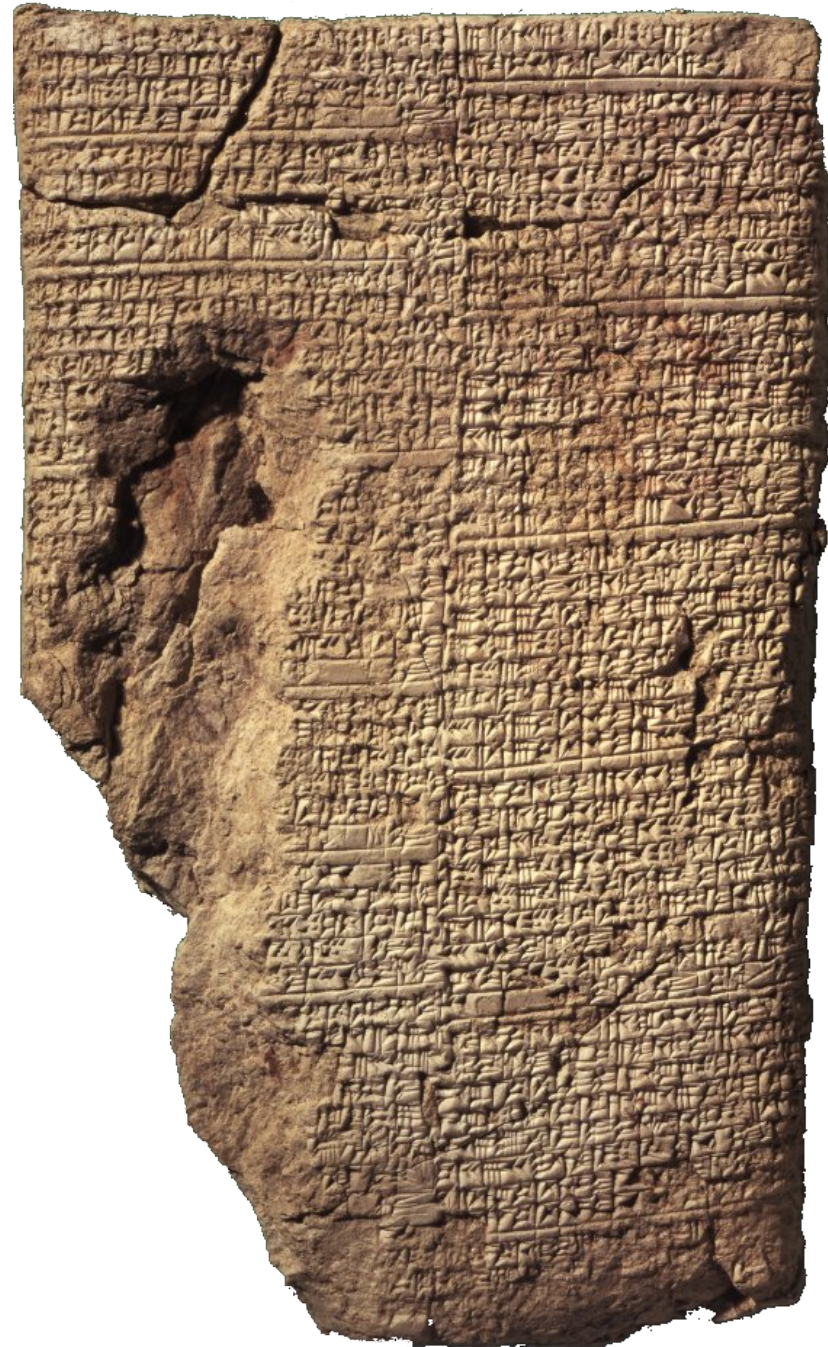


Années	Périodes	Cadre social et culturel	Documentation
6000-3700	Obeid	Sédentarisation, irrigation, premiers villages (Jéricho, Catal Hüyük).	
3700-2900	Uruk ancien, moyen et récent	Naissance de l'écriture. Premières villes (Uruk et Suse). Invention du bronze et de la roue.	Comptabilités : Uruk, Kish, Jemdet-Nasr, Suse
2800-2350	Dynasties Archaïques	Civilisation sumérienne. Développement des cités-états. Commerce des métaux sur de longues distances.	Comptabilités, listes lexicales, textes littéraires, textes scolaires (tables de surfaces).
2350-2150	Dynastie d'Akkad	Premier Etat unifié. Réformes de la métrologie, des codes de lois, de l'écriture, de la comptabilité, du calendrier.	idem + Cadastres Exercices de calcul de surface.
2100-2000	Dynastie d'Ur III	Développement des écoles de scribes. Planification du travail à grande échelle.	idem + Apparition de la numération sexagésimale positionnelle (tables d'inverses).

Années	Périodes	Cadre social et culturel	Documentation
2000-1600	Paléo-babylonienne	L'akkadien devient la langue parlée dans toute la Mésopotamie. Le sumérien est une langue scolaire et d'érudition. Ecoles de scribes dans toute la Mésopotamie et en Elam. A partir de 1750 dans le sud : destruction des villes, disparition des sources cunéiformes.	Textes scolaires : tables métrologiques et numériques, exercices de calcul, listes de parties du corps, d'animaux, de plantes, d'étoiles, etc. Textes savants : littérature, mathématiques, listes de prescriptions médicales, listes de formules juridiques, etc. ; textes médicaux hittites.
1600-1150	Cassite		Compilation de <i>Enuma Anu Enlil</i> (le plus important traité d'astrologie).
1150-900	Seconde dynastie d'Isin		Canonisation de <i>Enuma Anu Enlil</i> .

Années	Périodes	Cadre social et culturel	Documentation
900-550	Néo-babylonienne ; Néo-assyrienne	Bibliothèques (Ninive, Assur). Stations d'observation du ciel.	Compendium « MUL.APIN » (=Constellation de la charrue; le plus important traité d'observations astronomiques). Textes médicaux des bibliothèques d'Assur et de Ninive.
550-300 300-100	Achéménide Séleucide	Bibliothèques (Uruk, Babylone).	Astronomie : éphémérides, almanachs, horoscopes, apparition des 12 signes du zodiaque. Textes mathématiques (peu; surtout du calcul numérique).

Tablette
babylonienne
13901 BM 18^e
siècle av. J.C.



Problème du carré et de son côté

J'ai soustrait le tiers de la surface, puis j'ai ajouté à la surface le tiers du côté du carré : 20'.

Solution

Tu poseras 1, l'unité. Tu soustrairas le tiers de 1, l'unité, soit 20' : 40'. Tu porteras à 20' : tu inscriras 13'20''. Tu fractionneras en deux 20' : 10'. Tu croiseras 10' et 10' : 1'40''. Tu ajouteras à 13' 20'' : 15'. C'est le carré de 30'. Tu soustrairas 10', que tu as croisé, de 30' : 20'. L'inverse de 40' est 1°30'. Tu porteras à 20' : 30', le côté du carré.

$$\left(x^2 - \frac{x^2}{3}\right) + \frac{x}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3}x^2 + \frac{x}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

$$\left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{36}$$

$$\frac{1}{36} + \frac{2}{9} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \text{ et } \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{2/3} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$$

$$ax^2 + bx = c$$

$$a \cdot c$$

$$\frac{b}{2}$$

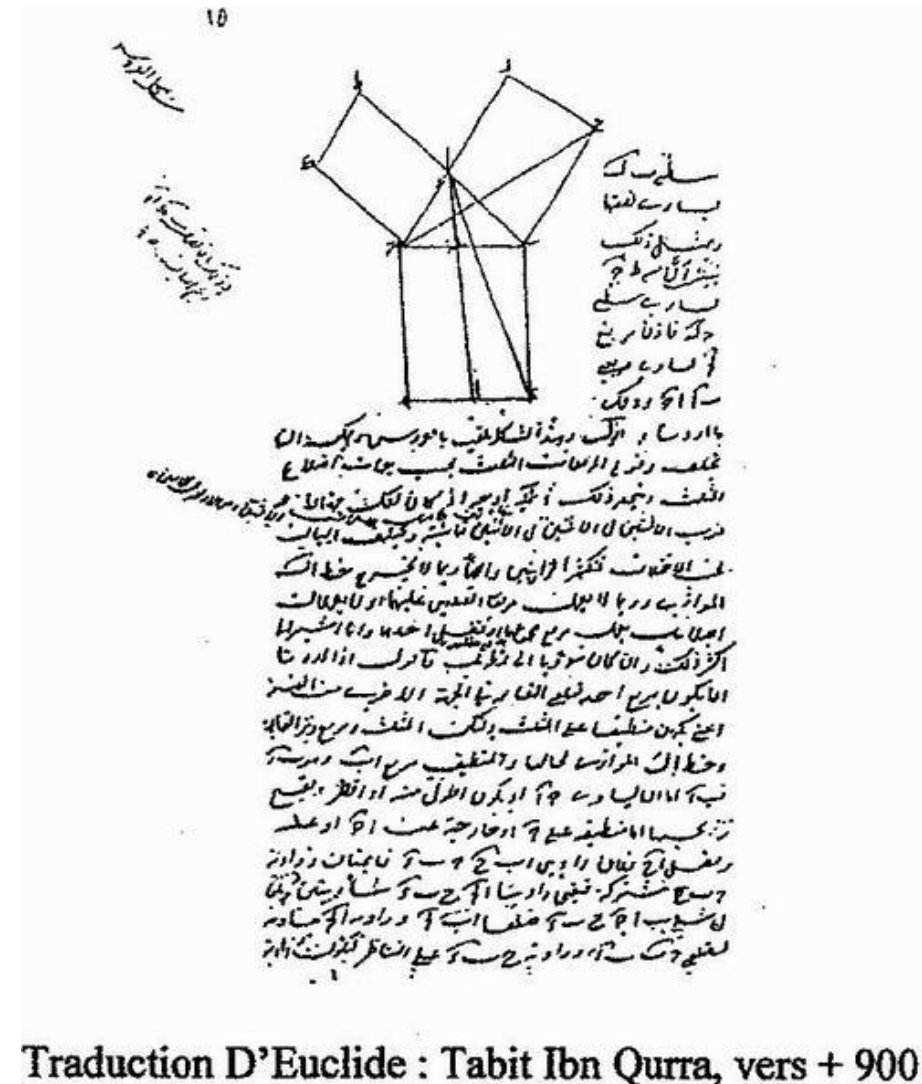
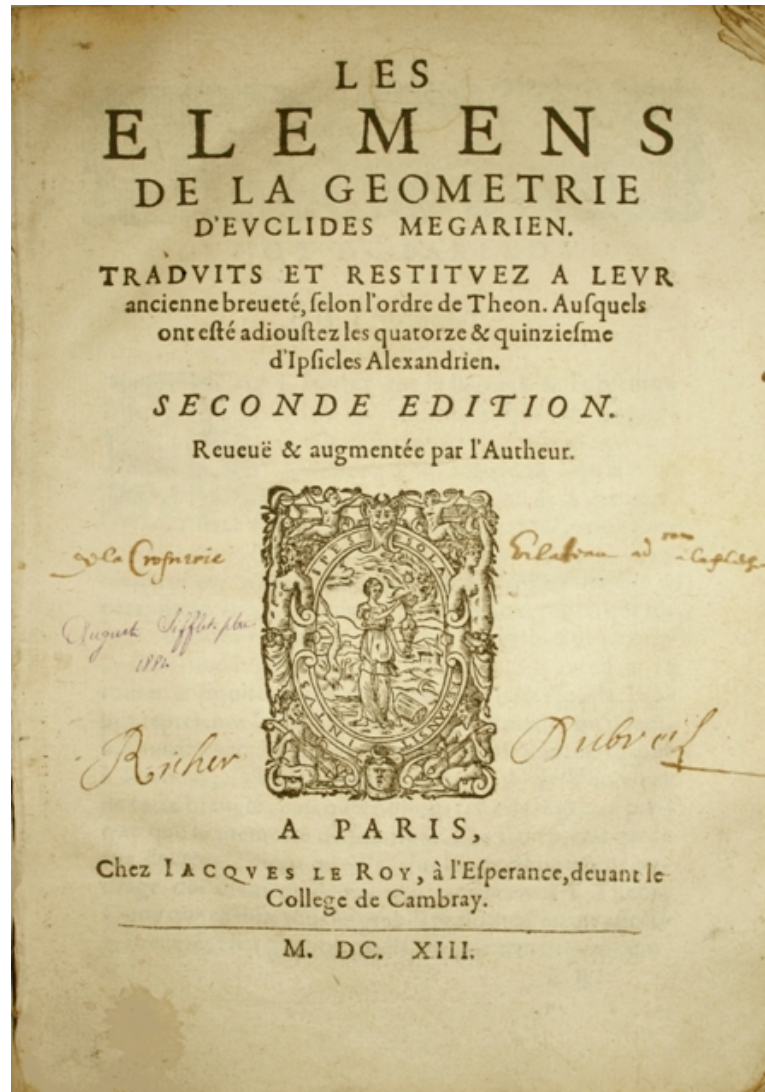
$$\left(\frac{b}{2}\right)^2$$

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 + ac$$

$$\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + ac} - \frac{b}{2}$$

$$\frac{1}{a} \left(\sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^2 + ac} - \frac{b}{2} \right) = \frac{1}{2} = x$$

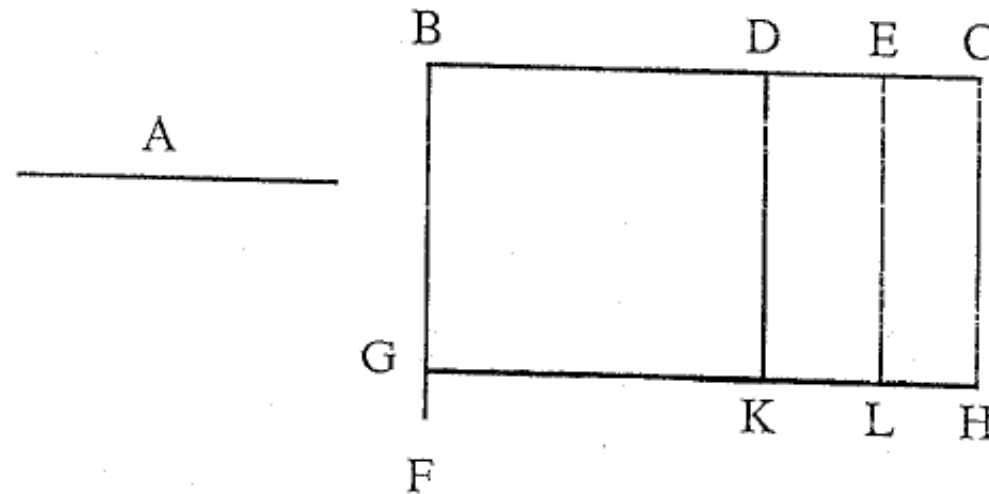
L'algèbre géométrique Grecque



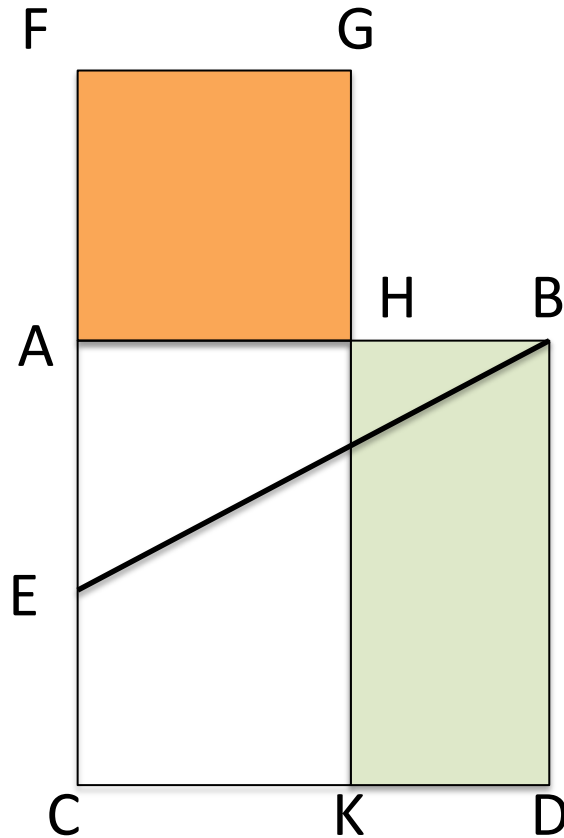
Euclide Livre 2 – Prop. 1

Distributivité de la multiplication sur l'addition

Si l'on a deux droites et que l'une d'elles soit coupée en une multitude quelconque de segments, le rectangle contenu par les deux droites est égal aux rectangles contenus par la droite non-segmentée et chacun des segments.



Euclide – Livre 2 – Prop. 11



Couper une droite donnée de telle sorte que le rectangle contenu par la droite entière et l'un des segments soit égal au carré sur le segment restant.

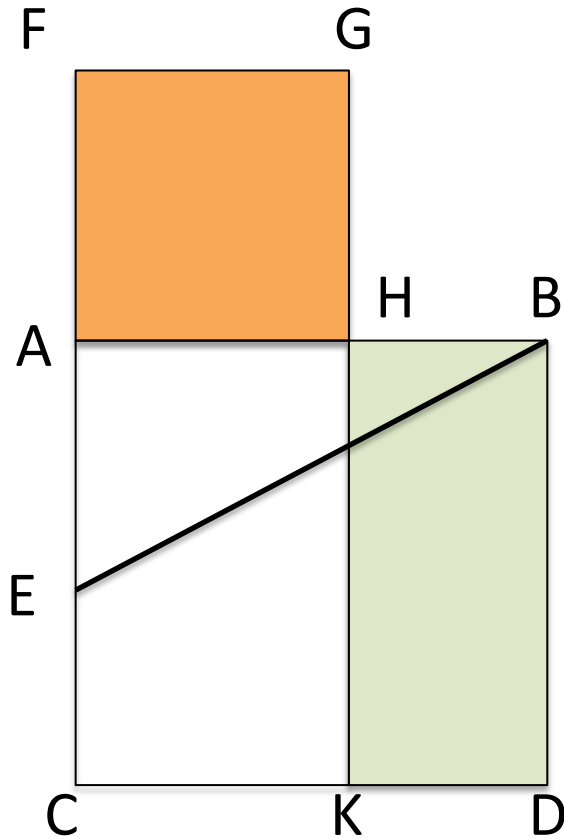
ABCD carré. E milieu de AC. F tel que $EF=EB$ et AFGH carré.

Le point H répond à la question car
 $AFGH = HBDK$

En termes modernes:

a étant donné trouver x tel que : $ax = (a - x)^2$

Euclide – Livre 2 – Prop. 11



Puisque la droite AC est coupée en deux parties égales en E, si nous lui ajoutons directement la droite AF, le rectangle compris sous les droites CF, FA et le carré de AE, pris ensemble, seront égaux au carré de EF (prop. 6. II); mais la droite EF est égale à la droite EB : donc le rectangle compris sous CF, FA et le carré de AE, pris ensemble, sont égaux au carré de EB; mais les carrés de BA, AE sont égaux au carré de EB (prop. 47. I), car l'angle BAE est droit ; donc le rectangle compris sous CF, FA avec le carré de AE est égal aux carrés de BA, AE. Donc, si on retranche le carré de AE qui est commun, le rectangle compris sous CF, FA sera égal au carré de AB ; mais le rectangle FK est compris sous les droites CF, FA, puisque la droite AF est égale à la droite FG, et le carré de AB est égal au carré AD : donc le rectangle FK est égal au carré AD :

donc, si l'on-retranche le rectangle commun AK, le carré FH sera égal au rectangle HD; mais le rectangle HD est compris sous les droites AB, BH, puisque AB est égal à BD et que FH est le carré de AH: donc le rectangle compris sous AB, BH sera égal au carré de AH. Donc la droite AB est coupée au point H, de manière que le rectangle compris sous AB, BH est égal au carré de AH ; ce qu'il fallait faire.

19

Mathématiques indiennes

- Les mots nombres en Sanskrit utilisaient les noms des neufs unités et des mots tous différents pour les puissances de 10, jusqu'à 10^9 au moins.
- La construction des mots nombres suivait un principe de position qui allait des unités vers les plus grandes puissances.

729'551'636

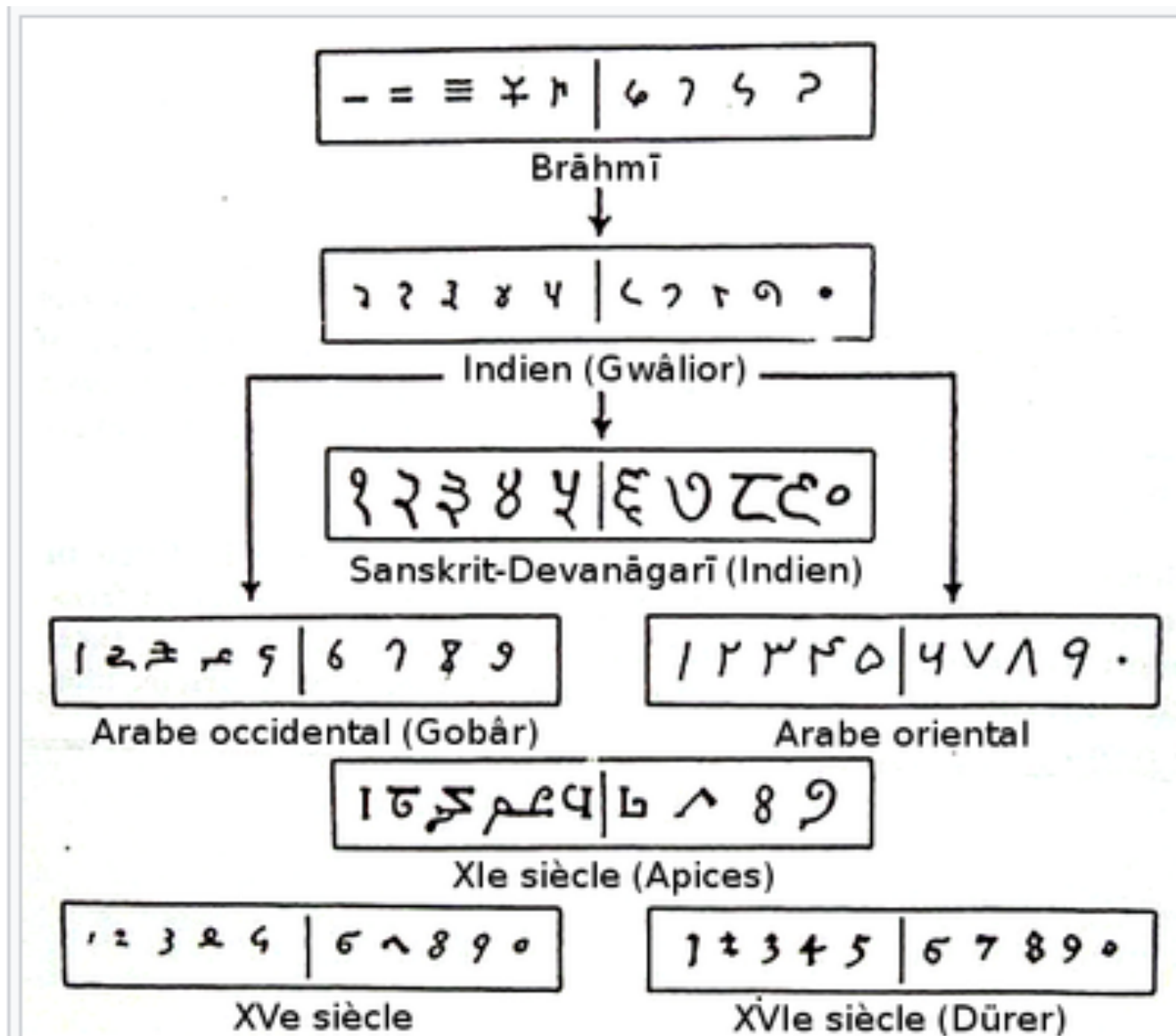
- Sat, tri **dasa**, sat **sata**, eka **sahasra**, panca **ayuta**, panca **laksa**, nava **prayuda**, dvi **koti**, sapta **kharva**.

Mathématiques indiennes

- Par la force de l'habitude et dans un souci d'abréviation, au cours du V^{ème} siècle, on supprima les noms des puissances de 10.
- Système de position avec comme symboles, les noms des neuf unités.
- Nécessité du zéro : sunya qui signifie vide.

13'107'200'000

Sunya sunya sunya sunya sunya dvi sapta sunya
eka tri eka



Généalogie et descendance des numérations indiennes ([brahmi](#), [gwalior](#), [sanskrit-dévanagari](#)) et [arabes](#) (d'après Datta et Singh 1935).

Mahavira – Inde 9^e siècle

Le prix de neuf citrons et de sept pommes est 107. Le prix de sept citrons et de neuf pommes est 101. Ô mathématicien, dis-moi rapidement le prix d'un citron et d'une pomme.

Solution

Du montant le plus grand multiplié par le nombre de choses le plus grand, tu soustrais le montant le plus petit multiplié par le nombre de choses le plus petit. Le reste, divisé par la différence des carrés des nombres de choses sera le prix du nombre le plus grand de choses. Le prix de l'autre sera obtenu en inversant les multiplicateurs.

Écriture moderne

x = prix d'un citron ; y = prix d'une pomme ; m = le montant le plus grand ($m = 107$) ; n = le montant le plus petit ($n = 101$) ; $a = 9$; $b = 7$.

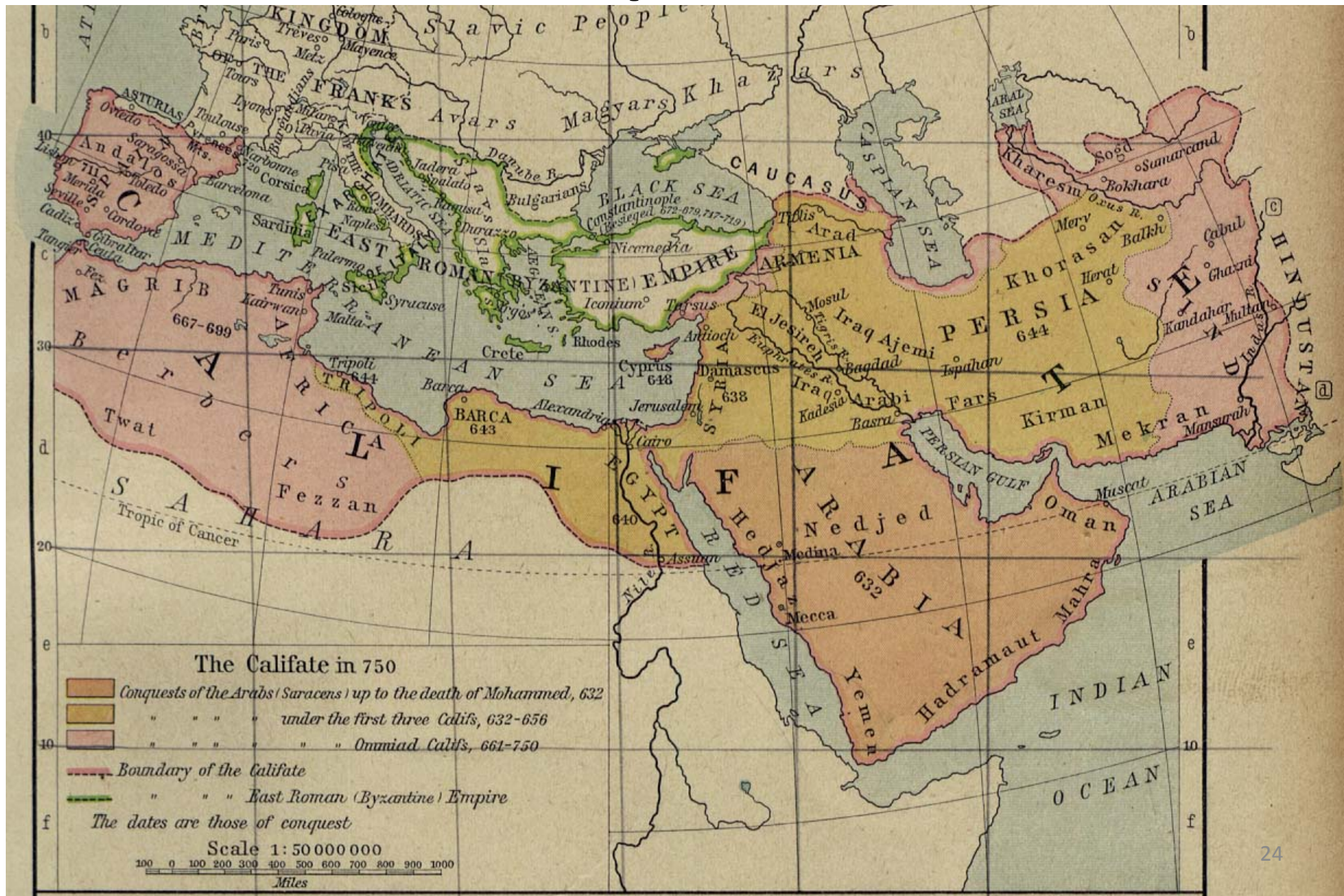
$$ax + by = m$$

$$bx + ay = n$$

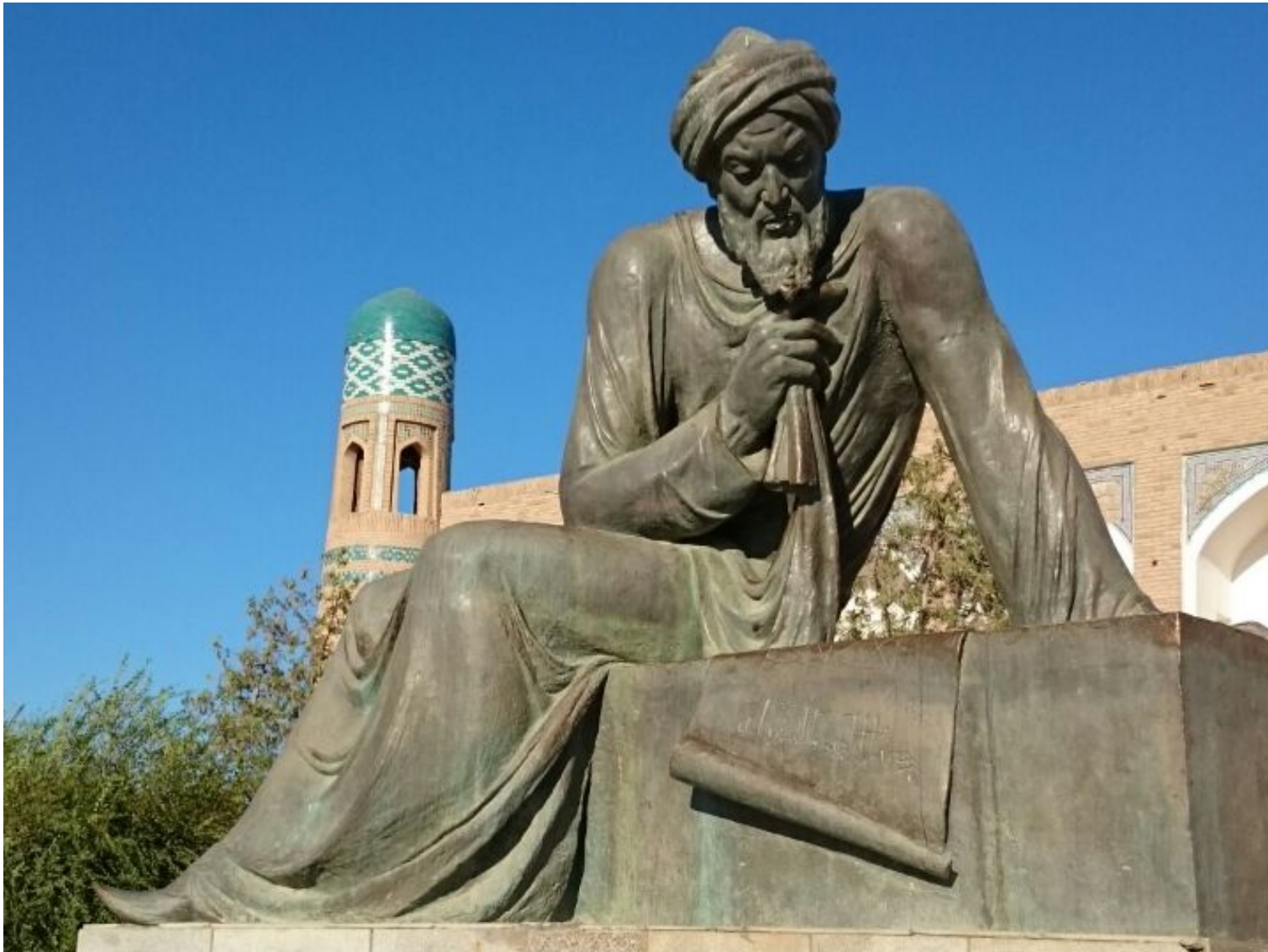
$$x = \frac{am - bn}{a^2 - b^2}$$

$$y = \frac{an - bm}{a^2 - b^2}$$

Mathématiques « arabes »



Al Khwarizmi (env. 780 – 850)



Khiva (Ouzbékistan)



6 types d'équation du second degré

6 cas numériques prototypiques tout en mots x^2 est le bien, x la racine et les termes constants les dirhams

6 variantes de $ax^2 + bx + c = 0$, mais a , b ou c ne peuvent être négatifs et cas particuliers si nuls

$$ax^2 = bx$$

$$ax^2 = c$$

$$bx = c$$

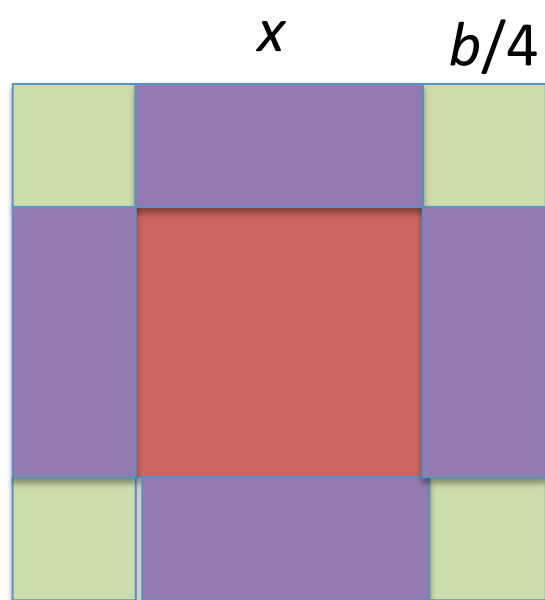
$$ax^2 + bx = c$$

$$ax^2 + c = bx$$

$$ax^2 = bx + c$$

A chaque fois énoncé de plusieurs problèmes, suivi de la suite de calculs à mener pour trouver la solution et pour chaque cas, une justification géométrique à la manière d'Euclide.

Quant aux biens et aux racines qui sont égaux au nombre c'est comme lorsque tu dis : un bien et dix de ses racines égal trente neuf dirhams.



$$x^2 + bx = c$$

$(x+b/2)^2$ carré total

se décompose en

Carré rouge

Et quatre rectangles mauves

Et quatre carrés verts

$$x^2 + 4 (b/4)x + 4 (b/4)^2$$

$$= x^2 + bx + b^2/4 = c + b^2/4$$

En prenant la racine de $c + a^2/4$ et en soustrayant $b/2$ on trouve la valeur de x

Règle des signes chez Ibn al-Khidr 11^e siècle

Si tu multiplies par lui-même quelque chose dont tu as retranché quelque chose, multiplie et retranche et ne considère le produit du retranché par lui-même que comme ajouté.

Et si l'un des facteurs a quelque chose de retranché et l'autre pas, considère le produit du retranché par l'ajouté comme retranché.

(...) C'est comme lorsqu'on dit : vingt moins deux multiplié par vingt moins deux. Tu multiplies vingt par vingt puis tu multiplies vingt par deux, deux fois, et c'est quatre-vingt(...). Tu retranches quatre-vingt de quatre cents et tu ajoutes à cela le produit de deux par deux , et c'est quatre. Ce sera trois cent vingt-quatre.

$$\begin{aligned}(x-a)(x-a) \\ = \\ x^2 + a^2 - 2ax\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(x-a)x \\ = \\ x^2 - ax\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(20-2)(20-2) \\ = \\ 20 \times 20 - 2 \times 2 \times 20 + 2 \times 2 \\ = \\ 400 - 80 + 4 \\ = 384\end{aligned}$$

Al Qatrawani XV^e Maghreb

$$x = \text{ش}; x^2 = \text{م}; x^3 = \text{س}; x^4 = \text{م م}; x^5 = \text{س م};$$

moins = $\forall$; plus = pas de symbole ; signe d'égalité : $=$

[illegible]

$$81x^6 + 72x^5 + 106x^4 + 184x^3 + 89x^2 + 80x + 64$$

François Viète (1540-1603)



Sit latus unum A , alterum B . Dico A quadrato-cubum, $+$ A quâd. quadrato B 5 , $+$ A cubo in B quadratum 10 , $+$ A quadrato in B cubum 10 , $+$ A in B quad-quadratum 5 , $+$ B quadrato-cubo, æquari $A + B$ quadrato cubo. Ex opere multiplicationis A quadrato quadrari, $+$ A cubo in B 4 , $+$ A quad. in B quadratum 6 , $+$ A in B cubum quater, $+$ B quadrato-quadrato, per $A + B$.

$$A^5 + 5A^4B + 10A^3B^2 + 10A^2B^3 + 5AB^4 + B^5 = (A + B)^5$$

Guillaume Gosselin de Arte Magna 1577

Quatre hommes, leurs soldes reçues, sont entrés dans une taverne, et finalement ivres, ils ont mélangé leurs soldes. Le second cependant n'ignorait pas qu'il avait reçu le double de la solde du premier & 4 pièces d'or en plus, le troisième qu'il avait de même reçu le triple du second & 6 pièces d'or en plus, le quatrième enfin le double du troisième & 5 pièces d'or en plus. Mais un différend étant finalement survenu entre eux on en vint à ceci : un Arithméticien serait requis qui rendrait à chacun sa part. Il vint & ayant trouvé que la somme des pièces d'or était 120, il rendit à chacun son bien. Quelle fut la part de chacun ? [1]⁵

Posons que le premier a eu 1 L, le second a donc eu 2 L P 4, le troisième 6 L P 6, le quatrième 12 L P 5. Faisons la somme, il en résultera 21 L P 15 qui sont égaux à 120 ; enlevons 15 de part et d'autre, il restera 21 L égaux à 105 ; partageons 105 en 21, le quotient sera 5, et c'est le nombre de pièces d'or qu'a emporté le premier, le second 10 P 4 soit 14, le troisième 30 P 6 soit 36, le quatrième 60 P 5 soit 65 ; & 5, 14, 36, 65 réunis font 120.

Guillaume Gosselin de Arte Magna 1577

$M^2 L P^3 M L V 1 Q M^2 L P^3$; mais le second avec le l^e du premier doit avoir
 que le premier; ainsi le premier montant sera inférieur au second de 5 ; ajoutons a
 premier, le premier devient $1 Q M^2 L P^8 M L V 1 Q M^2 L P^3$, qui sera égal au se
 tant, précisément $1 Q P L V 1 Q M^2 L P^3$, & en soustrayant $1 Q$ de part et d'au
 ra $L V 1 Q M^2 L P^3$ égal à $8 M^2 L M L V 1 Q M^2 L P^3$, & en ajoutant $L V$ qui m
 l'une des deux parties d'après l'axiome 3, il restera $8 M^2 L$ éga
 $1 Q M^2 L P^3$; doublons donc $L V$, il en résultera $L V 4 Q M^8 L P^{12}$, égal à $8 M$
 . Quant aux parties, $4 Q M^8 L P^{12}$ égalent $64 M^{32} L P^4 Q$; retranchons de p
 re $4 Q$ & 12 , il restera $52 M^{32} L$ égal à $M^8 L$; enlevons de part et d'autre M^8
 stera $52 M^{24} L$ égal à rien ; ajoutons de part et d'autre $24 L$ qui manquent dans
 parties, il résultera 52 égal à $24 L$, & l'égalisation se traite ainsi : partageons 52 en
 ent sera $2\frac{1}{6}$, soit la valeur de L , donc le second dont nous avons posé qu'il avait $1 C$

Descartes – Géométrie 1637

nelles entre l'vnité, & ce quarré, ou cube , ou quarré de quarré,&c. multipliées par d'autres connuës. Ce que i'escris en cete sorte.

$$z \propto b. \text{ ou }$$

$$z^2 \propto -a z + b b. \text{ ou }$$

$$z^3 \propto +a z^2 + b b z - c^3. \text{ ou }$$

$$z^4 \propto a z^3 - c^3 z + d^4. \text{ \&c.}$$

C'est a dire, z , que ie prens pour la quantité inconnuë, est esgalé a b , ou le quarré de z est esgal au quarré de b moins a multiplié par z . ou le cube de z est esgal à a multiplié par le quarré de z plus le quarré de b multiplié par z moins le cube de c . & ainsi des autres.