

Apprendre sur l'enseignement de l'algèbre (et des fonctions) à travers les lessons studies

Professor Jill Adler
SARChI Chair of Mathematics Education
University of the Witwatersrand
(Jehad Alshwaik, Postdoctoral fellow)

Presentation: Geneva, 7 June 2017
International symposium on teaching and learning algebra.



Plan

- Lesson study – un champ de recherche et de pratiques en expansion
- Le contexte de l'enseignement des mathématiques en Afrique du sud – Quelques commentaires et arrière plan
- Notre adaptation des Lesson Studies in the WMCS Research and development project
- Quelques aspects de notre travail



Lesson study

Éléments en commun

- Communauté Professionnelle d'apprentissage (enseignants, « autres personnes » expérimentées ou bien informées
- Planification de leçons conjointes, enseignement, réflexion



Lesson study (en maths)

- Développée dans des contextes de pays différents
- Sous les projecteurs à ICME13 – selon différents courants
- Livres récents et numéro spéciaux de journaux (ZDM)

A travers les curricula

- World Association for Lesson Studies annual conference (WALS);
Un journal dédié aux lessons studies (pas seulement en maths)-
IJLLS
- Extension à la formation initiale des enseignants (Norvège)



Japon et Chine – partie intégrante de la profession et donc des pratiques professionnelles avec une influence sur le long terme à l'échelle de tout le système.

- Japon – leçons de recherche, répétition non requise, question cible sur l'enseignement/apprentissage (USA; Grande Bretagne; Norvège ; Philippines; Malaisie; aussi à travers JICA en Afrique)
- Chine – pratique délibérée, leçons publiques, répétition et élaboration de compétences/pratiques et leçons, orientées sur le contenu et la stratégie, variation (Suède/Hong Kong)



Différences/adaptations

- Partie intégrante de la profession/ développement professionnel additionnel (DP)
- A l'initiative des enseignants / DP initié de l'extérieur
- Révision et répétition des leçons
- Rôle des autres personnes expérimentées
- Focus sur la recherche
- Ressources théoriques



Durée/fréquence



Contexte éducatif (maths) en Afrique du sud

- pauvreté et inégalité persistantes
- Maigres résultats et qualité d'apprentissage dans les "écoles pour pauvres"
- Accroissement des prescriptions (horaires, plans de leçons)



ÉCOLES
GRATUITES

("écoles pour
les pauvres")

Qu'est-ce qui est rendu disponible pour l'apprentissage, **pour qui**, mais aussi **comment** est-ce critique pour un agenda de justice équitable /sociale.

D'où l'agenda pour le
Wits Maths Connect Project

"Echec" des intervention "d'aide" éducative

D'une

Pédagogie "traditionnelle" (ritualisée) à des pratiques (basée sur la démarche d'enquête) centrées sur l'apprenant dans des contextes de pays en développement ;

'Clashes' de paradigmes

(Tabulawa, R. – Botswana – "tissue rejection")

Améliorer l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques dans les écoles secondaires d'une province d'Afrique du sud, par la combinaison d'une recherche et d'un développement professionnel des enseignants de mathématiques

Améliorer les mathématiques pour l'enseignement des enseignants

Améliorer l'enseignement

Impacter les gains des élèves en termes d'apprentissage



Discours Mathématique dans l'Enseignement-DME

Un cadre socioculturel pour étudier et travailler sur l'enseignement des mathématiques

Cours sur les mathématiques pour l'enseignement (MpE)

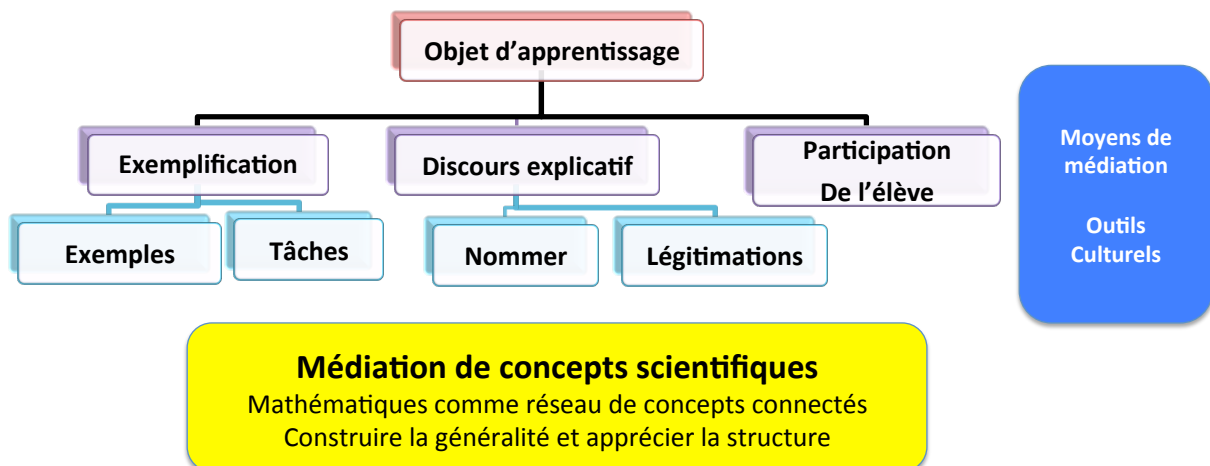
Lesson study



UNIVERSITY OF THE WITWATERSRAND, JOHANNESBURG

Le cadre

Discours Mathématique dans l'Enseignement- DME :
Un cadre socioculturel pour **décrire** et **étudier/travailler sur** l'enseignement des mathématiques



WMCS Mathematics Teaching Framework

Structurer les ressources - guider planifier et réflexion

Médiatisé dans le cours de maths pour l'enseignement et ensuite utilisé dans les lessons studies qui suivent

But de la leçon		
Exemplification Exemples, tâches et représentations	Participation des élèves Faires des maths, parler de maths	Communication explicative Usages des mots et justification
Construire la généralité Structure Variation parmi l'invariance	Qui est-ce ? Faire des maths Parler de maths	Informel – formel Justification mathématique Principes

Lesson study en classe structurée par DME

- Etudier l'enseignement ensemble (plan, enseignement ...)
- Enseignants qui enseignent à leur propres élèves
- Autres enseignants qui observent
- Bloc de 3 semaines; 3 blocs (cycles) par an
- *Clusters* d'écoles **Rencontre avec les limites**
- Utiliser une ressource discursive – DME pour travailler sur l'enseignement

Semaine 1

Design de la leçon

Decider :

- du focus mathématique
- des exemples & tâches
- de l'activité de l'apprenant
- des explications clés
- des représentations
- de qui va enseigner

EXAMPLES
SOLVE FOR X

- $2-x \geq 2x$
 $3x+1$
- $\frac{1-a}{2} - \frac{2a-0}{3} \geq 1$ ✓
- $3x < 9x+4$
- $3x > 9$ ✓
- $-7 < -2x-5 \leq 9$ ✓
- $x+2 < 4$ ✓
- $3(2x-4)-x \geq 2(x-5)-17$
- $1-x \geq 3$ ✓
- $1-2x > x-2$ ✓



Grade 10 Inégalités linéaires

Exam de juin :

Objets d'apprentissage

Résoudre des inégalités linéaires
Représenter les solutions sur la droite numérique et utiliser les notations des intervalles

Explication clé

Comment expliquer:

Mais

$3 < 5$
 $5 < -3$
 $5 < 3$

$3 > -5$ *Wants less*
 $-1 < 3 > -1 \times (-1)$ *multiply*
 $-3 > 5$ *statement not true*
 $-3 < 5$

REPRESENT ON NUMBER-LINE

- $x < -2$
- $x > 3$
- $x \leq 4$
- $x \geq -5$
- $2 < x$
- $-3 > x$

2 $x < 5$

Participation de l'apprenant

Activité d'appariement de cartes
Lier les représentations (droite, intervalles, formules algébriques symboliques)



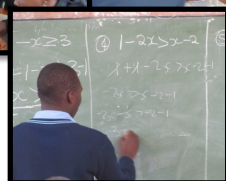
UNIVERSITY OF THE WITWATERSRAND, JOHANNESBURG

Semaine 1

Design de la leçon

Decider :

- du focus mathématique
- des exemples & tâches
- de l'activité de l'apprenant
- des explications clés
- des représentations
- de qui va enseigner



Semaine 2

Enseigner et réfléchir

- L'ens. A enseigne la leçon au groupe A
- Les autres ens. observent
- Tous réfléchissent sur la leçon avec les outils de maths pour l'ens.
- Révison de certains aspects de la leçon



Objets d'apprentissage

Résoudre des inégalités linéaires Représenter les solutions sur la droite numérique et utiliser les notations des intervalles

$$-7 < -2x - 5 < 9$$

$$-7 + 5 < -2x < 9 + 5$$

$$-2 < \frac{-2x}{2} < \frac{14}{2}$$

$$-1 < x < 7$$

$x \in (-1, 7)$



UNIVERSITY OF THE WITWATERSRAND, JOHANNESBURG

Semaine 1

Design de la leçon

Decider :

- du focus mathématique
- des
- de
- de l'ap
- des
- res
- de

Semaine 2

Enseigner et réfléchir

- L'ens. A enseigne la leçon au groupe A

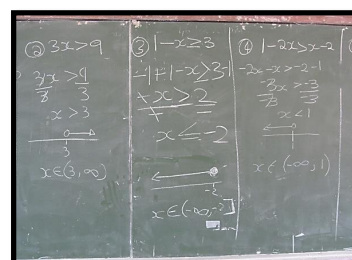
Questions pour réfléchir

Les exemples/tâches/pres ont-ils été sélectionnés de façon appropriée ?
Qu'est-ce qui a été dit ? Ecrit ?
Comment cela a été justifié ?
Ont-ils appris ce que nous visions ?

Semaine 3

Teach and reflect

- Teacher B teaches lesson to group B
- Other teachers observe
- All reflect on lesson in relation to MTF tool
- Revise aspects of lesson



Communication LS - enseignants

Ci-dessous les résultats que je partage avec des enseignants.

En remerciant les collègues, je voudrais partager les résultats de nos *Lesson Studies* avec *Wits Maths Connect* avec des élèves de Gr 9 recherchant l'équation d'une droite
Nous avons utiliser 3 méthodes différentes :

1. Trouver des points consécutifs d'un graph à un tableau puis trouver l'équation entre la relation de x et y (pattern method)
2. Méthode triangulaire pour trouver le gradient puis substituer à $y=mx+c$.
3. Méthode de la formule pour trouver m puis substituer dans $y=mx+c$

Nous avons découvert qu'il était facile pour les élèves de trouver l'équation en utilisant un tableau (Méthode du pattern), pourtant nous n'enseignons pas normalement aux élèves de bouger d'un graphe à un tableau puis à une équation.

Il y a eu tellement d'erreurs dans la méthode de la formule.

Cela devrait nous encourager à utiliser la méthode 1, qui force aussi les élèves à interpréter le graphe.

LS Questions de recherche

1. Qu'est-ce qui change dans la qualité d'enseignement (DME; CHAT)
2. **Quelles sont les opportunités d'apprentissage** pour les enseignants de maths et les chercheurs
 - Pour ce qui est des mathématiques (**concepts, pratiques**)
 - L'enseignement des mathématiques et (**exemples, tâches et représentations, réflexion des apprenants, problèmes langagiers**)
 - Faire une lesson study (**facilitation, relations sociales, communauté 'règles/normes'**)

Incidents critiques identifiés par des points focaux de réflexion et de discussion, provoqués par des tensions/dilemmes, and qui semblent reliés à des éléments du cadre théorique.

Cluster 1, Cycle 1, Mai 2016

- 4 enseignants, 3 personnels WMCS staff.
- Grade 10, 2 écoles de Johannesburg.
- Sujet : “simplification d’expressions algébriques avec des parenthèses dans plusieurs positions”
- 3 réunions (enregistrement vidéo records):
 - Planning pour l’enseignement – plan conjoint 1
 - Enseignement 1 and réflexion – plan conjoint 2
 - (Re-)enseignement 2 et réflexion finale
- Transcription, identification des incidents critiques, construction des données et analyse ...



Le problème partagé: Erreurs des élèves avec les parenthèses

$$2p - (4 + p) = -2p ; \quad 8p - 2p^2$$

“faire ce qui est entre parenthèses d’abord”

“Les parenthèses ça veut dire multiplier ”

- Appui sur des « raccourcis » ?
- Règles sans raisons ?
- Généralisation abusive?



WMCS Mathematics Teaching Framework

Structuring resource guiding planning and reflection

Mediated in the MfT course, and then used in follow on LS

Lesson goal		
Exemplification Examples, tasks and representations	Learner Participation Doing maths and talking maths	Explanatory communication Word use and justifications
Building generality Structure Variation amidst invariance	Who is? Doing maths Talking maths	Informal – formal Mathematical substantiations Principles

Joint plan

Lesson goal: Learners can simplify expressions with brackets when these are in different positions.													
Exemplification	Learner Participation	Explanatory communication											
<p>Examples, tasks and representations</p> <p><u>Pre-test assessment</u> Introduction/Introducing the lesson: Calculate the following:</p> <table border="1"> <tr> <td>a) $4 + 3(4 + 5) =$</td> <td></td> </tr> <tr> <td>b) $(4 + 3)4 + 5 =$</td> <td></td> </tr> <tr> <td>c) $(4 + 3)(4 + 5) =$</td> <td></td> </tr> </table> <p><u>Activity 1: Simplify the following</u></p> <table border="1"> <tr> <td>$x + 3(x + 5) =$</td> <td rowspan="2">The board might look like this</td> <td>$4 + 3(4 + 5) =$</td> </tr> <tr> <td>$(x + 3)x + 5 =$</td> <td>$(4 + 3)4 + 5 =$</td> </tr> <p><u>Activity 2: Simplify</u> $(x + 3)(x + 5) =$ $(x + 3) + (x + 5) =$</p> <p><u>Activity 3: Simplify</u> a) $(x - 3)x + 5 =$ b) $(x - 3)x + 5 =$ c) $x(-3x + 5) =$ d) $x - (3x + 5) =$</p> <p><u>Activity 4: Simplify</u> a) $x - 8(x + 6) =$ b) $(x - 8)x + 6 =$ c) $(x - 3)(x + 3) =$ d) $(x - 3) - (x + 3) =$</p> <p><u>Activity 5 (Post-Test): Simplify</u> a) $2p - (4 + p) =$ b) $2p(-4 + p) =$</p> </table>	a) $4 + 3(4 + 5) =$		b) $(4 + 3)4 + 5 =$		c) $(4 + 3)(4 + 5) =$		$x + 3(x + 5) =$	The board might look like this	$4 + 3(4 + 5) =$	$(x + 3)x + 5 =$	$(4 + 3)4 + 5 =$	<p>Doing maths and talking maths</p> <p>Write the assessment. Introduction:</p> <ul style="list-style-type: none"> Learners will work on question a, b & c on own. Class discussion re question a, b & c; and BOMDAS and Distributive law. Comparing <p>Activity 1 & 2: same as introduction</p> <p>Activity 3: Teacher-led discussion: what changes/stays the same if I put brackets "here" ..</p> <p>Activity 4: Work on own.</p> <p>Activity 5: Write the assessment (individual).</p>	<p>Word use and justifications</p> <p><u>Pre-test assessment</u> <u>Introduction:</u> The teachers will ask the learners to work individually. Calculate the following here, the teacher will ask the learners not just to work on this using the addition only (or BEMDAS) but also the distributive law That introductory activity will be left on the board and introduce Activity 1 with similar numbers and structure so that to compare the two activities. <u>Activity 1: (Individually or in pairs?) Simplify the following</u> Whole class discussion should happen after the learners try to solve the activity. The main focus is that we see the same numbers, same order and what changing is the brackets.</p> <p><u>Activity 3: Simplify</u> Here the teachers will put brackets in different positions in $x - 3x + 5$ and then ask the learners about the answer as follows.</p> <p><u>Activity 4: Simplify</u> Here the teacher should watch the time and decide how to take the four sub-problems (a-d) and to give more time to Activity 5 (post-test activity)</p> <p><u>Activity 5 (Post-Test): Simplify</u> Teacher will watch the time! [Note: this is the same as the pre-test, for assessment purpose.]</p>
a) $4 + 3(4 + 5) =$													
b) $(4 + 3)4 + 5 =$													
c) $(4 + 3)(4 + 5) =$													
$x + 3(x + 5) =$	The board might look like this	$4 + 3(4 + 5) =$											
$(x + 3)x + 5 =$		$(4 + 3)4 + 5 =$											

Joint plan

Exemples/représentations Attention sur:

Variation parmi
l'invariance (Watson +
Mason)

Similarité
Contraste

Lesson goal: Learners can simplify expressions with brackets when these are in different positions

Exemplification

Examples, tasks and representations

Pre-test assessment
Introduction/Introducing the lesson: Calculate the following:

a)	$4 + 3(4 + 5) =$	
b)	$(4 + 3)4 + 5 =$	
c)	$(4 + 3)(4 + 5) =$	

Activity 1: Simplify the following

$x + 3(x + 5) =$	The board might look like this	$4 + 3(4 + 5) =$
$(x + 3)x + 5 =$		$(4 + 3)4 + 5 =$

Activity 2: Simplify
 $(x + 3)(x + 5) =$
 $(x + 3) + (x + 5) =$

Activity 3: Simplify
 a) $(x - 3)x + 5 =$
 b) $(x - 3)x + 5 =$
 c) $x(-3x + 5) =$
 d) $x - (3x + 5) =$

Activity 4: Simplify
 a) $x - 8(x + 6) =$
 b) $(x - 8)x + 6 =$
 c) $(x - 3)(x + 3) =$
 d) $(x - 3) - (x + 3) =$

Activity 5 (Post-Test): Simplify
 a) $2p - (4 + p) =$
 b) $2p(-4 + p) =$

Les apprenants peuvent simplifier des expressions avec des crochets lorsqu'ils sont dans différentes positions.
Set d'exemples :

Expressions numériques

$$4 + 3(4 + 5) =$$

$$(4 + 3)4 + 5 =$$

$$(4 + 3)(4 + 5) =$$

puis algébriques

$$x + 3(x + 5) =$$

$$(x + 3)x + 5 =$$

$$(x + 3)(x + 5) =$$

$$(x + 3) + (x + 5) =$$

Tâches and Explications communication

Ordre des opérations
Distributivité

Comparer
(même/différent)

Apprendre sur l'enseignement de l'algèbre

Discussion réflexive – Cadre des MpE

Exemples numériques – difficultés à la fois

remédiées et exacerbées

○ $(4 + 3)4 + 5$ pourrait être $(7)4 + 5$

○ $(x + 3)x + 5$ n'est pas $(3x)x + 5$

○ Faire ce qui est dans les parenthèse d'abord

- Ce qui est critique à **mettre en lumière – but**
 - La position des parenthèses (qui a change)
 - La distributivité

Learning about LS and teaching algebra

Discussion réflexive: point focal pour T1:
“coller au plan” face à une erreur
d'apprenant, même si ce n'est pas
surprenant; “trop facile”

- Dilemme de l'enseignement selon un mode in LS avec un plan conjoint...
- Refaire le plan avec plus de tâches exigeantes



But de la leçon : les apprenants peuvent simplifier des expressions avec parenthèses quand celles-ci sont dans des position différentes.

Leçon 1 (T1)

Activité 3: Simplifier

$$1. (x - 3x) + 5 =$$

$$2. (x - 3) x + 5 =$$

$$3. x (-3x + 5) =$$

$$4. x - (3x + 5) =$$

Leçon 2 (T2)

Activité 3: insérer une/des
parenthèse/s dans les
expressions de gauche de sorte
que les deux côtés soient égaux

$$1. x - 3x + 5 = -3x^2 + 5x$$

$$2. x - 3x + 5 = -2x - 5$$

$$3. x - 3x + 5 = -x^2 - 3x + 5$$

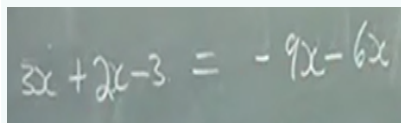


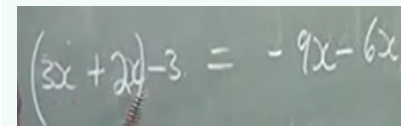
Incident critique Activité 3: exemple non planifié

- A suivi le plan conjoint et les erreurs discutées
- Il a introduit l'activité 3 comme prévu. Les apprenants ont commencé à se plaindre, et donc il a proposé un exemple qui n'avait pas été prévu, pour exemplifier que faire.

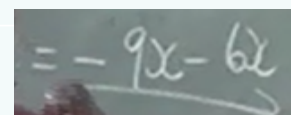
Extrait de la discussion entre T2 et les élèves après l'introduction de l'activité 3

T2 Et puis c'est un bon exercice, OK.
Regardons celui-ci, *Je l'ai juste fait comme exemple* parce que quelques uns disent que ceci peut être un défi. Donc j'ai cette expression et je dois introduire des parenthèses dans cette expression (pointant à gauche) de sorte qu'après simplification j'obtiendrais l'expression de droite.


$$3x + 2x - 3 = -9x - 6x$$


$$(3x + 2x) - 3 = -9x - 6x$$

L1 ... si je mets une parenthèse ici... J'ai moins trois là, quand je simplifie ça j'obtiens ça
La plupart des élèves étaient d'accord avec ça.

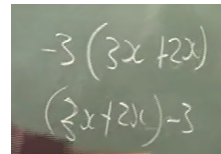

$$= -9x - 6x$$

Apprendre sur l'enseignement de l'algèbre

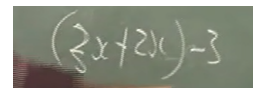
Discussion réflexive – MfE - exemples

T2 met l'Activité 3 en discussion comme il ne s'attendait pas à ce que les élèves aient des difficultés avec la tâche. Il n'a pas été content de l'insertion d'un exemple non prévu, la réponse de L2, et de la manière dont il a géré la situation

T2: ... *Ce à quoi je pense c'est que ... , c'est juste pour voir la différence entre minus three et negative three. Il voient ce nombre comme un entier donc habituellement ils travaillent avec les nombres comme si c'était negative three et trois x plus deux x et negative three comme ça (voir figure) ils pensent que c'est un entier.*


$$\begin{array}{l} -3(3x + 2x) \\ (3x + 2x) - 3 \end{array}$$

R1: Est-ce que ça aurait pu aider de leur demander : et si c'était plus trois ici (en pointant le -3), et en écrivant $(3x + 2x) + 3$


$$(3x + 2x) - 3$$

T3: Ca voudra toujours dire... il vont multiplier, c'est comme si c'était... *oh, okay, non, oui, ça pourrait aider...*

Discussion dans le groupe qui s'est concentrée sur

- *Demande croissante de tâches– construire les compétences des élèves en résolution de problèmes et leur indépendance*
- *Le rôle de “faire” et “défaire” et de la pensée opérationnelle et structurelle*
- *Les défis des exemples planifiés et imprévus*

Apprendre sur les LS et l'enseignement de l'algèbre

Le rôle des 'expérimentés' et des 'autres' ...

La discussion suivante pour savoir si ça aurait pu aider si R1 était intervenu pendant la leçon, T2 dit confidentiellement :

Vous avez quel est le problème ? Si vous vous levez et me contredisez frontalement, alors c'est là qu'ils vont voir qu'il y a un problème and alors vous aurez fait impression sur eux. Mais sous ne le faites pas comme si vous l'aviez vu, vous le faites comme si vous ne pouviez pas le voir, vous demandez.



1. Incidents critiques – opportunités d'apprentissage

- Mathématiques, enseignement de mathématiques, faire des LS

2. Incidents critiques – rendent aussi visibles

- Rôle/compétences des « autres expérimentés/bien informés »
 - Offrant des suggestions pour des tâches qui changent
 - Facilitant les discussions des enseignants sur les 'erreurs' mathématiques

Jaworski 2001,
co-learning partnership
Pouvoir Pédagogique
Pouvoir Mathématique p
Pouvoir éducatif

Huang & Shimizu, 2016
Apprentissage et amélioration
des enseignants
Enseignement par LS
Développement des autres bien
informés

Lewis, 2016
Enseignants en position
d'apprenants
Facilitateurs comme
apprenants



Communicating LS - researchers



4 Mathematical Discourse in Instruction matters

Jill Adler and Erlina Ronda

8 A lesson to learn from

From research insights to teaching the lesson

Jill Adler and Erlina Ronda



UNIVERSITY OF THE WITWATERSRAND, JOHANNESBURG

WMCS MATHEMATICS TEACHING FRAMEWORK

1	a) Date: 04 09 2013	School:	Grade: 10
	b) Topics: Functions (Hyperbola graph)	Teacher:	No in class: 30
	Object of learning	Help learners understand the impact of "a" and "q" as well as the asymptote when drawing hyperbola graph	
2	Examples and tasks Selection, sequence, representations	Explanations and talk What or how? Is there "why"?	Learner participation What learners doing? difficulties?
2a	A. Homework: Plot the ff functions 1. $y = \frac{2}{x}$ 3. $y = \frac{2}{x} + 3$ 2. $y = -\frac{2}{x}$ 4. $y = \frac{2}{x} - 3$	→ Compare your homework graphs with your partner → Match the functions/equations with a correct graph. Work in your pairs Write the equation of the graph that doesn't have matching equation card	→ Check homework → Card matching and discussing
2b	B. Deal with homework by doing card matching using six functions & six graphs (add in to 1-4 from homework) 5. $y = -\frac{2}{x} + 3$ 6. $y = 3 - \frac{2}{x}$	→ Compare the graph of $y = \frac{2}{x}$ with others in a sequence of: g1 & g3; g1 & g4; g1 & g2 by asking learners what changes and what stays the same? How does the graph look when 'the numerator of x' is positive? negative? → how does the constant "a" affect the graph? → what happens to the graph if we introduce "q"? → how does value of q affect graph? → In conclusion, what is an asymptote?	<div style="border: 1px solid black; padding: 10px; text-align: center;"> <h2>Chapter 8</h2> <p>Adler & Ronda, in Adler & Sfard</p> <p>a linear function</p> </div>
2c	C. Compare graphs from the homework		
	D. Sketch the ff functions 7. $y = \frac{4}{x} + 5$ 8. $y = 2 - \frac{4}{x}$ 9. $y = \frac{x}{2} + 3$		

Figure 8.1 Ms H's lesson plan

Faire et rechercher LS

- Bénéfices et contraintes

Pour l'apprentissage

- Plus value de la sélection et du séquençage **examples**
- Plus value de la grande attention aux mots utilisés
- Travail autour des demandes de changement de tâches
- La 'place' des LS quand 'weak' or institutionalised subject knowledge also at issue

Pour la recherche

- Mettre en évidence les apprentissages des enseignants, apprentissage des chercheurs
- Ethics of selective reporting



Thank you

Merci

jill.adler@wits.ac.za

