Une approche interprétative de la résolution de problème

Emmanuel Sander, Hippolyte Gros et Katarina Gvozdic

emmanuel.sander@unige.ch

hippolyte.gros@unige.ch

katarina.gvozdik@unige.ch

Faculté de psychologie et des sciences de l'éducation

UNIVERSITÉ DE GENÈVE

Résumé

Un énoncé de problème fait l’objet d’une interprétation par le solveur qui repose sur un encodage de l’énoncé selon certaines dimensions, orientées par les connaissances de la vie quotidienne.

Cette interprétation le conduit à se focaliser sur certaines caractéristiques et à en ignorer d’autres. Elle est contraignante pour les stratégies de résolution envisageables et pour le transfert d’apprentissage.

Par exemple, alors que jusqu’à présent les typologies de problèmes arithmétiques ont avant tout été envisagées comme exclusives les unes des autres et intrinsèques aux énoncés eux-mêmes, la conception interprétative que nous défendons envisage à l'inverse qu’un même énoncé puisse, selon son d’encodage, être assigné à différents items de la typologie et que les catégories de cette typologie ne soient pas exclusives mais en filiation.

Cette perspective sera développée ainsi que ses conséquences sur le plan de l’intervention scolaire.

Les analogies interviennent sur plusieurs plans

- L’élève dans ses interprétations
- L’élève dans ses progressions
- La définition de progressions d’apprentissage pour les élèves
- L’enseignant dans ses interprétations
- L’enseignant dans ses compréhensions de lui-même et de l’élève
- L’enseignant dans les progressions d’apprentissage qu’il met en œuvre en s’appuyant sur ses compréhensions de l’élève

Le cadre A-S^3

Trois formes d'analogies :

de Substitution

de Scénario

de Simulation

Parfois facilitatrices parfois obstructives

Relative indépendance entre ces trois niveaux, même s'il existe aussi des interdépendances

Chaque niveau définit une catégorie de situations à laquelle le problème à résoudre s'assimile plus ou moins (phénomène de typicalité)

Sander, 2018

Le cadre A-S^3

Cadre pour

- Se prononcer sur la difficulté de résolution
- Distinguer les cas « d'expertise apparente » de compréhension plus profonde des notions
- Construire des évaluations
- Former les enseignants
- Développer des progressions d'apprentissage

Les Analogies de Substitution

La notion mathématique est perçue par analogie avec une connaissance familière, issue de la vie quotidienne

Domaine de validité partiel

- Favorable à l'intérieur de l'intersection
- Défavorable à l'extérieur

Un ensemble

Un ensemble est une collection d'objets

Linchevski & Vinner, 1988; Fischbein, 1989; Lakoff & Nunez, 2000

Le signe égal

Le signe égal indique le résultat d'un processus (métaphore processus-produit)

$3 + 5 - 2 = 6$

Ginsburg, 1977; Kieran, 1981; ; Lakoff & Nunez, 2000

La soustraction

“Inventer un problème de soustraction dont la solution est 8-3=5”

Fischbein, 1989; Lakoff & Nunez, 2000; Sander, 2008

La soustraction

"Inventer un problème de soustraction dont la solution est 8-3=5"

Paul (Hugo, Théo, Nathan, Léa, Marie, Judith, etc…) a 8 bonbons (billes, gâteaux, pommes, etc…). Il/Elle en donne (mange, perd, etc…) 3 à (pendant, etc…). COMBIEN LUI EN RESTE-T-IL ?

Soustraire c'est perdre, retirer, enlever. Une totalité est donnée, dont une partie est retranchée. La question porte sur la partie subsistante.

94% des CM1-CM2 ; 91% étudiants Master Psycho

Fischbein, 1989; Lakoff & Nunez, 2000; Sander, 2008

L'addition

"Inventer un problème d'addition dont la solution est 5+3=8"

Fischbein, 1989; Lakoff & Nunez, 2000; Sander, 2008

L’addition

“Inventer un problème d’addition dont la solution est 5+3=8”

Paul (Hugo, Théo, Nathan, Léa, Marie, Judith, etc…) a 5 bonbons (billes, gâteaux, pommes, etc…). Il/Elle en reçoit (gagne, etc…) 3 à (pendant, etc…). COMBIEN EN A T-IL EN TOUT ?

Additionner, c’est ajouter.

(i) Deux parties sont données, qui forment un tout. La question porte sur la valeur de ce tout.

(ii) Un état initial est donné, ainsi qu’un accroissement . La question porte sur l’état résultant.

Fischbein, 1989; Lakoff & Nunez, 2000; Sander, 2008

La multiplication

"Inventer un problème de multiplication"

"Définir l'opération mathématique de multiplication"

Fischbein, 1989; Lakoff & Nunez, 2000; Sander, 2008

La multiplication

“Inventer un problème de multiplication”

“Définir l’opération mathématique de multiplication”

La quasi totalité des problèmes inventés décrit une addition réitérée : une réplication sommative.

Exemple : J’ai 3 paquets de 10 gâteaux. Combien cela fait-il de gâteaux en tout ?

Fischbein, 1989; Lakoff & Nunez, 2000; Sander, 2008

La multiplication

Quelques exemples de définitions (étudiants à l'université) :

Une multiplication est une addition réitérée d'un nombre, un nombre de fois donnée.

Multiplier consiste à ajouter à un chiffre donné ce même chiffre autant de fois qu'on le souhaite.

Multiplier, c'est additionner un certain nombre à lui-même autant de fois que le nombre par lequel on le multiplie l'indique.

La multiplication est un calcul dans lequel on choisit combien de fois on additionne une quantité par elle-même.

Bezout (*Traité d'arithmétique destiné à la marine et à l'artillerie,* 1821): « Multiplier un nombre par un autre, c'est prendre le premier de ces deux nombres autant de fois qu'il y a d'unités dans l'autre »

Hofstadter & Sander, 2013

La division

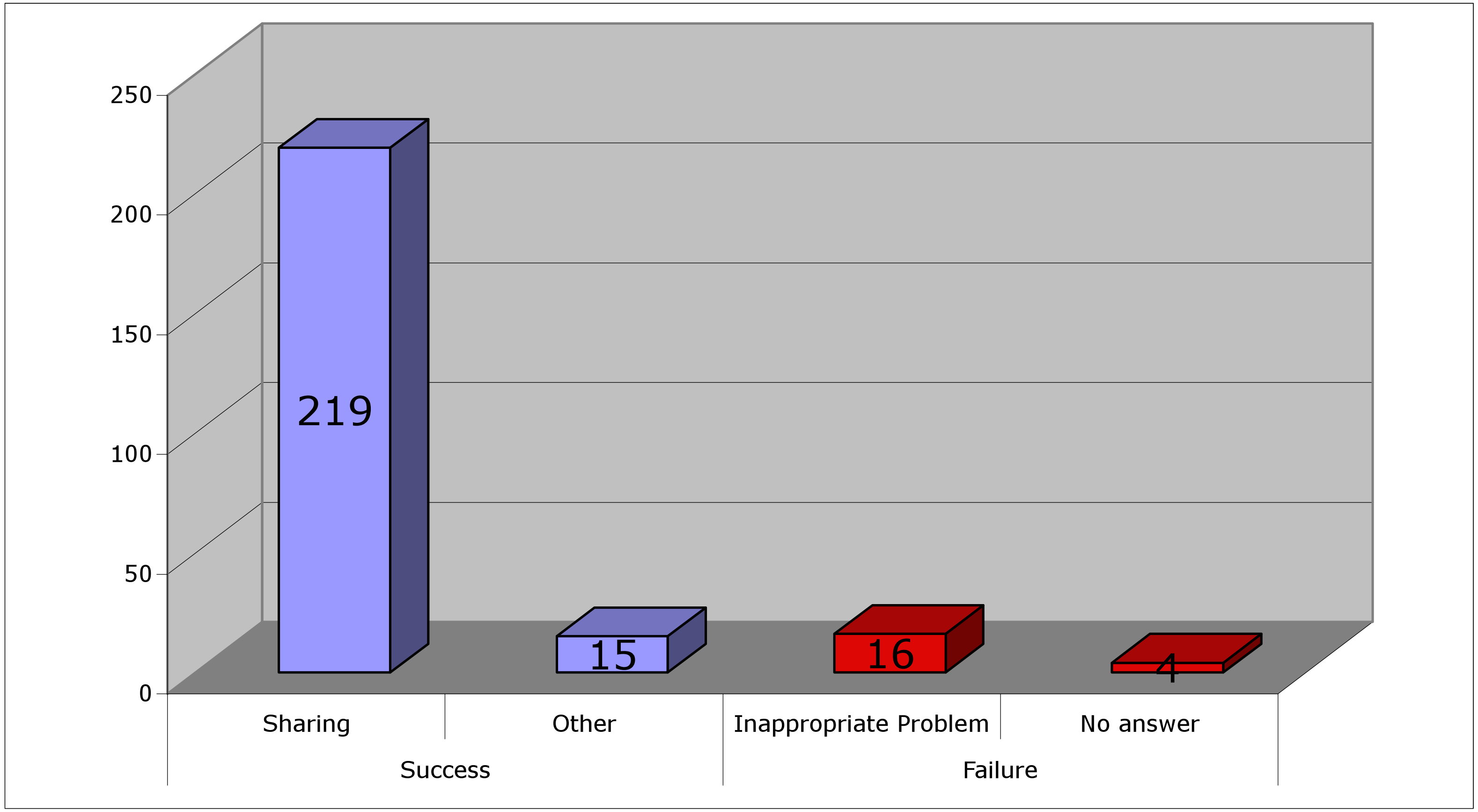
“Inventer un problème de division”

“Définir l’opération mathématique de division”

Fischbein, 1989; Lakoff & Nunez, 2000; Sander, 2008

La division

"Inventer un problème de division" (élèves de 6ème et de 5ème)



Audo & Sander, 2008 ; Sander, 2008

La division

Tâche 1 (“Inventer un problème de division”) :

93% des problèmes inventés par les adultes sont dérivés de l’analogie “Diviser c’est partager” Division- Partition : le résultat de la division est la taille de la part.

Audo & Sander, 2008 ; Sander, 2008

La division

Quelques exemples de problèmes (étudiants à l'université) :

4 amis se partagent 12 bonbons. Combien de bonbons chaque ami recevra-t-il ?

Un terrain de 90 m2 doit être divisé en 6 parcelles de superficie égale. Quelle sera la superficie de chaque parcelle ?

Au marché, une maman achète 20 pommes pour ses 5 enfants. Combien de pommes chaque enfant aura-t-il ?

Au cinéma, il y a 120 sièges et 10 rangées. Combien y a-t-il de sièges par rangée ?

Pour les vacances, on prépare 20 kilos de vêtements à mettre dans 4 valises. Combien va peser chaque valise ?

On utilise 12 mètres de tissu pour fabriquer 4 robes. Combien de mètres de tissu faut-il pour fabriquer une seule robe ?

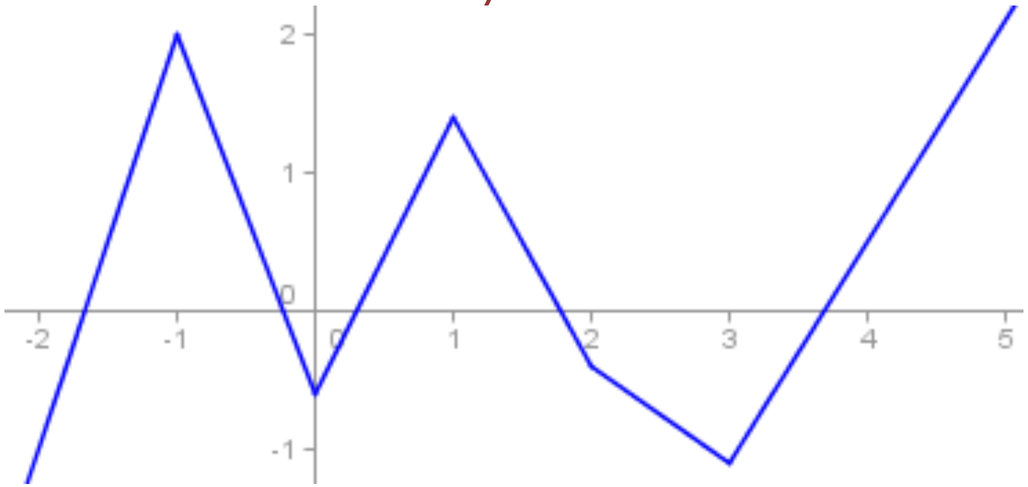
Hofstadter & Sander, 2013

La continuité

La continuité se définit par une fine ligne d’encre
tracée sans lever le stylo

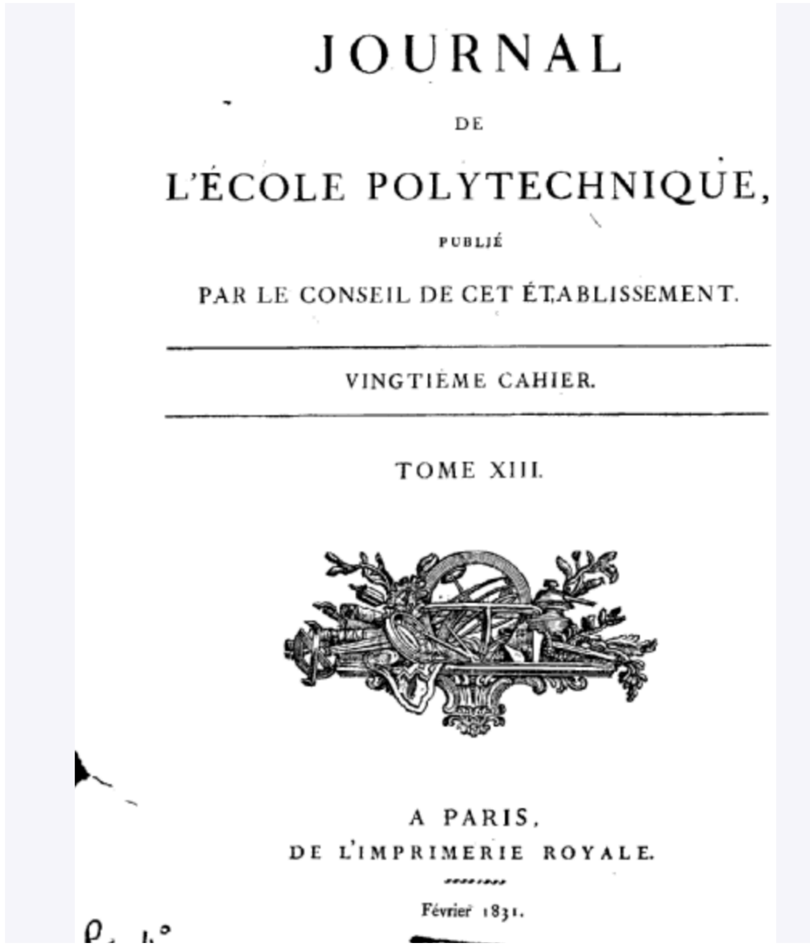
La continuité

La continuité se définit par une fine ligne d'encre tracée sans lever le stylo



Dérivabilité presque partout car si l'on « zoome » d'assez près sur la courbe, on voit des portions lisses et donc des possibilités de tracer des tangentes à la courbe

Une fonction continue est dérivable partout sauf en un nombre limité de points (croit démontrer Ampère)



JOURNAL

DE

L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

PUBLIÉ

PAR LE CONSEIL DE CET ÉTABLISSEMENT.

VINGTIÈME CAHIER.

TOME XIII.

A PARIS,

DE L'IMPRIMERIE ROYALE.

Février 1831.

Et à l'extérieur du domaine de validité de l'analogie de substitution ?

Un ensemble

Un ensemble est une collection d'objets

« Un ensemble vide, ça n'existe pas »

« Une bille ça fait pas un ensemble, trois billes ça fait un ensemble »

« S'ils sont dans le même ensemble, ils ont bien quelque chose en commun »

Linchevski & Vinner, 1988; Fischbein, 1989; Lakoff & Nunez, 2000

Le signe égal

~~? = 3+4~~ 3+4 =?

~~3 = 3~~ 7-4 = 3

Ginsburg, 1977 ; Kieran, 1981

4+5 = 3+6 « Après la fin, il devrait y avoir le résultat et pas un autre problème.

2 produits achetés = le deuxième à 50 %

1 lunette de vue achetée = 1 lunette de soleil offerte

Robert Recorde (1557) : I will sette as I doe often in woorke use, a pair of paralleles, or Gemowe [twin] lines of one length, thus : ===, bicause noe 2 thynges, can be moare equalle

La soustraction

- “Inventer un problème de soustraction dont la solution est 8-3=5 et dans lequel on ne perd rien, on ne fait que gagner”

La soustraction

• "Inventer un problème de soustraction dont la solution est 8-3=5 et dans lequel on ne perd rien, on ne fait que gagner"

Paul a 3 billes. Il en gagne pendant la récréation et maintenant il en a 8. Combien de billes a-t-il gagnées ?

Paul a 3 billes. Pierre a 8 billes. Combien Pierre a-t-il de billes de plus que Paul ?

Tableau 6.1 - Types de problèmes et proportions de réussite en fonction du niveau scolaire (d'après Riley, Greeno et Heller, ibid.).

TYPES DE PROBLEME	TAUX DE REUSSITE			
	Mat.	CP	CE1	CE2
Changement				
1- X avait 3 billes. Puis Y lui a donné 5 billes. Combien de billes a maintenant X?	.87	1.00	1.00	1.00
2- X avait 8 billes. Puis il a donné 5 billes à Y. Combien de billes a maintenant X?	1.00	1.00	1.00	1.00
3- X avait 3 billes. Y lui en a donné. X a maintenant 8 billes. Combien de billes Y a-t-il donné à X?	.61	.56	1.00	1.00
4- X avait 8 billes. Il en a donné à Y. Maintenant X a 3 billes. Combien a-t-il donné de billes à Y?	.91	.78	1.00	1.00
5- X avait des billes. Y lui en a donné 5 de plus. Maintenant X a 8 billes. Combien Y lui en a-t-il donné?	.09	.28	.80	.95
6- X avait des billes. Il en a donné 5 à Y. Maintenant X a 3 billes. Combien avait-il de billes?	.22	.39	.70	.80
Combinaison				
7- X a 3 billes. Y a 5 billes: Combien X et Y ont-ils de billes ensemble?	1.00	1.00	1.00	1.00
8- X et Y ont ensemble 8 billes. X a 3 billes. Combien Y a-t-il de billes?	.22	.39	.70	1.00
Comparaison				
9- X a 8 billes. Y a 5 billes. Combien X a-t-il de billes de plus que Y?	.17	.28	.85	1.00
10- X a 8 billes. Y a 5 billes. Combien Y a-t-il de billes de moins que X?	.04	.22	.75	1.00
11- X a 3 billes: Y a 5 billes de plus que X. Combien de billes a Y?	.13	.17	.80	1.00
12- X a 8 billes. Y a 5 billes de moins. Combien de billes a Y?	.17	.28	.90	.95
13- X a 8 billes. Il a 5 billes de plus que Y. Combien de billes a Y?	.17	.11	.65	.75
14- X a 3 billes. Il a 5 billes de moins que Y Combien de billes a Y?	.00	.06	.35	.75
Egalisation				
15- X a 3 billes. Y a 8 billes. Que doit faire X pour avoir autant de billes que Y?	.	.	.	.
16- X a 8 billes. Y a 3 billes: Que doit faire X pour avoir autant de billes que Y				

Paul a 8 billes. Il en perd 3 pendant la récréation. Combien lui en reste-t-il ?

Paul a 3 billes de moins que Mathieu. Mathieu a 8 billes. Combien de billes Paul a-t-il ?

Paul a 8 billes. Il en perd pendant la récréation. Il lui en reste 3. Combien de billes Paul a-t-il perdu ?

Paul avait des billes en allant à l'école. Il en gagne 3 pendant la récréation et maintenant il en a 8. Combien de billes Paul avait-il avant la récréation ?

Paul a 3 billes. Mathieu a 8 billes. Combien de billes manque-t-il à Paul pour qu'il en ait autant que Mathieu ?

Paul a 3 billes. Mathieu a 8 billes. Combien Mathieu a-t-il de billes de plus que Paul ?

Paul a 3 billes. Il en gagne pendant la récréation et maintenant il en a 8. Combien de billes a-t-il gagnées ?

TYPES DE PROBLEME

Changement

1- X avait 3 billes. Puis Y lui a donné 5 billes. Combien de billes a maintenant X?

2- X avait 8 billes. Puis il a donné 5 billes à Y. Combien de billes a maintenant X?

3- X avait 3 billes. Y lui en a donné. X a maintenant 8 billes. Combien de billes Y a-t-il donné à X?

4- X avait 8 billes. Il en a donné à Y. Maintenant X a 3 billes. Combien a-t-il donné de billes à Y?

5- X avait des billes. Y lui en a donné 5 de plus. Maintenant X a 8 billes. Combien Y lui en a-t-il donné?

6- X avait des billes. Il en a donné 5 à Y. Maintenant X a 3 billes. Combien avait-il de billes?

Combinaison

7- X a 3 billes. Y a 5 billes: Combien X et Y ont-ils de billes ensemble?

8- X et Y ont ensemble 8 billes. X a 3 billes. Combien Y a-t-il de billes?

Comparaison

9- X a 8 billes. Y a 5 billes. Combien X a-t-il de billes de plus que Y?

10- X a 8 billes. Y a 5 billes. Combien Y a-t-il de billes de moins que X?

11- X a 3 billes: Y a 5 billes de plus que X. Combien de billes a Y?

12- X a 8 billes. Y a 5 billes de moins. Combien de billes a Y?

13- X a 8 billes. Il a 5 billes de plus que Y. Combien de billes a Y?

14- X a 3 billes. Il a 5 billes de moins que Y Combien de billes a Y?

Egalisation

15- X a 3 billes. Y a 8 billes. Que doit faire X pour avoir autant de billes que Y?

16- X a 8 billes. Y a 3 billes: Que doit faire X pour avoir autant de billes que Y

Sur les 11 catégories de problèmes de soustraction que comporte cette typologie qui a émergé dans les années 1980, plus de 90% des propositions se concentrent sur la seule catégorie des recherches de reste dans une situation de retrait.

Cette analogie de substitution donne sens à la notion, mais elle induit une focalisation sur un seul type de situation. Elle est nécessaire mais limitante, car elle éclipse la diversité des situations de soustraction.

Vergnaud, 1982 ; Riley et al., 1983 ; Sander, 2008

Quelles conséquences ?

" Lors d'une course, 108 coureurs prennent le départ. Il y a beaucoup d'abandons : 85 coureurs seulement terminent la course. Combien de coureurs ont abandonné ? "

25% de réussites en début de CE2 ; DEPP 2014

Il est difficile d'envisager de soustraire 85 de 108 car 85 est la valeur du reste.

Etat initial : Les 108 coureurs

Transformation : Les coureurs qui abandonnent

Etat final : Les 85 coureurs qui terminent la course

$$I = 108 \xrightarrow{T\ ?} F = 85$$

Intervenir sur la conception de la soustraction ou sur la perception du problème.

DEPP, 2014 ; Sander & Richard, 2015

L’addition

- “Inventer un problème d’addition dont la solution est 5+3=8 et dans lequel on ne gagne rien, on ne fait que perdre”

Paul avait des billes. Il en perd 3 pendant la récréation et maintenant il lui en reste 5. Combien de billes avait-il avant la récréation ?

Quelles conséquences ?

Paul avait 3 billes. Il en gagne 5 à la récréation. Combien a-t-il de billes maintenant ?

Paul a 3 billes. Pierre a 5 billes. Combien ont-ils de billes ensemble ?

Paul avait des billes. Il en perd 3 pendant la récréation et maintenant il lui en reste 5. Combien de billes avait-il avant la récréation ?

Paul a 3 billes. Pierre a 5 billes de plus que Paul. Combien de billes Pierre a-t-il ?

Paul a 3 billes. Paul a 5 billes de moins que Pierre. Combien Pierre a-t-il de billes ?

Quelles conséquences ?

Paul avait 3 billes. Il en gagne 5 à la récréation. Combien a-t-il de billes maintenant ?
100% de réussite à 6 ans [Dans le domaine de validité de la connaissance intuitive]

Paul a 3 billes. Pierre a 5 billes. Combien ont-ils de billes ensemble ?
100% de réussite à 6 ans [Dans le domaine de validité de la connaissance intuitive]

Paul avait des billes. Il en perd 3 pendant la récréation et maintenant il lui en reste 5. Combien de billes avait-il avant la récréation ?
28% de réussite à 6 ans [Hors du domaine de validité de la connaissance intuitive]

Paul a 3 billes. Pierre a 5 billes de plus que Paul. Combien de billes Pierre a-t-il ?
17% de réussite à 6 ans [Hors du domaine de validité de la connaissance intuitive]

Paul a 3 billes. Paul a 5 billes de moins que Pierre. Combien Pierre a-t-il de billes ?
6% de réussite à 6 ans [Hors du domaine de validité de la connaissance intuitive]

La multiplication

Définition consensuelle erronée de ce qu'est une multiplication

Si on demande d'inventer un problème de multiplication, presque tout le monde introduit un nombre entier

Croyance erronée que multiplier rend plus grand

Difficulté à un inventer un problème dans lequel multiplier rend plus petit

Difficulté à justifier la commutativité de la multiplication :

3x5=5x3, càd 5+5+5 = 3+3+3+3+3 ? (conséquence de l'asymétrie intuitive entre multiplicateur et du multiplicande)

Quelles conséquences ?

Si un gallon d'essence coûte £1,27, combien coûte 0,22 gallon ?

Si un gallon d'essence coûte £1,27, combien coûte 5 gallons ?

Avec un quintal de blé, on obtient 0,75 quintaux de farine. Quelle quantité de farine peut être obtenue avec 15 quintaux de blé ?

Le volume d'un quintal de gypse est de 15 cm^3. Quel est le volume de 0,75 quintaux ?

Bell, Swann & Taylor, 1981; Fischbein et coll., 1985

Quelles conséquences ?

Si un gallon d'essence coûte £1,27, combien coûte 0,22 gallon ?
44% de réussite [Hors du domaine de validité de la connaissance intuitive]

Si un gallon d'essence coûte £1,27, combien coûte 5 gallons ?
100% de réussite [Dans le domaine de validité de la connaissance intuitive]

Avec un quintal de blé, on obtient 0,75 quintaux de farine. Quelle quantité de farine peut être obtenue avec 15 quintaux de blé ?
77% de réussite [Dans le domaine de validité de la connaissance intuitive]

Le volume d'un quintal de gypse est de 15 cm^3. Quel est le volume de 0,75 quintaux ?
53% de réussite [Hors du domaine de validité de la connaissance intuitive]

Bell, Swann & Taylor, 1981; Fischbein et coll., 1985

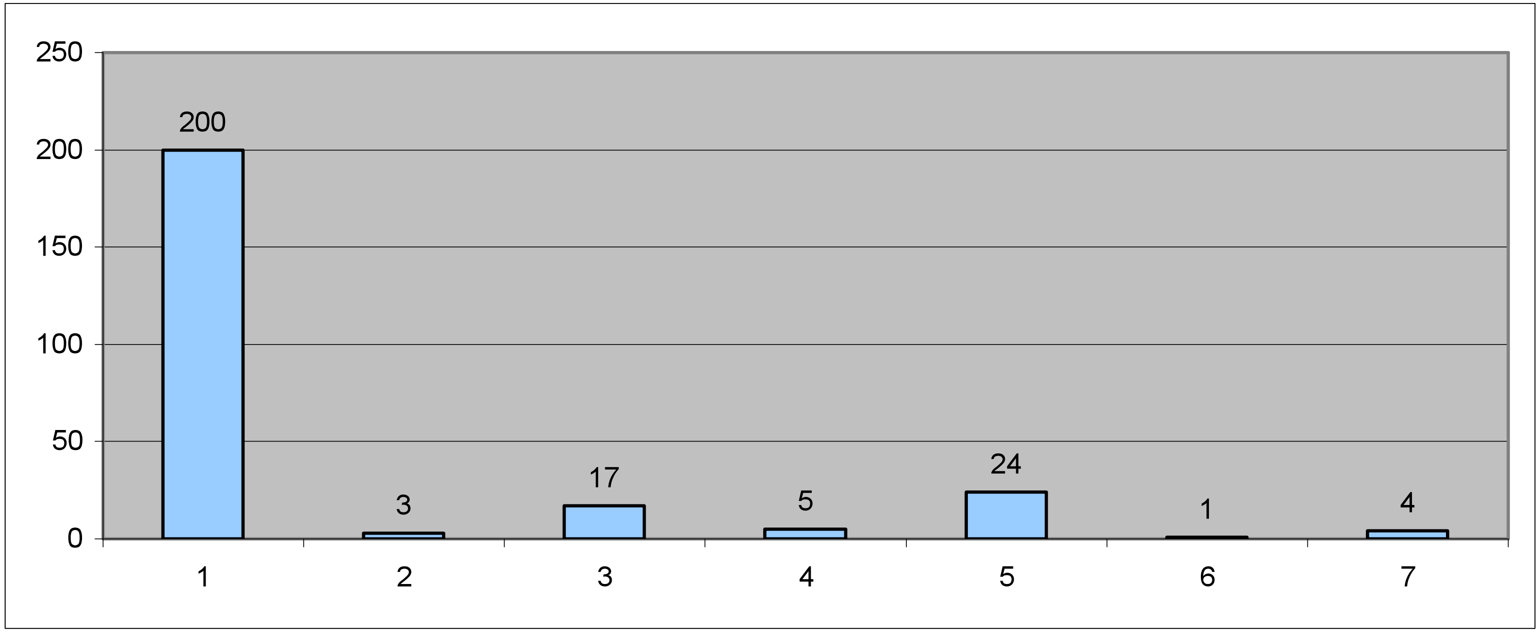
La division

"Inventer un problème de division (une et une seule division) dont le résultat soit plus grand que la valeur initiale"

Tâche difficile car elle est incompatible avec l'analogie du partage dans laquelle on cherche la taille de la part, qui conduit toujours à obtenir une quantité moindre.

La division

"Inventer un problème de division (une et une seule division) dont le résultat soit plus grand que la valeur initiale"



1: « Impossible ! »
2: Possible, mais pas de problème proposé
3: Possible, mais valeurs numériques uniquement
4: Possible, mais justification erronée
5: Invente un problème inapproprié
6: Réussite
7: Pas de réponse

Audo & Sander, 2008 ; Sander, 2008

Une seule réussite sur 254 élèves !

La division

Tâche 1 (“Inventer un problème de division”) :

93% des problèmes inventés par les adultes sont dérivés de l’analogie “Diviser c’est partager”

Tâche 2 (“Inventer un problème de division qui rende plus grand”) :

74% échec

27% écrivent “ Impossible ”

23% construisent un problème incompatible avec la consigne

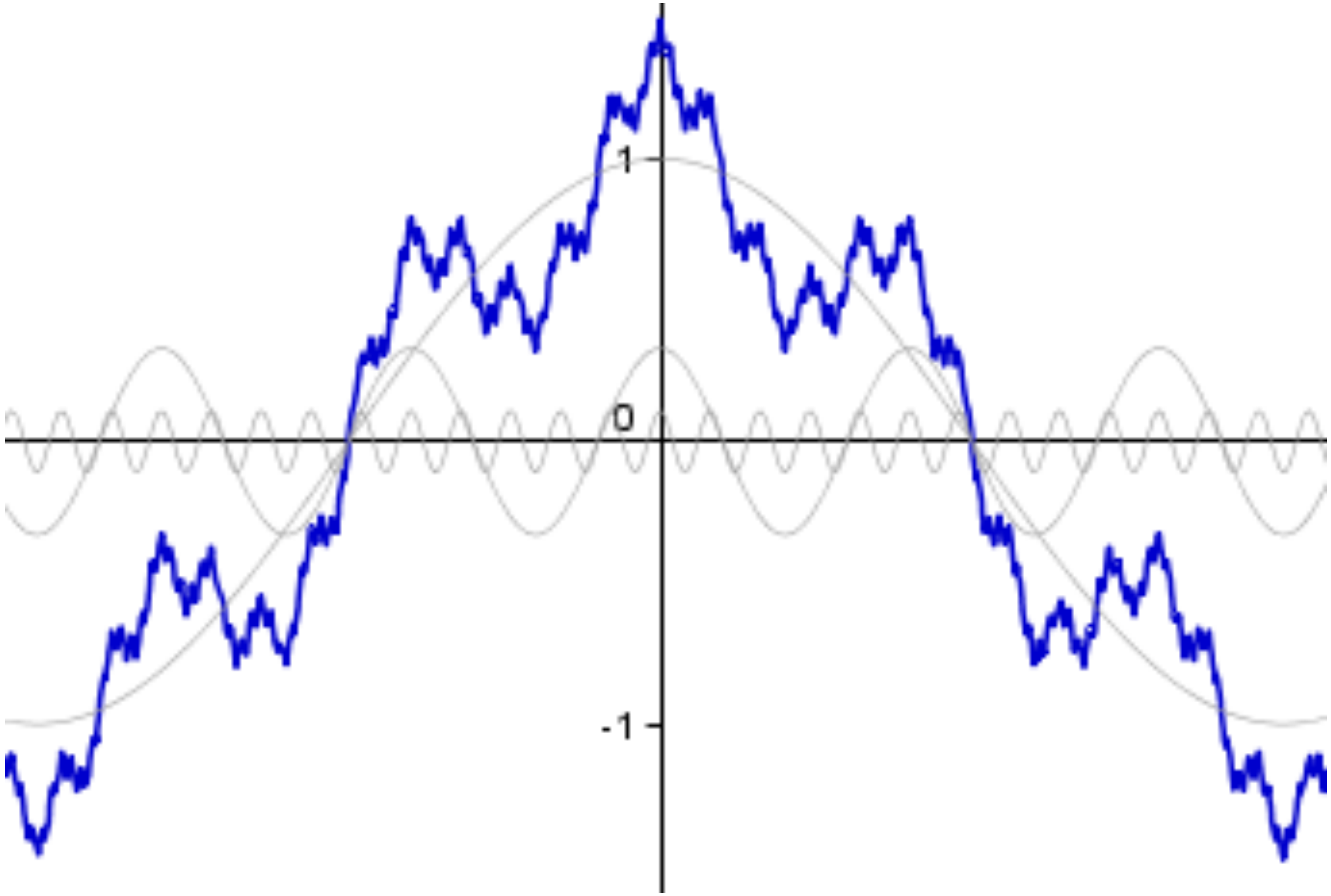
23% posent une opération (exemple : 4/0.2), mais sans énoncé

Audo & Sander, 2008 ; Sander, 2008

La division

- « Diviser, c'est répartir en parts égales. Alors, chacun a moins que ce qu'il y avait au début ; donc, il est impossible d'inventer un problème où il y a plus à la fin. »
- « Impossible, car diviser c'est découper en plusieurs morceaux ; pour avoir plus, il faut multiplier. »
- « Lorsqu'on divise par une moitié, on a plus, mais c'est impossible de diviser par une moitié. »
- « Jean a 20 bouteilles de vin. Il en vend la moitié à 8 euros la bouteille. Combien d'argent reçoit-il ? »

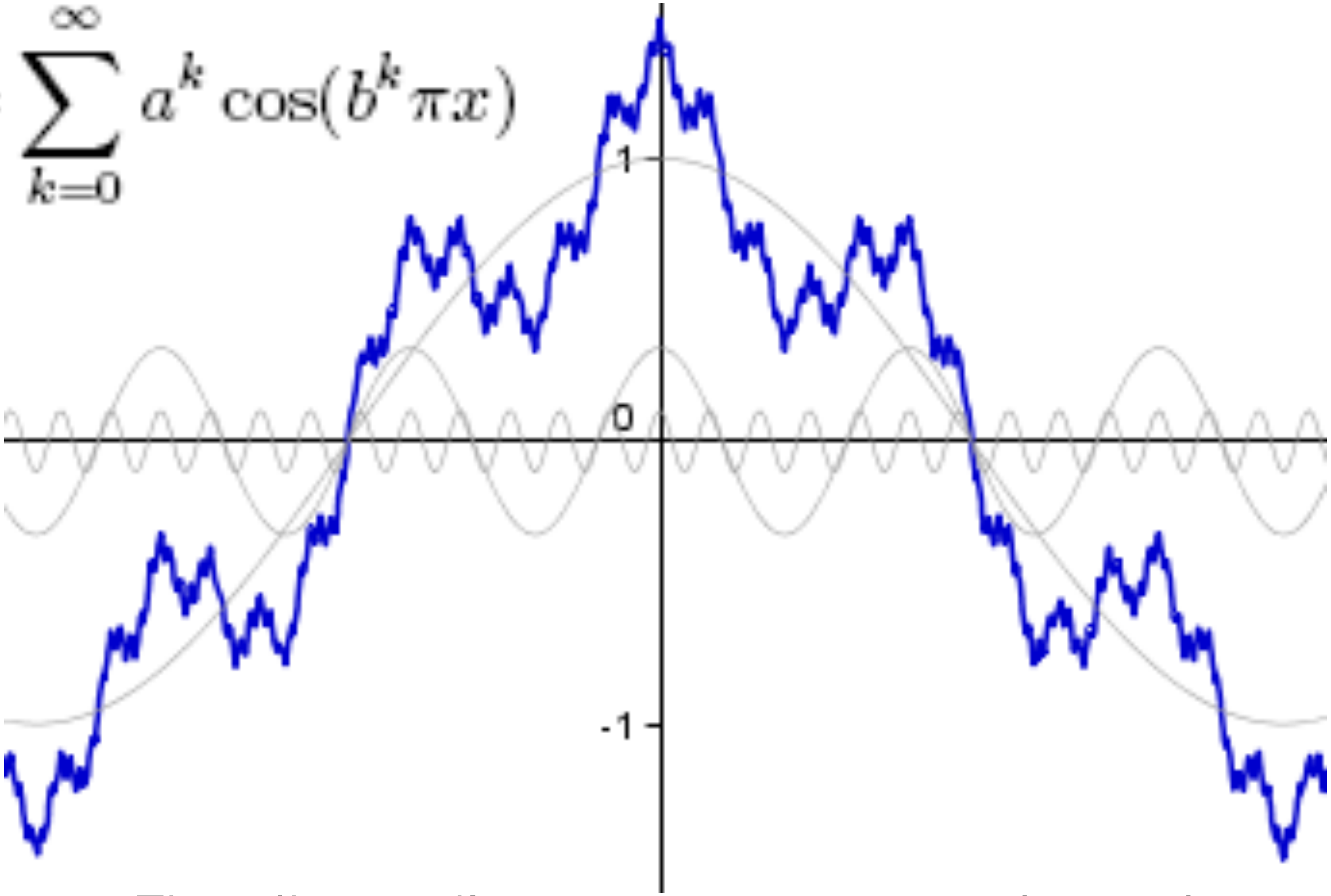
La continuité



Analogie : « Fine ligne d'encre tracée sans lever le stylo »

La continuité

$$W(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k \cos(b^k \pi x)$$



Analogie : « Fine ligne d'encre tracée sans lever le stylo »

MAIS que dire des fonctions non traçables ?

La continuité

Charles Hermite : « Je me détourne avec effroi et horreur de cette plaie lamentable des fonctions continues qui n'ont point de dérivées »

Henri Poincaré : « La logique parfois engendre des monstres. On vit surgir toute une foule de fonctions bizarres qui semblaient s'efforcer de ressembler aussi peu que possible aux honnêtes fonctions qui servent à quelque chose. [...] de la continuité, mais pas de dérivées[...], on les invente tout exprès pour mettre en défaut les raisonnements de nos pères, et on n'en tirera jamais que cela. »

La continuité

Charles Hermite : « Je me détourne avec effroi et horreur de cette plaie lamentable des fonctions continues qui n'ont point de dérivées »

Henri Poincaré : « La logique parfois engendre des monstres. On vit surgir toute une foule de fonctions bizarres qui semblaient s'efforcer de ressembler aussi peu que possible aux honnêtes fonctions qui servent à quelque chose. [...] de la continuité, mais pas de dérivées[...], on les invente tout exprès pour mettre en défaut les raisonnements de nos pères, et on n'en tirera jamais que cela. »

Pourtant on sait maintenant que ces fonctions sont denses dans l'ensemble des fonctions continues et elles sont parfaitement intégrées aux mathématiques (objets fractals)

Les Analogies de Substitution

Influence de ces analogies de substitution (conception initiale, conséquence de leur ancrage, place dans l'évaluation)

Persistance des notions y compris chez les enseignants (le maître a à intégrer leur présence chez lui et chez l'élève)

Elaboration de progressions d'apprentissage pour orienter le développement des notions (par exemple l'écart pour la soustraction, la quotition pour la division)

En s'appuyant sur des scénarios, car les analogies de substitution sont seulement la partie émergée de l'iceberg

Les Analogies de Scénario

Inventer un problème dans lequel il est question de 12 oranges et 4 pommes

Inventer un problème dans lequel il est question de 12 oranges et 4 paniers

Bassok, Chase & Martin, 1998

Les Analogies de Scénario

Inventer un problème dans lequel il est question de 12 oranges et 4 pommes

Situation de complémentation ou de comparaison induite par la collatéralité entre les deux catégories

Inventer un problème dans lequel il est question de 12 oranges et 4 paniers

Situation de répartition induite par la relation fonctionnelle de contenance entre les deux catégories

Bassok, Chase & Martin, 1998

Les Analogies de Scénario

Inventer un problème dans lequel il est question de 12 oranges et 4 pommes

Inventer un problème dans lequel il est question de 12 oranges et 4 paniers

Dans les manuels, pour 97% des problèmes à résoudre par addition, les objets additionnés appartenaient à des catégories de même niveau (e.g., des pommes et des poires, ou des billes rouges et noires) alors que 94% des problèmes demandant une division utilisaient des objets reliés fonctionnellement (e.g., des billes et des boites)

Bassok, Chase & Martin, 1998

Les Analogies de Scénario

J'ai 3 paquets de 10 gâteaux. Combien ai-je de gâteaux en tout ?

Conformité aux analogies de substitution (réplication) et de scénario (relation fonctionnelle de contenance)

J'ai 4 oranges. Je reçois 5 pommes en échange de chaque orange.

Combien aurai-je de pommes ?

Conformité à l'analogie de substitution (réplication) mais pas à celle de scénario (collatéraux d'une même catégorie)

Si un gallon d'essence coûte £1,27, combien coûte 0,22 gallon ?

Conformité à l'analogie de scénario (recherche d'un prix payé connaissant le prix unitaire et la quantité) mais pas à celle de substitution (pas de réplication)

Les Analogies de Scénario

Problème d'entraînement : Les mécaniciens d'IBM doivent s'assurer que les voitures de la société fonctionnent bien. Ce jour-là, il y a 11 voitures et 8 mécaniciens. Les mécaniciens choisissent au hasard sur quelle voiture ils vont travailler. Ce choix est fait par ordre d'ancienneté. Quelle est la probabilité que les 3 plus anciens mécaniciens, Al, Bud et Carl, choisissent respectivement les voitures du chef du conseil d'administration, du président exécutif et du vice-président ?

Solution : $1/(11 \times 10 \times 9)$

Scénario : choix d'inanimés par des animés

Ross, 1987, 1989

Problème test 1 : Les mécaniciens d'IBM réparent les voitures des commerciaux de la société. Les mécaniciens choisissent au hasard sur quelle voiture ils vont travailler, le meilleur mécanicien choisissant en premier et ainsi de suite. Ce jour là, il y a 16 voitures de commerciaux et 5 mécaniciens. Quelle est la probabilité que le meilleur mécanicien choisisse la voiture du meilleur vendeur et que le 2ème meilleur mécanicien choisisse la voiture du 2ème meilleur vendeur ?

Solution : 1/(16x15) ; taux de réussite de 75%

Problème test 2 : Les mécaniciens d'IBM réparent les voitures des commerciaux de la société. Les commerciaux choisissent au hasard le mécanicien qui réparera leur voiture, le meilleur commercial choisissant en premier et ainsi de suite. Ce jour là, il y a 14 voitures de commerciaux et 16 mécaniciens. Quelle est la probabilité que le meilleur mécanicien répare la voiture du meilleur vendeur et que le 2ème meilleur mécanicien répare la voiture du 2ème meilleur vendeur ?

Solution : 1/(16x15) ; taux de réussite de 37%

Ross, 1987, 1989

Les Analogies de Scénario

Test → Entraînement ↓	OP	PO	PP
OP	89	0	60
PO	33	53	50
PP	67	31	50

Bassok, Wu & Olseth, 1995

Laurent achète une trousse à 7 euros et un classeur. Il paie 15 euros. Jean achète un classeur et une équerre. Il paie 3 euros de moins que Laurent. Combien coûte l'équerre ?

Gros, Thibaut & Sander, 2017

Laurent achète une trousse à 7 euros et un classeur. Il paie 15 euros. Jean achète un classeur et une équerre. Il paie 3 euros de moins que Laurent. Combien coûte l'équerre ?

$15 - 7 = 8$

$15 - 3 = 12$

$12 - 8 = 4$

L'équerre coûte 4 euros.

Gros, Thibaut & Sander, 2017

Laurence a suivi des cours de danse pendant 7 ans et s'est arrêtée à 15 ans. Jeanne a commencé au même âge que Laurence et s'est arrêtée 3 ans plus tôt. Combien de temps Jeanne a-t-elle suivi ses cours de danse ?

Gros, Thibaut & Sander, 2017

Laurence a suivi des cours de danse pendant 7 ans et s'est arrêtée à 15 ans. Jeanne a commencé au même âge que Laurence et s'est arrêtée 3 ans plus tôt. Combien de temps Jeanne a-t-elle suivi ses cours de danse ?

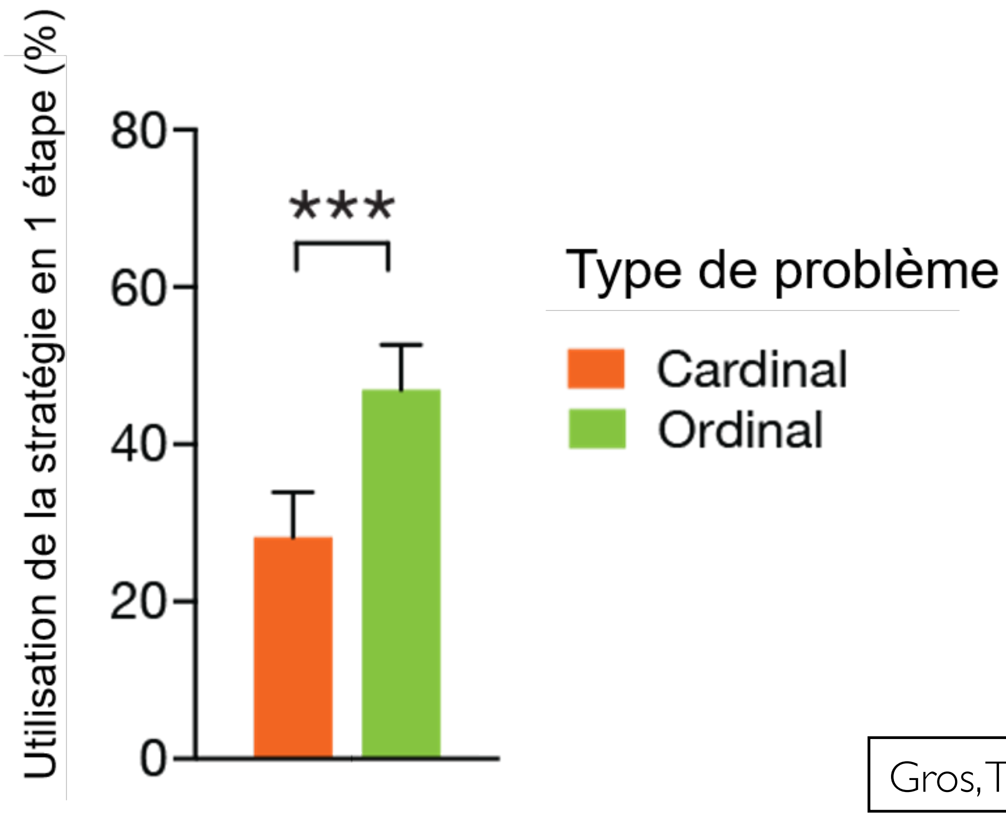
$$7 - 3 = 4$$

Jeanne a suivi ses cours de danse pendant 4 ans.

Gros, Thibaut & Sander, 2017

Problème cardinal : "Laurent achète une trousse à 7 euros et un classeur. Il paie 15 euros. Jean achète un classeur et une équerre. Il paie 3 euros de moins que Laurent. Combien coûte l'équerre ?"

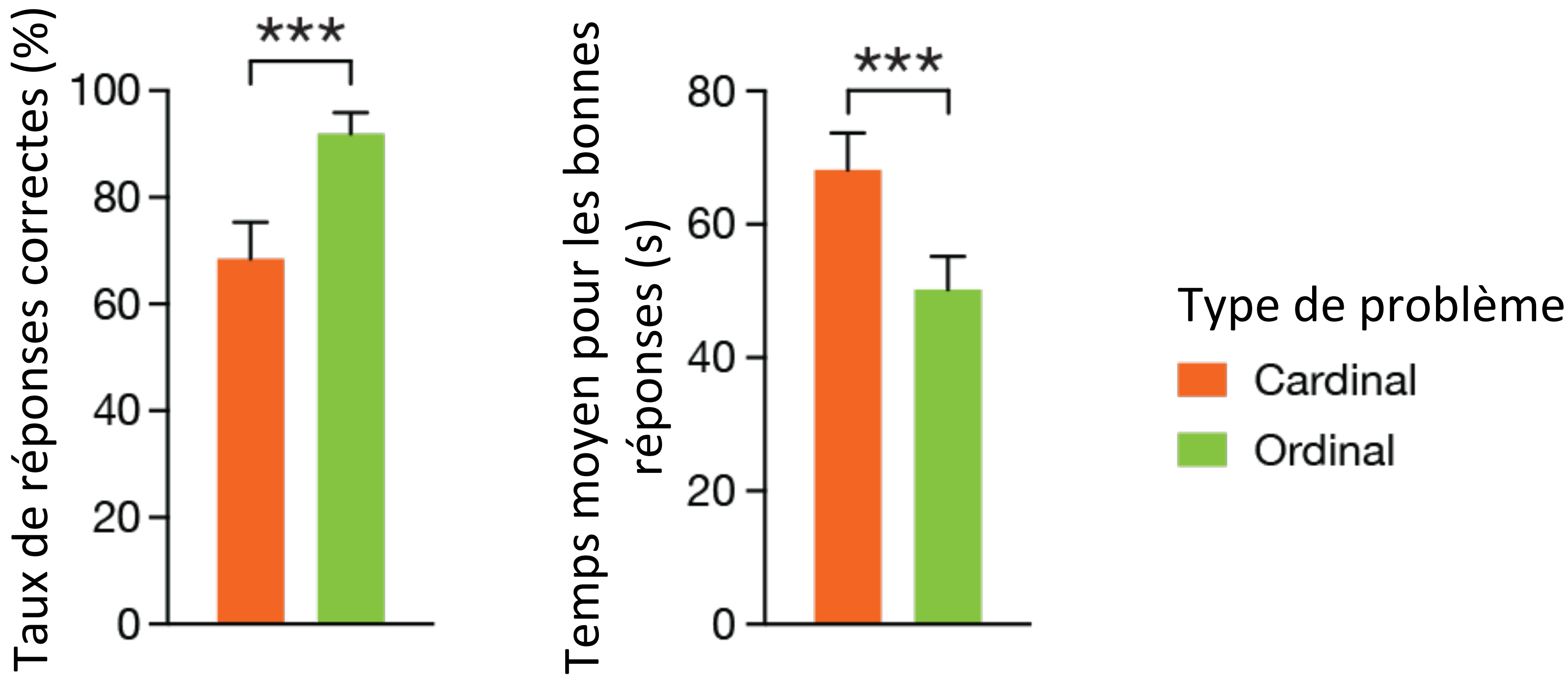
Problème ordinal : "Laurence a suivi des cours de danse pendant 7 ans et s'est arrêtée à 15 ans. Jeanne a commencé au même âge que Laurence et s'est arrêtée 3 ans plus tôt. Combien de temps Jeanne a-t-elle suivi ses cours de danse ?"



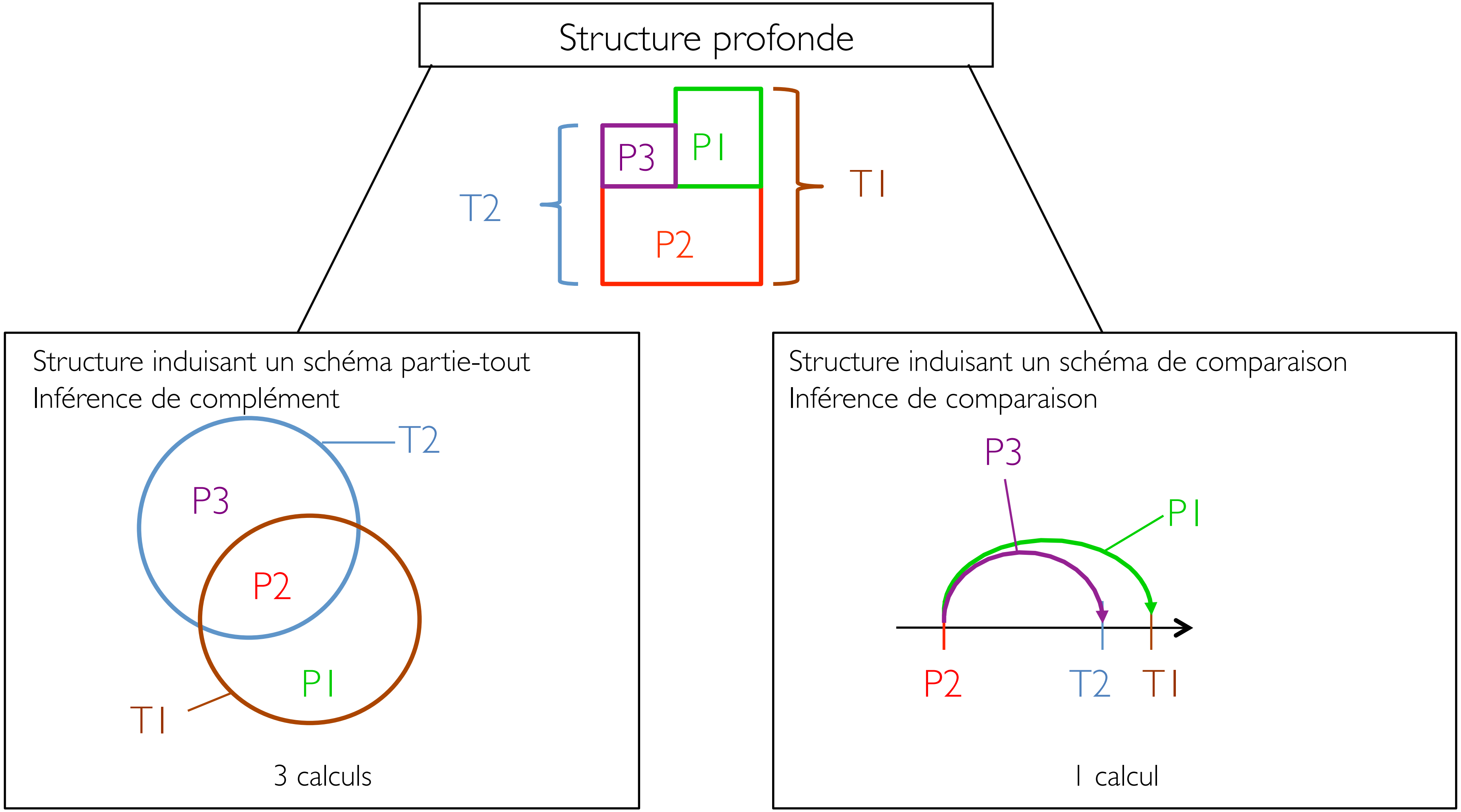
Gros, Thibaut & Sander, 2017

Problème cardinal : "Laurent achète une trousse à 7 euros et un classeur. Jean achète un classeur et une équerre. Il paie 3 euros de moins que Laurent. Combien coûte l'équerre ?"

Problème ordinal : "Laurence a suivi des cours de danse pendant 7 ans. Jeanne a commencé au même âge que Laurence et s'est arrêtée 3 ans plus tôt. Combien de temps Jeanne a-t-elle suivi ses cours de danse ?"



Gros, Sander & Thibaut, 2016



Laurent achète une trousse à 7 euros et un classeur. Il paie 15 euros. Jean achète un classeur et une équerre. Il paie 3 euros de moins que Laurent. Combien coûte l'équerre ?

Laurence a suivi des cours de danse pendant 7 ans et s'est arrêtée à 15 ans. Jeanne a commencé au même âge que Laurence et s'est arrêtée 3 ans plus tôt. Combien de temps Jeanne a-t-elle suivi ses cours de danse ?

Les Analogies de Simulation

Lorsque la simulation mentale de la situation spontanément évoquée par l'énoncé mène à la solution, l'analogie de simulation est facilitatrice alors que lorsque la simulation n'est pas praticable, c'est un facteur de difficulté.

Par exemple, « Quel est le prix de 3 objets à 50 cruzeiros ? » versus « Quel est le prix de 50 objets à 3 cruzeiros ? », malgré la conformité sur les plans de la substitution (réplication) et du scénario (recherche du prix d'un achat groupé).

Les Analogies de Simulation

Pierre a 15 billes. Il en perd 3 à la récréation. Combien lui en reste-t-il ?

Conformité sur le plan de la substitution (enlever), du scénario (scénario de jeu de billes dans lequel on perd ou on gagne) et de la simulation (comptage mental à rebours de 3).

Pierre a 15 billes. Il en perd 12 à la récréation. Combien lui en reste-t-il ?

Conformité sur le plan de la substitution (enlever), du scénario (scénario de jeu de billes dans lequel on perd ou on gagne) mais pas de la simulation (comptage mental à rebours de 12).

Les Analogies de Simulation

1/ Nicolas va en récréation avec 27 billes. Pendant la récréation, il gagne des billes et maintenant il en a 31. Combien de billes Nicolas a-t-il gagnées ?

2/ Nicolas va en récréation avec 31 billes. Pendant la récréation, il perd 27 billes. Combien de billes reste-t-il à Nicolas ?

3/ Nicolas va en récréation avec 4 billes. Pendant la récréation, il gagne des billes et maintenant il en a 31. Combien de billes Nicolas a-t-il gagnées ?

4/ Nicolas va en récréation avec 31 billes. Pendant la récréation, il perd 4 billes. Combien de billes reste-t-il à Nicolas ?

Les Analogies de Simulation

1/ Nicolas va en récréation avec 27 billes. Pendant la récréation, il gagne des billes et maintenant il en a 31. Combien de billes Nicolas a-t-il gagnées ? (14/20)

2/ Nicolas va en récréation avec 31 billes. Pendant la récréation, il perd 27 billes. Combien de billes reste-t-il à Nicolas ? (8/20)

3/ Nicolas va en récréation avec 4 billes. Pendant la récréation, il gagne des billes et maintenant il en a 31. Combien de billes Nicolas a-t-il gagnées ? (8/20)

4/ Nicolas va en récréation avec 31 billes. Pendant la récréation, il perd 4 billes. Combien de billes reste-t-il à Nicolas ? (16/20)

Hofstadter & Sander, 2013 ; Sander & Richard, 2017 ; Sander, 2018   Brissiaud & Sander, 2010

Les Analogies de Simulation

1/ Dans un paquet de 200 images, on fait des tas de 50 images. Combien y a-t-il de tas ?

2/ On partage 200 images en 50 tas. Combien y a-t-il d'images dans chaque tas ?

3/ On partage 200 images en 4 tas. Combien y a-t-il d'images dans chaque tas ?

4/ Dans un paquet de 200 images, on fait des tas de 4 images. Combien y a-t-il de tas ?

Les Analogies de Simulation

1/ Dans un paquet de 200 images, on fait des tas de 50 images. Combien y a-t-il de tas ? (14/20)

2/ On partage 200 images en 50 tas. Combien y a-t-il d'images dans chaque tas ? (4/20)

3/ On partage 200 images en 4 tas. Combien y a-t-il d'images dans chaque tas ? (15/20)

4/ Dans un paquet de 200 images, on fait des tas de 4 images. Combien y a-t-il de tas ? (5/20)

Hofstadter & Sander, 2013 ; Sander & Richard, 2017 ; Sander, 2018   Brissiaud & Sander, 2010

Les Analogies de Simulation

La simulation mentale n'est pas juste évoquée par une structure dynamique de l'énoncé

Les Analogies de Simulation

- 1/ Il y a 41 oranges et 38 poires dans le panier. Combien y a-t-il de poires de moins que de oranges ?
- 2/ Céline a 29 euros dans sa tirelire et 4 euros dans sa poche. Combien d'euros Céline a-t-elle?
- 3/ Il y a 41 oranges et 3 poires dans le panier. Combien y a-t-il de poires de moins que d'oranges ?
- 4/ Céline a 4 euros dans sa tirelire et 29 euros dans sa poche. Combien d'euros Céline a-t-elle?

Gvozdic & Sander, 2017 ; en prép

Les Analogies de Simulation

1/ Il y a 41 oranges et 38 poires dans le panier. Combien y a-t-il de poires de moins que de oranges ? (14/20)

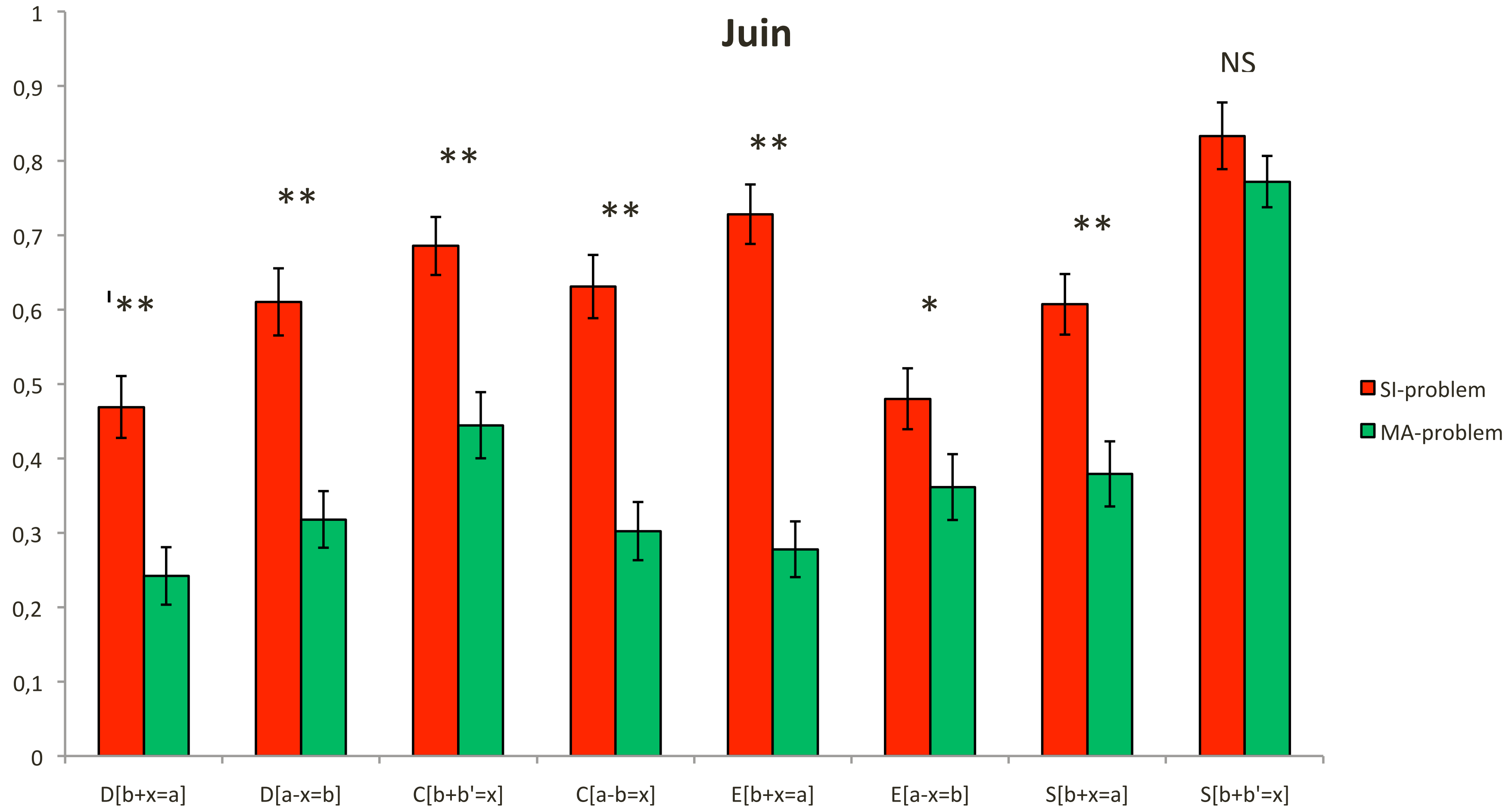
2/ Céline a 29 euros dans sa tirelire et 4 euros dans sa poche. Combien d'euros Céline a-t-elle? (12/20)

3/ Il y a 41 oranges et 3 poires dans le panier. Combien y a-t-il de poires de moins que d'oranges ? (6/20)

4/ Céline a 4 euros dans sa tirelire et 29 euros dans sa poche. Combien d'euros Céline a-t-elle? (7/20)

Gvozdic & Sander, 2017 ; en prép

Les Analogies de Simulation



Gvozdic & Sander, 2017 ; en prép

Conceptions des enseignants

- Connaissances Pédagogiques du contenu (CPC) (Shulman, 1986)
  - Connaissances pédagogiques relatives au contenu enseigné ≠ connaissances expert sur le contenu
  - Connaissances des conceptions (erronés) des élèves (Depaepe, Verschaffel,& Kelchtermans, 2013)
- Conceptions intuitives en mathématiques (analogies de substitution) sont supposés avoir une capacité prédictive et explicative des performances des élèves (Tirosh & Stavy, 1999)
- Les différentes formes d'analogie, font-elle partie et comment influencent-elles les CPC des enseignants ?

Gvozdic & Sander, under review

Enseignants demandés d'évaluer les stratégies des élèves portant sur les analogies de simulation

1/ Il y a 41 oranges et 38 poires dans le panier. Combien y a-t-il de poires de moins que de oranges ? (14/20)

2/ Céline a 29 euros dans sa tirelire et 4 euros dans sa poche. Combien d'euros Céline a-t-elle? (12/20)

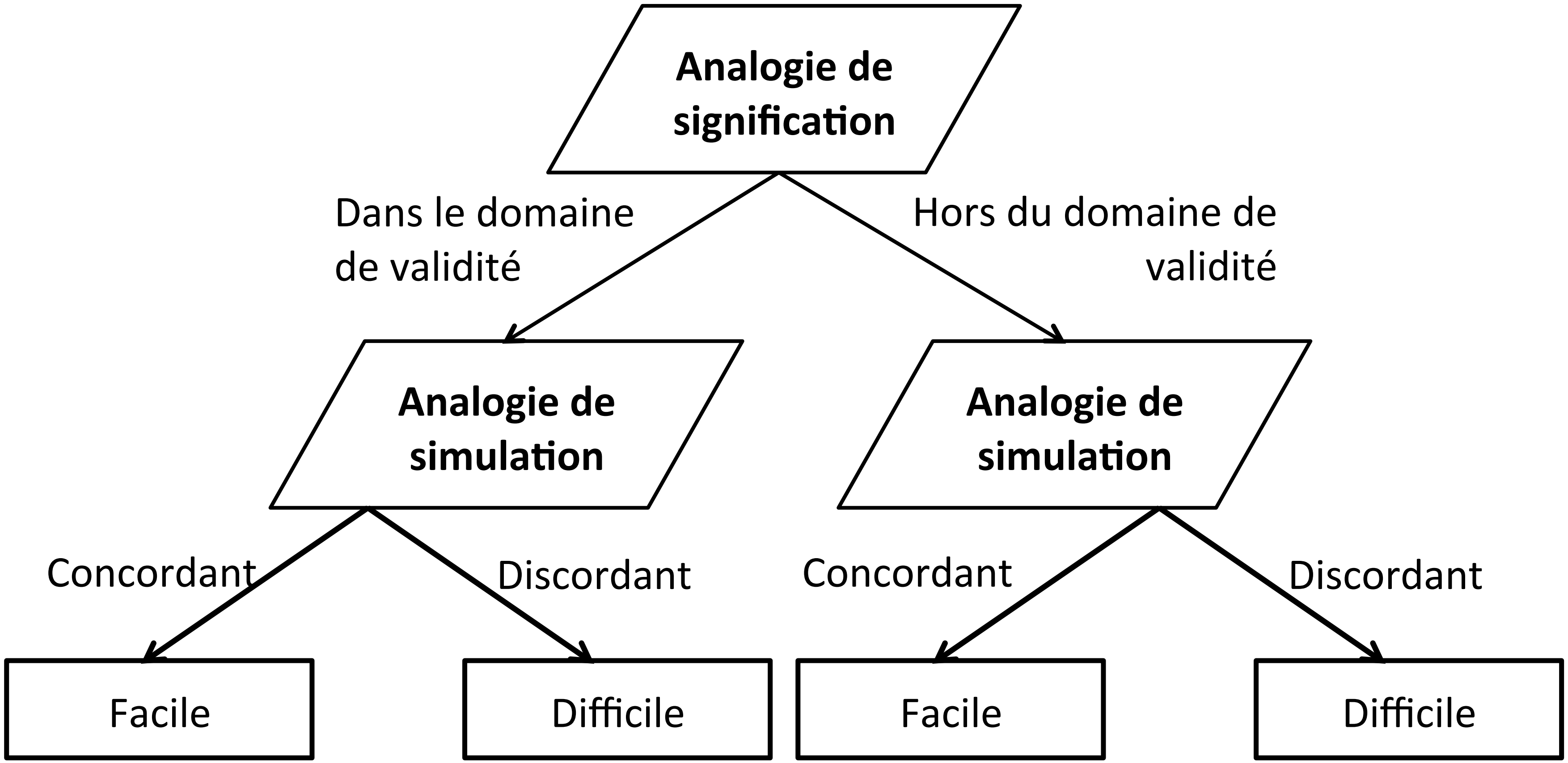
3/ Il y a 41 oranges et 3 poires dans le panier. Combien y a-t-il de poires de moins que d'oranges ? (6/20)

4/ Céline a 4 euros dans sa tirelire et 29 euros dans sa poche. Combien d'euros Céline a-t-elle? (7/20)

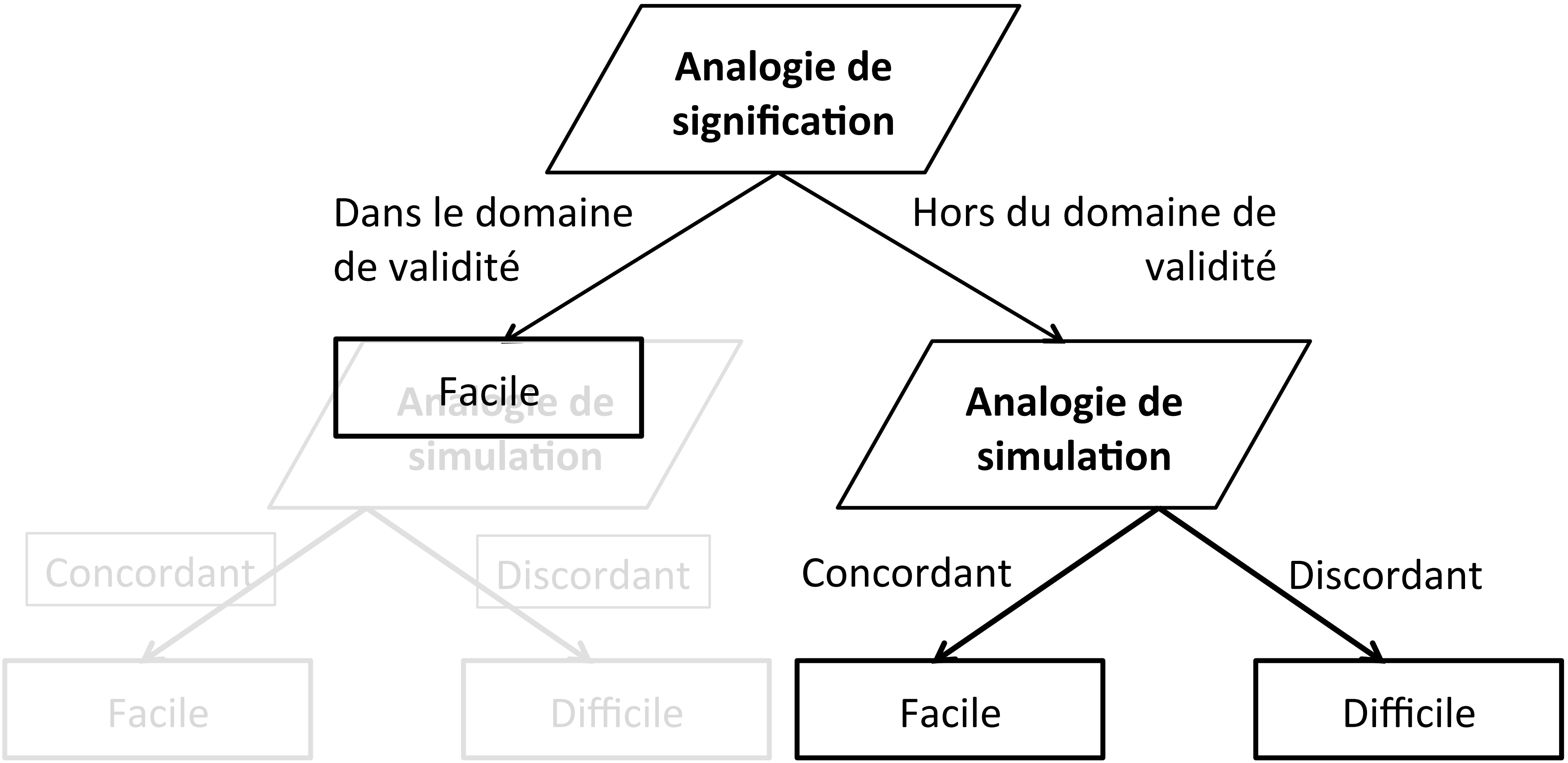
Gvozdic & Sander, under review

Item	1	2	3	4
Problème concordant	Dans le domaine de validité de la CI	Hors du domaine de validité de la CI	Dans le domaine de validité de la CI	Hors du domaine de validité de la CI
Problème discordant	Dans le domaine de validité de la CI	Dans le domaine de validité de la CI	Hors du domaine de validité de la CI	Hors du domaine de validité de la CI

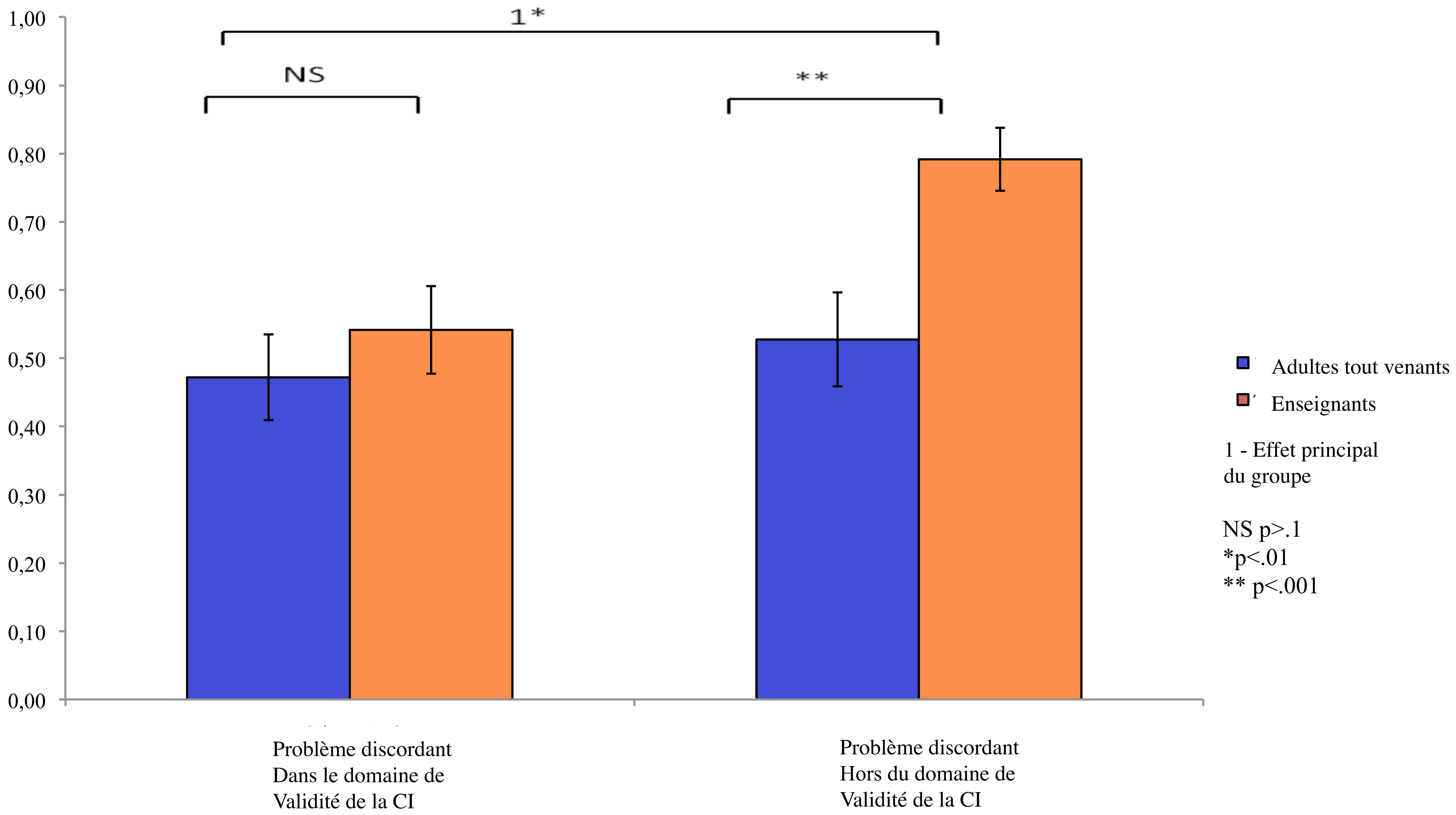
Gvozdic & Sander, under review



Gvozdic & Sander, under review



Gvozdic & Sander, under review



Gvozdic & Sander, under review

Au delà des analogies intuitives

Présence et persistance des analogies intuitives.

Les déceler est essentiel. Cela permet de comprendre des difficultés et des erreurs des élèves.

Enjeu pour les évaluations autour de la coïncidence entre l'énoncé d'évaluation le domaine de validité de l'analogie intuitive. La réussite a une portée différente selon le cas.

Le caractère limitant des analogies intuitives incite à élaborer des progressions d'apprentissage.

Fischbein, 1987 ; Lautrey, Sander, Rémi-Giraud & Tiberghien , 2008 ; Hofstadter & Sander, 2013

Des interventions pour développer les notions

Même lorsque deux situations relèvent de la même notion sur le plan mathématique, la perception d'une analogie entre elles ne va pas de soi pour l'élève.

Cela oriente vers des interventions destinées à susciter la perception de l'analogie.

Il s'agit d'intervenir pour faire relier. C'est l'enjeu du recodage sémantique.

Hofstadter & Sander, 2013 ; Sander & Richard, 2017 ; Sander, 2018

Le recodage sémantique

Le recodage sémantique fait apparaître la ressemblance profonde entre deux situations qui sont analogues sur le plan des notions disciplinaires, en dépit des différences sémantiques.

Son objet est de faire dépasser une compréhension spontanée (« intuitive »), fondée sur les seules connaissances quotidiennes.

Il consiste à attribuer à une situation des propriétés usuellement attribuées à une autre.

Il incite à faire abstraction des différences entre situations et de favoriser le développement d'une conception plus abstraite qui fonde l'analogie et relève de la notion mathématique.

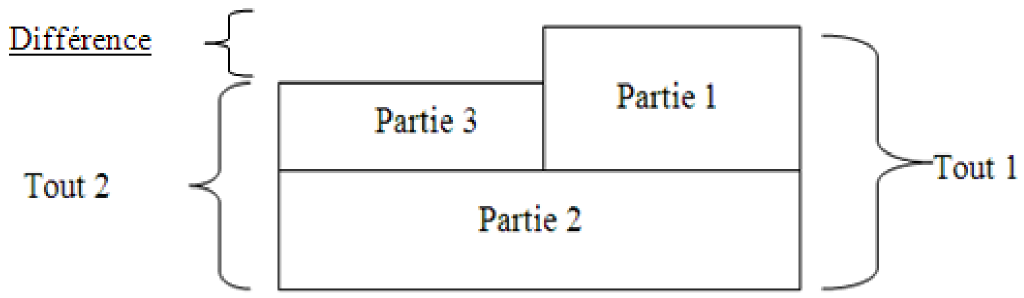
Hofstadter & Sander, 2013 ; Sander & Richard, 2017 ; Sander, 2018

Interventions par recodage sémantique

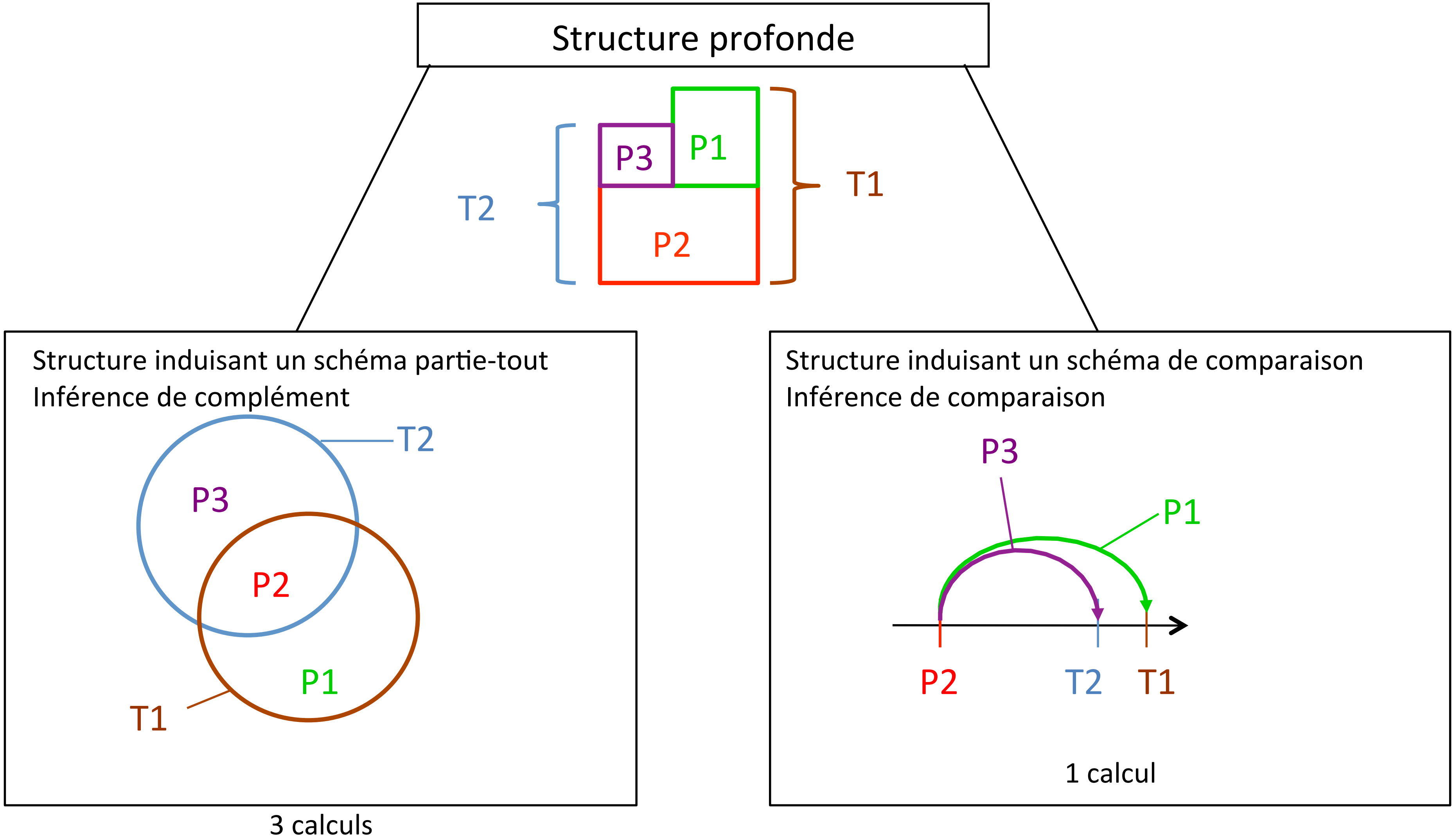
« Si deux ensembles ont une partie commune, leurs touts diffèrent comme leurs parties complémentaires »

ou encore

« L'écarts entre les touts se transpose à l'écart entre les parties »



Gamo, Taabane & Sander, 2011 ; Gamo, Nogry, Sander, 2014; ; Gros, Thibaut & Sander, 2015

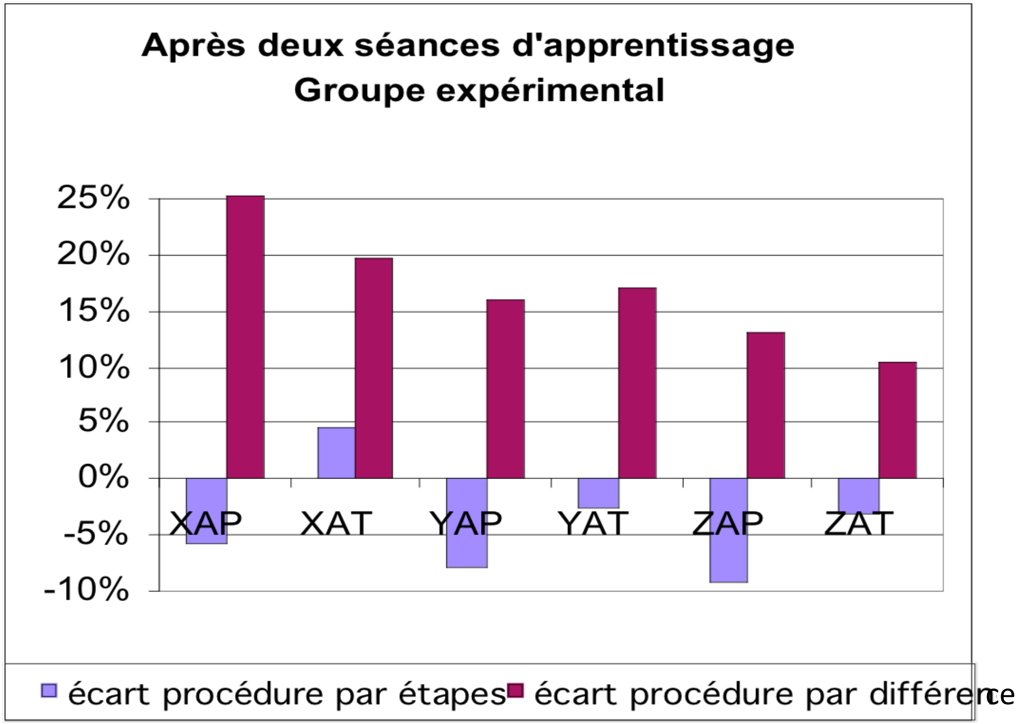


Le recodage d'un problème lu comme un problème de parties-tout en un problème de comparaison est fait par le moyen de l'inférence : comme la partie P2 est commune aux deux touts la différence entre les touts T1 et T2 est la même que la différence entre les parties P1 et P3, comme le montre le schéma.

Le recodage par comparaisons de situations

En s'appuyant sur des contenus adaptés, on peut faire acquérir à des élèves d'école primaire des points de vue « invisibles » à des adultes.

Un apprentissage fondé sur la recherche d'analogie entre situations peut favoriser un recodage sémantique



Mengue, Richard, Sander, 2015 Gamo, Sander & Richard, 2010

Recodage sémantique

Madame Durand achète dans une librairie pour chacun de ses 5 enfants, 3 stylos.
Combien de stylos achète-t-elle en tout ?

On demande de faire une addition.

Hofstadter & Sander, 2013 ; Sander & Richard, 2017 ; Sander, 2018

Recodage sémantique

Madame Durand achète dans une librairie pour chacun de ses 5 enfants, 3 stylos.
Combien de stylos achète-t-elle en tout ?

On demande de faire une addition.

3+3+3+3+3

Hofstadter & Sander, 2013 ; Sander & Richard, 2017 ; Sander, 2018

Recodage sémantique

Madame Durand achète dans une librairie pour chacun de ses 5 enfants, 3 stylos : 1 stylo rouge, 1 stylo bleu et un stylo vert. Combien de stylos achète-t-elle en tout ?

On demande de faire une addition.

3+3+3+3+3

Hofstadter & Sander, 2013 ; Sander & Richard, 2017 ; Sander, 2018

Recodage sémantique

Madame Durand achète dans une librairie pour chacun de ses 5 enfants, 3 stylos: 1 stylo rouge, 1 stylo bleu et un stylo vert. Combien de stylos achète-t-elle en tout ?

On demande de faire une addition.

3+3+3+3+3 MAIS AUSSI 5+5+5

Hofstadter & Sander, 2013 ; Sander & Richard, 2017 ; Sander, 2018

Recodage sémantique

Madame Durand achète dans une librairie pour chacun de ses 5 enfants, 3 stylos rouge, 6 stylos bleu et 4 stylos vert. Combien de stylos achète-t-elle en tout ?

5x3 + 5x6 + 5x4 MAIS AUSSI 5x(3+6+4)

Hofstadter & Sander, 2013 ; Sander & Richard, 2017 ; Sander, 2018

Recodage sémantique

Madame Durand achète dans une librairie pour chacun de ses 5 enfants, 3 stylos rouge, 6 stylos bleu et 4 stylos vert. Combien de stylos achète-t-elle en tout ?

5x3 + 5x6 + 5x4 MAIS AUSSI 5x(3+6+4)

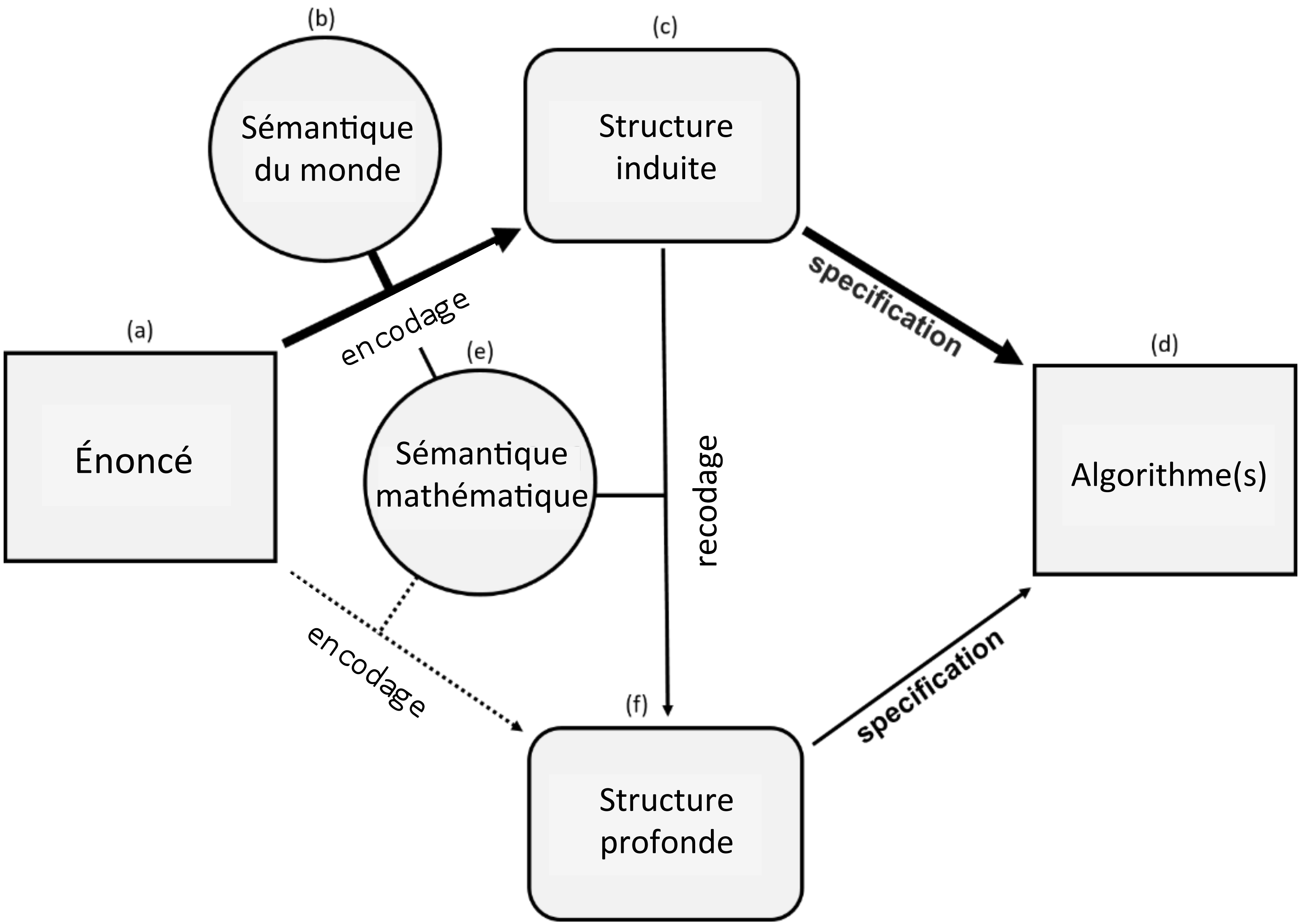
Il ne s'agit pas simplement de deux algorithmes concurrents mais de deux codages alternatifs d'une même situation qui conduisent à des stratégies distinctes.

Dans le premier cas, on privilégie le codage par couleur en procédant à l'addition successive des stylos de chaque couleur : 5x3 + 5x6 + 5x4

Dans le second cas, on privilégie le codage par objets en procédant d'abord à l'addition des types de stylo : 5x(3+6+4)

Hofstadter & Sander, 2013 ; Sander & Richard, 2017 ; Sander, 2018

La congruence sémantique au cœur de la résolution de problèmes



Gros, Thibaut & Sander (under review)

Conclusion

Trois formes d'analogies : Substitution, Scénario, Simulation

Trois configurations de congruence relativement indépendantes

Interaction dans les progressions d'apprentissage

Concerne l'élève et le maître

Réaffectations par recodages sémantiques de différentes natures

Conclusion

Les analogies intuitives forgent les interprétations initiales des notions.

Elles permettent de comprendre les erreurs et les difficultés des élèves et constituent une entrée pour le développement des notions.

Le recodage sémantique rend les élèves en mesure de percevoir des analogies qui fondent les notions.

Il favorise la perception d'analogies qui fondent les notions scolaires. Il peut guider un développement conceptuel des notions.

L'analogie comme nécessité incertaine mais féconde.

Audo, S., & Sander, E. (2008). Les sources de difficulté dans la résolution de problèmes de division. Congrès de la Société Française de Psychologie, Bordeaux, septembre 2008.

Brissiaud, R., & Sander, E. (2010). Arithmetic word problem solving: a Situation Strategy First Framework. Developmental Science, 13(1), 92-107.

Gamo, S., Nogry, S., & Sander, E. (2014). Réduire les effets de contenus en résolution de problèmes pour favoriser la construction d'une représentation alternative. Cahiers des Sciences de l'Education – Université de Liège (aSPe), 36, 35-65.

Gamo, S., Nogry, S., & Sander, E. (2014). Apprendre à résoudre des problèmes en favorisant la construction d'une représentation alternative chez des élèves scolarisés en éducation prioritaire. Psychologie Française, 59(3)

Gamo, S., Sander, E., & Richard, J-F. (2010). Transfer of strategies by semantic recoding in arithmetic problem solving. Learning and Instruction, 20, 400-410.

Gamo, S., Taabane L., & Sander, E. (2011). Rôle de la nature des variables dans la résolution de problèmes additifs complexes, L'Année psychologique, 111 (4), 613-640.

Gros, H., Thibaut, J-P., & Sander, E. (2015). Robustness of semantic encoding effects in a transfer task for multiple-strategy arithmetic problems. Proceedings of the 37th Annual Meeting of the Cognitive Science Society, Pasadena, California, USA, pp. 818-823.

Gros, H., Thibaut, J-P., & Sander, E. (2017). The nature of quantities influences the representation of arithmetic problems: evidence from drawings and solving procedures in children and adults. Proceedings of the 39th Annual Meeting of the Cognitive Science Society, London, UK

Gvozdic, K., & Sander, E. (2016). Persistence of intuitive strategies on word problems - extension of the Situation Strategy First framework. Budapest CEU Conference on Cognitive Development, Budapest, Hungary

Gvozdic, K., & Sander, E. (2017). Solving additive word problems: Intuitive strategies make the difference. . Proceedings of 39th Annual Meeting of the Cognitive Science Society, London, UK

Hofstadter, D., & Sander, E. (2013). L'Analogie : cœur de la pensée. Paris, Odile Jacob.

Lautrey, J., Rémi-Giraud, S., Sander, E., & Tiberghien, A. (2008). Les connaissances naïves. Paris, Armand Colin.

de Longuemar, G., Sander, E. (2016). Learning to overcome inadequate intuitive strategies in arithmetic word problem solving. Communication affichée présentée à la Budapest CEU Conference on Cognitive Development, Budapest; 01/2016

Mengue,E. Richard, J-F & Sander, E. (2015). Classification des problèmes additifs : statut intermédiaire de la transformation relativement au complément et à la comparaison. L'Année psychologique, 116(1), 1-28.

Sander, E. (2007). Manipuler l'habillage d'un problème pour évaluer les apprentissages, Bulletin de psychologie, 60, 119-124.

Sander, E. (2008). Les connaissances naïves en mathématiques. Dans J. Lautrey, S. Rémi-Giraud, E. Sander et A. Tiberghien, Les connaissances naïves (pp. 57-102). Paris, Armand Colin.

Sander, E. (2016) : Le rôle de l'analogie en mathématiques. Tangente Hors Série N°55, 44-49.

Sander, E. (2016). Enjeux sémantiques pour les apprentissages arihtmétiques. Bulletin de Psychologie, 69(6), 463-469.

Sander, E. (2017). Le développement conceptuel. Dans R. Miljkovitch, F. Morange-Majoux et E. Sander (Dir.). Psychologie du développement (pp. 107-116). Masson, Paris

Sander, E. (2017). Les connaissances issues de la vie quotidienne et les apprentissages scolaires. Dans R. Miljkovitch, F. Morange-Majoux et E. Sander (Dir.). Psychologie du développement (pp. 217-226). Masson, Paris

Sander, E., & Fort, C. (2014). Semantic ambiguity as basis for promoting learning in the case of arithmetic problem solving. Proceedings of ICAP 2014, 28th international congress of applied psychology, 8-13 July 2014, Paris.

Sander, E., & Richard, J-F. (2005). Analogy and transfer: encoding the problem at the right level of abstraction. Proceedings of the 27th Annual Conference of the Cognitive Science Society, Stresa, Italy, pp. 1925-1930.

Sander, E., & Richard, J-F. (2017). Les apprentissages numériques. Dans R. Miljkovitch, F. Morange-Majoux et E. Sander (Dir.). Psychologie du Développement (pp. 251-258). Paris : Masson.

Scheibling-Sève, C., Sander, E. & Pasquinelli, E. (2017). A recategorization method to improve pupils' cognitive flexibility. Budapest CEU Conference on Cognitive Development. Budapest, Hongrie, 6-8 janvier.