

LA CONGRUENCE SÉMANTIQUE AU CŒUR DES APPRENTISSAGES ARITHMÉTIQUES

INFÉRENCES ET INTERFÉRENCES

FACULTÉ DE PSYCHOLOGIE
ET DES SCIENCES DE L'ÉDUCATION



LA RÉOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES

- Un enjeu éducatif majeur
 - Apprentissage à tous les niveaux d'éducation (Daroczy et al., 2015)
 - De nombreuses difficultés reportées dans leur résolution (Verschaffel et al., 1992)
- Qu'est-ce que résoudre un problème arithmétique à énoncé verbal ?
 - Comprendre un texte ? ✗
 - Effectuer une suite de calculs ? ✗
 - Une activité plus complexe (Riley, Greeno & Heller, 1983) ... ✓
- L'étude des problèmes isomorphes
 - Même structure mathématique = même difficulté ?
 - Quels mécanismes interprétatifs ?
 - Quels outils théoriques pour les appréhender ?



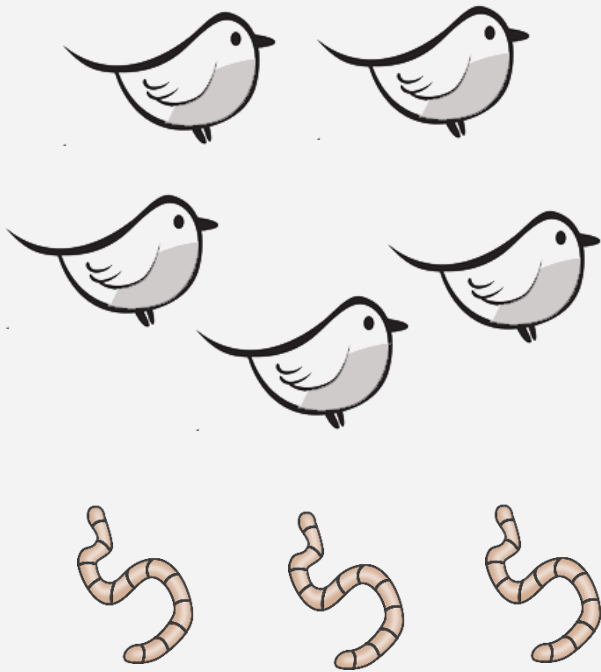
LA RÉOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES

Quels effets ?



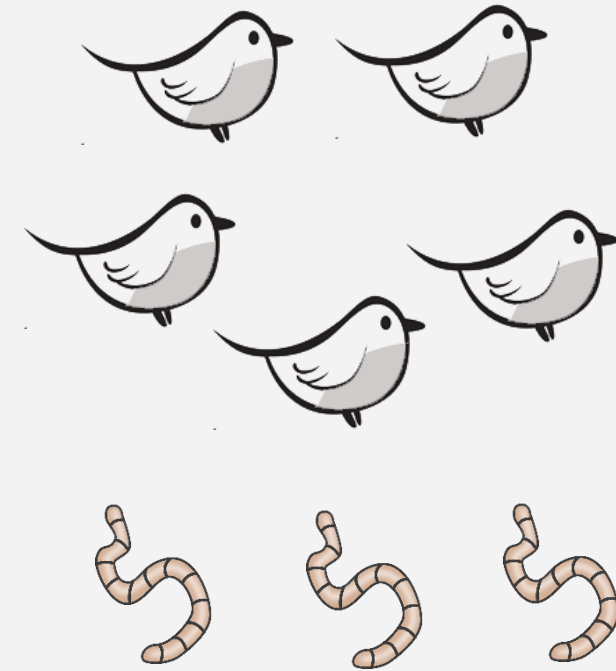
LA RÉOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES

Rôle de la formulation :



“Combien y a-t-il d’oiseaux de plus que de vers?”
25% de réussite.

Hudson, 1983

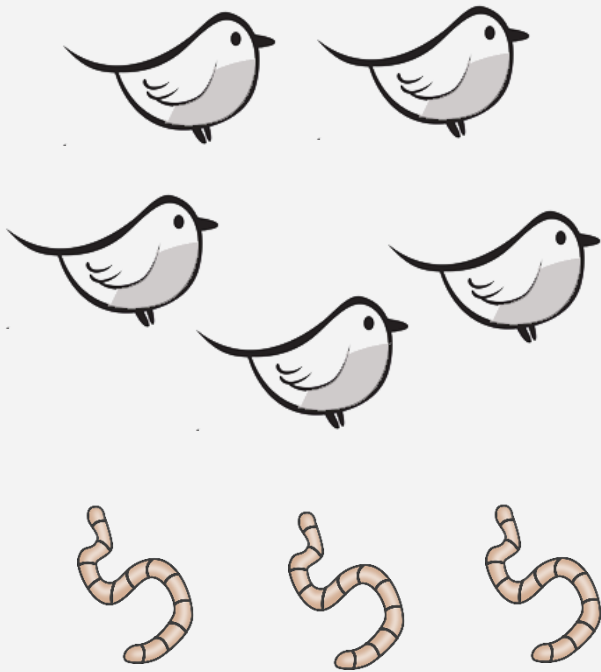


“Combien d’oiseaux n’auront pas de vers ?



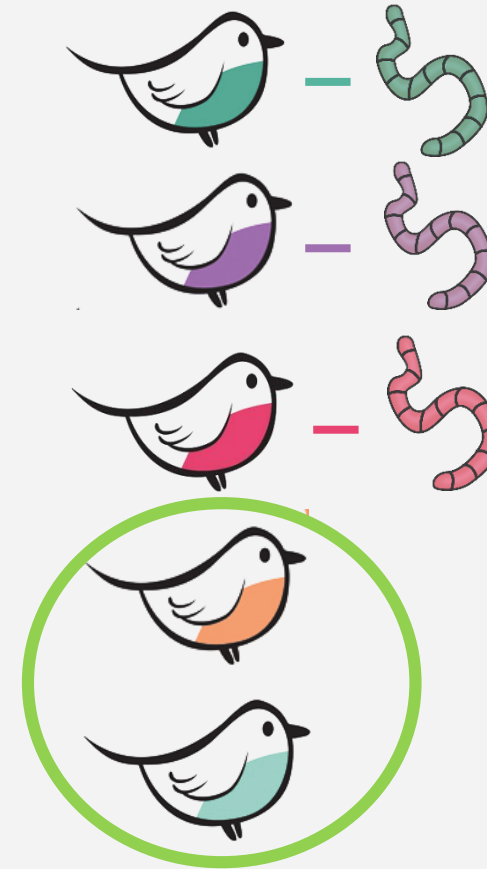
LA RÉOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES

Rôle de la formulation :



“Combien y a-t-il d’oiseaux de plus que de vers?”
25% de réussite.

Hudson, 1983

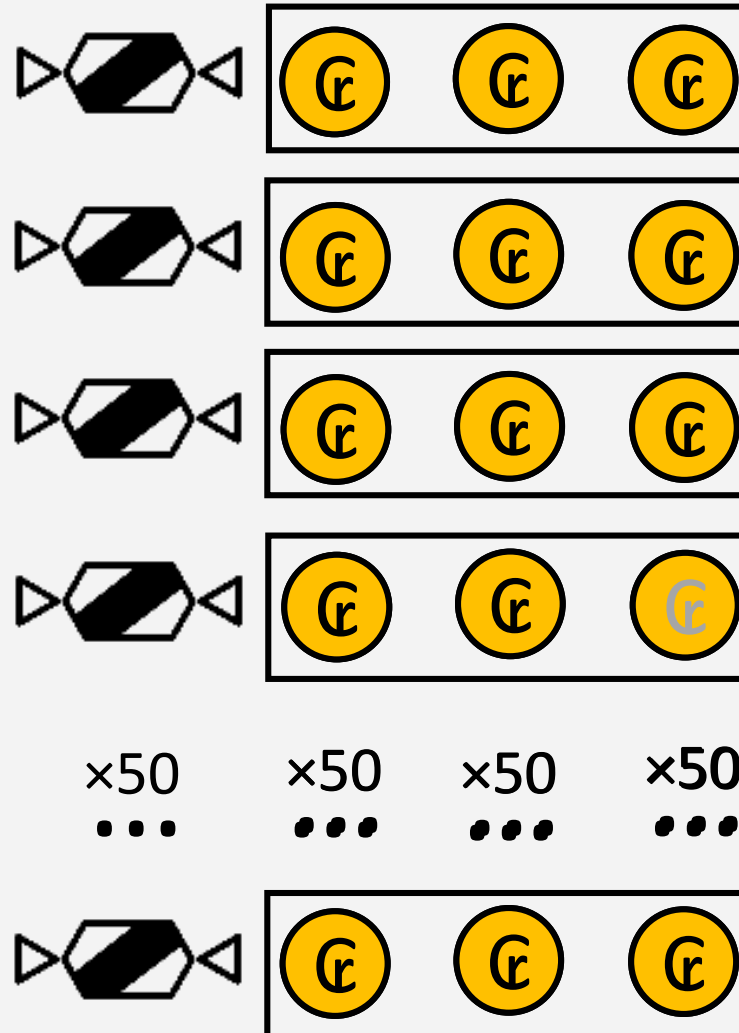


“Combien d’oiseaux n’auront pas de vers ?
96% de réussite.



LA RÉOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES

Ordre des valeurs :



“Combien coûtent 50 chocolats à 3 cruzeiros chacun ?”

0 %

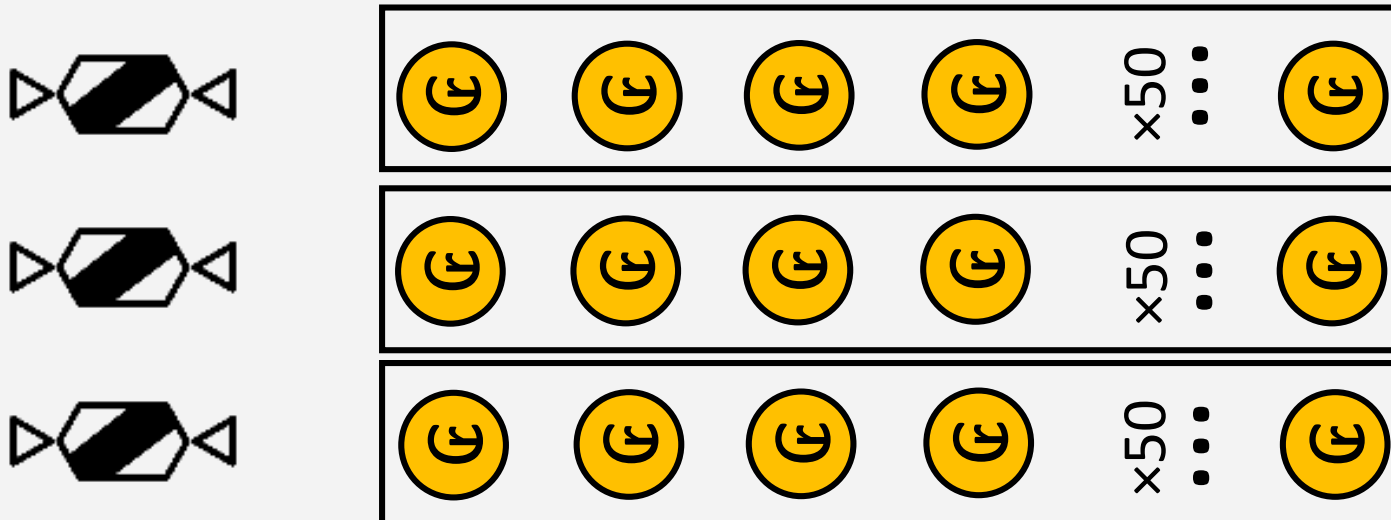
Schliemann et al. (1998)



LA RÉOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES

Ordre des valeurs :

“Combien coûtent 3 chocolats à 50
cruzeiros chacun ?”



33 %

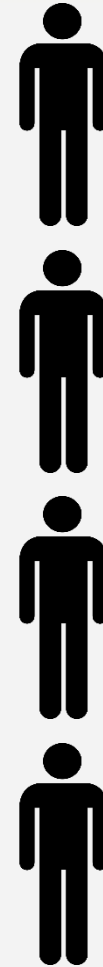


LA RÉOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES

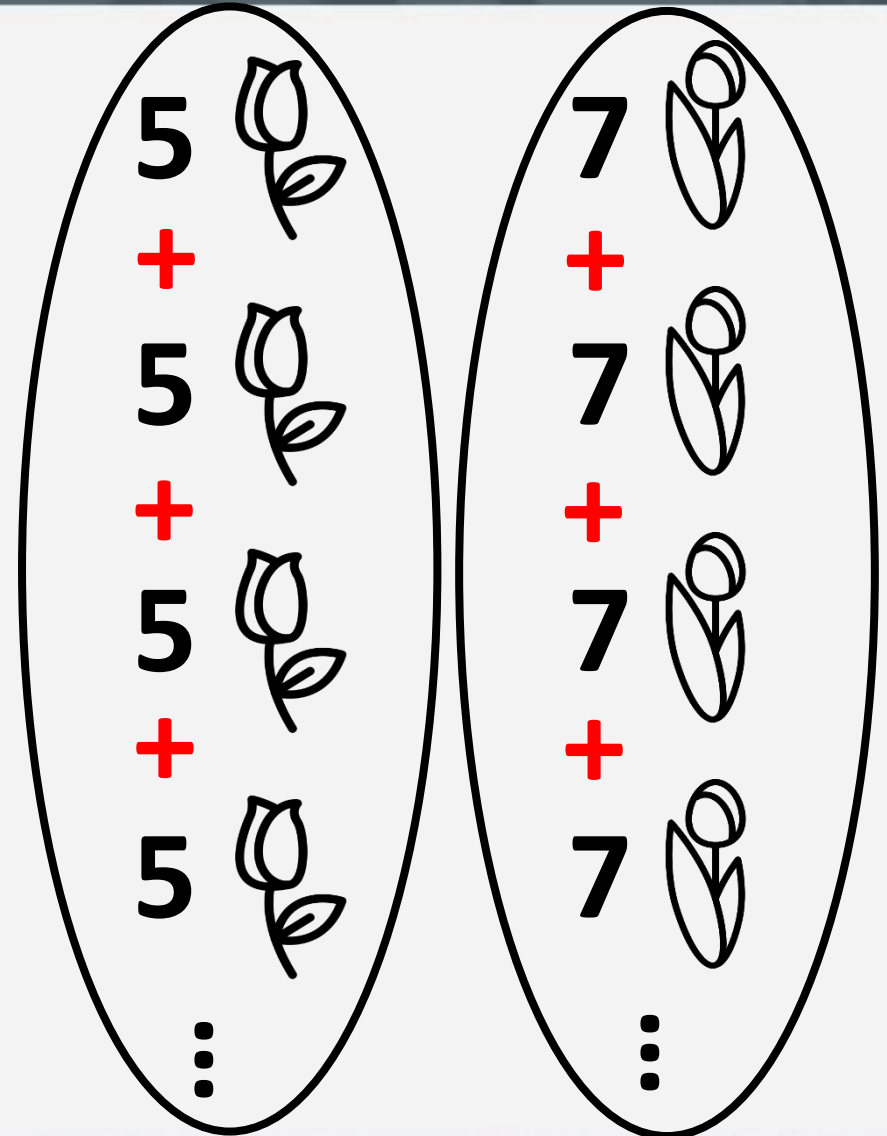
Présence d'un élément structurant :

“Pour un concours, le fleuriste prépare pour chaque candidat 5 roses et 7 tulipes. De combien de fleurs a-t-il besoin en tout ?”

$$(14 \times 5) + (14 \times 7) = 168$$



x14 :



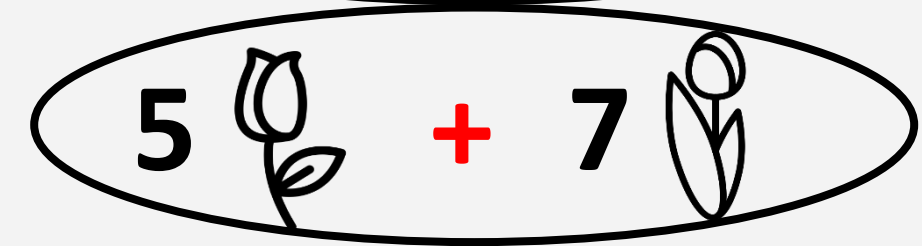
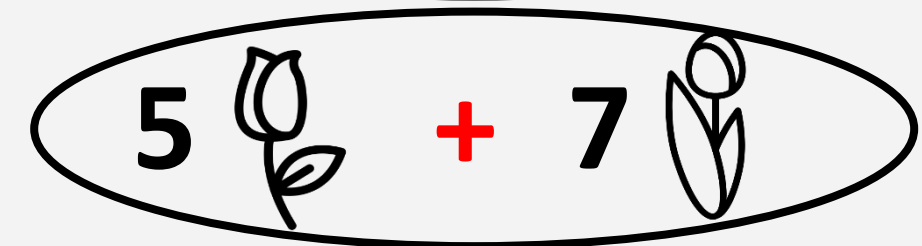
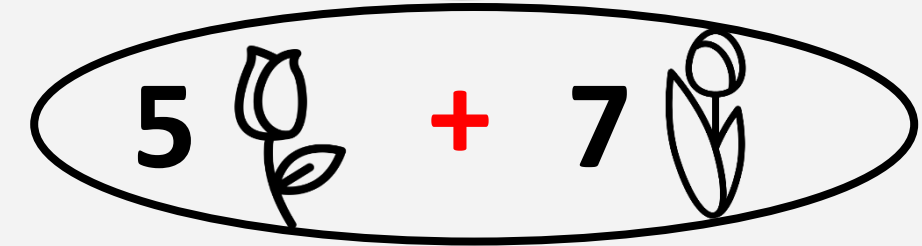
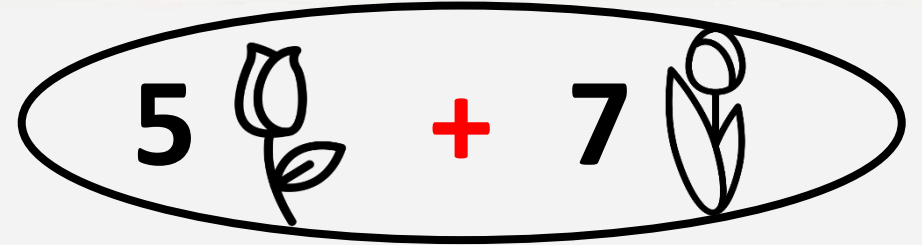


LA RÉOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES

Présence d'un élément structurant :

“Pour un concours, le fleuriste prépare pour chaque candidat **un bouquet constitué de** 5 roses et de 7 tulipes. De combien de fleurs a-t-il besoin en tout ?”

$$14 \times (5+7) = 168$$



x14 :

:

:

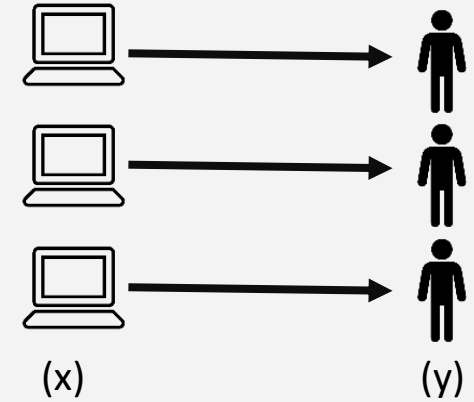
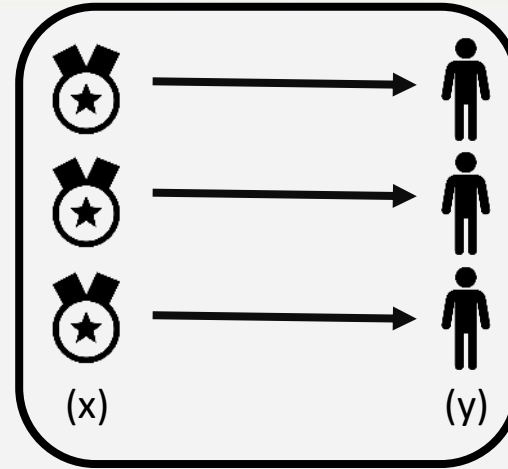


LA RÉOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES

Relations sémantiques entre les éléments présents dans les problèmes

→ Entraînement :

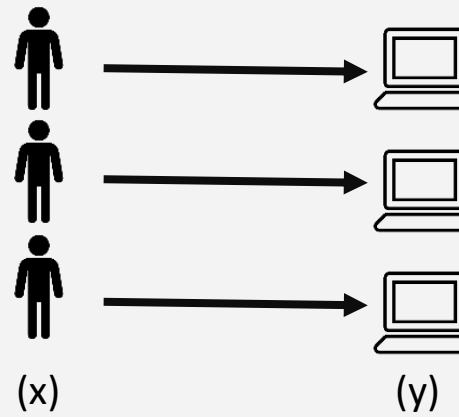
- Assignation objets → individus



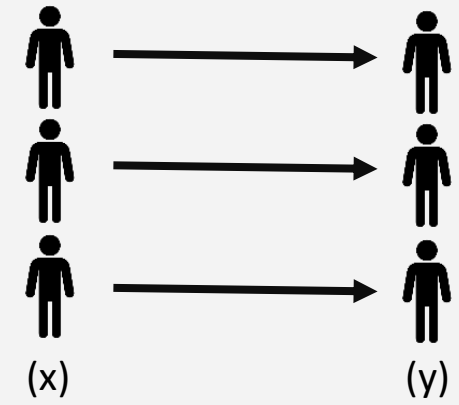
89 % de succès

→ Transfert :

- Assignation objets → individus ✓
- Assignation individus → objets ✗
- Assignation individus → individus ~



0 % de succès

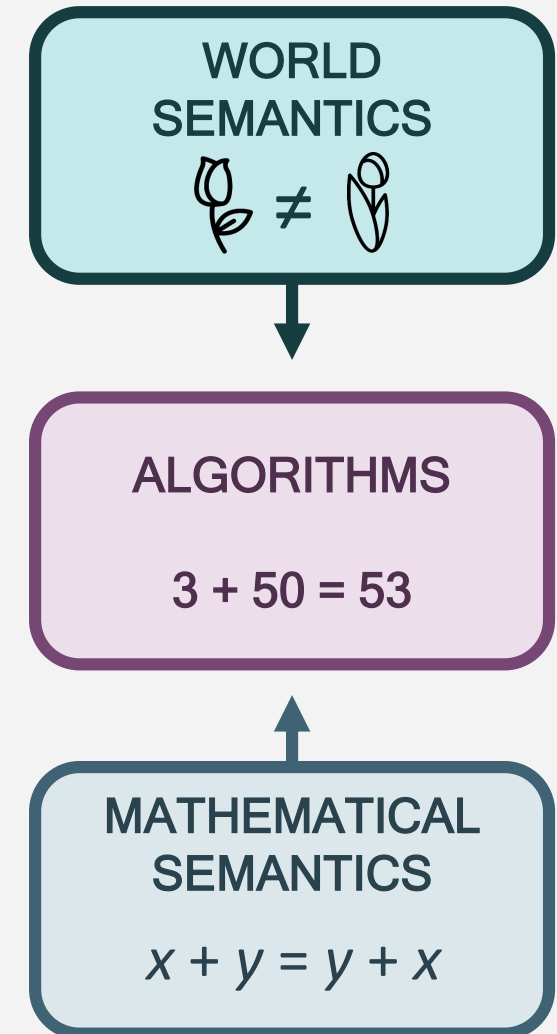


60 % de succès



LA RÉOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES

- Résoudre un problème \neq lire un texte ou résoudre une équation
- Il existe des effets interprétatifs forts
- Les connaissances sur le monde semblent avoir une influence particulière
- Les interactions entre les connaissances sur le monde (*World Semantics*) et les connaissances mathématiques (*Mathematical Semantics*) pourraient expliquer les effets observés.





LA RÉOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES

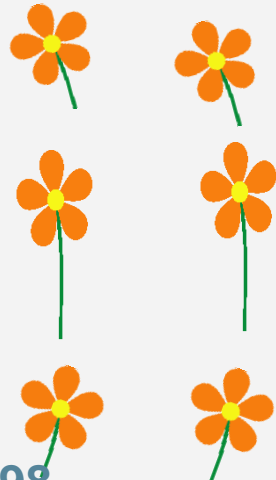
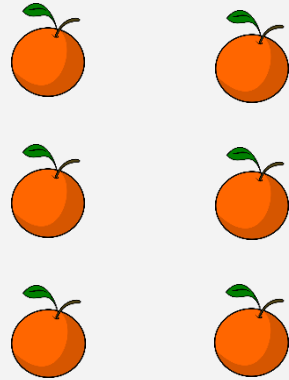
Nécessité d'une théorie unifiée pour rendre compte des effets observés

- **Théorie des schémas** (Kintsch & Greeno, 1985; Rumelhart, 1980)
 - Postule que des structures de données sont créées, stockées puis utilisées pour résoudre les problèmes arithmétiques
 - Ne rend pas compte des différences de performances entre problèmes isomorphes
- **Théorie des modèles mentaux** (Johnson-Laird, 1983, Van Dijk & Kintsch, 1983)
 - Postule qu'un modèle analogue à la situation décrite est construit
 - Ne prend pas en compte les effets de contenu
- **La congruence sémantique** : pour une prise en compte des interactions entre Connaissances sur le monde et connaissances mathématiques.



LA CONGRUENCE SÉMANTIQUE

Les connaissances sur les éléments influencent les représentations des problèmes



Bassok, Chase, Martin, 1998



LA CONGRUENCE SÉMANTIQUE

Les connaissances sur les éléments influencent les représentations des problèmes

Analyse de manuels (Eicholz, O'Daffer, Fleener, Charles, Young & Barnett, 1987) de 1P à 8P :

- 97% d'additions avec des éléments « congruents »
- 94% de divisions avec des éléments « congruents »

Bassok, Chase, Martin, 1998

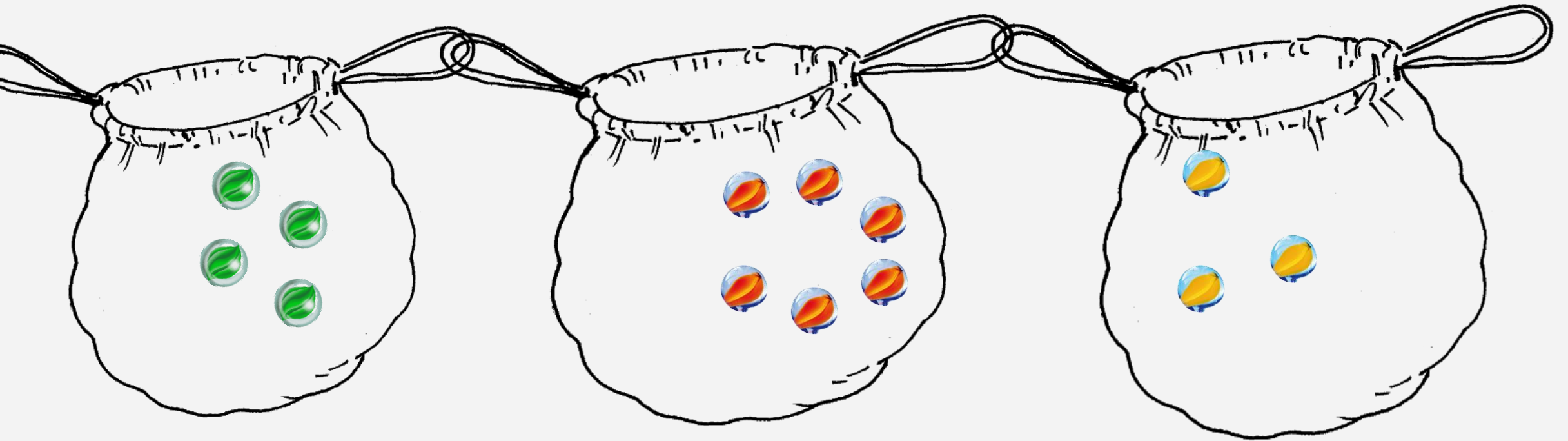


LA CONGRUENCE SÉMANTIQUE

- Il existerait des **dimensions sémantiques générales** influençant l'encodage des énoncés.
- Parmi celles-ci :
 - Caractère symétrique / asymétrique d'une relation (Bassok et al., 1995)
 - Nature continue ou discrète d'un changement (Bassok & Olseth, 1995)
 - Distinction contenu / contenant (Bassok et al., 1998)
 - Distinction situations **cardinales** / **ordinales** (Gamo, Sander & Richard, 2010)

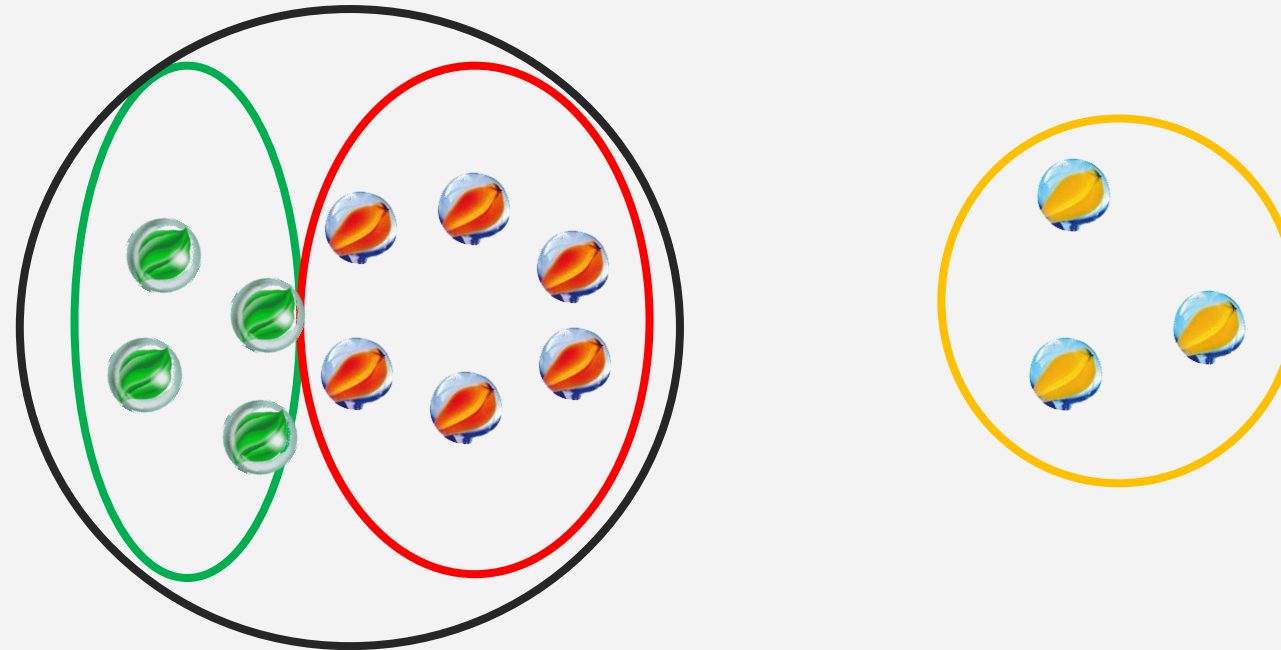


SITUATIONS CARDINALES



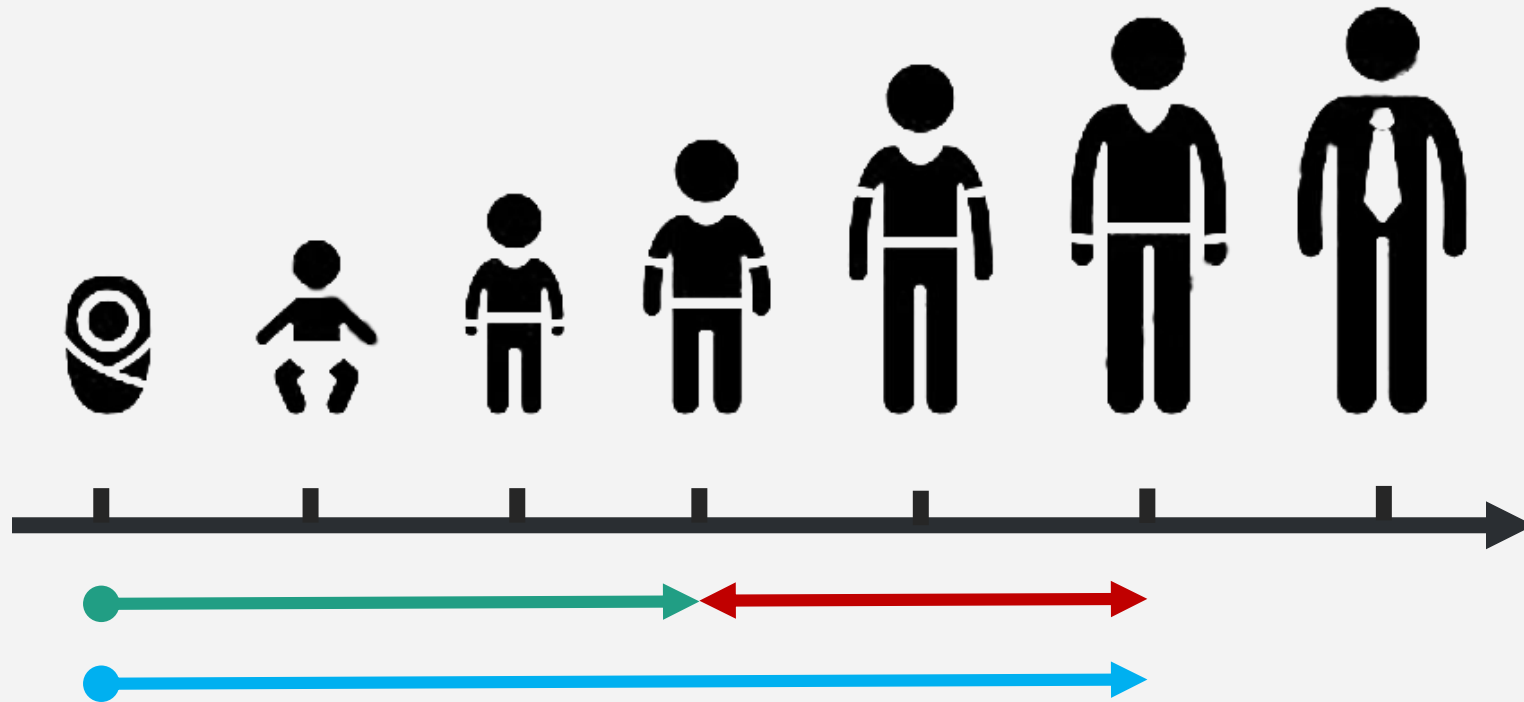


SITUATIONS CARDINALES





SITUATIONS ORDINALES





UN PROBLÈME CARDINAL

PARTIE 1

Mehdi a 8 billes rouges.

PARTIE 2

Il a aussi des billes bleues.

TOUT 1

En tout, Mehdi a 11 billes.

PARTIE 2

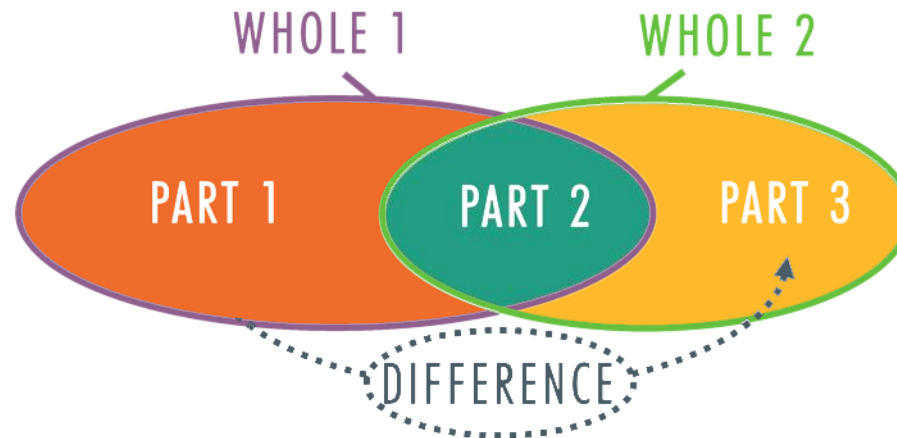
Charlène a autant de billes bleues que Mehdi, et des billes jaunes.

PARTIE 3

& **DIFFERENCE** Charlène a 2 billes jaunes de moins que Mehdi n'a de billes rouges.

TOUT 2

En tout, combien Charlène a-t-elle de billes ?



Solution en 3 étapes :

$$\begin{aligned} 11 - 8 &= 3 \\ 8 - 2 &= 6 \\ 3 + 6 &= 9 \end{aligned}$$



UN PROBLÈME ORDINAL

PARTIE 1 Tom a suivi des leçons de piano pendant 8 ans.

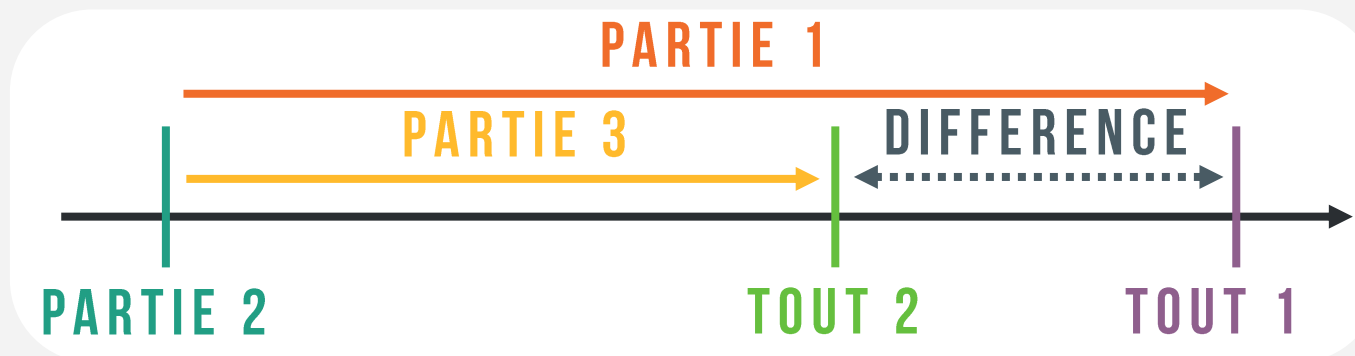
PARTIE 2 Tom avait commencé ses leçons à un certain âge.

TOUT 1 Tom a arrêté de suivre des leçons de piano à l'âge de 11 ans.

PARTIE 2 Tom et Lucie avaient commencé à suivre des leçons de piano au même âge.

PARTIE 3 & **DIFFERENCE** Lucy a suivi des leçons de piano durant 2 ans de moins que Tom.

TOUT 2 À quel âge Lucie a-t-elle arrêté de suivre des leçons de piano ?



Solution en 1 étape :

$$11 - 2 = 9$$

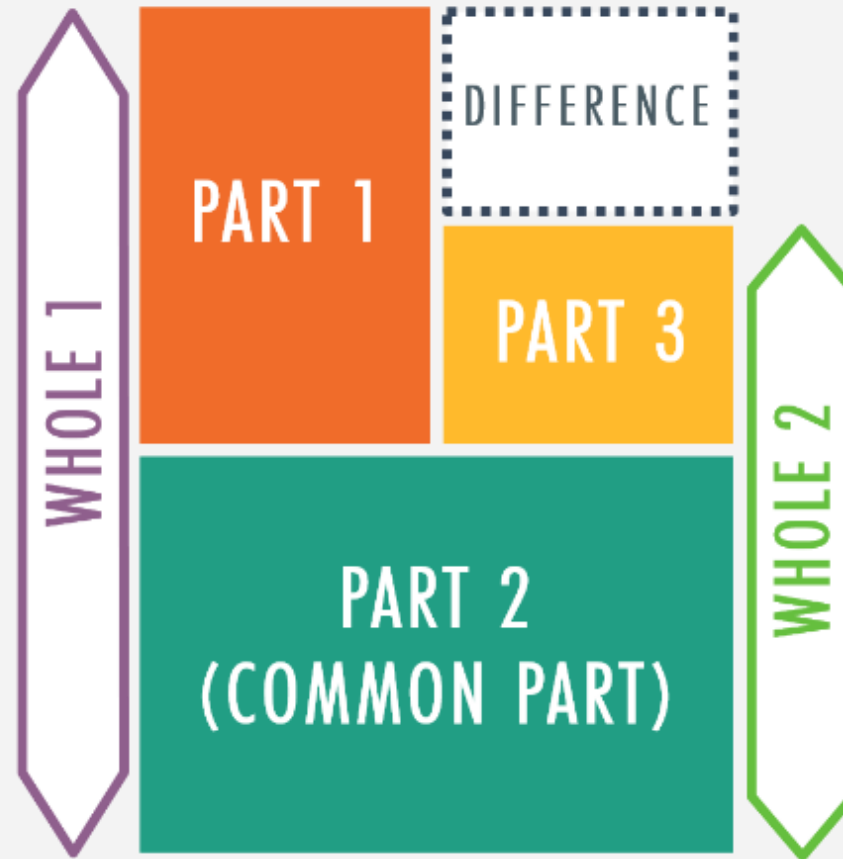


LA CONGRUENCE SÉMANTIQUE

Quelles justifications empiriques ?



COMMENT ÉVALUER LA DISTINCTION CARDINAL / ORDINAL?





COMMENT ÉVALUER LA DISTINCTION CARDINAL / ORDINAL?

- ➔ Expérience de classification de problèmes
 - ✿ 109 participants adultes ($M = 22,3$ ans, $SD = 8,2$ ans)
 - ✿ 12 problèmes isomorphes :
 - ✿ 2 Problèmes de nombre d'éléments
 - ✿ 2 Problèmes de poids
 - ✿ 2 Problèmes de prix
 - ✿ 2 Problèmes de Nombre d'étages
 - ✿ 2 Problèmes de Durée
 - ✿ 2 Problèmes de Hauteur
 - ✿ « Classez les problèmes en fonction de leur principe de solution. Faites autant de catégories que vous le souhaitez. »
 - ✿ Analyses : matrice de proximité, *hierarchical clustering*



COMMENT ÉVALUER LA DISTINCTION CARDINAL / ORDINAL?

→ Expérience de classification de problèmes

			Weight problems		Cardinal problems				Duration problems		Ordinal problems			
			context 1	context 2	Price problems		No. of elements problems		context 1	context 2	Height problems		No. of floors problems	
			context 1	context 2	context 1	context 2	context 1	context 2	context 1	context 2	context 1	context 2	context 1	context 2
Cardinal problems	Weight problems	context 1	-	0.95	0.90	0.89	0.88	0.86	0.79	0.76	0.78	0.78	0.75	0.76
		context 2	0.95	-	0.87	0.94	0.90	0.89	0.75	0.74	0.75	0.75	0.72	0.72
	Price problems	context 1	0.90	0.87	-	0.91	0.90	0.86	0.76	0.75	0.77	0.77	0.77	0.78
		context 2	0.89	0.94	0.91	-	0.87	0.89	0.75	0.76	0.76	0.74	0.74	0.74
	No. of elem. problems	context 1	0.88	0.90	0.90	0.87	-	0.95	0.74	0.71	0.74	0.74	0.74	0.75
		context 2	0.86	0.89	0.86	0.89	0.95	-	0.75	0.73	0.76	0.72	0.74	0.74
Ordinal problems	Duration problems	context 1	0.79	0.75	0.76	0.75	0.74	0.75	-	0.95	0.86	0.87	0.89	0.89
		context 2	0.76	0.74	0.75	0.76	0.71	0.73	0.95	-	0.87	0.88	0.91	0.91
	Height problems	context 1	0.78	0.75	0.77	0.76	0.74	0.76	0.86	0.87	-	0.95	0.92	0.93
		context 2	0.78	0.75	0.77	0.74	0.74	0.72	0.87	0.88	0.95	-	0.91	0.91
	No. of floors problems	context 1	0.75	0.72	0.77	0.74	0.74	0.74	0.89	0.91	0.92	0.91	-	1.00
		context 2	0.76	0.72	0.78	0.74	0.75	0.74	0.89	0.91	0.93	0.91	1.00	-





COMMENT ÉVALUER LA DISTINCTION CARDINAL / ORDINAL?

→ Expérience de classification de problèmes

Durée

Prix

Distance

Poids

Nb. étages

Nb. éléments

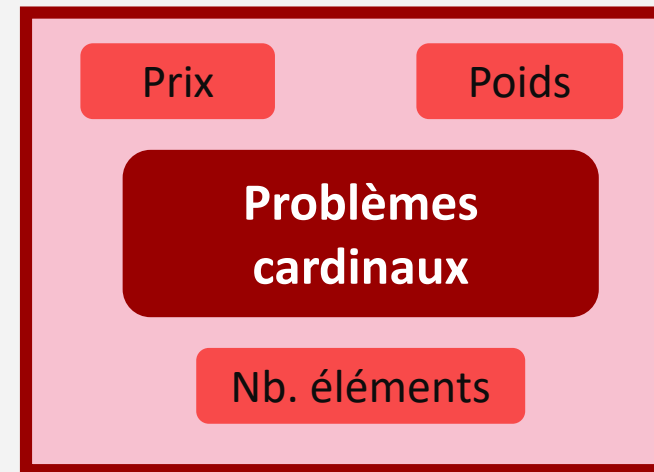
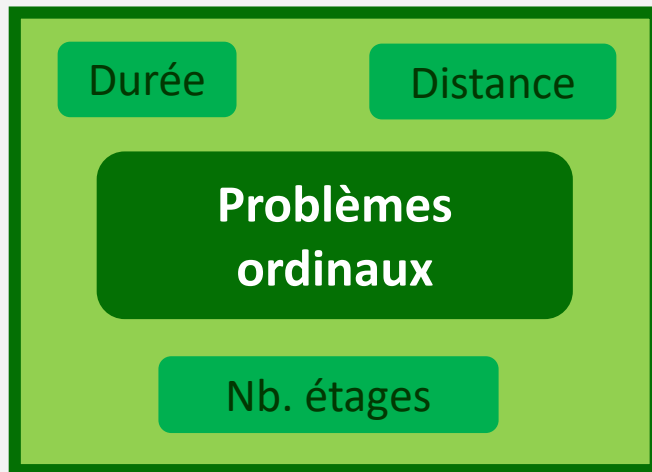
**Problèmes
ordinaux**

**Problèmes
cardinaux**



COMMENT ÉVALUER LA DISTINCTION CARDINAL / ORDINAL?

→ Expérience de classification de problèmes

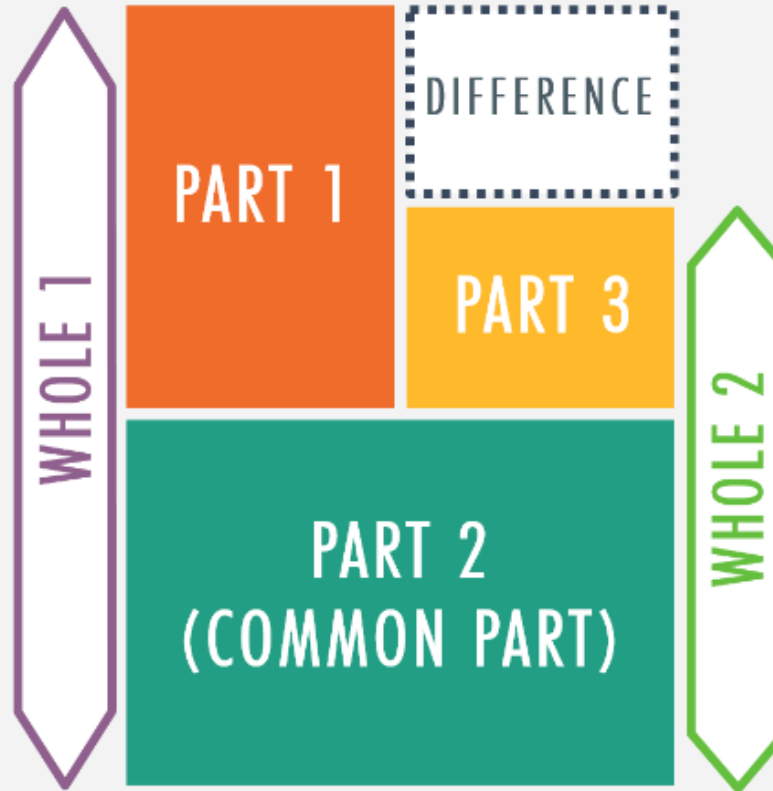




COMMENT ÉVALUER LA DISTINCTION CARDINAL / ORDINAL?

CARDINAL QUANTITIES

- number of elements
- price
- weight



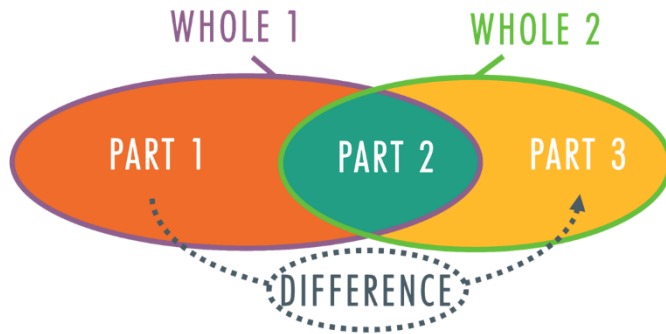
ORDINAL QUANTITIES

- duration
- distance
- number of floors

CARDINAL PROBLEMS

- PART 1** Tom has x red marbles.
- PART 2** Tom also has blue marbles.
- WHOLE 1** Tom has y marbles in total.
- PART 2** Tom and Lucy have the same amount of blue marbles.
- PART 3** Lucy has z red marbles less than Tom.
- WHOLE 2** How many marbles does Lucy have in total?

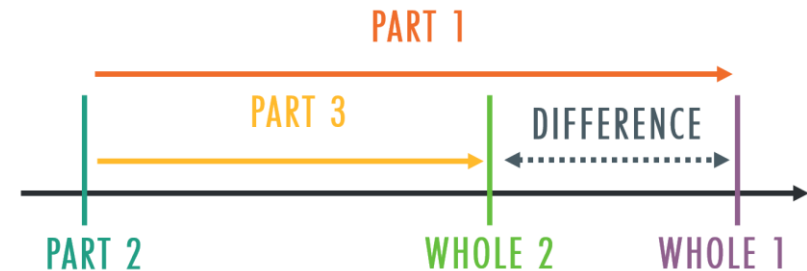
CARDINAL REPRESENTATION



ORDINAL PROBLEMS

- PART 1** Tom took painting classes for x years.
- PART 2** Tom started taking painting classes at a specific age.
- WHOLE 1** Tom stopped taking classes at the age of y .
- PART 2** Lucy started taking painting classes at the same age as Tom.
- PART 3** Lucy took painting classes during z years less than Tom.
- WHOLE 2** At what age did Lucy stop her lessons?

ORDINAL REPRESENTATION





COMMENT ÉVALUER LE RÔLE DES REPRÉSENTATIONS ?



Population

- 59 enfants (5P, $M = 11,0$ ans, $SD = 0,36$ ans)
- 52 adults ($M = 26,9$ ans, $SD = 9,7$ ans)



Problèmes

- 6 problèmes cardinaux
- 6 problèmes ordinaux



Tâches

- « Tentez de résoudre les problèmes en faisant le moins d'opérations possible. »
- « Faites un dessin qui pourrait aider quelqu'un d'autre à trouver la solution. »



Hypothèses

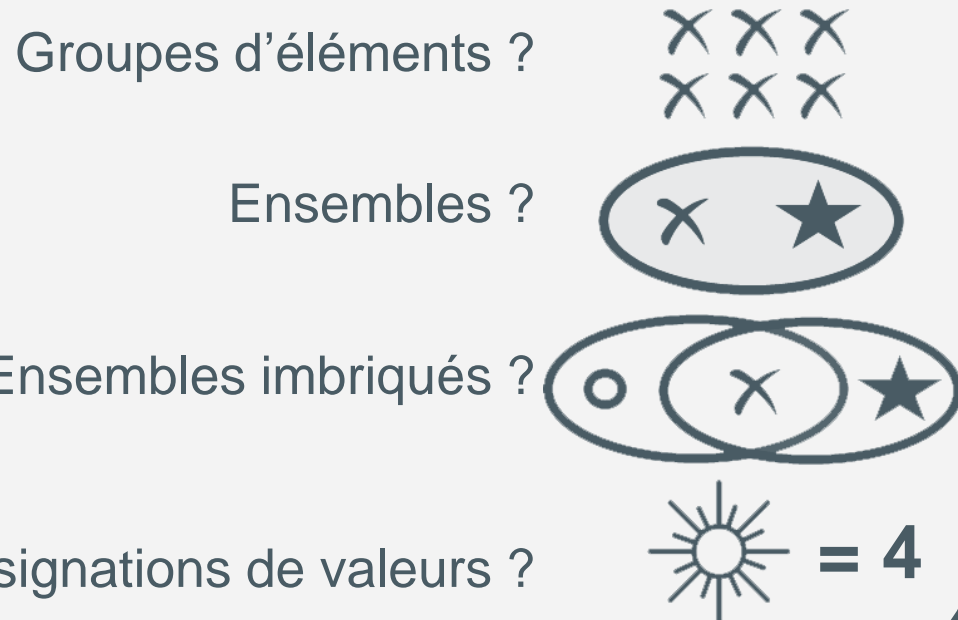
- Les schémas vont dépendre de la nature des problèmes utilisés
- Les stratégies de résolution vont dépendre de la nature des problèmes utilisés



COMMENT ÉVALUER LE RÔLE DES REPRÉSENTATIONS ?

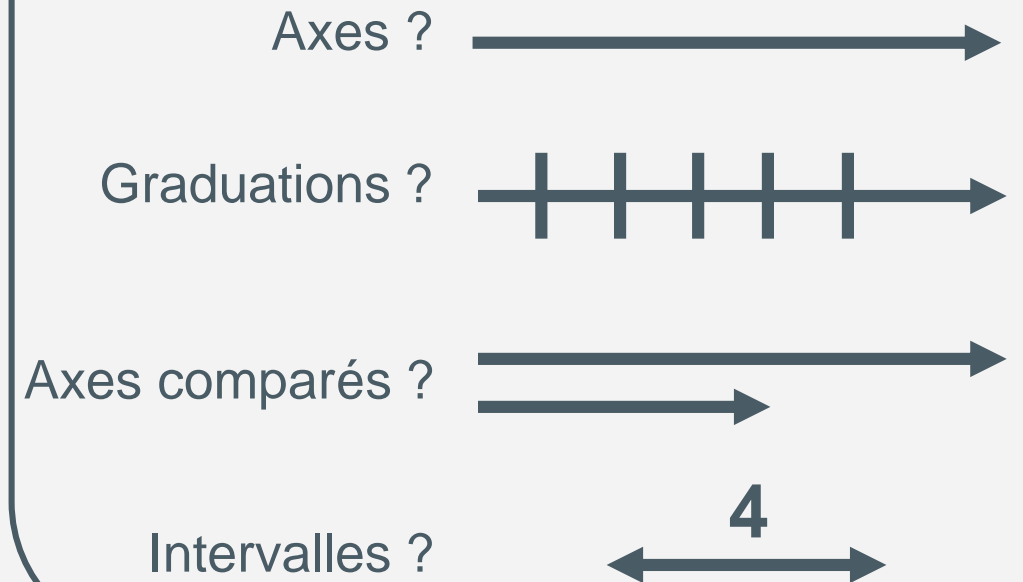
Codage en double aveugle : « Y a-t-il... »

Des traits cardinaux ?



— 1

Des traits ordinaux ?

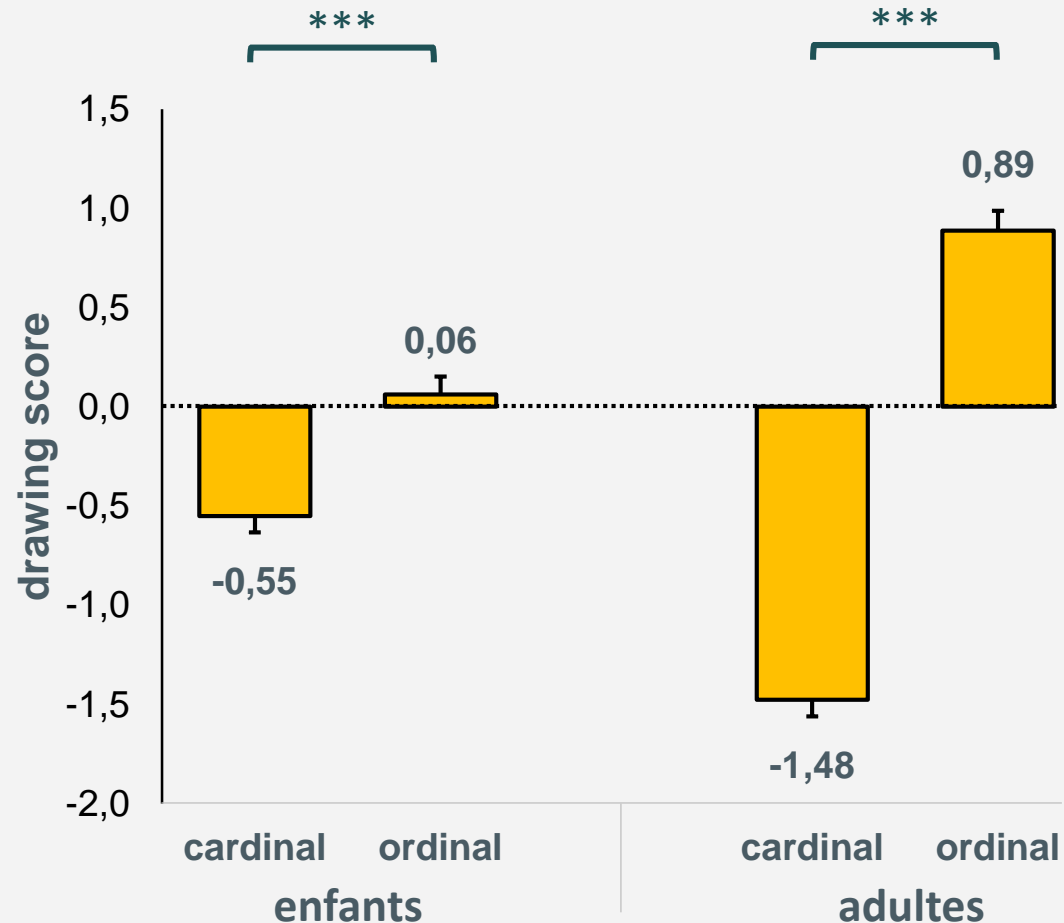


score :

+ 1



COMMENT ÉVALUER LE RÔLE DES REPRÉSENTATIONS ?

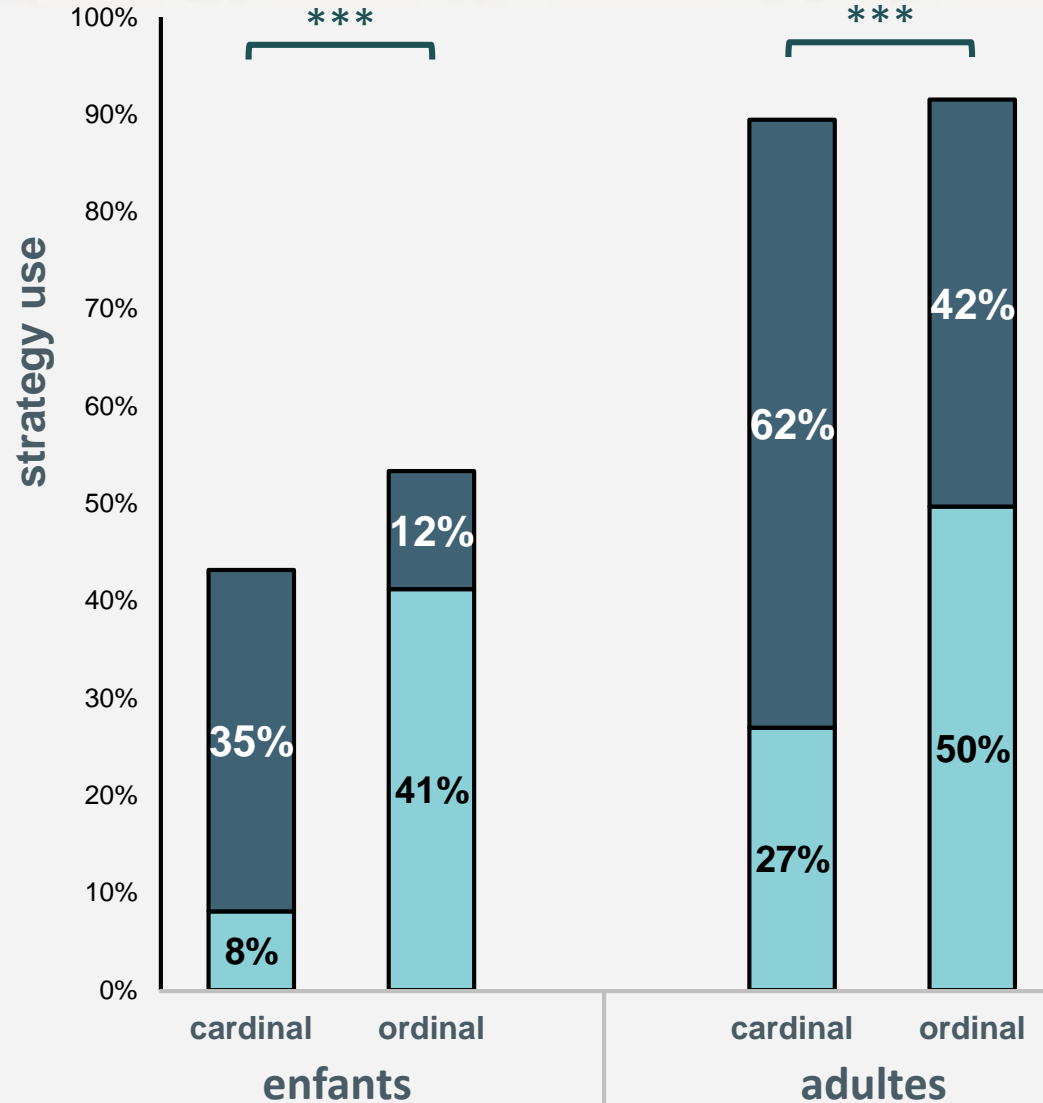


Enfants : $t(58) = 5.61, p < .001$, paired t-test

Adultes : $t(51) = 12.44, p < .001$, paired t-test



COMMENT ÉVALUER LE RÔLE DES REPRÉSENTATIONS ?



Enfants : $t(58) = 8.36, p < .001$, paired t-test

Adultes : $t(51) = 4.99, p < .001$, paired t-test

- Stratégie en 1 étape
- Stratégie en 3 étapes

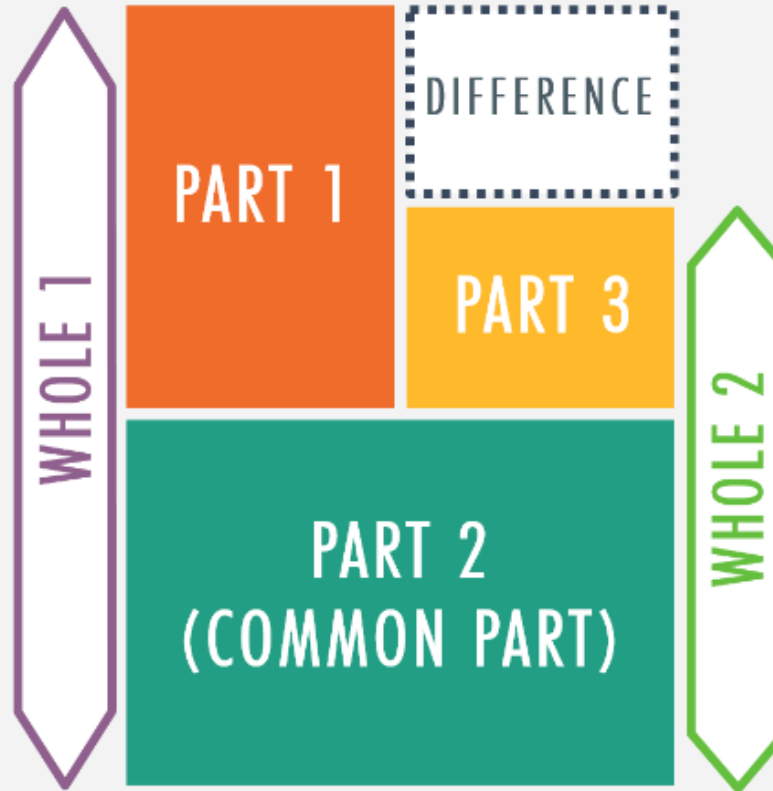


LA CONGRUENCE SÉMANTIQUE

NOS PRINCIPAUX OUTILS EXPÉRIMENTAUX

CARDINAL QUANTITIES

- number of elements
- price
- weight



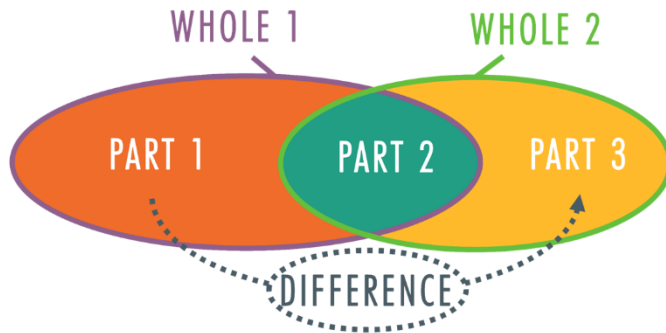
ORDINAL QUANTITIES

- duration
- distance
- number of floors

CARDINAL PROBLEMS

- PART 1** Tom has x red marbles.
- PART 2** Tom also has blue marbles.
- WHOLE 1** Tom has y marbles in total.
- PART 2** Tom and Lucy have the same amount of blue marbles.
- PART 3** Lucy has z red marbles less than Tom.
- WHOLE 2** How many marbles does Lucy have in total?

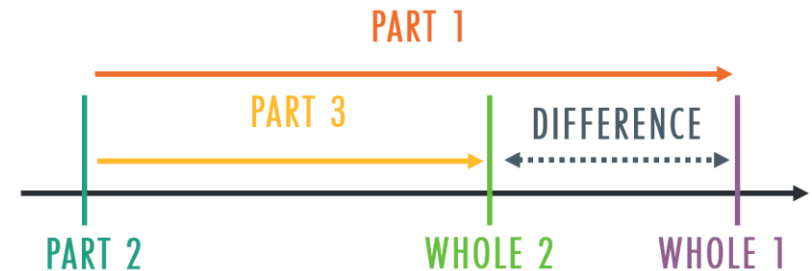
CARDINAL REPRESENTATION



ORDINAL PROBLEMS

- PART 1** Tom took painting classes for x years.
- PART 2** Tom started taking painting classes at a specific age.
- WHOLE 1** Tom stopped taking classes at the age of y .
- PART 2** Lucy started taking painting classes at the same age as Tom.
- PART 3** Lucy took painting classes during z years less than Tom.
- WHOLE 2** At what age did Lucy stop her lessons?

ORDINAL REPRESENTATION





3-STEP STRATEGY

$$\begin{array}{l} \text{WHOLE 1} - \text{PART 1} = \text{PART 2} \\ \text{PART 1} - \text{DIFFERENCE} = \text{PART 3} \\ \text{PART 2} + \text{PART 3} = \text{WHOLE 2} \end{array}$$



1-STEP STRATEGY

$$\text{WHOLE 1} - \text{DIFFERENCE} = \text{WHOLE 2}$$

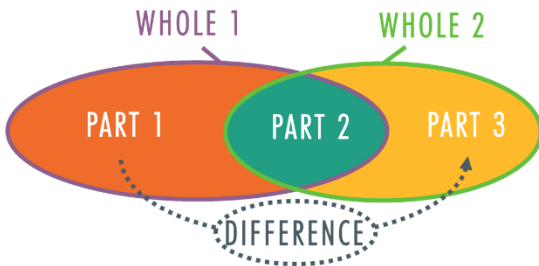


LA CONGRUENCE SÉMANTIQUE

CARDINAL QUANTITIES

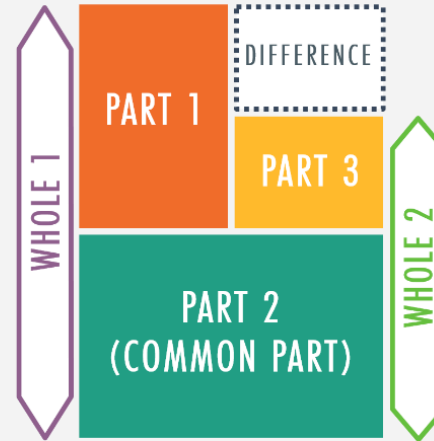
● ● ●
number of elements
price
weight

CARDINAL REPRESENTATION



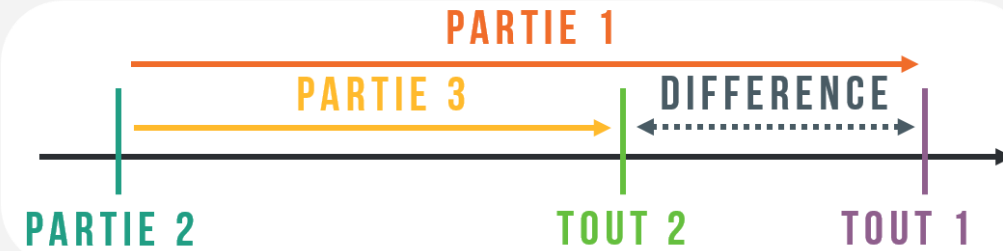
3-STEP COMPLEMENTATION STRATEGY

WHOLE 1 - PART 1 = PART 2
PART 1 - DIFFERENCE = PART 3
PART 2 + PART 3 = WHOLE 2



ORDINAL QUANTITIES

→
duration
distance
number of floors



1-STEP MATCHING STRATEGY

WHOLE 1 - DIFFERENCE = WHOLE 2



LA CONGRUENCE SÉMANTIQUE

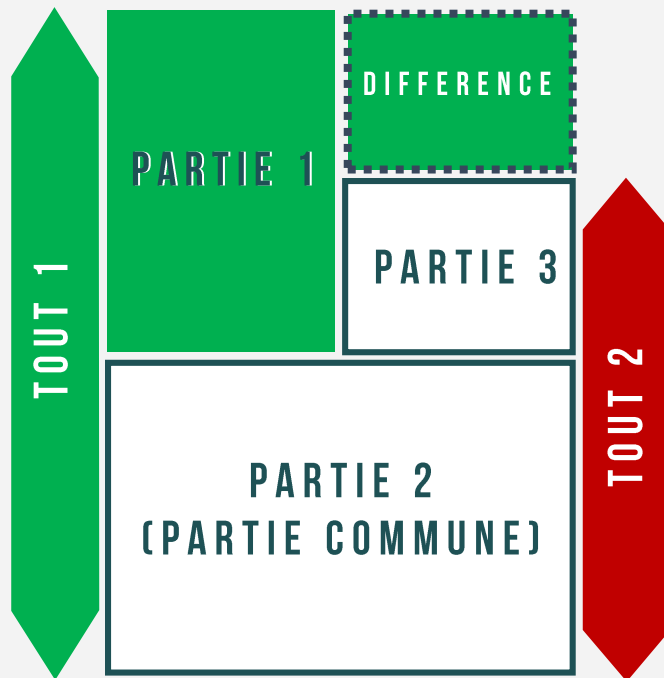
Quelle robustesse ?



ROBUSTESSE DES EFFETS OBSERVÉS

La question de la robustesse de ces résultats se pose

→ Que se passe-t-il lorsque seule l'une des deux stratégies est disponible ?



Solution en 3 étapes :

$$\begin{aligned} 11 - 8 &= 3 \\ 8 - 2 &= 6 \\ 3 + 6 &= 9 \end{aligned}$$

Solution en 1 étape :

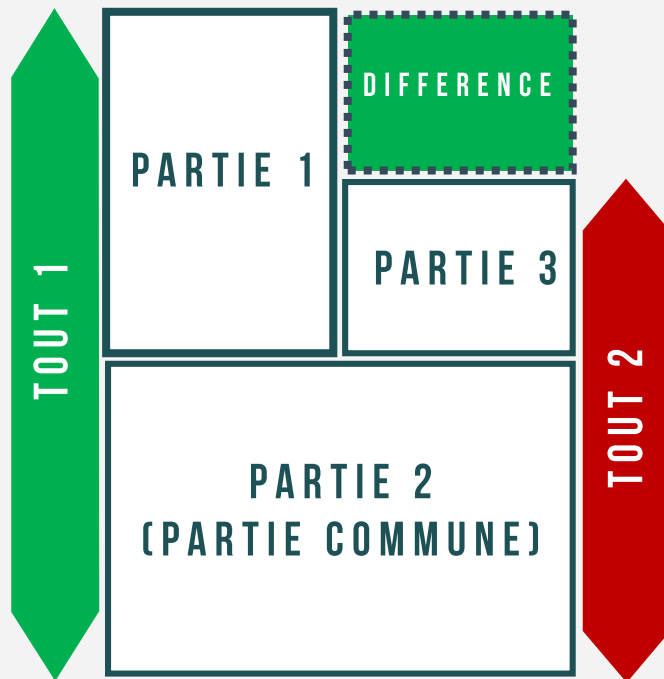
$$11 - 2 = 9$$



ROBUSTESSE DES EFFETS OBSERVÉS

La question de la robustesse de ces résultats se pose

→ Que se passe-t-il lorsque seule l'une des deux stratégies est disponible ?



~~Solution en 3 étapes :~~

~~$$\begin{aligned} 11 - 8 &= 3 \\ 8 - 2 &= 6 \\ 3 + 6 &= 9 \end{aligned}$$~~

Solution en 1 étape :

$$11 - 2 = 9$$



UN PROBLÈME CARDINAL ALTÉRÉ

PARTIE 1

Mehdi a **8** billes rouges.

PARTIE 2

Il a aussi des billes bleues.

TOUT 1

En tout, Mehdi a 11 billes.

PARTIE 2

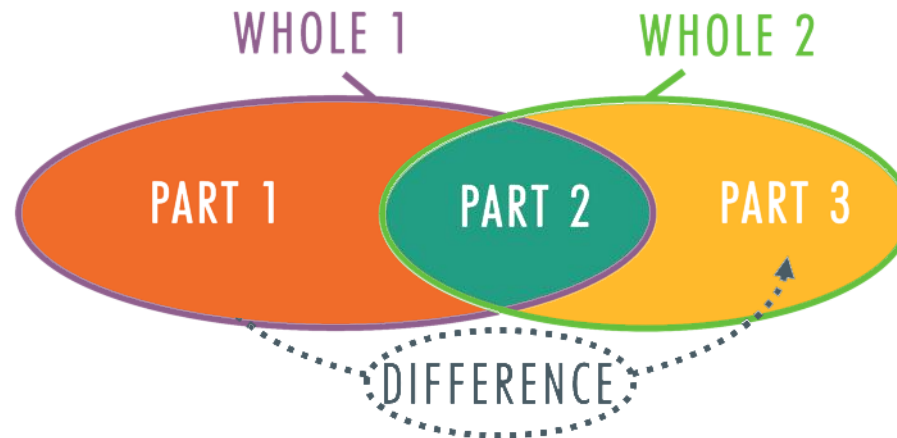
Charlène a autant de billes bleues que Mehdi, et des billes jaunes.

PARTIE 3

& **DIFFERENCE** Charlène a 2 billes jaunes de moins que Mehdi n'a de billes rouges.

TOUT 2

En tout, combien Charlène a-t-elle de billes ?



Solution en 3 étapes :

$$\begin{array}{rcl} 11 - ? & = & \dots \\ 8 - 2 & = & 6 \\ \dots + 6 & = & 9 \end{array}$$



UN PROBLÈME CARDINAL ALTÉRÉ

PARTIE 1

Mehdi a **des** billes rouges.

PARTIE 2

Il a aussi des billes bleues.

TOUT 1

En tout, Mehdi a 11 billes.

PARTIE 2

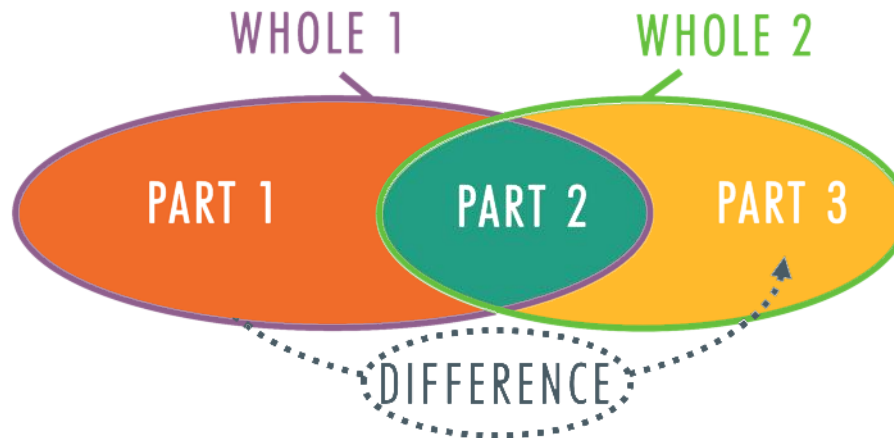
Charlène a autant de billes bleues que Mehdi, et des billes jaunes.

PARTIE 3

& **DIFFERENCE** Charlène a 2 billes jaunes de moins que Mehdi n'a de billes rouges.

TOUT 2

En tout, combien Charlène a-t-elle de billes ?



Solution en 3 étapes :

$$\begin{array}{rcl} 11 - ? & = & \dots \\ 8 - 2 & = & 6 \\ \dots + 6 & = & 9 \end{array}$$



UN PROBLÈME ORDINAL ALTÉRÉ

PARTIE 1

Tom a suivi des leçons de piano pendant **8 années**.

PARTIE 2

Tom avait commencé ses leçons à un certain âge.

TOUT 1

Tom a arrêté de suivre des leçons de piano à l'âge de 11 ans.

PARTIE 2

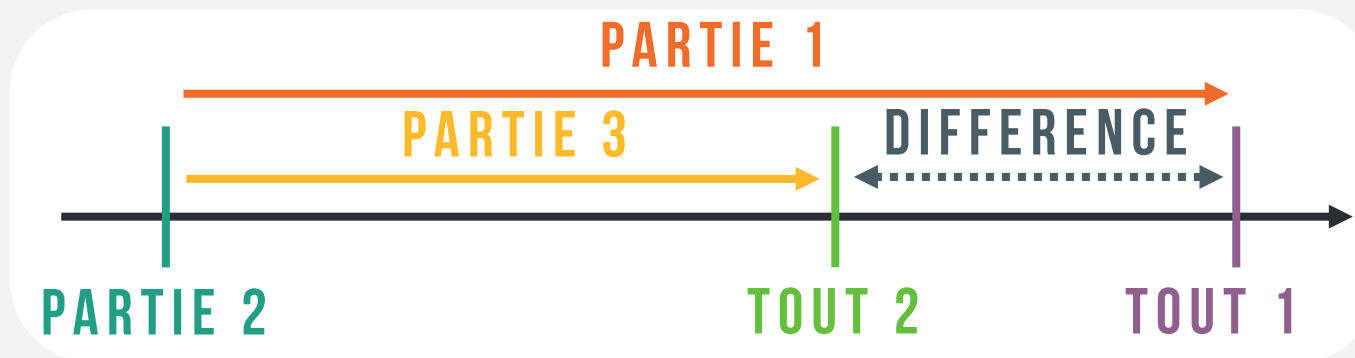
Tom et Lucie avaient commencé à suivre des leçons de piano au même âge.

PARTIE 3

& **DIFFERENCE** Lucy a suivi des leçons de piano durant 2 ans de moins que Tom.

TOUT 2

À quel âge Lucie a-t-elle arrêté de suivre des leçons de piano ?



Solution en 1 étape :

$$11 - 2 = 9$$



UN PROBLÈME ORDINAL ALTÉRÉ

PARTIE 1

Tom a suivi des leçons de piano pendant **plusieurs années**.

PARTIE 2

Tom avait commencé ses leçons à un certain âge.

TOUT 1

Tom a arrêté de suivre des leçons de piano à l'âge de 11 ans.

PARTIE 2

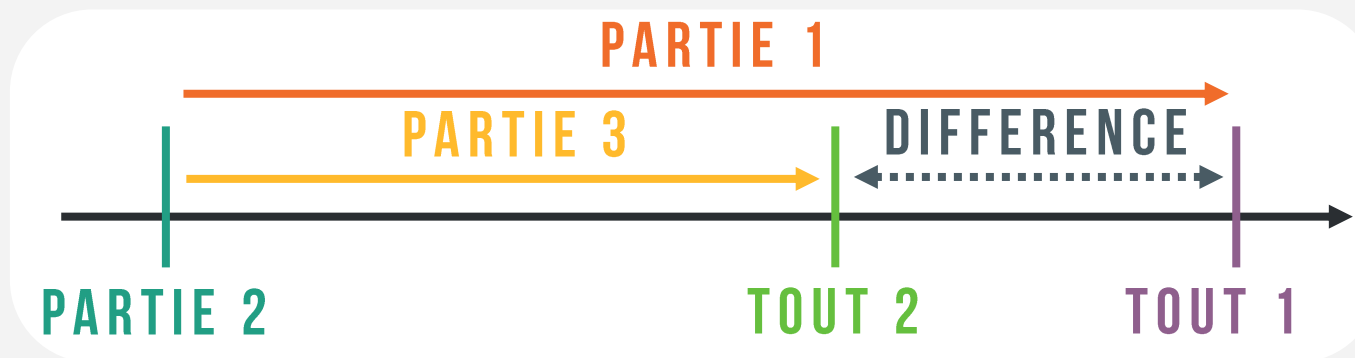
Tom et Lucie avaient commencé à suivre des leçons de piano au même âge.

PARTIE 3

& **DIFFERENCE** Lucy a suivi des leçons de piano durant 2 ans de moins que Tom.

TOUT 2

À quel âge Lucie a-t-elle arrêté de suivre des leçons de piano ?



Solution en 1 étape :

$$11 - 2 = 9$$

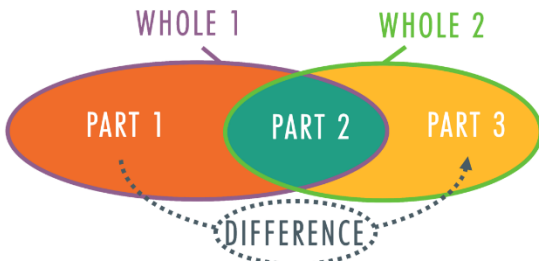


ROBUSTESSE DES EFFETS OBSERVÉS

CARDINAL QUANTITIES

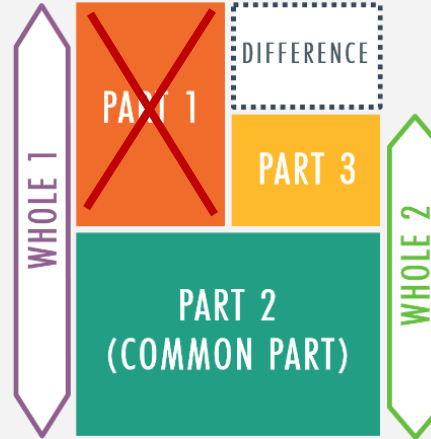
● ● ●
number of elements
price
weight

CARDINAL REPRESENTATION



~~3-STEP COMPLEMENTATION STRATEGY~~

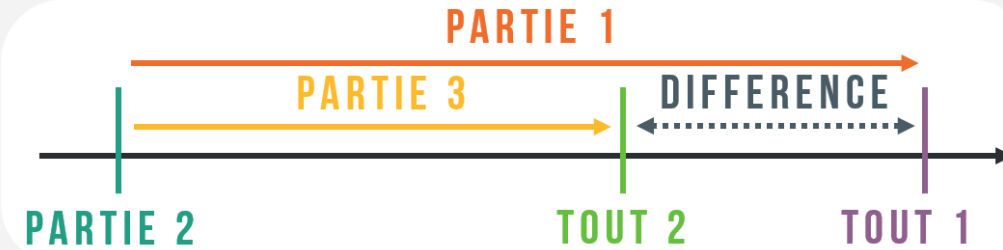
~~WHOLE 1 - PART 1 = PART 2
PART 1 - DIFFERENCE = PART 3
PART 2 + PART 3 = WHOLE 2~~



?

ORDINAL QUANTITIES

→
duration
distance
number of floors



1-STEP MATCHING STRATEGY

WHOLE 1 - DIFFERENCE = WHOLE 2

Gros, Sander & Thibaut, 2016



ÉTUDE CHEZ L'EXPERT

→ Populations

→ Experts

- Sujets normaliens en science (ENS 1^{ère} française, 5^{ème} mondiale au classement de Shanghai normalisé par la taille, compte 10 médailles fields et 13 prix nobels parmi ses alumni)
- 25 sujets ($M = 3,35$, $SD = 7,82$)

→ Groupe contrôle

- Adultes tout venant recrutés en région parisienne. Principalement étudiants.
- 85 sujets ($M = 21,35$, $SD = 2,60$)

→ Tâche

- Identification des problèmes dont la solution proposée est correcte :

$14 - 2 = 12$; Lucie arrive au 12^{ème} étage

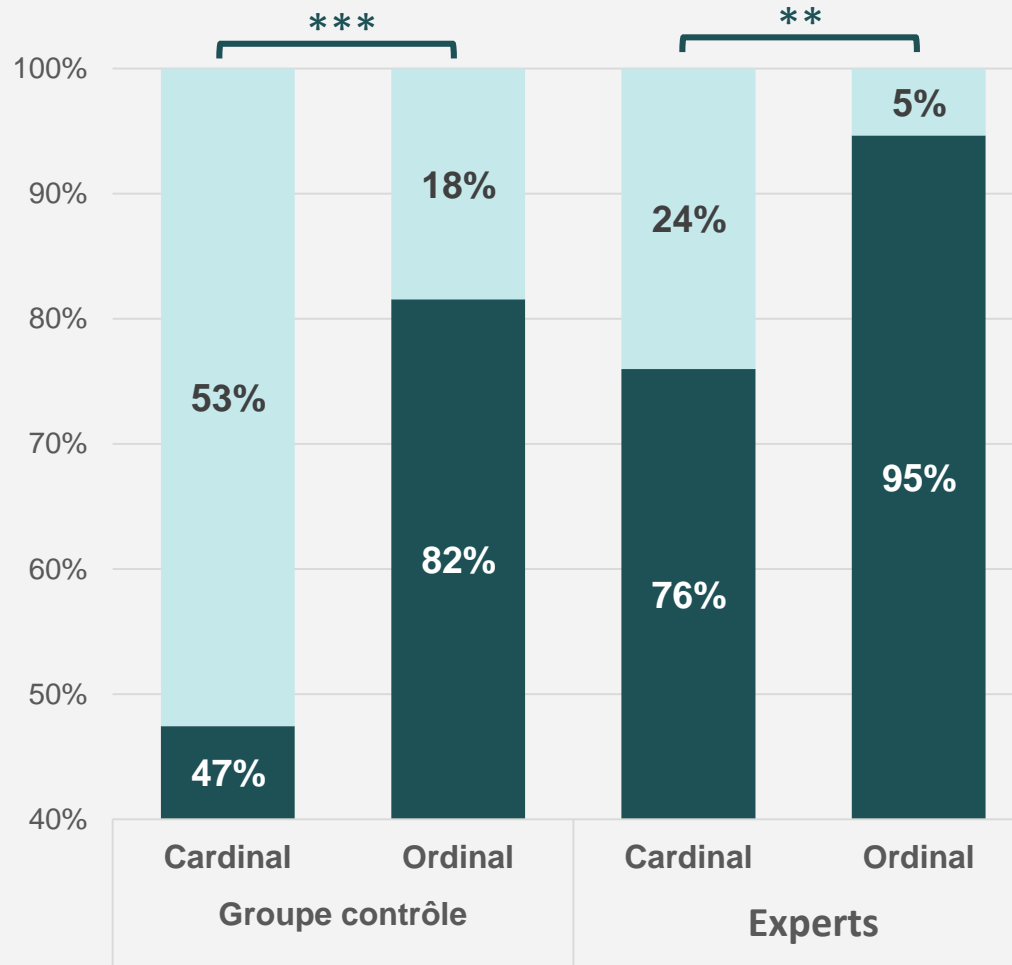
Il n'y a pas assez d'informations pour trouver la solution

- Mesure des taux de bonnes réponses et des temps de réponse.



ÉTUDE CHEZ L'EXPERT

Taux de bonnes réponses en fonction de la sémantique attachée aux problèmes



Modèle linéaire généralisé à effets mixtes
pour réponse binaire (régression logistique)

Contrôle : $z=7.84$, $p<.0001$ ***

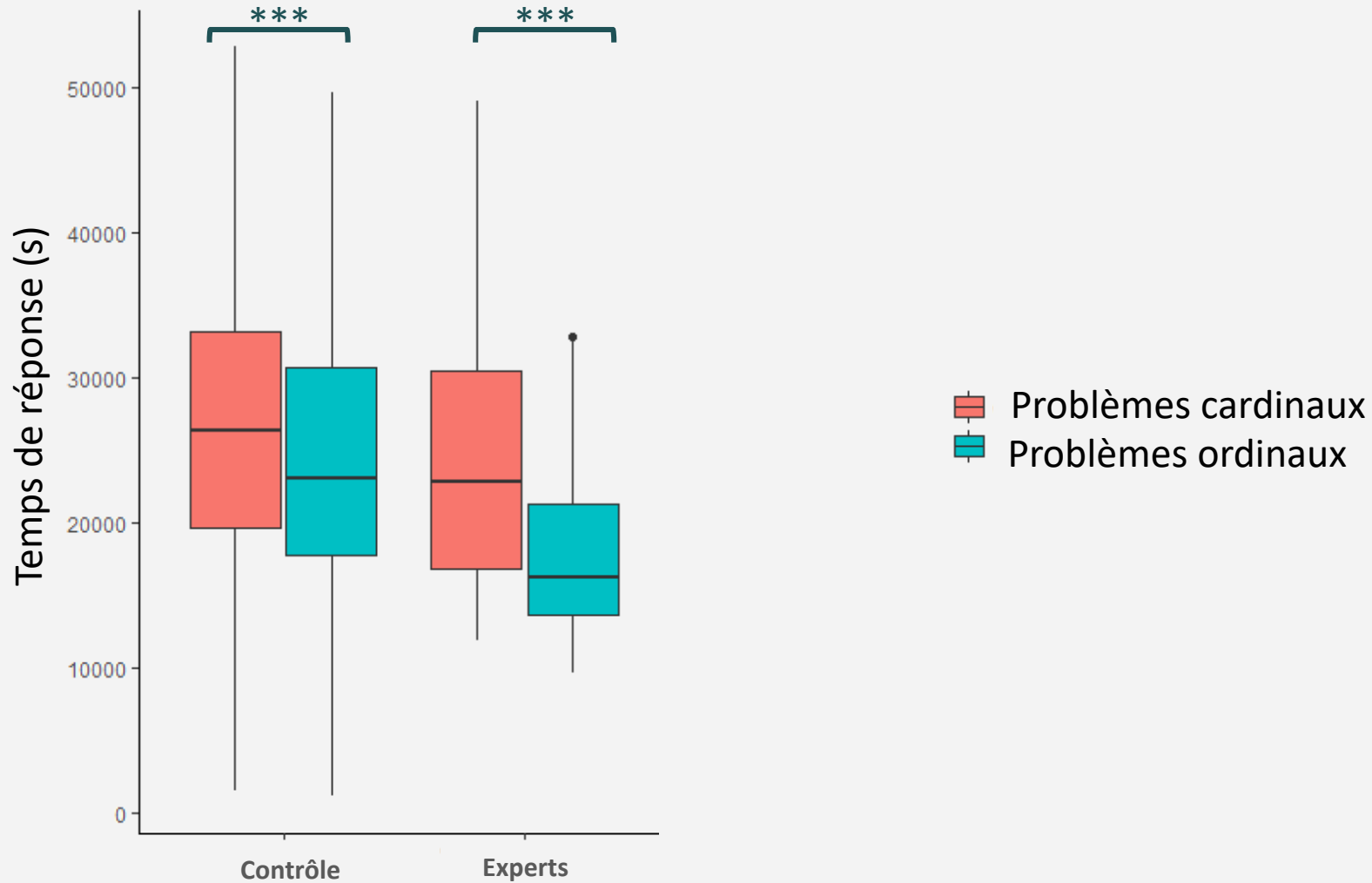
Normaliens : $z=2.99$, $p=.0028$ **

■ Faux négatifs
■ Bonnes réponses



ÉTUDE CHEZ L'EXPERT

Temps de réponse pour les problèmes résolubles correctement résolus



Modèle linéaire à effets mixtes

Contrôle : $\chi^2(1)=14.28$, $p<.0001$ ***

Experts : $\chi^2(1)=30.69$, $p<.0001$ ***



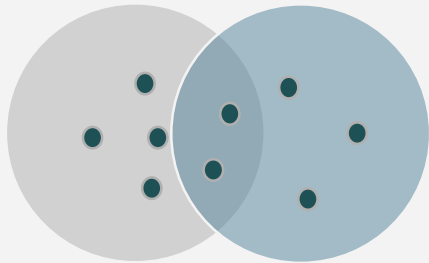
ÉTUDE CHEZ L'EXPERT

- Les effets de congruence sémantique restent robustes même chez des mathématiciens de haut niveau
- Les temps de réponse indiquent que les experts n'accèdent pas directement à une représentation complètement décontextualisée : nécessité d'un recodage
- Souligne l'importance de développer des stratégies éducatives visant à dépasser ces effets

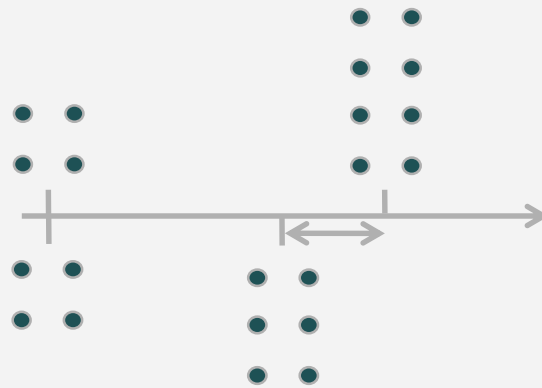


FACILITER LE RECODAGE ?

- Une piste éventuelle : le recours à des problèmes hybrides, compatibles avec les deux interprétations.



Cardinal



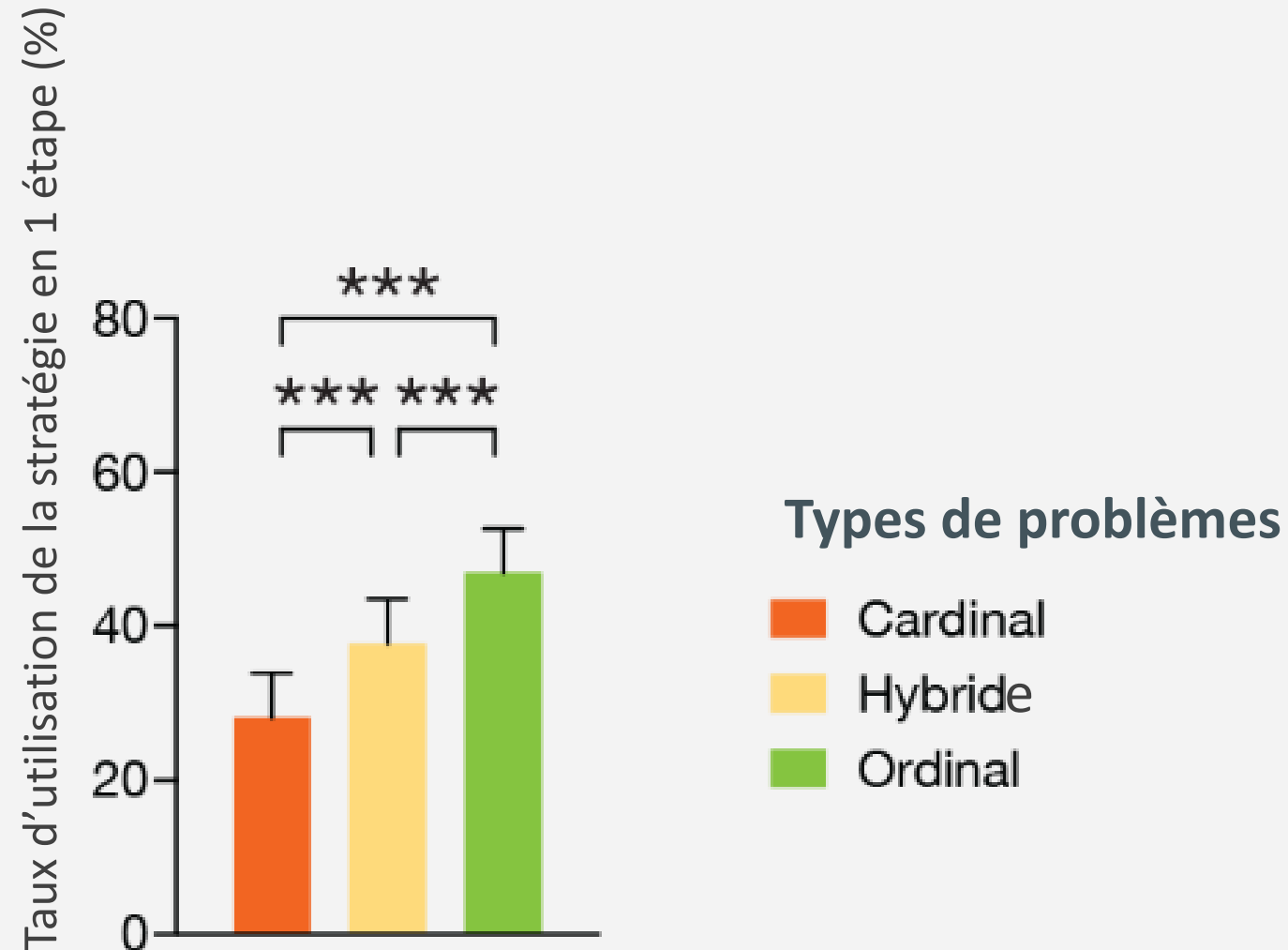
Hybride



Ordinal



FACILITER LE RECODAGE ?





CONCLUSION

- Nos connaissances sur le monde sont sources d'inférences, mais aussi d'interférences lors de la résolution de problèmes arithmétiques à énoncés verbaux
- On relève ainsi des effets marqués des connaissances du monde sur la représentation et la résolution des problèmes
- Le recodage sémantique, enjeu essentiel pour dépasser ces effets
- Vers le développement de nouvelles stratégies éducatives ?



MERCI DE VOTRE ATTENTION

AVEZ-VOUS DES QUESTIONS ?