



# LA CONGRUENCE SÉMANTIQUE AU CŒUR DES APPRENTISSAGES ARITHMÉTIQUES

## INFÉRENCES ET INTERFÉRENCES



UNIVERSITÉ  
DE GENÈVE

FACULTÉ DE PSYCHOLOGIE  
ET DES SCIENCES DE L'ÉDUCATION

HIPPOLYTE GROS – PRÉSENTATION ÉQUIPE DIMAGE – 21/12/2017





# LA RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES

## •) Un enjeu éducatif majeur

- ♣ Apprentissage à tous les niveaux d'éducation (Daroczy et al., 2015)
- ♣ De nombreuses difficultés reportées dans leur résolution (Verschaffel et al., 1992)

## •) Qu'est-ce que résoudre un problème arithmétique à énoncé verbal ?

- ♣ Comprendre un texte ? **X**
- ♣ Effectuer une suite de calculs ? **X**
- ♣ Une activité plus complexe (Riley, Greeno & Heller, 1983) ... **✓**

## •) L'étude des problèmes isomorphes

- ♣ Même structure mathématique = même difficulté ?
- ♣ Quels mécanismes interprétatifs ?
- ♣ Quels outils théoriques pour les apprêhender ?



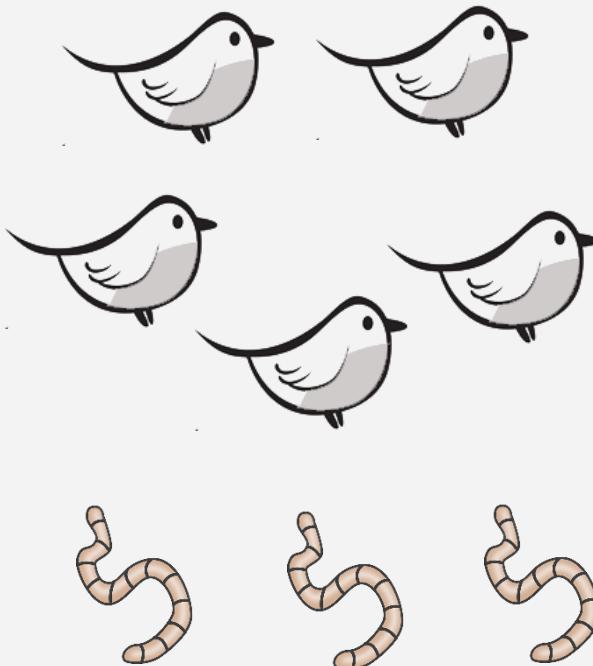
# LA RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES

## Quels effets ?



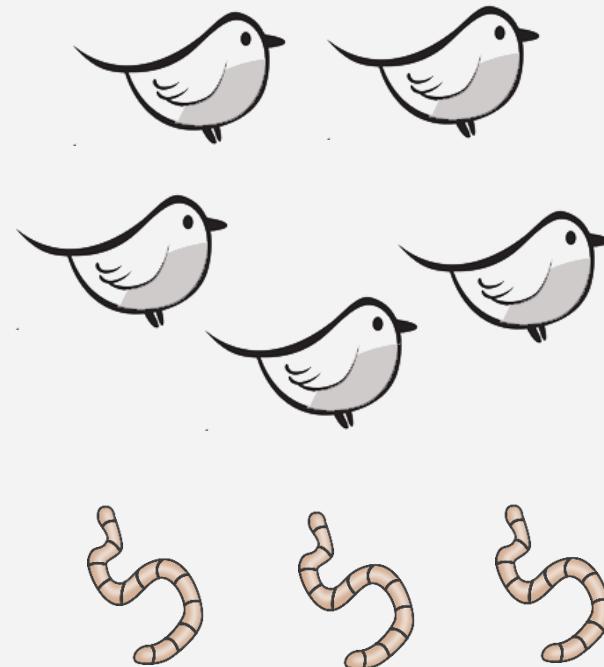
# LA RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES

Rôle de la formulation :



“Combien y a-t-il d’oiseaux de plus que de vers ?”  
25% de réussite.

Hudson, 1983

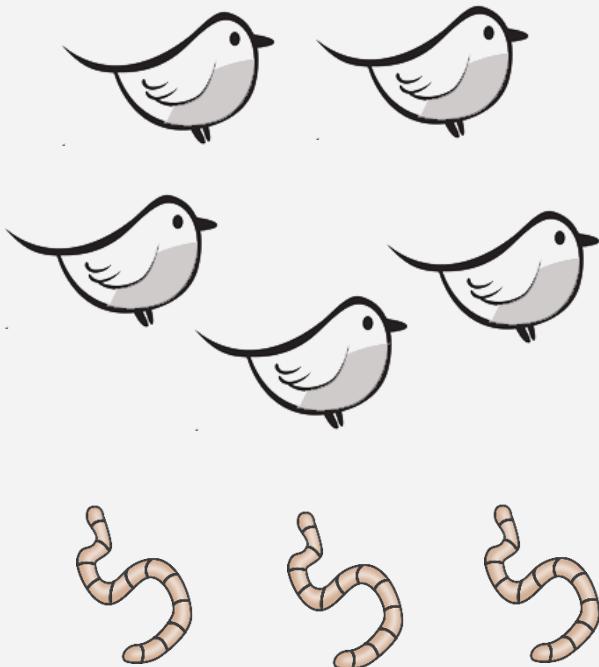


“Combien d’oiseaux n’auront pas de vers ?



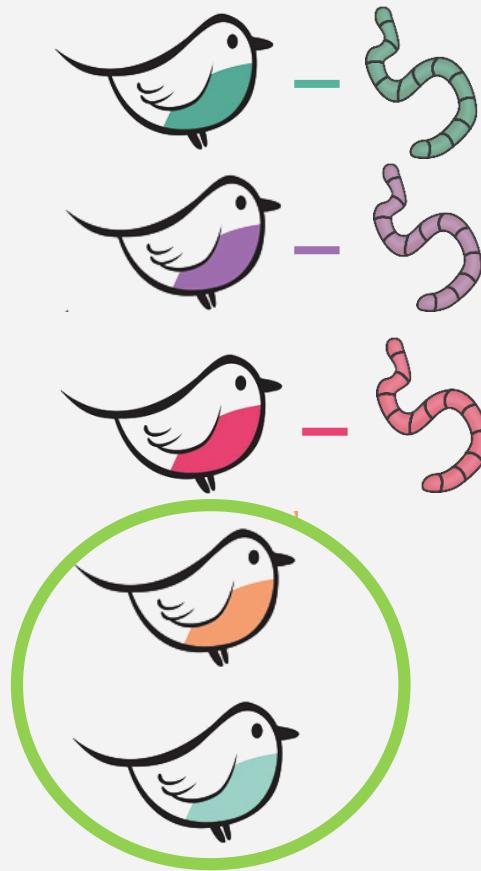
# LA RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES

Rôle de la formulation :



“Combien y a-t-il d’oiseaux de plus que de vers ?”  
25% de réussite.

Hudson, 1983

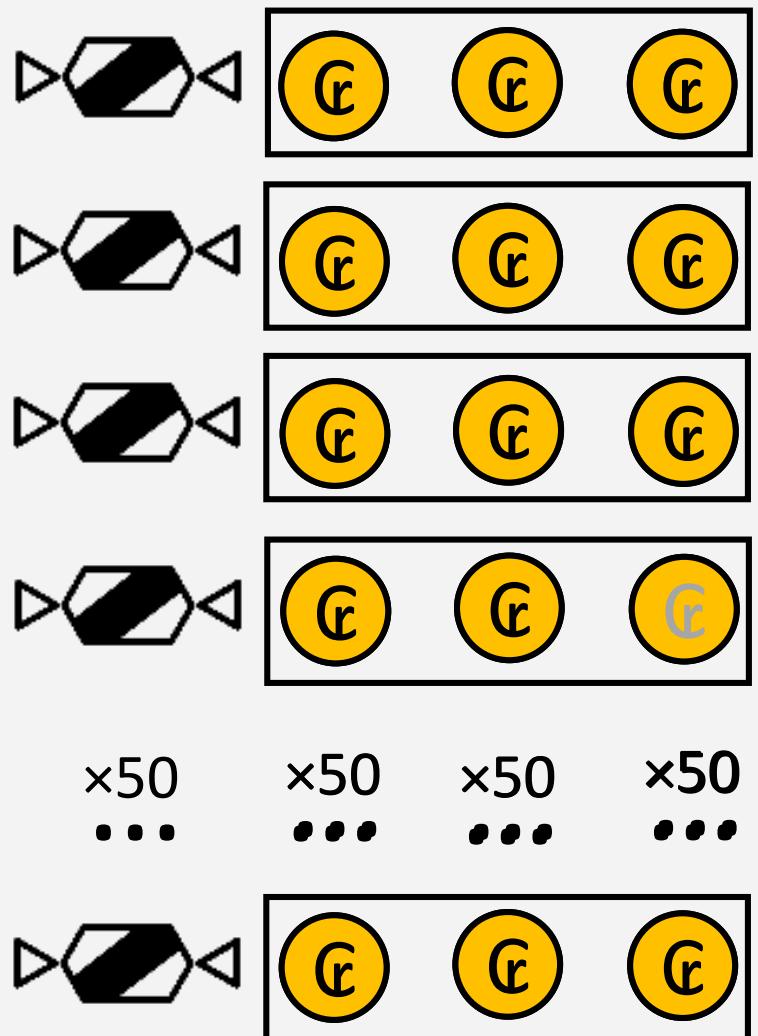


“Combien d’oiseaux n’auront pas de vers ?”  
96% de réussite.



# LA RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES

Ordre des valeurs :



“Combien coûtent 50 chocolats à 3 cruzeiros chacun ?”

0 %

Schliemann et al. (1998)



# LA RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES

Ordre des valeurs :

“Combien coûtent 3 chocolats à 50 cruzeiros chacun ?”



33 %

Schliemann et al. (1998)

DÉTERMINANTS SÉMANTIQUES DE LA RÉSOLUTION EXPERTE DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES À ÉNONCÉS VERBAUX – PRÉSENTATION ÉQUIPE DIMAGE – 21/12/2016



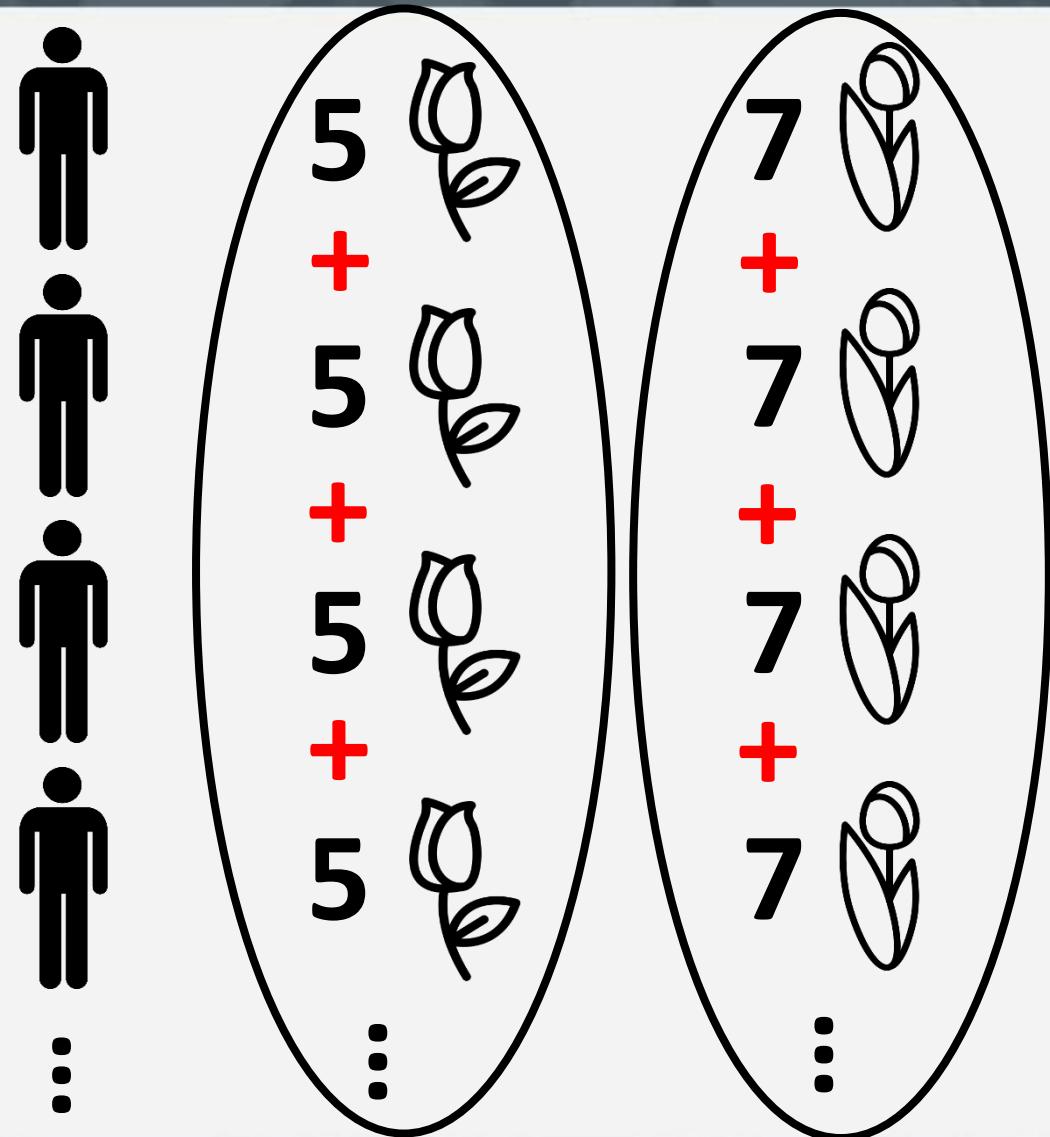
# LA RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES

Présence d'un élément structurant :

“Pour un concours, le fleuriste prépare pour chaque candidat 5 roses et 7 tulipes. De combien de fleurs a-t-il besoin en tout ?”

$$(14 \times 5) + (14 \times 7) = 168$$

**x14 :**



Coquin-Viennot & Moreau, 2003



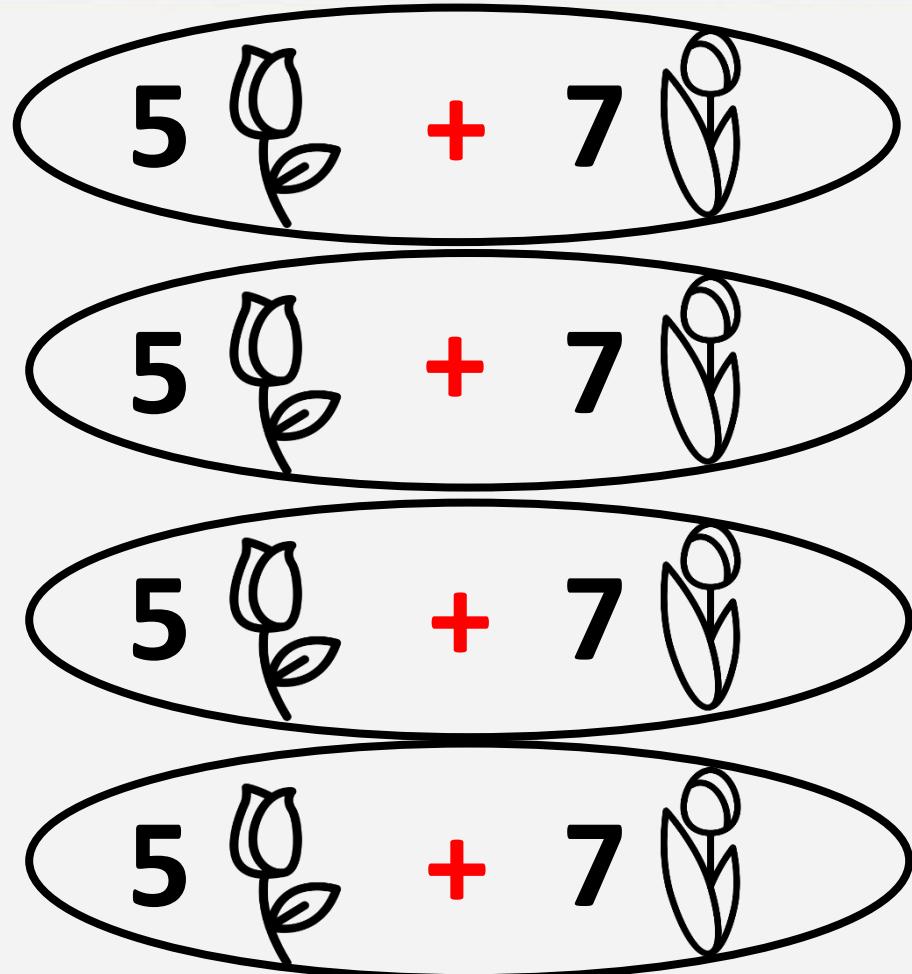
# LA RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES

Présence d'un élément structurant :

“Pour un concours, le fleuriste prépare pour chaque candidat **un bouquet constitué de** 5 roses et de 7 tulipes. De combien de fleurs a-t-il besoin en tout ?”

$$14 \times (5+7) = 168$$

**x14**



:

:

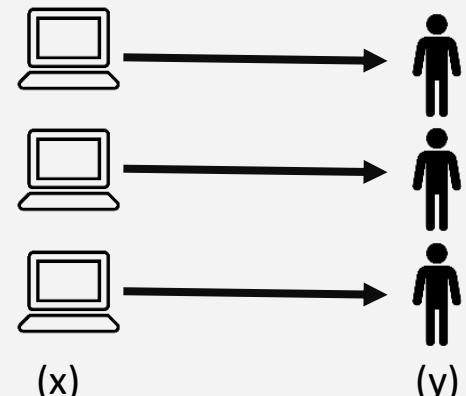
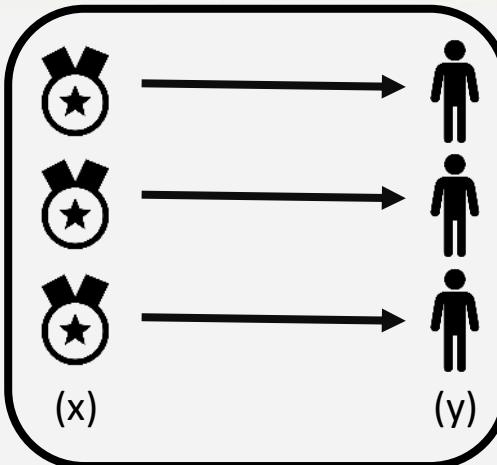


# LA RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES

Relations sémantiques entre les éléments présents dans les problèmes

• Entraînement :

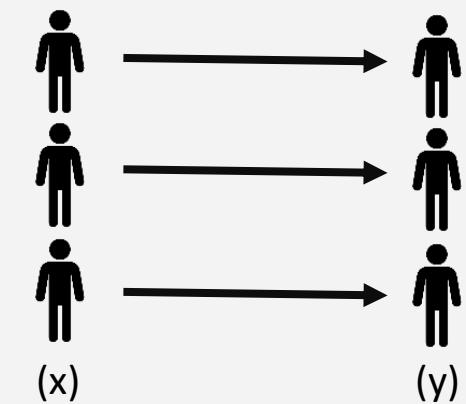
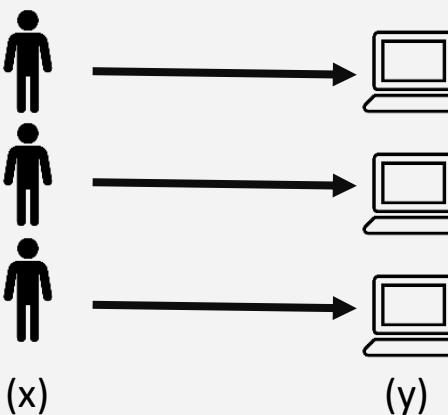
- Assignation objets → individus



89 % de succès

• Transfert :

- Assignation objets → individus ✓
- Assignation individus → objets ✗
- Assignation individus → individus ~



0 % de succès

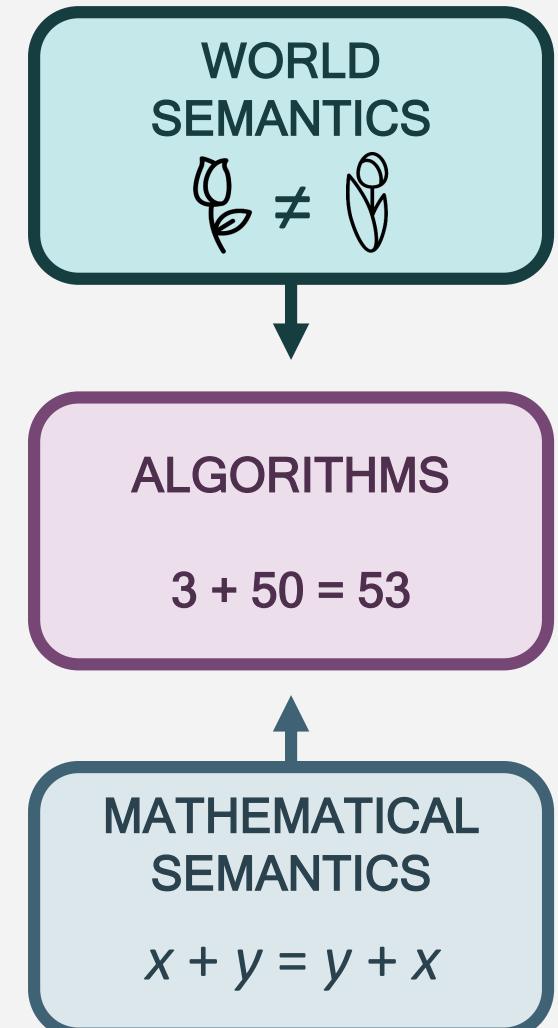
60 % de succès

Bassok, Wu & Olseth, 1995



# LA RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES

- Résoudre un problème  $\neq$  lire un texte ou résoudre une équation
- Il existe des effets interprétatifs forts
- Les connaissances sur le monde semblent avoir une influence particulière
- Les interactions entre les connaissances sur le monde (*World Semantics*) et les connaissances mathématiques (*Mathematical Semantics*) pourraient expliquer les effets observés.





# LA RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES

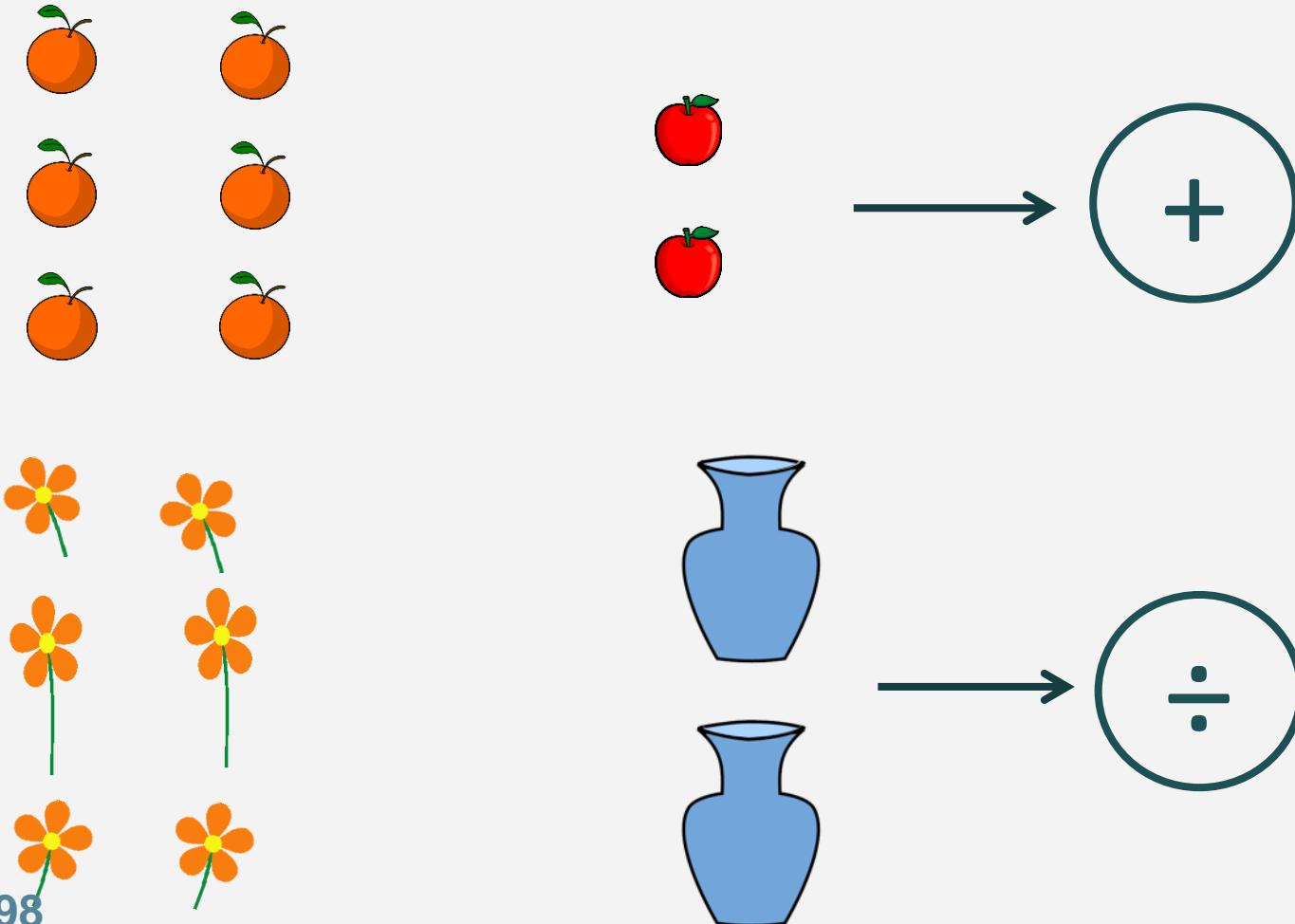
**Nécessité d'une théorie unifiée pour rendre compte des effets observés**

- **Théorie des schémas** (Kintsch & Greeno, 1985; Rumelhart, 1980)
  - Postule que des structures de données sont créées, stockées puis utilisées pour résoudre les problèmes arithmétiques
  - Ne rend pas compte des différences de performances entre problèmes isomorphes
- **Théorie des modèles mentaux** (Johnson-Laird, 1983, Van Dijk & Kintsch, 1983)
  - Postule qu'un modèle analogue à la situation décrite est construit
  - Ne prend pas en compte les effets de contenu
- **La congruence sémantique** : pour une prise en compte des interactions entre Connaissances sur le monde et connaissances mathématiques.



# LA CONGRUENCE SÉMANTIQUE

Les connaissances sur les éléments influencent les représentations des problèmes



Bassok, Chase, Martin, 1998



# LA CONGRUENCE SÉMANTIQUE

Les connaissances sur les éléments influencent les représentations des problèmes

Analyse de manuels (Eicholz, O'Daffer, Fleener, Charles, Young & Barnett, 1987) de 1P à 8P :

- 97% d'additions avec des éléments « congruents »
- 94% de divisions avec des éléments « congruents »

**Bassok, Chase, Martin, 1998**

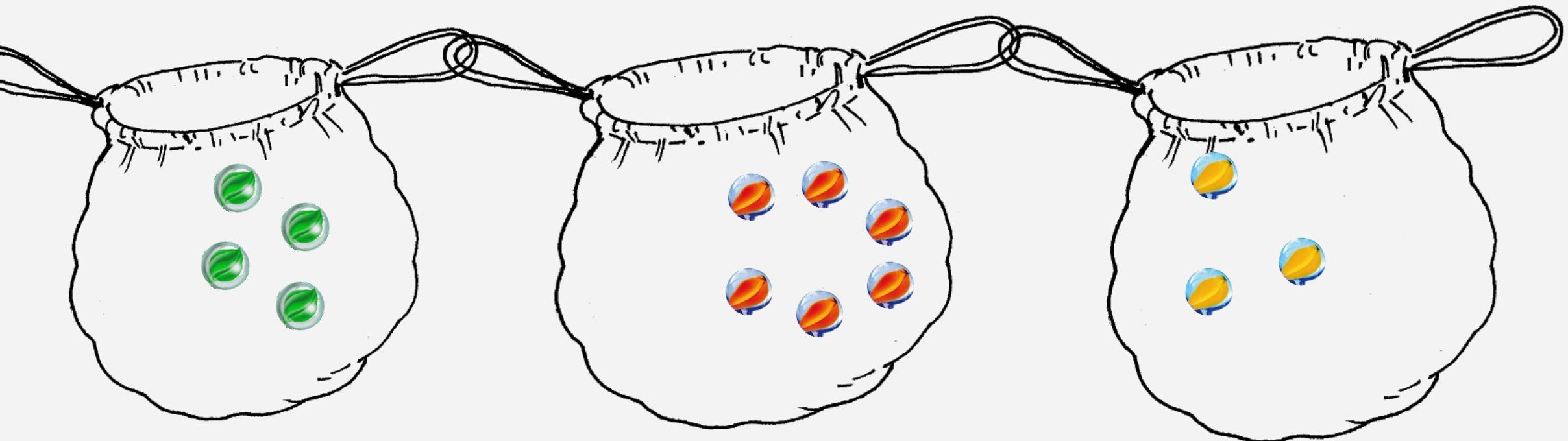


# LA CONGRUENCE SÉMANTIQUE

- Il existerait des **dimensions sémantiques générales** influençant l'encodage des énoncés.
- Parmi celles-ci :
  - ♣ Caractère symétrique / asymétrique d'une relation (Bassok et al., 1995)
  - ♣ Nature continue ou discrète d'un changement (Bassok & Olseth, 1995)
  - ♣ Distinction contenu / contenant (Bassok et al., 1998)
  - ♣ Distinction situations **cardinales** / **ordinales** (Gamo, Sander & Richard, 2010)

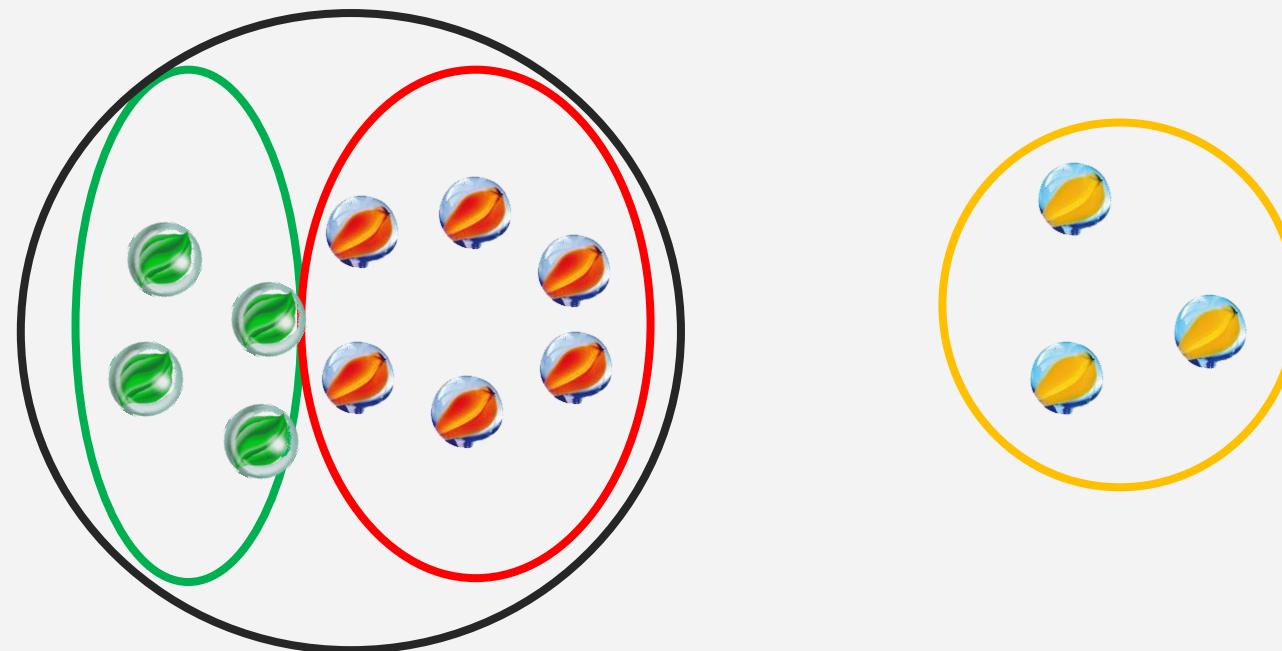


# SITUATIONS CARDINALES



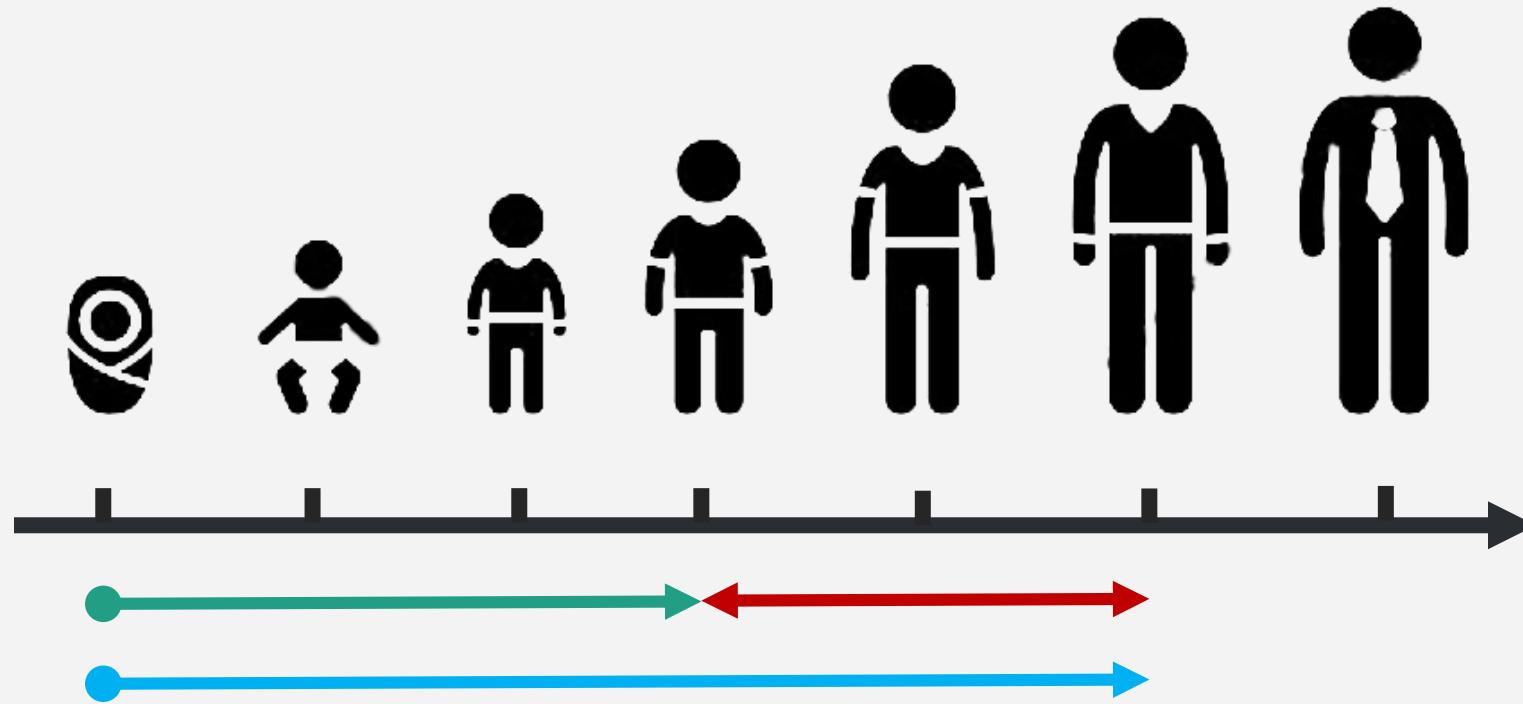


# SITUATIONS CARDINALES





# SITUATIONS ORDINALES





# UN PROBLÈME CARDINAL

**PARTIE 1**

Mehdi a 8 billes rouges.

**PARTIE 2**

Il a aussi des billes bleues.

**TOUT 1**

En tout, Mehdi a 11 billes.

**PARTIE 2**

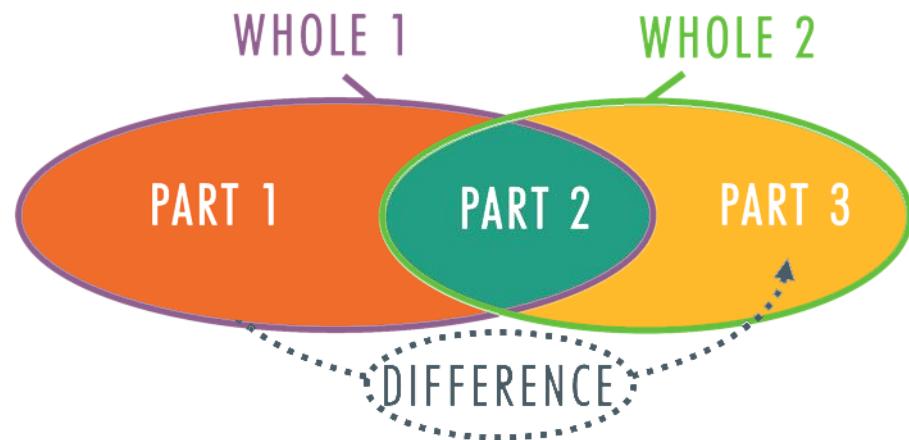
Charlène a autant de billes bleues que Mehdi, et des billes jaunes.

**PARTIE 3**

& **DIFFERENCE** Charlène a 2 billes jaunes de moins que Mehdi n'a de billes rouges.

**TOUT 2**

En tout, combien Charlène a-t-elle de billes ?



**Solution en 3 étapes :**

$$\begin{aligned}11 - 8 &= 3 \\8 - 2 &= 6 \\3 + 6 &= 9\end{aligned}$$



# UN PROBLÈME ORDINAL

PARTIE 1

Tom a suivi des leçons de piano pendant 8 ans.

PARTIE 2

Tom avait commencé ses leçons à un certain âge.

TOUT 1

Tom a arrêté de suivre des leçons de piano à l'âge de 11 ans.

PARTIE 2

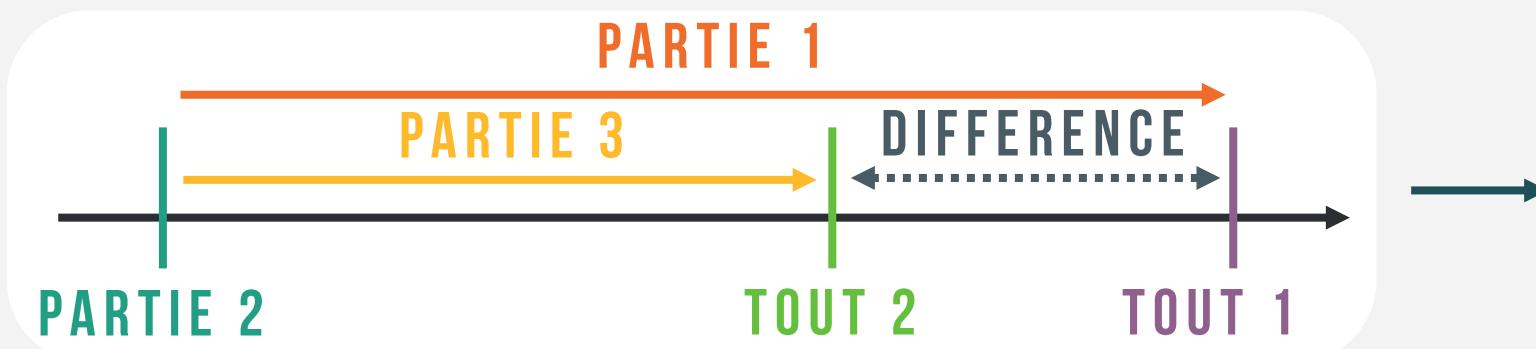
Tom et Lucie avaient commencé à suivre des leçons de piano au même âge.

PARTIE 3

& DIFFERENCE Lucy a suivi des leçons de piano durant 2 ans de moins que Tom.

TOUT 2

À quel âge Lucie a-t-elle arrêté de suivre des leçons de piano ?



Solution en 1 étape :

$$11 - 2 = 9$$

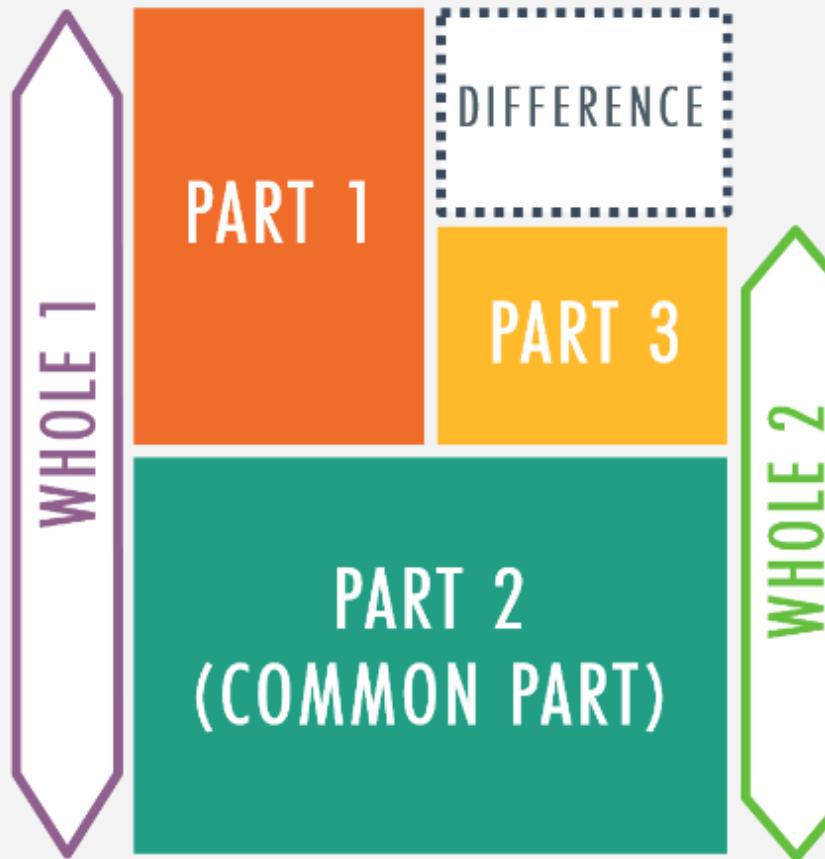


# LA CONGRUENCE SÉMANTIQUE

Quelles justifications empiriques ?



# COMMENT ÉVALUER LA DISTINCTION CARDINAL / ORDINAL?





# COMMENT ÉVALUER LA DISTINCTION CARDINAL / ORDINAL?

## •) Expérience de classification de problèmes

- 109 participants adultes ( $M = 22,3$  ans,  $SD = 8,2$  ans)
- 12 problèmes isomorphes :
  - 2 Problèmes de nombre d'éléments
  - 2 Problèmes de poids
  - 2 Problèmes de prix
  - 2 Problèmes de Nombre d'étages
  - 2 Problèmes de Durée
  - 2 Problèmes de Hauteur
- « Classez les problèmes en fonction de leur principe de solution. Faites autant de catégories que vous le souhaitez. »
- Analyses : matrice de proximité, *hierarchical clustering*



# COMMENT ÉVALUER LA DISTINCTION CARDINAL / ORDINAL?

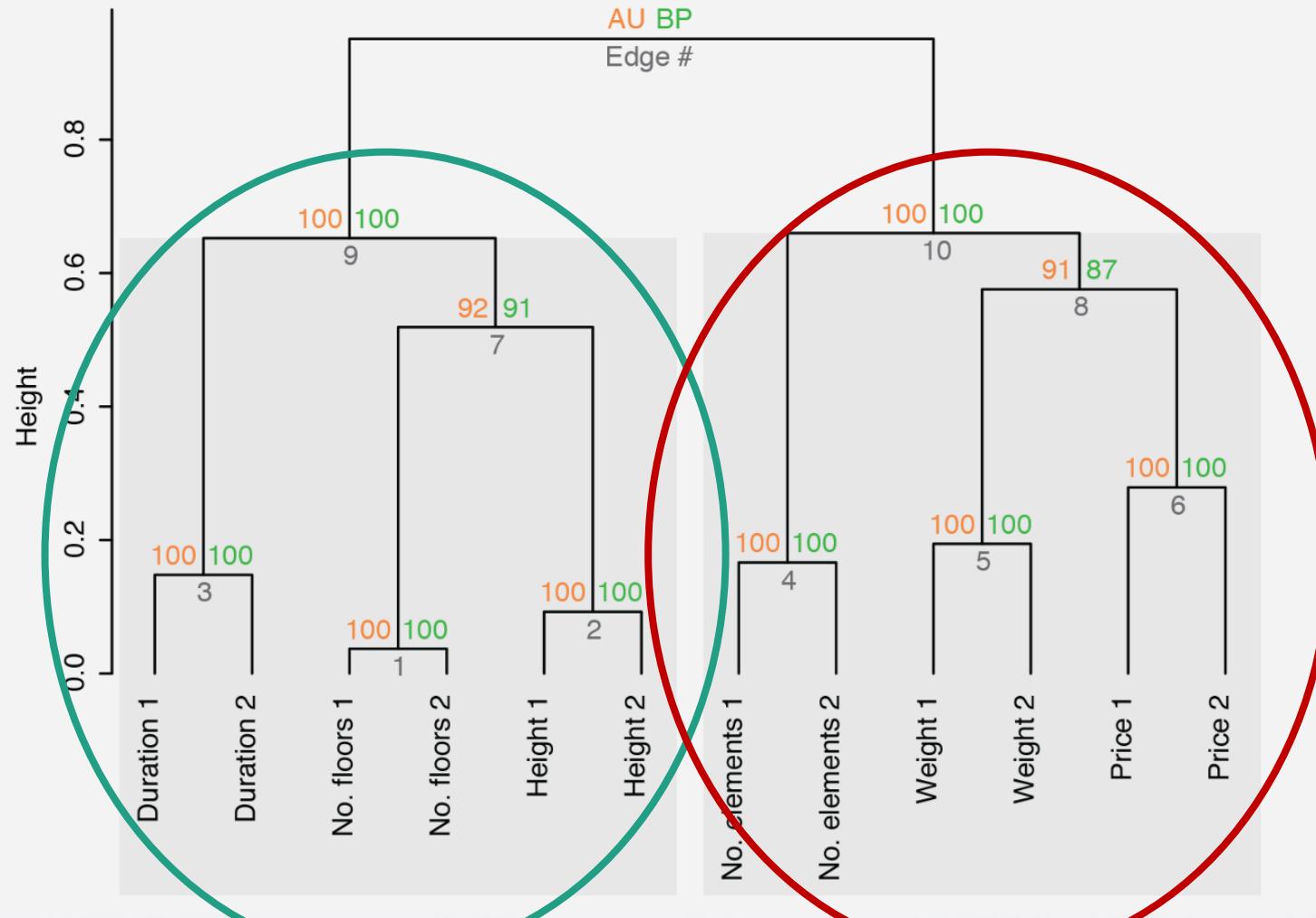
## • Expérience de classification de problèmes

		Weight problems		Cardinal problems		No. of elements problems		Duration problems		Ordinal problems		No. of floors problems	
		context 1	context 2	context 1	context 2	context 1	context 2	context 1	context 2	context 1	context 2	context 1	context 2
Cardinal problems	Weight problems context 1	-	0.95	0.90	0.89	0.88	0.86	0.79	0.76	0.78	0.78	0.75	0.76
	Weight problems context 2	0.95	-	0.87	0.94	0.90	0.89	0.75	0.74	0.75	0.75	0.72	0.72
	Price problems context 1	0.90	0.87	-	0.91	0.90	0.86	0.76	0.75	0.77	0.77	0.77	0.78
	Price problems context 2	0.89	0.94	0.91	-	0.87	0.89	0.75	0.76	0.76	0.74	0.74	0.74
Ordinal problems	No. of elem. problems context 1	0.88	0.90	0.90	0.87	-	0.95	0.74	0.71	0.74	0.74	0.74	0.75
	No. of elem. problems context 2	0.86	0.89	0.86	0.89	0.95	-	0.75	0.73	0.76	0.72	0.74	0.74
	Duration problems context 1	0.79	0.75	0.76	0.75	0.74	0.75	-	0.95	0.86	0.87	0.89	0.89
	Duration problems context 2	0.76	0.74	0.75	0.76	0.71	0.73	0.95	-	0.87	0.88	0.91	0.91
Height problems	Height problems context 1	0.78	0.75	0.77	0.76	0.74	0.76	0.86	0.87	-	0.95	0.92	0.93
	Height problems context 2	0.78	0.75	0.77	0.74	0.74	0.72	0.87	0.88	0.95	-	0.91	0.91
No. of floors problems	No. of floors problems context 1	0.75	0.72	0.77	0.74	0.74	0.74	0.89	0.91	0.92	0.91	-	1.00
	No. of floors problems context 2	0.76	0.72	0.78	0.74	0.75	0.74	0.89	0.91	0.93	0.91	1.00	-



# COMMENT ÉVALUER LA DISTINCTION CARDINAL / ORDINAL?

## → Expérience de classification de problèmes





# COMMENT ÉVALUER LA DISTINCTION CARDINAL / ORDINAL?

## • Expérience de classification de problèmes

Durée

Prix

Distance

Poids

Nb. étages

Nb. éléments

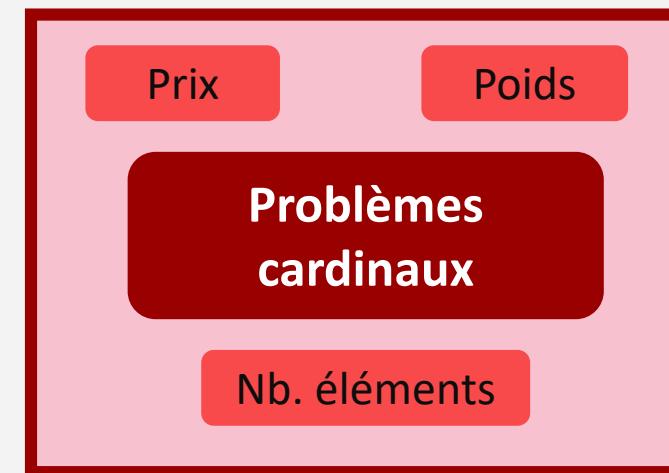
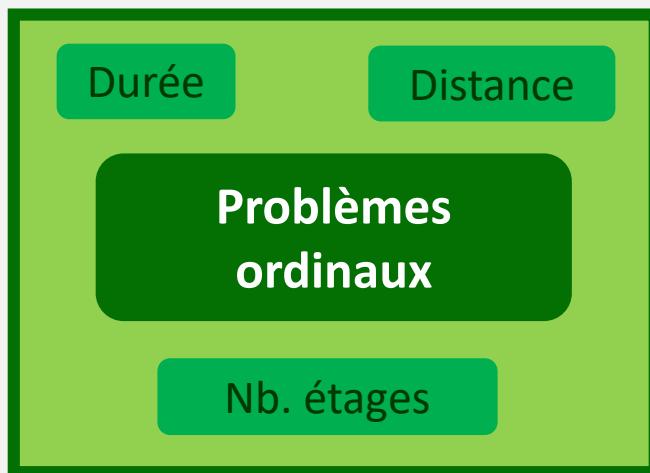
Problèmes  
ordinaux

Problèmes  
cardinaux



# COMMENT ÉVALUER LA DISTINCTION CARDINAL / ORDINAL?

- Expérience de classification de problèmes

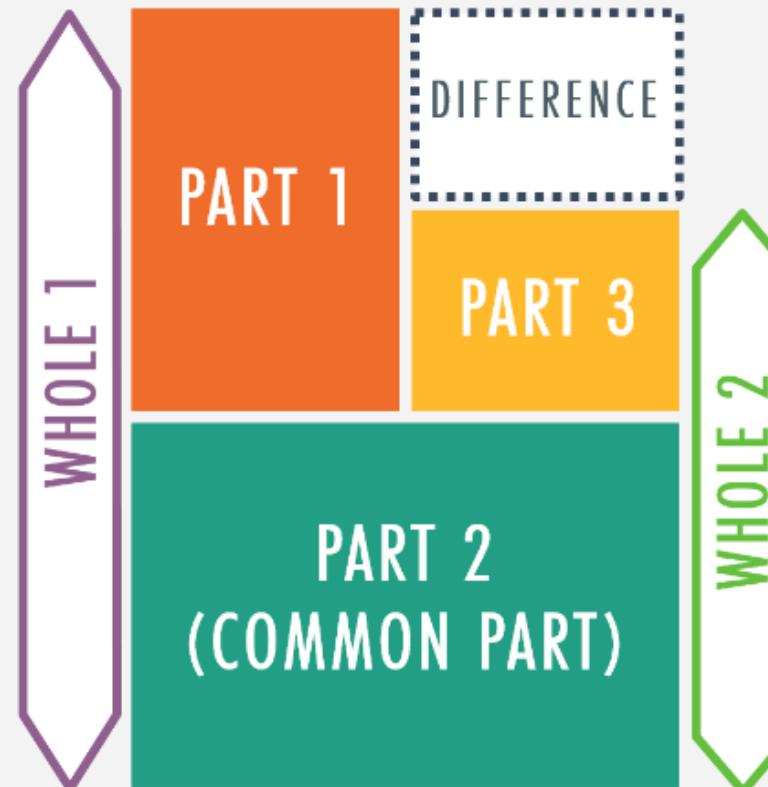




# COMMENT ÉVALUER LA DISTINCTION CARDINAL / ORDINAL?

## CARDINAL QUANTITIES

- number of elements
  - price
  - weight



## ORDINAL QUANTITIES

- duration
- distance
- number of floors

## CARDINAL PROBLEMS

**PART 1** Tom has  $x$  red marbles.

**PART 2** Tom also has blue marbles.

**WHOLE 1** Tom has  $y$  marbles in total.

**PART 2** Tom and Lucy have the same amount of blue marbles.

**PART 3** Lucy has  $z$  red marbles less than Tom.

**WHOLE 2** How many marbles does Lucy have in total?

## ORDINAL PROBLEMS

**PART 1** Tom took painting classes for  $x$  years.

**PART 2** Tom started taking painting classes at a specific age.

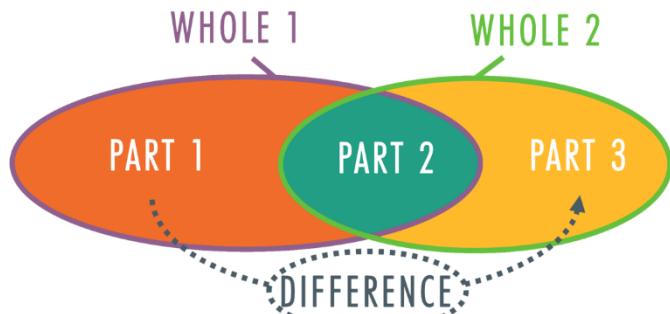
**WHOLE 1** Tom stopped taking classes at the age of  $y$ .

**PART 2** Lucy started taking painting classes at the same age as Tom.

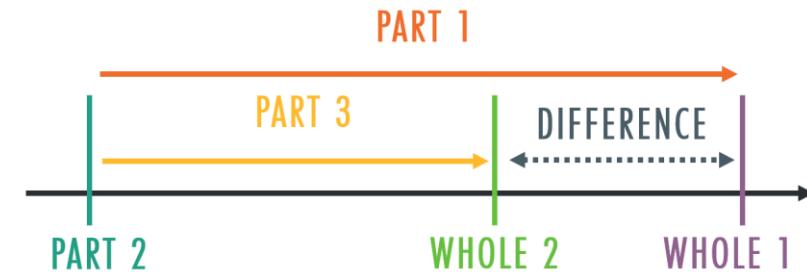
**PART 3** Lucy took painting classes during  $z$  years less than Tom.

**WHOLE 2** At what age did Lucy stop her lessons?

## CARDINAL REPRESENTATION



## ORDINAL REPRESENTATION





# COMMENT ÉVALUER LE RÔLE DES REPRÉSENTATIONS ?



## Population

- 59 enfants (5P,  $M = 11,0$  ans,  $SD = 0,36$  ans)
- 52 adultes ( $M = 26,9$  ans,  $SD = 9,7$  ans)



## Problèmes

- 6 problèmes cardinaux
- 6 problèmes ordinaux



## Tâches

- « Tentez de résoudre les problèmes en faisant le moins d'opérations possible. »
- « Faites un dessin qui pourrait aider quelqu'un d'autre à trouver la solution. »



## Hypothèses

- Les schémas vont dépendre de la nature des problèmes utilisés
- Les stratégies de résolution vont dépendre de la nature des problèmes utilisés



# COMMENT ÉVALUER LE RÔLE DES REPRÉSENTATIONS ?

Codage en double aveugle : « Y a-t-il... »

## Des traits cardinaux ?

Groupes d'éléments ?



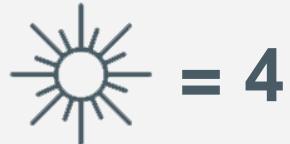
Ensembles ?



Ensembles imbriqués ?



Assignations de valeurs ?



## Des traits ordinaux ?

Axes ?



Graduations ?



Axes comparés ?



Intervalles ?



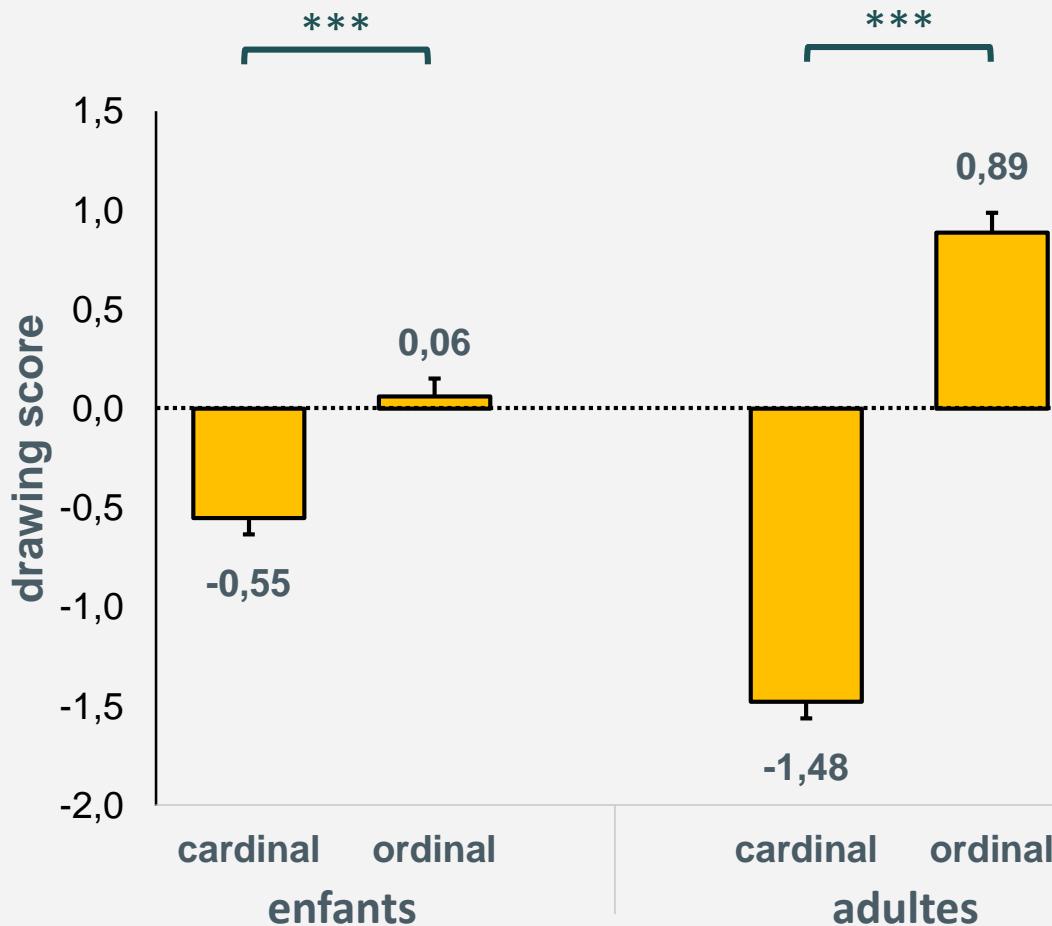
score :

– 1

+ 1



# COMMENT ÉVALUER LE RÔLE DES REPRÉSENTATIONS ?

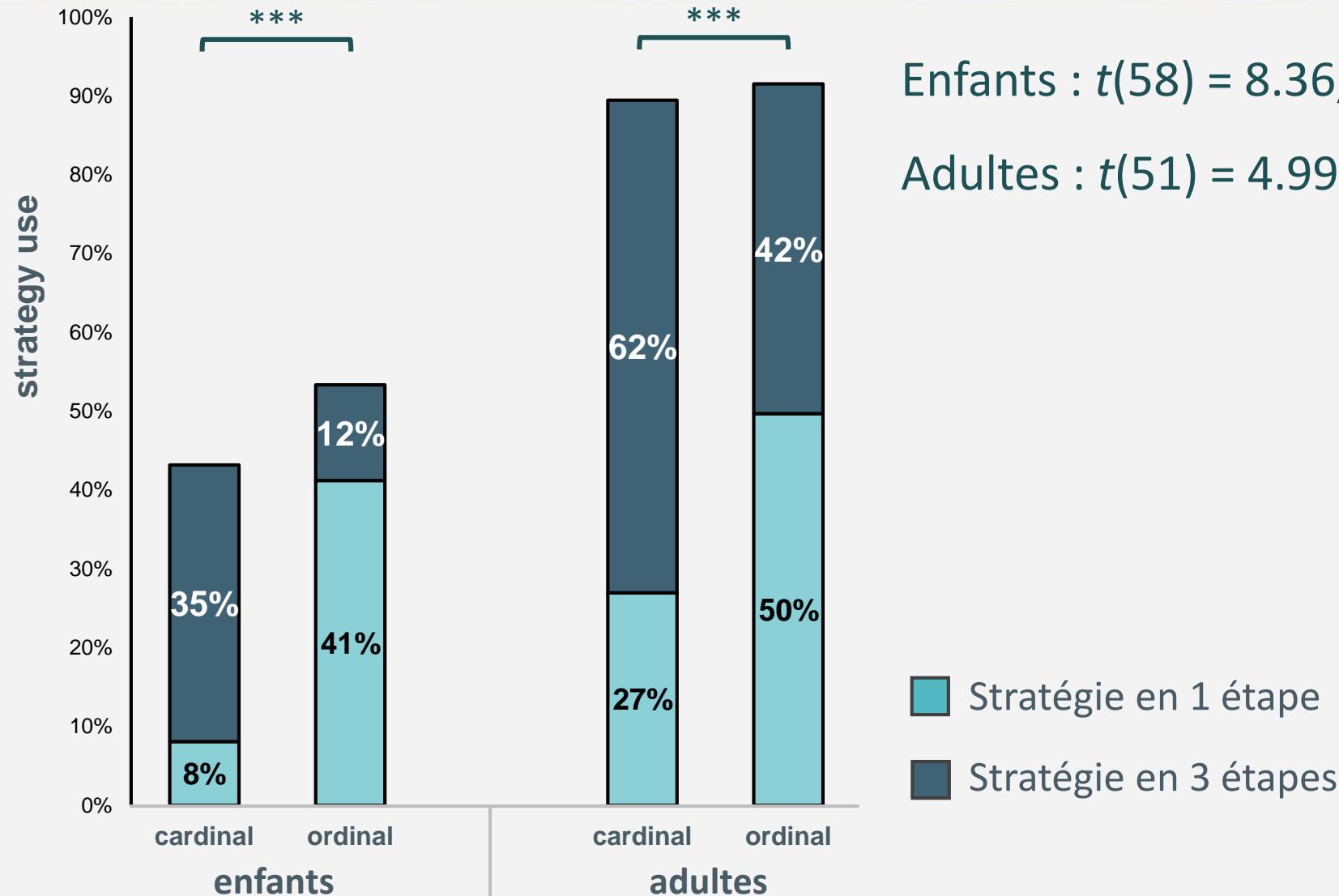


Enfants :  $t(58) = 5.61, p < .001$ , paired t-test

Adultes :  $t(51) = 12.44, p < .001$ , paired t-test



# COMMENT ÉVALUER LE RÔLE DES REPRÉSENTATIONS ?



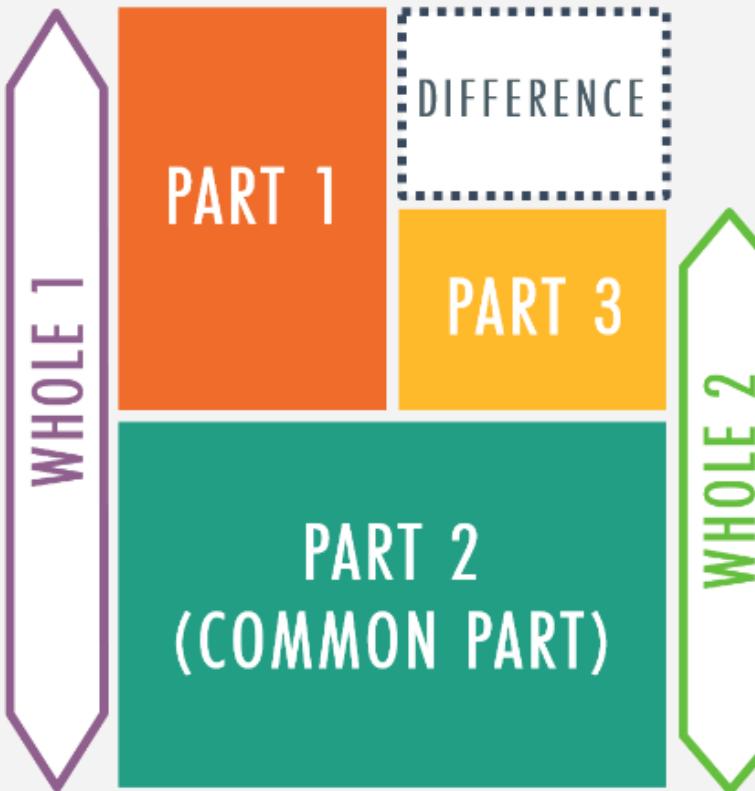
Enfants :  $t(58) = 8.36, p < .001$ , paired t-test

Adultes :  $t(51) = 4.99, p < .001$ , paired t-test



# LA CONGRUENCE SÉMANTIQUE

## NOS PRINCIPAUX OUTILS EXPÉRIMENTAUX



### CARDINAL QUANTITIES

- number of elements
  - price
  - weight

### ORDINAL QUANTITIES

- duration
- distance
- number of floors

## CARDINAL PROBLEMS

**PART 1** Tom has  $x$  red marbles.

**PART 2** Tom also has blue marbles.

**WHOLE 1** Tom has  $y$  marbles in total.

**PART 2** Tom and Lucy have the same amount of blue marbles.

**PART 3** Lucy has  $z$  red marbles less than Tom.

**WHOLE 2** How many marbles does Lucy have in total?

## ORDINAL PROBLEMS

**PART 1** Tom took painting classes for  $x$  years.

**PART 2** Tom started taking painting classes at a specific age.

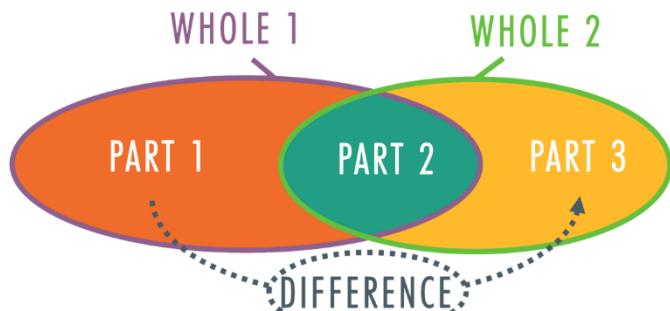
**WHOLE 1** Tom stopped taking classes at the age of  $y$ .

**PART 2** Lucy started taking painting classes at the same age as Tom.

**PART 3** Lucy took painting classes during  $z$  years less than Tom.

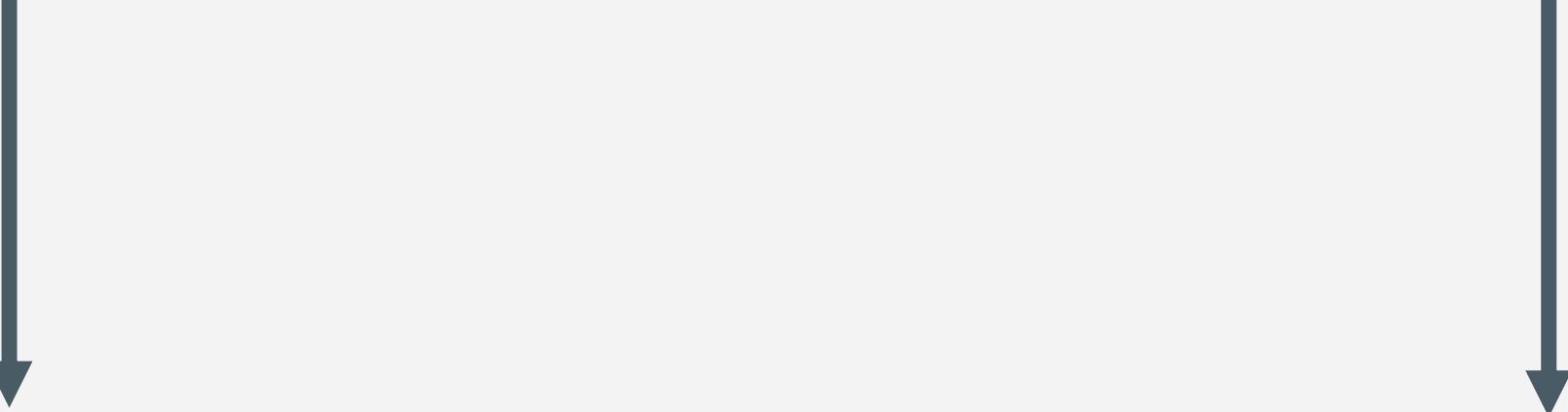
**WHOLE 2** At what age did Lucy stop her lessons?

## CARDINAL REPRESENTATION



## ORDINAL REPRESENTATION





### 3-STEP STRATEGY

$$\boxed{\text{WHOLE 1}} - \boxed{\text{PART 1}} = \boxed{\text{PART 2}}$$

$$\boxed{\text{PART 1}} - \boxed{\text{DIFFERENCE}} = \boxed{\text{PART 3}}$$

$$\boxed{\text{PART 2}} + \boxed{\text{PART 3}} = \boxed{\text{WHOLE 2}}$$

### 1-STEP STRATEGY

$$\boxed{\text{WHOLE 1}} - \boxed{\text{DIFFERENCE}} = \boxed{\text{WHOLE 2}}$$



# LA CONGRUENCE SÉMANTIQUE

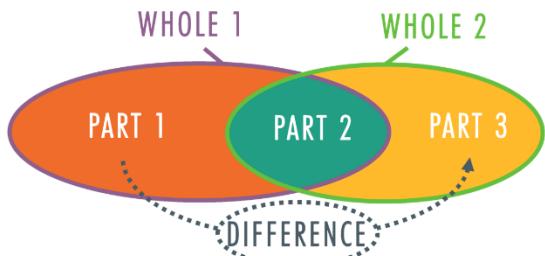
## CARDINAL QUANTITIES



number of elements  
price  
weight

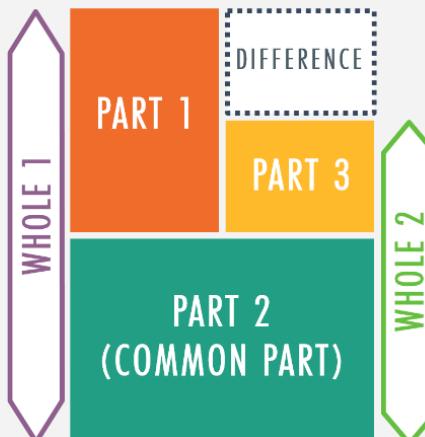


## CARDINAL REPRESENTATION



## 3-STEP COMPLEMENTATION STRATEGY

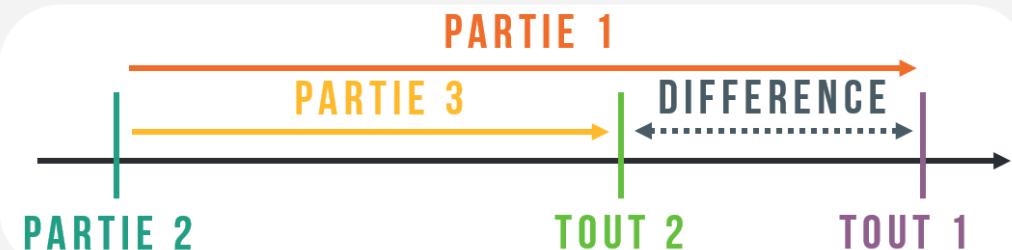
$$\begin{aligned} \text{WHOLE 1} - \text{PART 1} &= \text{PART 2} \\ \text{PART 1} - \text{DIFFERENCE} &= \text{PART 3} \\ \text{PART 2} + \text{PART 3} &= \text{WHOLE 2} \end{aligned}$$



## ORDINAL QUANTITIES



duration  
distance  
number of floors



## 1-STEP MATCHING STRATEGY

$$\text{WHOLE 1} - \text{DIFFERENCE} = \text{WHOLE 2}$$



# LA CONGRUENCE SÉMANTIQUE

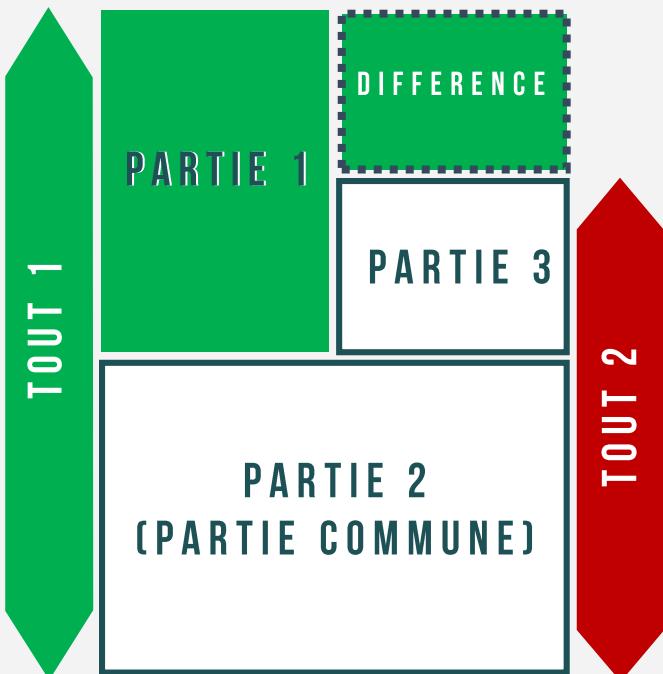
## Quelle robustesse ?



# ROBUSTESSE DES EFFETS OBSERVÉS

La question de la robustesse de ces résultats se pose

- Que se passe-t-il lorsque seule l'une des deux stratégies est disponible ?



**Solution en 3 étapes :**

$$\begin{aligned}11 - 8 &= 3 \\8 - 2 &= 6 \\3 + 6 &= 9\end{aligned}$$

**Solution en 1 étape :**

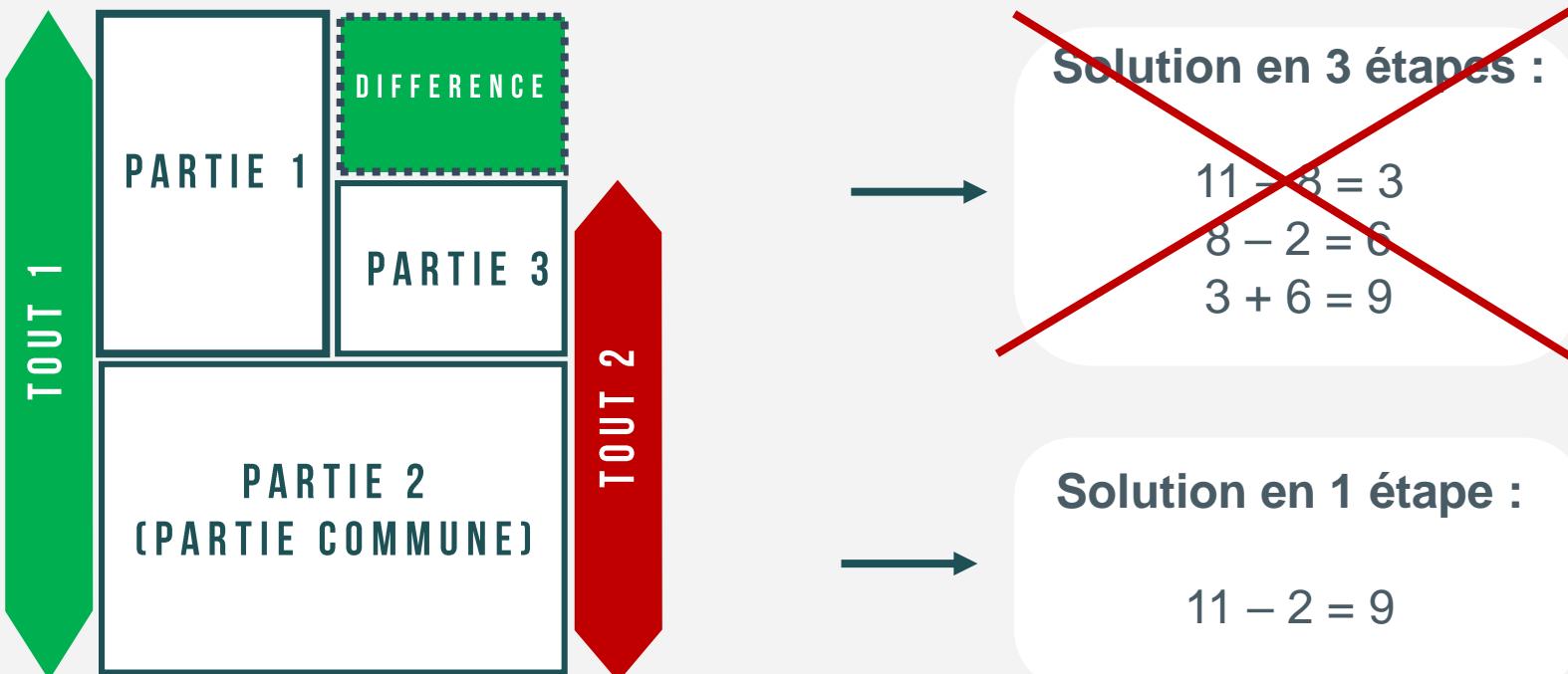
$$11 - 2 = 9$$



# ROBUSTESSE DES EFFETS OBSERVÉS

La question de la robustesse de ces résultats se pose

- Que se passe-t-il lorsque seule l'une des deux stratégies est disponible ?





# UN PROBLÈME CARDINAL ALTÉRÉ

PARTIE 1

Mehdi a **8** billes rouges.

PARTIE 2

Il a aussi des billes bleues.

TOUT 1

En tout, Mehdi a 11 billes.

PARTIE 2

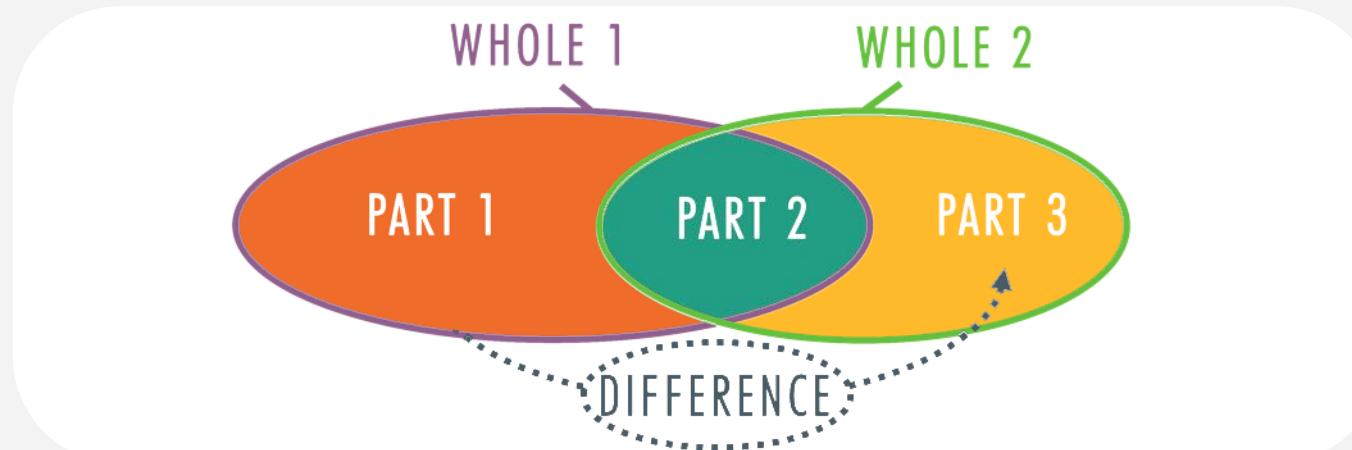
Charlène a autant de billes bleues que Mehdi, et des billes jaunes.

PARTIE 3

& **DIFFERENCE** Charlène a 2 billes jaunes de moins que Mehdi n'a de billes rouges.

TOUT 2

En tout, combien Charlène a-t-elle de billes ?



Solution en 3 étapes :

$$\begin{aligned} 11 - ? &= \dots \\ 8 - 2 &= 6 \\ \dots + 6 &= 9 \end{aligned}$$



# UN PROBLÈME CARDINAL ALTÉRÉ

PARTIE 1

Mehdi a **des** billes rouges.

PARTIE 2

Il a aussi des billes bleues.

TOUT 1

En tout, Mehdi a 11 billes.

PARTIE 2

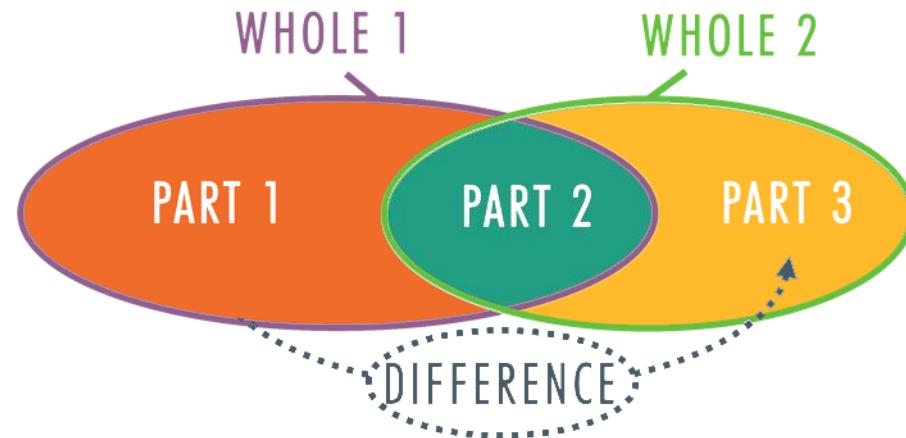
Charlène a autant de billes bleues que Mehdi, et des billes jaunes.

PARTIE 3

& **DIFFERENCE** Charlène a 2 billes jaunes de moins que Mehdi n'a de billes rouges.

TOUT 2

En tout, combien Charlène a-t-elle de billes ?



Solution en 3 étapes :

$$\begin{aligned} 11 - ? &= \dots \\ 8 - 2 &= 6 \\ \dots + 6 &= 9 \end{aligned}$$



# UN PROBLÈME ORDINAL ALTÉRÉ

PARTIE 1

Tom a suivi des leçons de piano pendant **8 années**.

PARTIE 2

Tom avait commencé ses leçons à un certain âge.

TOUT 1

Tom a arrêté de suivre des leçons de piano à l'âge de 11 ans.

PARTIE 2

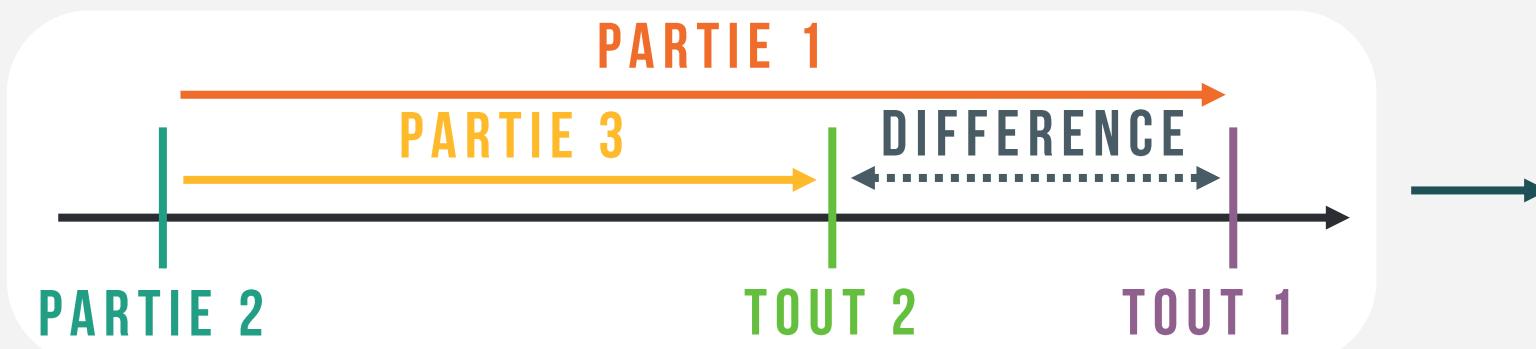
Tom et Lucie avaient commencé à suivre des leçons de piano au même âge.

PARTIE 3

& DIFFERENCE Lucy a suivi des leçons de piano durant 2 ans de moins que Tom.

TOUT 2

À quel âge Lucie a-t-elle arrêté de suivre des leçons de piano ?



Solution en 1 étape :

$$11 - 2 = 9$$



# UN PROBLÈME ORDINAL ALTÉRÉ

PARTIE 1

Tom a suivi des leçons de piano pendant **plusieurs années**.

PARTIE 2

Tom avait commencé ses leçons à un certain âge.

TOUT 1

Tom a arrêté de suivre des leçons de piano à l'âge de 11 ans.

PARTIE 2

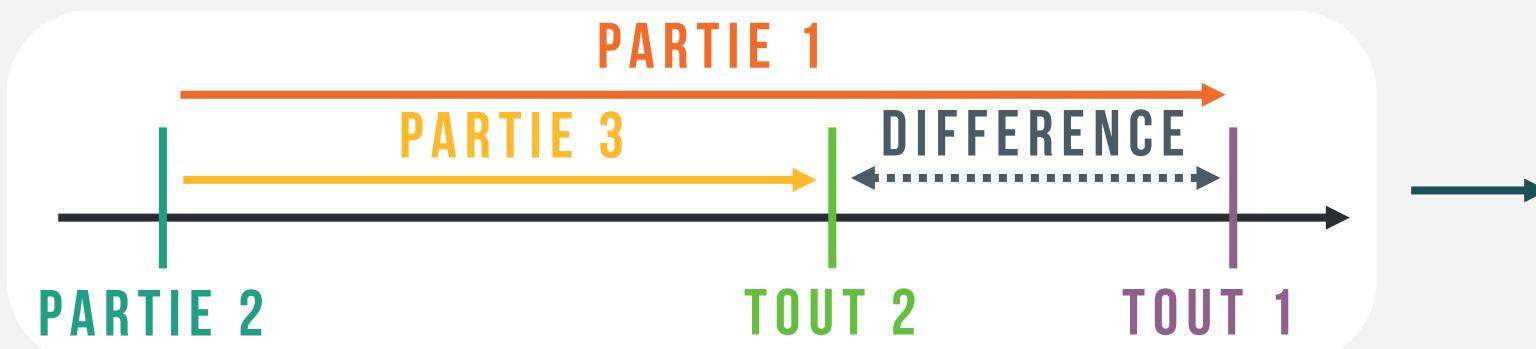
Tom et Lucie avaient commencé à suivre des leçons de piano au même âge.

PARTIE 3

& **DIFFERENCE** Lucy a suivi des leçons de piano durant 2 ans de moins que Tom.

TOUT 2

À quel âge Lucie a-t-elle arrêté de suivre des leçons de piano ?



Solution en 1 étape :

$$11 - 2 = 9$$



# ROBUSTESSE DES EFFETS OBSERVÉS

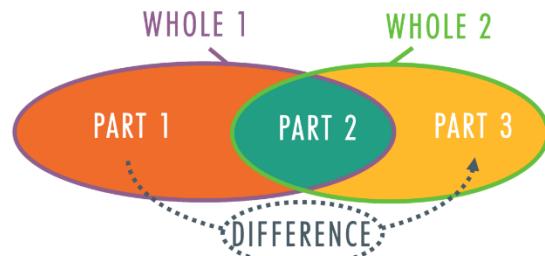
## CARDINAL QUANTITIES



number of elements  
price  
weight

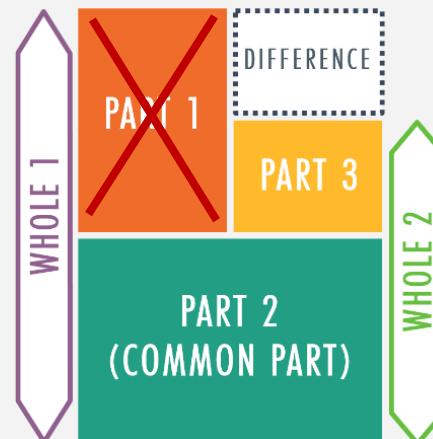


## CARDINAL REPRESENTATION



## 3-STEP COMPLEMENTATION STRATEGY

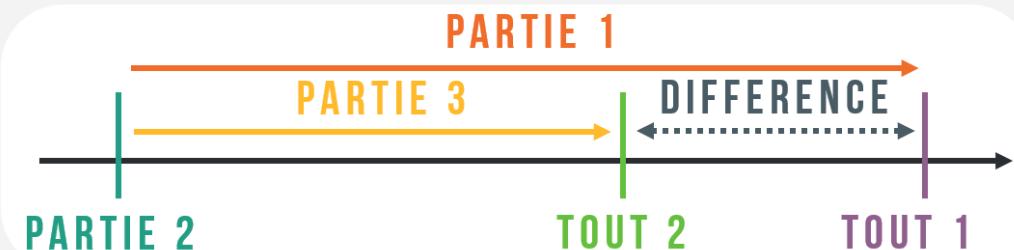
$$\begin{aligned} \text{WHOLE 1} - \text{PART 1} &= \text{PART 2} \\ \text{PART 1} - \text{Ddifference} &= \text{PART 3} \\ \text{PART 2} + \text{PART 3} &= \text{WHOLE 2} \end{aligned}$$



## ORDINAL QUANTITIES



duration  
distance  
number of floors



## 1-STEP MATCHING STRATEGY

$$\text{WHOLE 1} - \text{Ddifference} = \text{WHOLE 2}$$

Gros, Sander & Thibaut, 2016



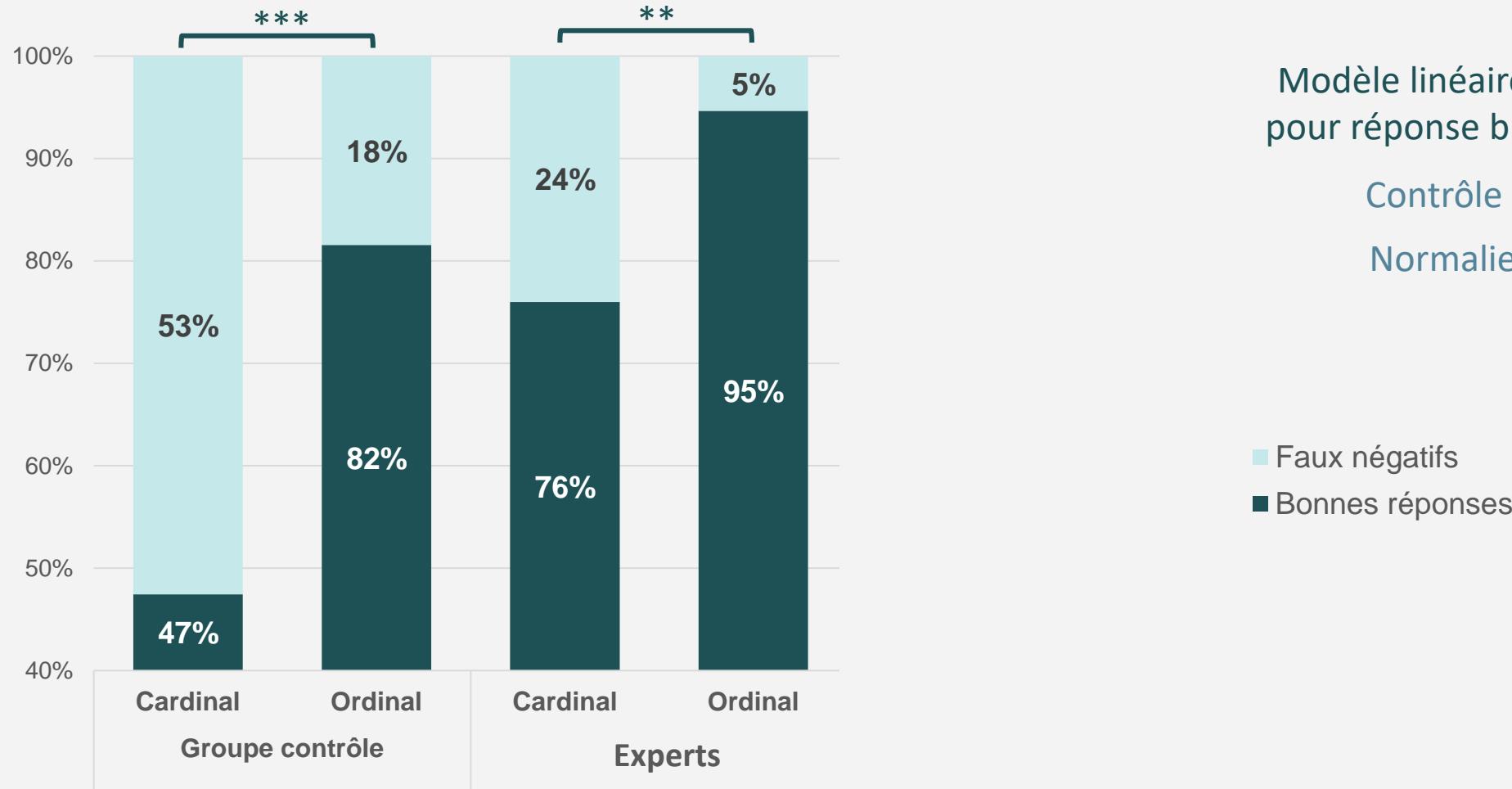
# ÉTUDE CHEZ L'EXPERT

- ) Populations
  - ) Experts
    - ) Sujets normaliens en science (ENS 1<sup>ère</sup> française, 5<sup>ème</sup> mondiale au classement de Shanghai normalisé par la taille, compte 10 médailles fields et 13 prix nobels parmi ses alumni)
    - ) 25 sujets ( $M = 3,35$ ,  $SD = 7,82$ )
  - ) Groupe contrôle
    - ) Adultes tout venant recrutés en région parisienne. Principalement étudiants.
    - ) 85 sujets ( $M = 21,35$ ,  $SD = 2,60$ )
- ) Tâche
  - ) Identification des problèmes dont la solution proposée est correcte :
    - 14 – 2 = 12 ; Lucie arrive au 12<sup>ème</sup> étage
    - Il n'y a pas assez d'informations pour trouver la solution
  - ) Mesure des taux de bonnes réponses et des temps de réponse.



# ÉTUDE CHEZ L'EXPERT

Taux de bonnes réponses en fonction de la sémantique attachée aux problèmes



Modèle linéaire généralisé à effets mixtes pour réponse binaire (régression logistique)

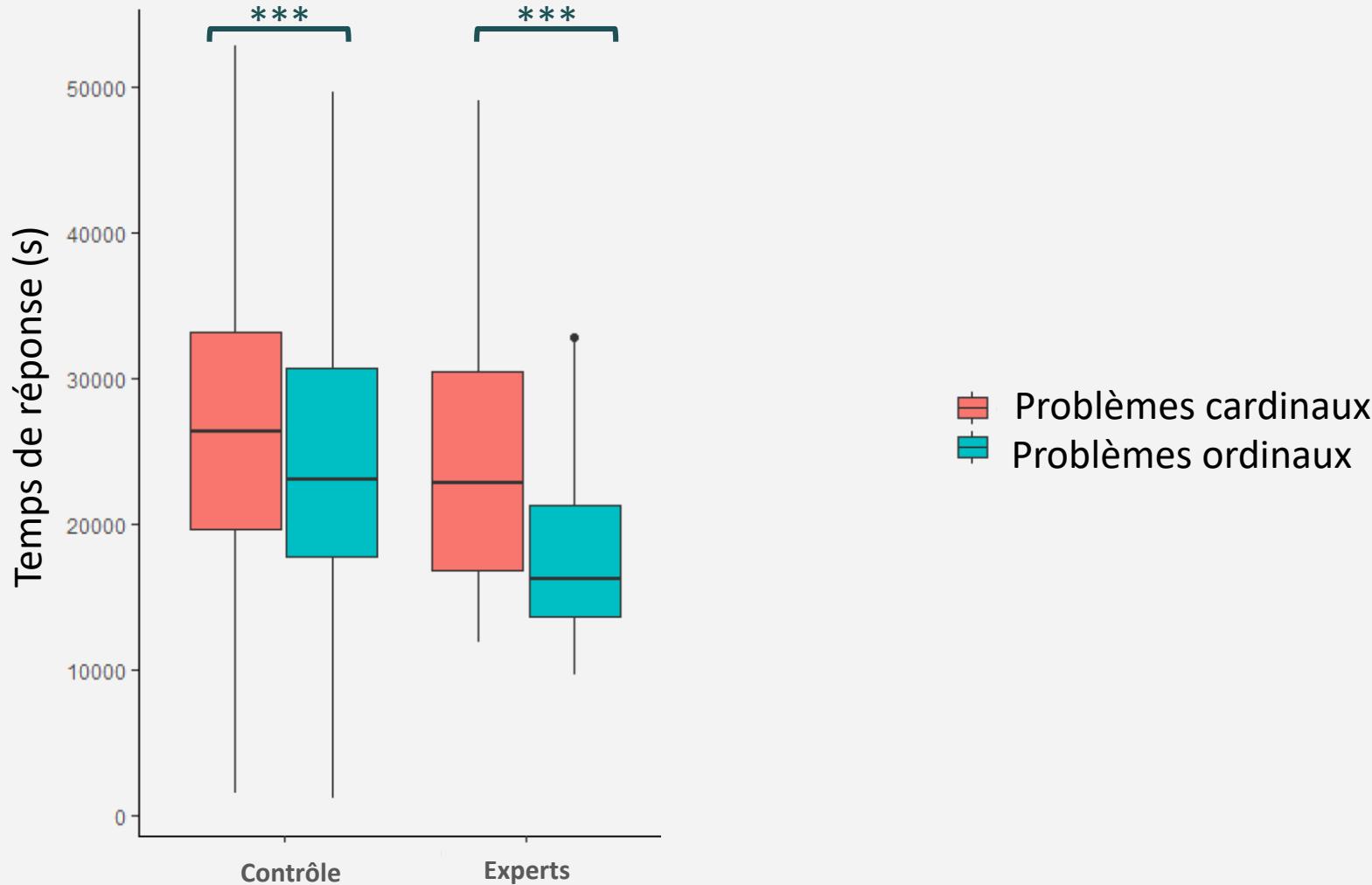
Contrôle :  $z=7.84$ ,  $p<.0001$  \*\*\*

Normaliens :  $z=2.99$ ,  $p=.0028$  \*\*



# ÉTUDE CHEZ L'EXPERT

## Temps de réponse pour les problèmes résolubles correctement résolus



Modèle linéaire à effets mixtes

Contrôle :  $\chi^2(1)=14.28$ ,  $p<.0001$  \*\*\*

Experts :  $\chi^2(1)=30.69$ ,  $p<.0001$  \*\*\*



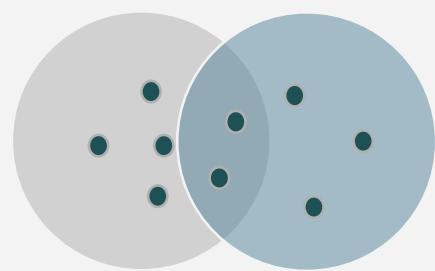
# ÉTUDE CHEZ L'EXPERT

- Les effets de congruence sémantique restent robustes même chez des mathématiciens de haut niveau
- Les temps de réponse indiquent que les experts n'accèdent pas directement à une représentation complètement décontextualisée : nécessité d'un recodage
- Souligne l'importance de développer des stratégies éducatives visant à dépasser ces effets

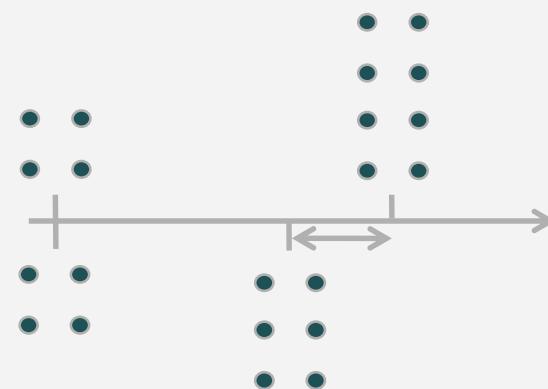


# FACILITER LE RECODAGE ?

- Une piste éventuelle : le recours à des problèmes hybrides, compatibles avec les deux interprétations.



Cardinal



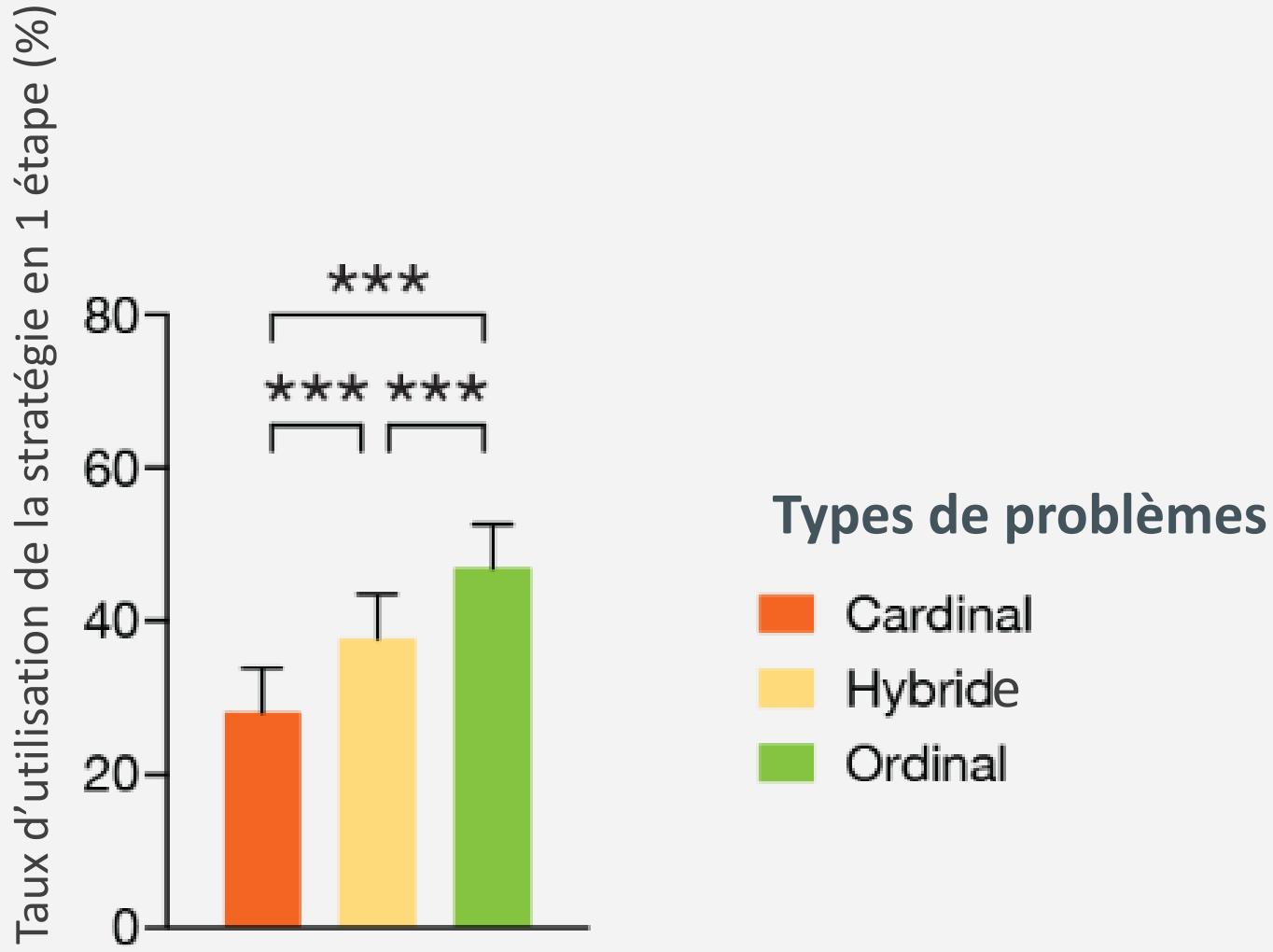
Hybride



Ordinal



# FACILITER LE RECODAGE ?





# CONCLUSION

- Nos connaissances sur le monde sont sources d'inférences, mais aussi d'interférences lors de la résolution de problèmes arithmétiques à énoncés verbaux
- On relève ainsi des effets marqués des connaissances du monde sur la représentation et la résolution des problèmes
- Le recodage sémantique, enjeu essentiel pour dépasser ces effets
- Vers le développement de nouvelles stratégies éducatives ?



# MERCI DE VOTRE ATTENTION

## AVEZ-VOUS DES QUESTIONS ?