

# Aide a la résolution de problème

Michel MANTE

# Sommaire

## **1. Généralités**

**1.1 Caractéristiques d'un problème**

**1.2 Comment cherche-t-on un problème ?**

**1.3 De la construction de la représentation de l'énoncé  
à la procédure de résolution.**

**1.4 Les stratégies de recherche.**

## **2. La résolution de problèmes et les moyens d'enseignement 1/8**

## **3 . A propos de la pratique du problème ouvert.**

# 1. Généralités

## 1. 1 Caractéristiques d'un problème

Définition 1 : **Nous appellerons problème** (dans l'enseignement) toute **tâche** proposée à l'élève, constituée de **données**, de **contraintes** (éventuelles) et **d'un but à atteindre**. Pour atteindre ce but, l'élève doit mettre en place une suite d'opérations ou d'actions (qu'on appellera « procédure ») qui ne sont pas immédiatement disponibles pour lui.

**Definition 2 (TAD) : Nous appellerons problème** (dans l'enseignement) toute **tâche** proposée à l'élève, constituée de **données**, de **contraintes** (éventuelles) et **d'un but à atteindre**. Pour atteindre ce but, l'élève doit mettre en place une suite ordonnée de « tâches élémentaires ». La construction de cette suite ordonnée (qu'on appellera procédure) n'est **pas immédiatement disponible pour lui**.

**« Tâche élémentaire »** : Tâche dont l'exécution passe par une (des) technique(s) automatisée(s) ou rapidement mobilisable(s) par l'élève.

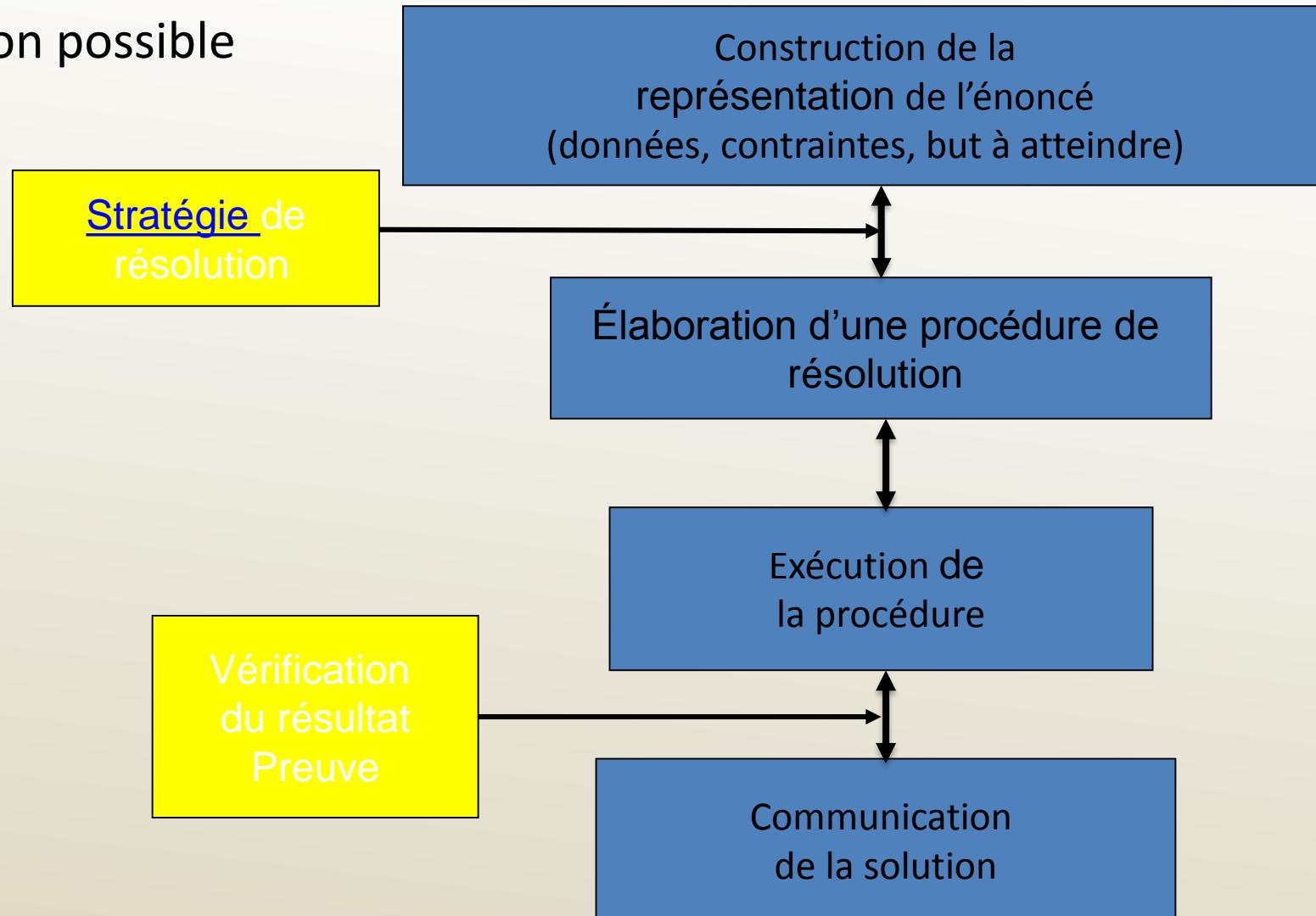
Pour un **exercice**, il y a des conditions initiales et un but à atteindre, comme pour un **problème**. Par contre, contrairement à ce qui se passe pour un problème, face à un exercice l'élève connaît la procédure à mettre en place. Il doit juste la mettre en œuvre.

Conséquences :

- Une tâche peut être un problème pour un élève et ne pas l'être pour un autre.
- Une tâche, pour le même élève, peut être un problème à un moment donné et ne plus l'être quelque temps plus tard.
- La spécificité des « problèmes » qui peuvent se résoudre avec une seule opération.

## 1. 2 Comment cherche-t-on un problème ?

Une modélisation possible

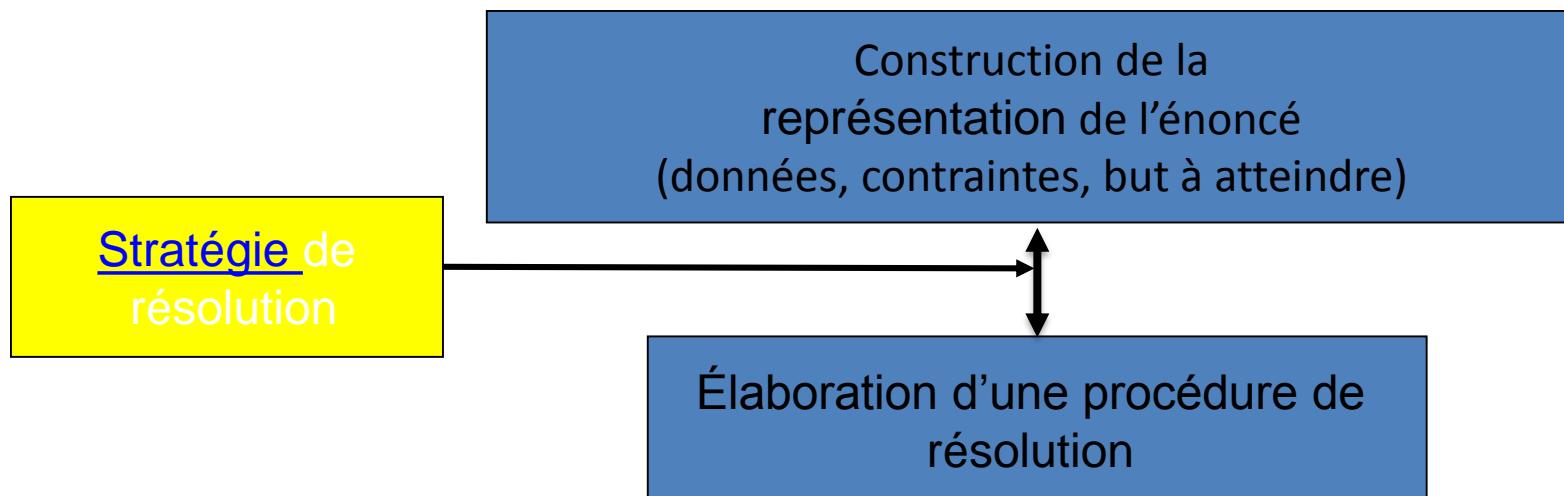


On peut ensuite pour chaque étape :

- La caractériser;
- Identifier les difficultés rencontrés par les élèves (erreurs, blocages)
- Identifier des pistes pour aider les élèves à dépasser ces difficultés.

Ce travail a permis d'intégrer dans les nouveaux moyens la mise en place d'aide à la résolution de problèmes : ARP et RS (cf. § 2).

Ici je me propose de m'arrêter sur une étape : Le passage de la construction de la représentation du problème à la procédure de résolution.



## 1. 3 De la représentation du problème à la procédure de résolution.

Élaboration d'une procédure de résolution

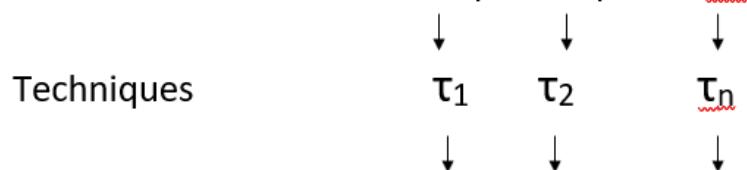
**Procédure de résolution** : suite ordonnée de « **tâches élémentaires** » qui peuvent s'exécuter en utilisant une(des) technique(s) qui permettent d'atteindre le but, en s'appuyant sur les données et en prenant en compte les éventuelles contraintes.

Les tâches sont dites « élémentaires » car elles s'exécutent en utilisant des **techniques** automatisées (ou rapidement mobilisables) par le sujet.

Dans un problème les « tâches élémentaires » et leur ordre sont à trouver par le sujet.

Procédure de résolution

Tâches « élémentaires » : T<sub>1</sub> puis T<sub>2</sub> puis ... T<sub>n</sub>



Technologie      Θ<sub>1</sub>      Θ<sub>2</sub>      Θ<sub>n</sub>

A chaque technique est associé **un savoir conditionnel** (savoir quand).

- Pour certaines techniques **ce savoir conditionnel est parfaitement établi et facilement identifiable par l'élève.**

Exemple : La technique associée au type de tâches « Comparer des nombres décimaux ».

- Pour d'autres techniques ce n'est pas le cas. Par exemple les techniques « expertes » d'exécution des tâches de résolution de « problèmes » qui peuvent se résoudre à l'aide d'une seule opération.

Exemple : Tâche 4

Ici on pourrait parler de schème associé à une opération ou **schème d'opération (exemple schème de l'addition).**

PIAGET J. : "*Un schème est la structure ou l'organisation des actions telles qu'elles se transfèrent ou se généralisent lors de la répétition de cette action en des circonstances semblables ou analogues*"

Comment les élèves parviennent-ils à mobiliser directement la technique experte ?

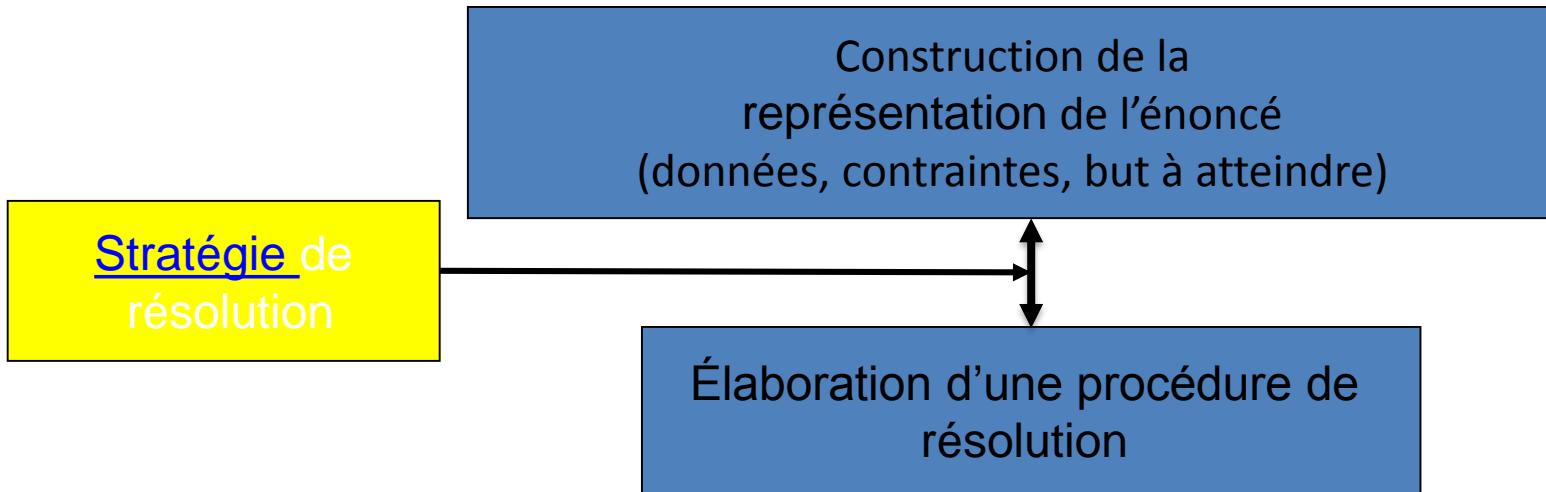
- Passage par une tâche contextualisée, précédemment rencontrée (analogie).
- Passage mentalement par une technique non experte (non exécutée).
- Passage par un schéma (éventuellement mental)
- Passage par le lien avec une tâche en partie contextualisée
- Passage par une écriture symbolique
- Passage par un ordre de grandeur du résultat
- Passage par des mots inducteurs
- Passage par certaines règles du contrat didactique.

Les deux dernières techniques sont évidemment « dangereuses » et sont à bloquer.

**Difficulté des élèves :**

- Blocage
- Utilisation de « stratégies scolaires » : mots inducteurs, certaines règles du contrat didactique

## 1. 4 Les stratégies de résolution de problèmes



**Stratégie** : On appelle stratégie de résolution de problèmes (dans la suite on parlera seulement de stratégie) le processus qui permet, à partir de la représentation d'un problème (ou du début de la construction de cette représentation), de trouver une procédure de résolution.

# Différentes stratégies utiles pour résoudre des problèmes scolaires

- **Le chaînage avant**, appelé aussi « démarche montante » (ou « working forward » ou « l'analyse des fins et moyens » ou « **Partir des données** ») consiste à tirer, à partir des données, des conséquences (effectives ou potentielles) puis, avec ces conséquences et d'autres données, à tirer de nouvelles conséquences et ainsi de suite jusqu'à obtenir la réponse au problème.  
Pour cela on s'appuie sur des techniques (ou schèmes des opérations) associées à des taches élémentaires.

La mise en place de cette stratégie suppose que l'élève :

- A à sa disposition des techniques automatisées (ou rapidement mobilisables).
- Dans le cas de problèmes liés à un contexte social, il a une bonne connaissance de ce contexte.

Avantage :

- Allège la charge de travail pour la construction de la représentation de l'énoncé.

Inconvénients :

- Ne prend pas en compte le but du problème.
- Dans les problèmes dans lesquels il y a de nombreuses données (dont certaines sont inutiles) les conséquences qu'on peut tirer des données sont très(trop) nombreuses.

Difficultés des élèves :

- Certaines techniques, utiles pour résoudre le problème, ne sont pas maîtrisées.
- Dans le cas de problèmes liés à un contexte social l'élève n'est pas familier avec ce contexte.
- L'élève ne garde pas en mémoire ce que représentent les différents calculs qu'il effectue dans le cadre du chaînage avant. C'est que HOUDEMENT C. appelle un **défaut de qualification**.

- **Le chaînage arrière** (appelé aussi « démarche descendante » ou « working backwards ou « **Partir de la question** ») ) consiste à partir du but à atteindre pour :
  - soit identifier ce qu'il faudrait connaître pour atteindre ce but, puis continuer ainsi jusqu'à atteindre une (des) donnée(s). Dans le cas des problèmes liés à un contexte social, cette stratégie comme le chaînage avant, nécessite une très bonne connaissance du contexte social du problème.
  - soit, pour certains problèmes, à identifier différentes méthodes qui permettent d'atteindre le but de l'énoncé : « Quelle méthode je peux utiliser pour calculer ... ? », « Parmi ces méthodes laquelle choisir ? »... C'est le cas des problèmes de calculs de longueurs, d'aires par exemple.

Avantage : Prise en compte du but à atteindre.

Inconvénients : Nécessite, dans le cas de problèmes liés à un contexte social, de parfaitement bien connaître ce contexte.

Peut entraîner une surcharge cognitive.

Difficultés des élèves :

- Certains peuvent ne pas connaître suffisamment le contexte social associé au problème.
- Les élèves « survalorisent » la stratégie du chainage avant car :
  - La question vient généralement en fin d'énoncé.
  - Dans la rédaction de la solution d'un problème, généralement c'est le chainage avant qui est privilégié.
  - C'est généralement sur cette stratégie que l'enseignant s'appuie pour aider les élèves bloqués.

- **Le tâtonnement réfléchi** (appelé aussi essai-erreur ou « faire des essais en tenant compte de ses erreurs ») consiste à faire des essais pour tester une solution puis, en fonction des résultats, à faire de nouveaux essais.

Contrairement au simple tâtonnement, les essais sont fonction des résultats précédents et ne sont pas le fruit du hasard.

Avantage : Pour certains problèmes c'est la seule méthode accessible aux élèves.

Inconvénient : Lorsqu'on découvre une solution, on ne peut être sûr qu'il n'y en a pas d'autres.

Difficultés des élèves :

- Accepter de s'engager dans cette stratégie. Pour certains élèves ce n'est pas faire des maths !
- Difficulté à tenir compte du résultat d'un essai pour l'essai suivant.

- **L'étude systématique des cas** (appelée aussi la méthode du fractionnement ou de la réduction des cas ou split-half method ou **étudier toutes les possibilités de solution**) consiste à prouver qu'il y a un nombre fini de possibilités de solutions puis à tester chacune des possibilités. Le test d'une possibilité peut consister à essayer de mettre en évidence qu'elle conduit ou non à une contradiction.

Avantage : Pour certains problèmes c'est la seule méthode accessible aux élèves.

Difficultés des élèves :

- Accepter de s'engager dans cette stratégie. Pour certains élèves ce n'est pas faire des maths.
- Réduire le nombre de cas.
- Arriver à prouver que certains cas sont impossibles.

- **Faire des essais conjecturer, tester, prouver** (ou « démarche scientifique » ou «chercher une règle valable dans tous les cas »)

Avantage : Pour certains problèmes c'est la seule méthode accessible aux élèves

Difficultés des élèves :

- Accepter de s'engager dans cette stratégie. Pour certains élèves ce n'est pas faire des maths
- Rassembler les résultats des essais pour induire une méthode, une règle, ...
- Induire une règle générale
- Sentir la nécessité de la mise en place d'une preuve
- Prouver la conjecture

- **La modélisation** : Cette stratégie consiste à « *associer à une situation complexe un modèle qui la rend intelligible en la réduisant à ses éléments essentiels* » (cf. Lexique du PER MSN, p. 57). Les modèles peuvent être des schémas, diagrammes, des outils mathématiques, etc. Ainsi, comme le précise BURGERMEISTER P. F. et DORIER J. L. la modélisation met en présence deux systèmes. Dans l'enseignement, le système qui est donné au départ aux élèves renvoie généralement à une situation concrète (système 1) et l'autre aux mathématiques (système 2). La modélisation prend son sens évidemment si l'élève dans la situation 1 ne peut pas résoudre de façon pragmatique le problème.

Cette modélisation passe souvent par la **schématisation** : Rappelons que « *dans un schéma, la réalité ne se trouve pas représentée dans tous ses détails, seuls certains traits sont conservés, et certains rapports évoqués. Un schéma n'est en aucune façon une représentation fidèle en un sens absolu : il n'est compréhensible que si on en possède la clé explicative. Ce qu'on exprimera en disant que l'adéquation du schéma à son objet est symbolique* ». (GONSETH, 1932, p. 234, cité par BURGERMEISTER P. F. et DORIER J. L op. cit.).

On ne parle pas ici de schémas mentaux mais de schémas graphiques.

Difficultés des élèves :

- Faire le lien entre les deux niveaux.
- Par rapport à la schématisation :
  - certains élèves hésitent à utiliser la schématisation car ils estiment qu'ils dessinent mal
  - certains élèves schématisent un énoncé en s'attardant sur l'aspect réaliste des objets ou personnages dessinés et perdent le fil de la réalisation du problème
  - certains élèves en schématisant un énoncé ne mettent pas en avant l'aspect essentiel de l'énoncé.

**Attention ! Pour certains problèmes il y a plusieurs stratégies possibles.**

Des difficultés générales en lien avec les stratégies : « **Les stratégies scolaires** ».

Quelques exemples :

- **L'élève applique certaines règles du contrat didactique**, qui peuvent, si on n'y prend pas garde, lui permettre de résoudre le problème correctement.
- **L'élève utilise des mots inducteurs, des indices déclencheurs** : s'il y a le mot « plus » dans l'énoncé, il effectue une addition, ....
- **L'élève opère avec les nombres de l'énoncé en les prenant dans l'ordre**, et en choisissant l'opération à effectuer en fonction des mots inducteurs.

## Enseigner des stratégies ?

Les stratégies jouent un rôle très important dans la résolution de problèmes.

Elles ne laissent généralement pas de trace et sont source de difficultés.

Il est donc nécessaire d'enseigner ces stratégies.

Comment ?

## Conclusion

Partant du principe qu'il ne suffit pas de donner aux élèves des problèmes à chercher puis de corriger ces problèmes pour que les élèves apprennent à résoudre des problèmes, il est nécessaire de mettre en place des **aides à la résolution de problèmes**.

Mais comment « Aider ni trop, ni trop peu ? » (Cf. JULO).

Partant d'un schéma de modélisation de la recherche de problèmes, on a essayé, pour chaque étape de ce schéma, d'identifier les difficultés que beaucoup d'élèves rencontrent afin de dégager des pistes d'aides .

## **2. La résolution de problèmes et les moyens d'enseignement 1/8**

Dans ces moyens les élèves vont rencontrer des problèmes de mathématiques :

- dans chaque chapitre : dans les activités d'introduction et dans les problèmes de synthèse et de transfert.
- Dans les pages ARP (Aide à la résolution de problèmes) regroupées en fin de livre
- Dans le domaine RS (Recherche et stratégie)

### **2. 1 Aide à la construction de la représentation de l'énoncé**

- Choix d'énoncés qui s'appuient sur un contexte suffisamment familier de l'élève → Dans chaque chapitre.
- Un travail sur la caractérisation d'un énoncé de problème et les étapes de la résolution d'un pb (?) → ARP
- Un travail sur les mots et expressions fréquemment utilisés dans les énoncé de problèmes → ARP
- Un travail sur la schématisation de certaines informations dans un énoncé → ARP

## 2.2 Aide l'élaboration de procédures

- Aide à l'automatisation de techniques → Dans les chapitres (Entrainement)
- Aide à l'acquisition des schèmes des opérations → Dans les chapitres.
  - Pour chaque opération un travail progressif permet le passage des procédures « personnelles » aux procédures expertes en jouant sur les variables didactiques des situations.
  - Lors de la mise en place des procédures expertes, dans les commentaires les rédacteurs incitent les enseignants à faire un travail d'aide à l'explicitation des stratégies que les élèves qui mettent en place la procédure, utilisent (Retour métacognitif) → Institutionnalisation « locale ».

## 2.3 Aide à l'appropriation de stratégies

***Aide à la remise en cause de stratégies scolaires*** → ARP et dans les chapitres.

- Aide à la remise en cause de certaines règles du contrat didactique
- Aide à la prise de conscience que certains mots peuvent être piégés

***Aide à l'appropriation de stratégies*** → RS (sauf pour le chainage avant arrière qui sont dans les ARP) :

- On identifié les stratégies que l'on souhaite que els élèves s'approprient. Cf. § 2.3
- Pour une stratégie donnée on a choisi un lot de problèmes pour lesquels cette stratégie est la plus efficace (pour les élèves).
- Mise en place en classe :

## **1<sup>er</sup> temps : 1<sup>ère</sup> rencontre de l'élève avec la stratégie.**

Pour cela on propose un problème qui nécessite, pour le résoudre, de mobiliser la stratégie que l'on souhaite enseigner.

## **2<sup>e</sup> temps : Nouvelle rencontre de l'élève avec cette stratégie et**

**institutionnalisation** Quelque temps plus tard, l'enseignant propose un 2<sup>e</sup> problème qui se résout en mettant en place la stratégie que l'on veut enseigner. Il peut demander aux élèves qui bloquent de faire le lien avec un problème précédemment résolu. A la fin de ce temps, l'enseignant peut inviter les élèves à identifier la stratégie qui leur a permis de résoudre le problème et, si cela n'a pas été fait, il peut les aider à faire le lien avec le problème précédent. A ce moment la stratégie peut être institutionnalisée.

## **3<sup>e</sup> temps : Réinvestissement.** Ensuite, au cours de l'année scolaire, un ou deux

autres problèmes nécessitant la mise en place de cette stratégie peuvent être proposés aux élèves. Il est important l'année suivante de réactiver cette stratégie.

## **2. 4 Aide à l'exécution de la procédure**

- Travail sur l'automatisation ou la « redécouverte » rapide de techniques → Dans les chapitre (Entrainement).

## **2. 5 Aide à la mise en place d'outils de vérification et de preuves**

- *Les outils de vérification* → ARP et les chapitres

- *Les outils de preuve* → En chantier.

## **2.6 Aide à l'appropriation des critères de réussites de la communication de la solution**

Tâches à erreurs → ARP

### **3. A propos de la pratique du problème ouvert**

**Objectif** : Développer une stratégie de recherche « Essayer, conjecturer, tester, prouver » qu'on a appelée « Démarche scientifique ».

**Cette pratique se caractérise par :**

**- Le choix d'un type de pb :**

- Enoncé court
- l'énoncé n'induit ni la méthode, ni la solution
- le pb se trouve dans un domaine conceptuel familier de l'élève.

**- Le choix d'une gestion de classe :**

- 1<sup>er</sup> temps : Travail individuel
- 2<sup>e</sup> temps : Travail en sous-groupe
- 3<sup>e</sup> étape : Mise en commun et débat.
- 4<sup>e</sup> étape : Conclusion (cf. p 46 Les pratiques du pb ouvert Ed. SCEREN).

Il y a l'idée d'aider les élèves à remettre en cause certaines règles du contrat didactique. En particulier celle qui consiste à penser que résoudre un problème c'est trouver la succession des opérations mathématiques à effectuer.

Il y a l'idée d'aider les élèves à s'approprier une stratégie de recherche, celle que l'on appelle maintenant : « chercher une règle valable dans tous les cas ».

Par contre :

- Il n'y a pas volonté d'institutionnalisation et d'entraînement systématique à cette stratégie
- Certains « problèmes ouverts » ne mobilisent pas forcément cette stratégie.
- On n'a pas identifier d'autres stratégies qui sont pourtant présentent à travers certains pb ouverts proposés.