



DIMAGE

5 octobre 2017

Narrer pour comprendre et comprendre pour narrer: un essai d'analyse d'un jeu de tâches entre futurs enseignants et élèves du primaire

Christine Del Notaro

christine.delnotaro@unige.ch

Plan

JEU DE TÂCHES

- ▶ Origine et mise en évidence des apports du jeu de tâches

NARRATION

- ▶ Restitution d'un jeu de tâches
- ▶ Genèse de l'utilisation de la notion de narration
- ▶ Processus « *règle – expérience – logique* » pour interpréter une narration

ANALYSE DES CONNAISSANCES MATHEMATIQUES

- ▶ Recours à la narration dans un dispositif de formation
- ▶ Trois inférences logiques pour interpréter les connaissances des élèves
- ▶ Les inférences logiques (*A-D-I*) dans notre schéma (*R-E-L*)
- ▶ Abduction dans l'investigation du milieu : des étudiants se piquent au jeu
- ▶ Interprétation des étudiants : analyse d'une narration

1. Le jeu de tâches, une interaction de connaissances entre expérimentateur et élèves

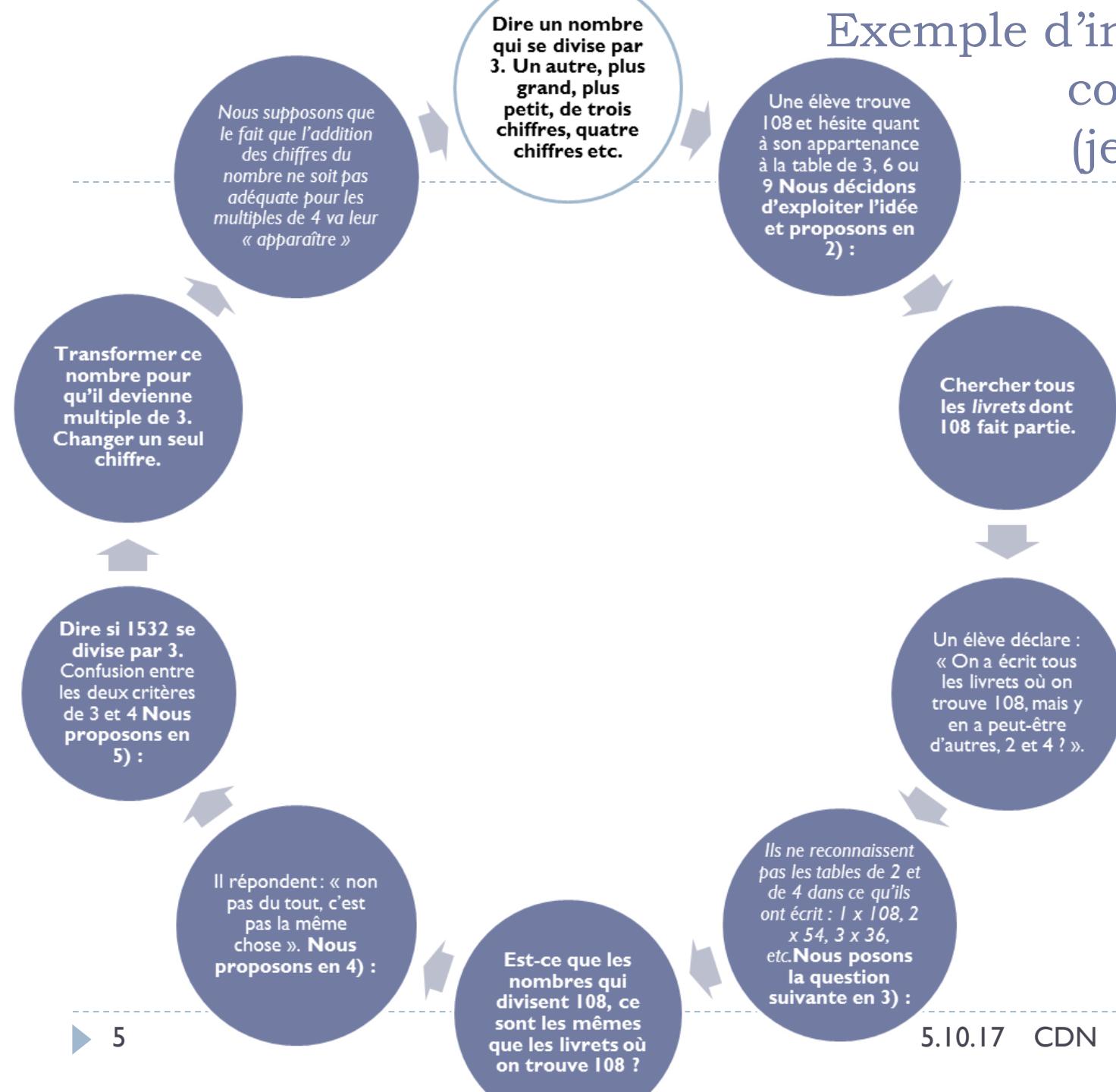
« Curiosité, imagination et détermination : voici trois qualités requises pour aborder un jeu de tâches. Qu'on soit adulte ou enfant, il n'y a pas d'âge pour se laisser prendre au jeu.»

Raffaella, Benjamin, Anthony CCEP/MAEP 2014

1. Le jeu de tâches, une interaction de connaissances entre expérimentateur et élèves

- ▶ DDMES (2003), Favre (2008), Del Notaro (2010, 2011, 2012, 2013, 2014)
- ▶ Ensemble de tâches qui découlent en principe les unes des autres sans être hiérarchisées pour autant,
- ▶ L'expérimentateur/enseignant/stagiaire qui pilote de la tâche est un élément du milieu :
 - ▶ Met en jeu ses propres connaissances pour interagir à la fois avec le milieu de la tâche et avec le milieu de l'élève
 - ▶ Anticipe un grand nombre d'actions/stratégies des élèves (*cartes du jeu de tâches*)
 - ▶ Réservoir de tâches (*cartes du jeu de tâches*) en relation avec ce que les élèves vont faire ou dire
 - ▶ Sauts par les tâches pour rester dans les tâches
 - ▶ Expérimentateur improvise aussi sur le moment

Exemple d'interaction de connaissances (jeu de tâches)



Un jeu de tâches pour ...

... investiguer
le nombre

... avancer
ensemble
dans les
connaissances

... enrichir les
pratiques des
élèves et de
l'expérим.

Restitution de ce jeu de tâches par la narration

2. La narration

« *Le narrateur emprunte la matière de sa narration soit à son expérience propre, soit à celle qui lui a été transmise. Et ce qu'il narre devient expérience pour qui l'écoute* ».

(W. Benjamin, *Le Narrateur*, 1936)

La narration
est en lien
avec
l'expérience

Idée de
circulation de
l'expérience

Interaction
entre les
expériences

Interaction
de
connaissances

2. La narration

« Par bonheur, ce qu'on appelle les « perturbations » dues à l'existence de l'observateur, lorsqu'elles sont correctement exploitées, sont les pierres angulaires d'une science du comportement authentiquement scientifique (...).

(Devereux, G. (1980). De l'angoisse à la méthode dans les sciences du comportement.)

Point de vue intimement lié à sa propre subjectivité

Implication, intrusion dans la réflexion de l'élève

Interaction comme réplique mathématique personnelle

Lien avec réponse du sujet vs tâche proposée

2. La narration : jeu de va-et-vient

- ▶ Constraint par le savoir
- ▶ Fait ressortir les connaissances de part et d'autre
- ▶ Transposition dans l'enseignement aux futurs enseignants primaires
 - « chercheur, objet de savoir, élève »
 - « chercheur, objet de savoir, étudiant »,
 - « étudiant, objet de savoir, élève »

2. La narration

Ce que l'on narre peut devenir expérience non seulement pour qui l'écoute (reproductibilité), mais aussi pour soi-même.

Le passage à la formulation écrite devient le fait d'une nouvelle interprétation de la mise en jeu des connaissances

Permet de rendre compte des actions mathématiques d'un sujet

Prendre de la distance par rapport à ses propres actions en tant qu'expérimentateur et/ou enseignant.

2. La narration

Interface

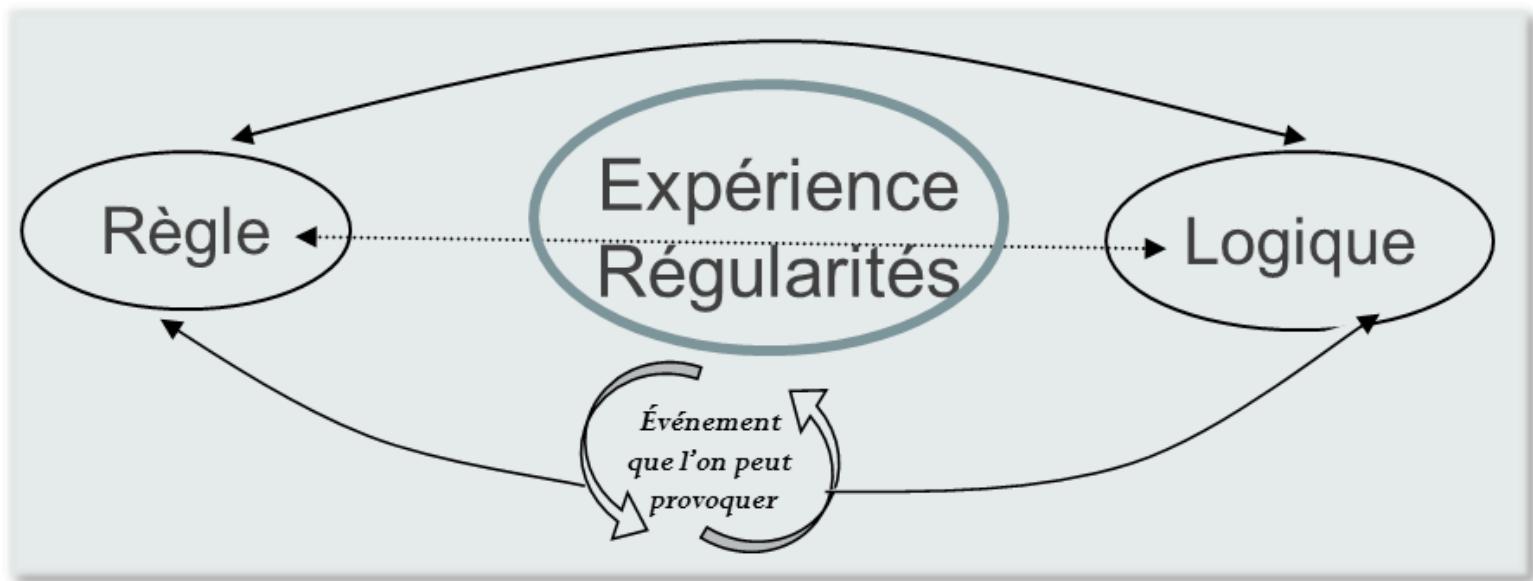
- ▶ des contenus mathématiques,
- ▶ des connaissances en jeu de part et d'autre
- ▶ de l'expérience effectuée par les élèves et les étudiants

Utilisation de la narration pour montrer

- ▶ L'interaction de connaissances entre expérimentateur et élèves à travers un jeu de tâches.
 - ▶ Les maths mises en jeu par l'élève
- ⇒ La narration est au service de l'expérience

3. Analyse des connaissances mathématiques

Processus « règle – expérience – logique »
pour interpréter une narration



- L'Expérience est le moteur de l'enchaînement entre règle et logique
- De nouvelles règles donnent lieu à de nouvelles logiques à travers de nouvelles expériences

3. Analyse des connaissances mathématiques

Inférences logiques pour interpréter les connaissances des élèves

Deduction proves that something must be;

Induction shows that something actually is operative;

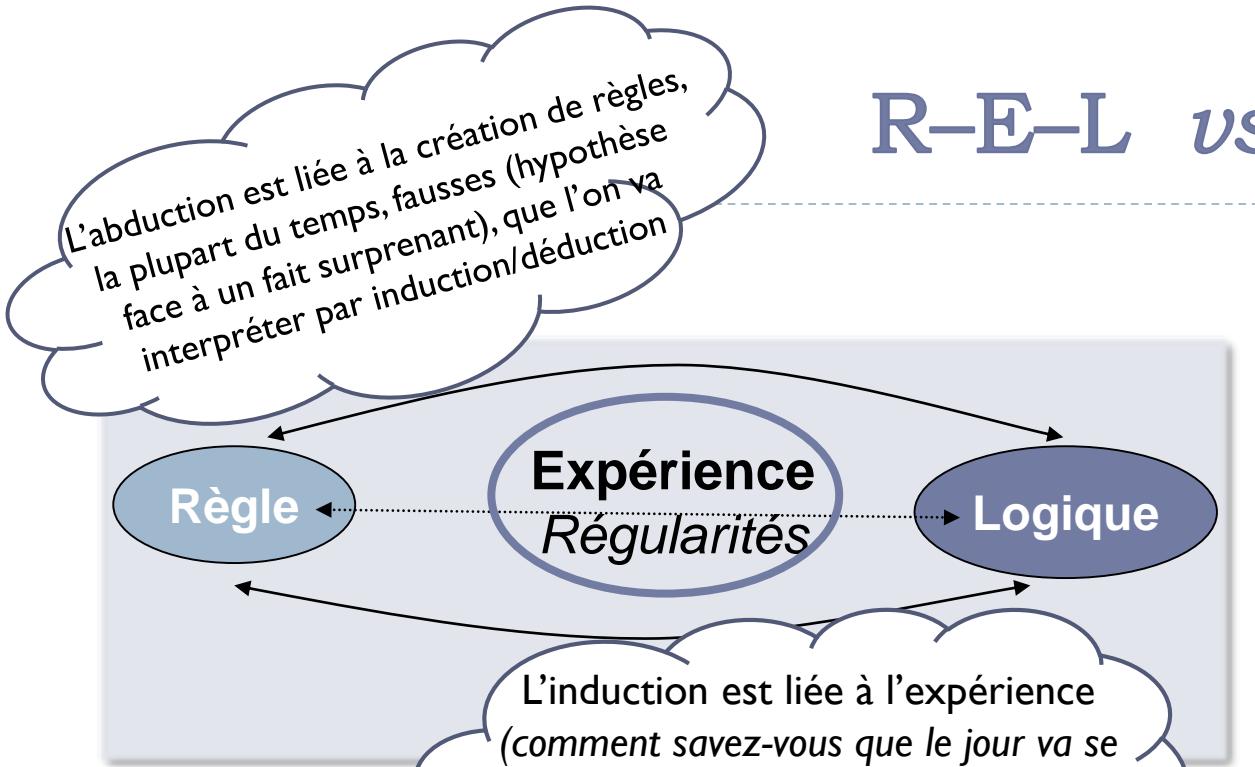
Abduction merely suggests that something may be.

(Peirce, 5.171)

- ▶ Inférence déductive: quelque chose existe
- ▶ Inférence inductive: quelque chose est opératoire (à partir de l'observation de faits particulier)
- ▶ Inférence abductive: quelque chose peut être (inventer une règle pour répondre à une surprise)

Comprendre de quelle nature sont les inférences auxquelles les élèves ont eu recours.

R-E-L vs A-I-D



La logique est interprétée par l'Expérience...

...qui permet de faire de nouvelles inférences...

...Pour formuler une règle

Si le jour se lève demain (ce que j'ai vérifié par induction), alors il va se lever après-demain (déduction)

...issues de l'Expérience

3. Analyse des connaissances mathématiques

Exemple en classe

J'ai deviné les *nombres* !

5	5^1	5
25	5^2	25
125	5^3	125
625	5^4	625
3125	5^5	3125
15625	5^6	15625
78125	5^7	78125
390625	5^8	90625
1953125	5^9	53125
9765625	5^{10}	65625
48828125	5^{11}	28125
244140625	5^{12}	40625
1220703125	5^{13}	03125
6103515625	Etc.	15625
30517578125	← chiffres devinés →	78125
152587890625		90625

Inférence inductive

- le chiffre des unités *fini toujours par 5*
- le chiffre des dizaines, par 2 (*fini toujours par 25*)
- le chiffre des centaines alterne 1 et 6
- le chiffre es milliers a une période de 4 chiffres 3, 5, 8, 0
- le chiffre des dizaines de milliers, une période de 8 chiffres : 1, 7, 9, 5, 6, 2, 4, 0.

Étudiants : deviner la 2^{ème} ligne

3. Analyse des connaissances mathématiques

Exemple en cours: $1/49 = 0,02\ 04\ 08\ 16\ 32\ 65\ 30$

Abduction dans l'investigation du milieu...

« [...] Or, l'application de la deuxième règle (chaque regroupement après la virgule du résultat est un multiple du numérateur et chacun est le double du précédent) a révélé une faille. En effet, quelle que soit la fraction dans le type exploré ci-dessus, au-delà d'un certain point, la régularité des décimales disparaît. Par exemple pour $1/49 = 0,02\ 04\ 08\ 16\ 32\ 65\ 30$. Nous avons donc tenté de trouver la logique à la source de cette irrégularité. Nous avons émis l'hypothèse de l'intervention d'une retenue que nous avons tenté de vérifier en inscrivant le résultat de $1/49$ dans le tableau ci-dessous de la manière suivante. Nous avons écrit le résultat de $1/49$ en conservant la régularité jusqu'au bout et en respectant le nombre de chiffres dans les regroupements post-virgule, dans ce cas, un regroupement de deux chiffres [...] »

**...des étudiants se piquent
au jeu**

$1/49 = 0,02\ 04\ 08\ 16\ 32\ 65\ 30 \dots$ (surprise)

,	0	2	0	4	0	8	1	6	3	2	6	4
,	0	2	0	4	0	8	1	6	3	2	6	5	3	0	6	1

3. Analyse des connaissances mathématiques

Interprétation d'une narration par des étudiants

	Actions et discours de l'étudiant A	Actions et discours de la personne interrogée Sonia)	
Mises en évidence	Relances de l'étudiant A	Inférence logique : <i>Induction, Déduction, Abduction</i>	Règle, expérience, logique
1	A commence par noter les calculs suivants : 1/499 2/499. Consigne : « <i>Avec ces nombres, tu peux vraiment aller où tu veux, comme tu veux, faire ce que tu veux. Ce qui m'intéresse, c'est ta démarche.</i> ».		
2		Tout de suite, Sonia utilise sa calculatrice pour noter les réponses aux deux divisions. Puis, elle dit : « <i>avec la réponse de 1/499 multiplié par 2, on trouve la réponse de 2/499.</i> » Elle demande si c'est bon. Elle cherche la validation de A.	À partir du résultat sur la calculatrice, elle y voit directement une logique qui la conduit à une règle.
[...]			
10		Elle utilise la calculatrice pour trouver la réponse du 11/499. Une fois qu'elle a noté la réponse. Elle dit : « <i>Si mon truc marche, c'est censé faire... »</i> Elle additionne comme elle l'avait donc annoncé $1/499 + 11/499$ pour trouver la réponse de $12/499$. En vérifiant le résultat, elle dit que c'est effectivement juste.	Expérience Par l'expérience, elle vérifie la règle qu'elle s'était donnée.
[...]			
16		Spontanément, elle note puis essaie de résoudre la division suivante : 1/4999999. Elle se rend compte que selon le nombre de 9 qu'elle met cela correspond au nombre de zéros dans la réponse.	Expérience Règle

a. Comment les étudiants infèrent la constitution des connaissances des élèves, quel enchainement

1/81 et 1/891

Laura: « Tes divisions sont faciles ! »

Cette élève a d'habitude beaucoup de facilité en mathématiques. Lorsque je lui présente le calcul à effectuer, elle me dit qu'elle ne **sait pas par quoi commencer**. En effet, elle se retrouve bloquée car « le problème n'a pas de consignes », me dit-elle. Je **suis surprise** d'entre cela car quelques instants plus tard, elle me dit sans trop réfléchir que la deuxième division donne un résultat beaucoup plus petit que la première et le justifie correctement.

Après avoir regardé un peu au plafond et par la fenêtre, elle **prend sa calculatrice** afin de vérifier son résultat. Elle effectue **deux divisions** et **note** sur une feuille le résultat de chacune d'entre elles. **Je la regarde faire**. Laura essaie alors immédiatement de taper sur sa calculatrice des **divisions similaires** à celle que je lui avais donnée et me dit très rapidement que « c'est facile ». N'étant pas très sûre qu'elle a compris, car cette élève avance particulièrement vite, je m'efforce de **lui demander ce qu'elle trouve d'intéressant**. Elle trouve que faire des divisions comme ça c'est facile et ajoute un 9 à chacune fois dans le nombre. À chaque fois, elle note le résultat que la division lui donne. Elle me formule par la suite oralement que **s'il n'y a qu'un 9, tous les chiffres dans le résultat ne seront répétés que deux fois, si on ajoute un 9, ils seront répétés 3 fois et que si l'on met trois 9 ils seront répétés 4 fois**. C'est tout à fait juste. Je lui **demande à la fin de l'exercice pourquoi elle pense** que je lui ai donné cela à faire et elle me répond qu'il fallait qu'elle « trouve la logique ».

- Ne sait pas comment commencer
- **Surprise**
- La 2^e division donne un résultat bcp <
- **Prend sa calculette**
- **Effectue les 2 divisions**
- **Note le résultat**
- **Regarde faire**
- **Divisions similaires**
- **Demande ce qu'il y a d'intéressant**
- Prononce une règle / logique? issue des régularités observées
- **Demande pourquoi elle lui a fait faire cette tâche**
- Il fallait trouver la logique

Etudiante subit l'interaction; c'est l'élève qui mène le jeu

D'autres exemples où l'étudiant pilote plus l'interaction

b. La narration fait ressortir l'activité mathématique de l'élève

Extraire les actions des élèves de la narration de l'étudiant

Extraire surprises, constats, questions, etc. des élèves

- ▶ Effectue la division $1/81$ grâce au logiciel ▶ Grande surprise
- ▶ Effectue l'autre calcul ($1/8181$)
- ▶ Récite les décimales et se questionne alors sur l'absence de 8
 - ▶ Elle remarque la présence de 8 (de la première périodicité)
- ▶ Refait le premier calcul ▶ Remarque immédiatement qu'il n'y a pas de 8
- ▶ Refait la deuxième division ▶ Une suite de nombre se répète
- ▶ Relit les décimales en « ciblant l'ordinalité », c.-à-d. qu'elle récite l'ordre, en faisant abstraction de leur répétition
- ▶ Ecrit les quotients : $0,012345679$ et $0,0001222344456667889$
 - ▶ Elle dit : il y a **une logique**.
 - ▶ Croissance dans les décimales dans les deux divisions ▶ Croissance « de 1 en 1 », pour $1/81$
 - ▶ Croissance « 3 chiffres, 1 chiffre, 3 chiffres, 1 chiffre » pour $1/8181$
- ▶ Effectue le calcul $1/62$ pour vérifier sa logique
 - ▶ Dit : un 0 immédiatement après la virgule pour chaque division
 - ▶ Compare les divisions $1/81$ et $1/62$, en laissant $1/8181$ de côté
- ▶ Effectue alors une autre division : $1/12$ etc.

- c. Les étudiants s'engagent dans une investigation personnelle approfondie du milieu mathématique pour cibler un objet

- ▶ Nous avons obtenu pour $1/81 : 0,01234567901\dots$ et pour $1/8181 : 0,0001222344456667\dots$. Nous avons essayé de mettre en évidence un lien entre les deux résultats obtenus dans le but de trouver une relation mathématique. Nous avons constaté que pour la première division, les décimales augmentaient de manière croissante de 0 à 9 avec toutefois, une exception pour le chiffre 8, celui-ci n'étant pas présent. De plus en effectuant le calcul sur le logiciel, nous avons remarqué une **périodicité** dans le résultat :

- ▶ Nous avons également remarqué cette **périodicité** en effectuant le calcul $1/8181$
 - ▶ Cependant, nous pouvons remarquer une subtilité mathématique propre à cette division, que nous appellerons ici principe de «**double périodicité**». En effet, comme relevé par les cadres bleus et verts nous constatons deux segments chiffrés distincts mais se répétant, formant la **périodicité**.

Les étudiants s'engagent dans une investigation ...

▶ Face à ce constat, nous avons orienté notre recherche sur les déclinaisons du dénominateur, afin de donner une explication à l'agencement croissant des décimales retrouvé au sein des deux périodicités. Pour cela, nous avons effectué la division 1/818181 :

0,0000 0122 2223 4444 4566 6667 8888 9011 1112 3333 3455 5556 7777 7900
0001 2222 2344 4445 6666 6788 8890 1111 1233 3334 5555 5677 7779 0000 0122
2223 4444 4566 6667 8888 9011 1112 3333 3455 5556 7777 7900 0001 2222 2344
4445 6666 6788 8890 1111 1233 3334 5555 5677 7779 0000 0122 2223 4444 4566
6667 8888 9011 1112 3333 3455 5556 7777 7900 0001 2222 2344 4444 4566 6667
8888 9011 1112 3333 3455 5556 7777 7900 0001 2222 2344 4444 4566 6667 8888 9011
1112 3333 3455 5556 7777 7900 0001 2222 2344 4444 4566 6667 8888 9011 1112 3333
3455 5555 5677 7779 0000 0122 2223 4444 4566 6667 8888 9011 1112 3333 3455
5556 7777 7900 0001 2222 2344 4445 6666 6788 8890 1111 1233 3334 5555 5677
7779 0000 0122 2223 4444 4566 6667 8888 9011 1112 3333 3455 5556 7777 7900
0001 2222 2344 4445 6666 6788 8890 1111 1233 3334 5555 5677 7779 0000 0122
2223 4444 4566 6667 8888 9011 1112 3333 3455 5556 7777 7900 0001 2222 2344
4445 6666 6788 8890 1111 1233 3334 5555 5677 7779 0000 0122 2223 4444 4566
6667 8888 9011 1112 3333 3455 5556 7777 7900 0001 2222 2344 4444 4566 6667
8888 9011 1112 3333 3455 5556 7777 7900 0001 2222 2344 4444 4566 6667 8888 9011
1112 3333 3455 5556 7777 7900 0001 2222 2344 4444 4566 6666 6788 8890 1111 1233
3334 5555 5677 7779 0000 0122 2223 4444 4566 6667 8888 9011

▶ Malgré l'orientation que nous voulions prendre en début d'investigation, à savoir, donner une explication à l'agencement croissant des décimales, nous nous sommes **laissé surprise par le jeu de tâche** en constatant un résultat équivalent au précédent. En effet, il existe à nouveau une « **double périodicité** » et une répétition de certains chiffres. Pour comprendre plus précisément ce phénomène qui nous a semblé plus intéressant, nous avons réalisé la division 1/81818181 :

0,0000 0001 2222 2223 4444 4445 6666 6667 8888 8890 1111 1112 3333 3334
5555 5556 7777 7779 0000 0001 2222 2223 4444 4445 6666 6667 8888 8890 1111
1112 3333 3334 5555 5556 7777 7779 0000 0001 2222 2223 4444 4445 6666 6667
8888 8890 1111 1112 3333 3334 5555 5556 7777 7779 0000 0001 2222 2223 4444
4445 6666 6667 8888 8890 1111 1112 3333 3334 5555 5556 7777 7779 0000 0001
2222 2223 4444 4445 6666 6667 8888 8890 1111 1112 3333 3334 5555 5556 7777
7779 0000 0001 2222 2223 4444 4445 6666 6667 8888 8890 1111 1112 3333 3334
5555 5556 7777 7779 0000 0001 2222 2223 4444 4445 6666 6667 8888 8890 1111
1112 3333 3334 5555 5556 7777 7779 0000 0001 2222 2223 4444 4445 6666 6667
8888 8890 1111 1112 3333 3334 5555 5556 7777 7779 0000 0001 2222 2223 4444
4445 6666 6667 8888 8890 1111 1112 3333 3334 5555 5556 7777 7779 0000 0001
2222 2223 4444 4445 6666 6667 8888 8890 1111 1112 3333 3334 5555 5556 7777
7779 0000 0001 2222 2223 4444 4445 6666 6667 8888 8890 1111 1112 3333 3334
5555 5556 7777 7779 0000 0001 2222 2223 4444 4445 6666 6667 8888 8890 1111
1112 3333 3334 5555 5556 7777 7779 0000 0001 2222 2223 4444 4445 6666 6667
8888 8890 1111 1112 3333 3334 5555 5556 7777 7779 0000 0001 2222 2223 4444
4445 6666 6667 8888 8890 1111 1112 3333 3334 5555 5556 7777 7779 0000 0001

d. Les futurs enseignants tirent profit d'une compréhension plus approfondie des connaissances des élèves

▶ Les interactions de connaissances

Pour commencer, je propose à ce garçon d'explorer le calcul $1/81$. Il réalise donc cette opération à la calculatrice et note la réponse. Pour continuer, je lui demande de changer le numérateur par des chiffres allant jusqu'à 10 et d'observer ce qu'il se passe. Il réalise tous les calculs et les note sur sa feuille. Il remarque immédiatement des régularités : « pour tous les numérateurs qui sont multiples de 3, le résultat présente une suite de nombres réguliers ». Par exemple, $6/81$ donne $0,07407407407\dots$ Je lui demande de vérifier cela en trouvant d'autres exemples. Il réalise alors les divisions suivantes en prenant des numérateurs multiples de 3 : $12/81$ ($0,14814814814\dots$), $15/81$ ($0,18518518515\dots$) et $18/81$ ($0,22222222222\dots$). Il me répond donc « bah oui ça fonctionne, y a à chaque fois des régularités ». J'allais lui poser une autre question lorsqu'il me dit que pour le $9/81$ et le $18/81$, les décimales se répètent avec toujours le même chiffre. Puis, il se reprend et explique que « ça joue quand même parce qu'on peut très bien voir dans le $9/81$ un 111 qui se répète après la virgule et dans le $18/81$

L'étudiante est dans une interaction et pilote le jeu. Elle interagit à partir de ses connaissances, de ce qu'elle entend et « comprend » de ce que lui dit l'élève.

- Je propose à ce garçon d'explorer le calcul $1/81$
- Je lui demande de changer le numérateur...
- J'allais lui poser une autre question lorsque...
- Je décide de rebondir... et lui demande...
- Je lui demande de tester avec d'autres numérateurs M9
- Je lui demande de prédire les résultats
- Je lui demande jusqu'où prédire
- Je propose d'essayer avec un numérateur plus grand
- Je lui demande de résumer les constats
- Ce qui laisse la porte ouverte à un autre jeu de tâches

- Il réalise l'opération à la calculatrice et note la réponse
- Il réalise tous les calculs...
- Il remarque des régularités
- Il observe M3 et M9
- Il réalise les calculs...
- Il prédit les résultats
- ...jusqu'à l'infini
- Ne sait plus que répondre
- R : Lorsqu'on divise les multiples...
- R : Lorsque les numérateurs sont aussi multiples...

Conclusion

L'interprétation des données est le fil qui relie un jeu de tâches et une logique.

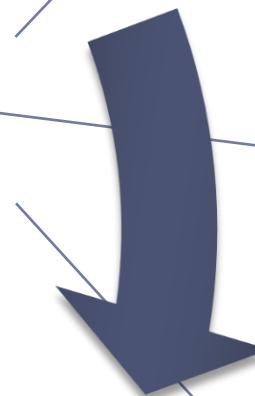


La narration est en lien avec l'expérience

L'abduction (A) est liée à la création de règles (R) qui prennent la forme de nouvelles hypothèses face à une surprise, amenée à être interprétée par induction/déduction

Quel type d'inférence logique?

Abductive
Inductive
Déductive

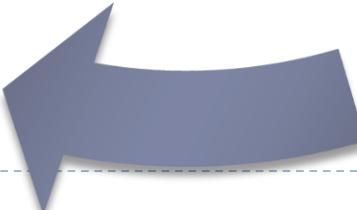


La distance entre expérience «faite» et narration (expérience narrée) permet de voir apparaître les contenus maths, de montrer la pertinence d'une tâche

Idée de circulation de l'expérience, d'une interaction entre les expériences ⇔ interaction de connaissances

L'induction (I) est liée à l'expérience (E) (comment savez-vous que le jour...), par l'expérimentation; trouver règle qui explique phénomène

Suivre une logique (L) issue de l'observ. de régularités des nouvelles hypothèses est lié à la déduction (D) des règles que je connais



Apports du jeu de tâches...

Ce qu'ils en disent

- ▶ « Pour terminer, nous sommes **surpris de l'engouement** que nous avons eu lors de la phase réflexive concernant l'investigation du milieu. En effet, nous nous sommes **laissé surprendre** par l'envie d'investiguer d'avantage et par les possibilités de recherche que nos deux calculs de base offraient. Nous sommes donc convaincus du fait que ce type de démarche a un réel potentiel d'enseignement et d'apprentissage et qu'il serait pertinent de favoriser son utilisation en classe. »
- ▶ « Nous avons été **impressionnés par l'intérêt dont les élèves** ont fait preuve. Ils étaient réellement pris et motivés par les différentes tâches que nous leurs avons mis à disposition afin de rechercher les différentes logiques autour de cette division. »
- ▶ Etc.

Fin