Quelques travaux sur la résolution de problèmes

Contexte

- Les problèmes au cœur des apprentissages
- Déplacement de la place des problèmes dans l'enseignement
  - Problèmes comme application
  - Problèmes pour introduire les notions
  - Problèmes pour chercher
- Mais des difficultés pour les élèves et pour les enseignants (Coppé et Houdement, 2010)

Programmes français de 1945

« En principe on peut se borner aux problèmes dont la résolution ne demande qu'une seule opération, écrite ou mentale. Quand la solution demande plusieurs opérations, on peut en faciliter la recherche en demandant les étapes intermédiaires par des questions auxiliaires. Les quelques types simples qui paraissent constituer le maximum de ce que l'on puisse demander à des élèves du Cours Élémentaire sont :

1. Une suite d'additions et de soustractions de petits nombres, par exemple, recettes et dépenses avec gain et perte.

2. Une facture simple : une ou deux multiplications et une addition.

3. Une addition ou une soustraction suivie d'une division

4. Une division suivie d'une multiplication. »

Une préoccupation ancienne

- Est il possible d'apprendre à résoudre des problèmes ?
- Si oui comment ?
- Travaux du mathématicien George Polya 1945 : *How to solve it ? (problem solving)*

« *de comprendre la méthode qui conduit à la solution des problèmes, en particulier les opérations mentales qui s'avèrent typiquement utiles à l'application de cette méthode* »

4 étapes selon Polya

- Comprendre le problème
- Concevoir un plan
- Mettre le plan à exécution
- Examiner la solution obtenue

Mais…

- Ces travaux n'ont pas abouti car
  - Domaine vraiment complexe
  - Reconstruction a posteriori de l'expert
- Nécessité de travaux de différentes disciplines notamment psychologie et didactique

Toujours les problèmes

- Catégoriser les problèmes : Vergnaud
- Schoenfeld & Hermann, 1982 étudient des experts : capacité de regrouper des problèmes qui ont des structures proches (et qui relèvent donc de la même classe de problèmes du point de vue du domaine considéré)
- Problem solving
- Problem posing

Les travaux de Julo

« un apport de la psychologie cognitive à l'enseignement »

Construire une représentation

Représentation : activité mentale

Selon Julo (1995) la représentation est un tout cohérent qui se structure. Ce ne sont pas des éléments juxtaposés.

- Interprétation et sélection : décodage des informations (les informations ne sont pas données)
- Structuration (entités organisées)
- Opérationnalisation : passage à l'action et aux opérations concrètes

Julo, 2002, Grand N 69

Cette activité de représentation débute avec les premières informations concernant le problème (dont certaines sont antérieures à l'énoncé lui-même : le contexte scolaire ou le genre d'ouvrage dans lequel il est proposé par exemple) et se poursuit jusqu'au moment où on cesse de " penser " au problème, c'est-à-dire celui où les informations concernant le problème disparaissent de notre mémoire de travail. Cette activité de représentation repose sur un ensemble complexe de processus et, en premier lieu, sur ce double mouvement caractéristique de toute activité mentale : des informations vers les connaissances et des connaissances vers les informations (les informations activent certaines connaissances qui orientent simultanément la prise en compte et l'interprétation de ces mêmes informations). Plusieurs sortes de connaissances peuvent intervenir, à un moment ou un autre, dans la construction de cette représentation du problème (qui se poursuit tant que l'on continue à traiter les informations le concernant).

Double mouvement informations / connaissances

- Importance des connaissances
- Importance des expériences passées
- Sélection des informations pas facile

3 types de problèmes

- Les problèmes d'entrainement, de réinvestissement : connaissances opératoires directement mobilisables sous forme de procédure (problèmes ?)
- Les problèmes où on peut faire des essais, tâtonner. Evolution de la représentation en fonction des essais (Espace du problème, Newell & Simon, 1972)
- Les problèmes de modélisation

« *il est probable que ce sont les problèmes réussis, au sens précédent de résolution par invention de procédure, qui laissent les empreintes les plus profondes et qui contribuent le plus à la mise en place de schémas performants***.** » Julo 1995

Comment l'enseignant.e peut il/elle aider les élèves à construire une mémoire des problèmes ?

Les schémas de problèmes : mémoire des problèmes

Ce sont les représentations construites lors de la résolution de différents problèmes qui s'organisent progressivement en schémas de problèmes » (Julo 2002, p. 43).

« ensemble organisé de variables »

« objets structurés mobilisés sous forme de blocs indissociables »

« mécanismes actifs de reconnaissance et d'assimilation des informations »

Quels critères ?

- Structure mathématique
- Éléments de surface
- Contexte particulier

Les aides

Des aides

« *on explique comment il fallait " faire " pour trouver la solution plutôt que comment il fallait " penser " le problème.* » Julo

Comment aider ni trop, ni trop peu ?

Critères

- l'aide ne contient pas d'indices sur la solution
- l'aide n'oriente pas vers une procédure de résolution
- l'aide ne suggère pas une modélisation du problème

2 types d'aides

- Interventions tutorielles

Aides apportées par l'enseignant au fur et à mesure de la recherche (enrichissement de l'environnement avec des tâches surajoutées pour faire évoluer la représentation)

Et si la solution était ….

- Multi présentation

Multiprésentation

- Une même structure de problème
- Les mêmes données
- Plusieurs énoncés

PROBLEME DES CREPES

Pour la Chandeleur, quelques élèves d'une classe décident de préparer des crêpes
Ils trouvent la recette suivante dans un livre de cuisine :

"Pour quatre personnes, préparez une pâte avec :
6 oeufs,
10 cuillerées à soupe de farine,
8 verres de lait,
20 g de beurre,
16 g de sucre ordinaire,
6 cuillerées à café de sucre vanillé"

Mais comme ils sont nombreux, ils décident d'augmenter les quantités qui sont indiquées dans la recette. Ils préparent une pâte avec :

15 oeufs,
25 cuillerées à soupe de farine,
20 verres de lait,
50 g de beurre,
35 g de sucre ordinaire,
15 cuillerées à café de sucre vanillé.

Les crêpes risquent donc de ne pas être très bonnes car les élèves ont fait une petite erreur ; ils n'ont pas respecté exactement la recette.

Pour quel produit les élèves se sont-ils trompés ?

Quelle quantité de ce produit auraient-ils dû mettre pour respecter la recette du livre de cuisine ?

PROBLEME DE L'EAU SUCREE

Pour faire une expérience de chimie, le professeur demande à des élèves de préparer de l'eau sucrée dans plusieurs récipients qui contiennent de l'eau :

Jacques a un récipient qui contient	6 dl	d'eau
Pierre a un récipient qui contient	10 dl	d'eau
Didier a un récipient qui contient	8 dl	d'eau
Isabelle a un récipient qui contient	20 dl	d'eau
Benoit a un récipient qui contient	16 dl	d'eau
Laurence a un récipient qui contient	6 dl	d'eau

Le professeur donne alors le sucre aux élèves et leur dit de s'arranger entre eux pour que l'eau soit aussi sucrée dans tous les récipients.

Jacques met dans son récipient	15 g	de sucre
Pierre met dans son récipient	25 g	de sucre
Didier met dans son récipient	20 g	de sucre
Isabelle met dans son récipient	50 g	de sucre
Benoit met dans son récipient	35 g	de sucre
Laurence met dans son récipient	15 g	de sucre

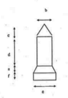
Mais l'expérience risque de ne pas marcher car un des élèves a fait une petite erreur : dans son récipient l'eau n'est pas aussi sucrée que dans celui des autres élèves.

Quel élève s'est trompé ?

Quelle quantité de sucre aurait-il dû mettre ?

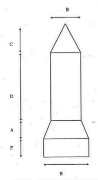
LA FUSEE

Le professeur de dessin a demandé aux élèves de reproduire en plus grand le dessin suivant :



a : 6 mm
b : 10 mm
c : 8 mm
d : 20 mm
e : 16 mm
f : 6 mm

Les élèves devaient donc dessiner exactement la même fusée mais en plus grand.
Aussi, Patrick risque de ne pas avoir une très bonne note car il a fait une erreur : la fusée qu'il a dessinée n'est pas exactement la même que le modèle en plus grand. Voici son dessin :



A : 15 mm
B : 25 mm
C : 20 mm
D : 50 mm
E : 35 mm
F : 15 mm

POUR QUELLE LONGUEUR PATRICK S'EST-IL TROMPE ?
(tu indiques la lettre qui la désigne sur le dessin)

Crèpes, eau sucrée, fusée

- 98 élèves de 6e (eq 8e)
  - Crèpes 41%
  - Eau sucrée 47%
  - Fusée 44%

- 76 élèves de 6e (eq 8e)

Multi présentation avec choix 68 %

	Non difficulté	difficulté
simple	54 %	21 %
Multi présentation avec choix	82 %	40 %

Dans les classes

Des activités sans finalité mais qui résistent

- souligner les informations utiles
- barrer les informations inutiles
- rechercher la bonne opération
- trouver la question

Accent mis sur les problèmes de lecture

Ce sont les relations complexes entre un but donné et les conditions de réalisation de ce but (les contraintes et les aides qu'introduit l'auteur de l'énoncé) qui caractérisent ce qu'est un problème par rapport à d'autres situations de compréhension de texte (Julo, 1995, p. 16).

Problème/énoncé

- Dans un texte de problème il y a des éléments de compréhension mais aussi d'incompréhension sinon il n'y a plus de problème
- La compréhension d'un problème ne se limite pas à la compréhension de l'énoncé

Thierry vient de jouer deux parties de billes. A la seconde partie, il a perdu 7 billes. Quand il compte ses billes à la fin il s'aperçoit qu'il a gagné en tout 5 billes. Que s'est-il passé à la première partie ?

À chacun sa place

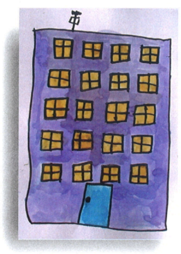
Damien, Franck, Isabelle, Nathalie, Raphaël et Simon ont posé pour une photo souvenir de vacances. Les indices suivants permettent de retrouver la place de chacun. Toutefois, certains de ces indices sont inutiles. Lesquels ?

- Damien et Raphaël n'ont qu'un seul voisin.
- Les filles ne sont pas côte à côte.
- Franck est le plus petit des garçons.
- Franck est cependant plus grand qu'Isabelle, qui est à sa gauche.
- Damien et Isabelle portent des lunettes.
- Si Nathalie tourne la tête vers la gauche, elle peut voir tous ses camarades, sauf Damien.
- Franck est le seul à avoir deux voisines.

Classe de 1P

Immeuble 1

Inspiré de l'épreuve des poupées de Claire Meljac



DOMAINE
Nombres

CONTENU
Dénombrement

COMPÉTENCE
Dénombrer des quantités, les reproduire

CONSIGNE
Va chercher juste ce qu'il faut de stores pour fermer toutes les fenêtres ! Tu n'as droit qu'à un seul voyage !

REMARQUES
Variable : le nombre d'étages et de fenêtres par étage

DÉMARCHES OBSERVÉES

Consigne

- *« une instruction stricte donnée à un militaire, un gardien sur ce qu'il doit faire »*
- Distinguer :
  - consigne
  - question
  - énoncé

Travaux de Fabre sur la problématisation

Thèse de S Grau, 2017

Les losanges de problématisation

Face à un problème mathématique, la mise en place d'un concept nouveau n'est pas dans la solution qui préexisterait au problème mais bien dans la construction du problème, c'est-à-dire dans la mise en tension des données et des conditions du problème et de la représentation que l'on se fait de sa solution. (Grau, 2011, p.16).

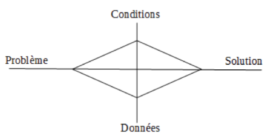


Schéma 9: losange de la problématisation (Fabre, 2011)

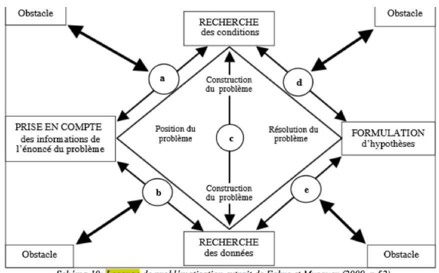


Schéma 10: Losange de problématisation extrait de Fabre et Musquer (2009, p.52)

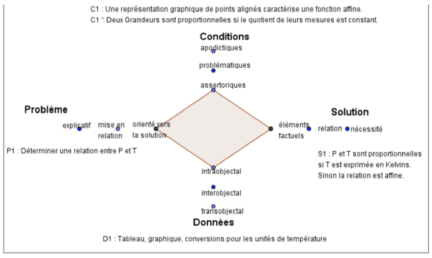


Schéma 28: losange de problématisation Pression-Température situation 1

Les compétences

Les 3 degrés de compétences (Rey et al., 2006)

1. Les compétences élémentaires : Savoir exécuter une opération en réponse à un signal
2. Les compétences élémentaires avec cadrage : mobiliser et appliquer la procédure avec cadrage
3. Les compétences complexes : savoir choisir et combiner plusieurs compétences élémentaires pour traiter une situation nouvelle et complexe

Outil d'évaluation en 3 phases

Fagnant Demonty, 2016

Phase 1

Contexte

Claude raconte à son copain :

« La semaine dernière, les élèves des classes de deuxième année ont décidé de se cotiser pour offrir un cadeau à Kevin, hospitalisé. Chacun a donné 0,50 €. Chargé de l'achat du cadeau, j'ai constaté qu'il manquait 15 €. J'ai réclamé 0,20 € supplémentaires par élève et j'ai alors eu 11 € en trop. »

Tâche

Calcule le prix du cadeau. Écris les étapes de ton raisonnement et tous tes calculs.

Phase 2

Phase 2

1. Claude raconte à son copain :

« La semaine dernière, les élèves des classes de deuxième année ont décidé de se cotiser pour offrir un cadeau à Kevin, hospitalisé. Chacun a donné 0,50 €. Chargé de l'achat du cadeau, j'ai constaté qu'il manquait 15 €. J'ai réclamé 0,20 € supplémentaires par élève et j'ai alors eu 11 € en trop. »

On appelle n le nombre d'élèves.

a) Écris, en fonction de n, le montant récolté en demandant 0,50 € à chaque élève.

b) Comment pourrait-on calculer le prix du cadeau si on connaissait ce montant ?
Écris une expression littérale qui traduit ce calcul.

c) Claude réclame 0,20 € de plus. Écris le nouveau montant demandé à chaque élève.
Écris, en fonction de n, le montant récolté en demandant ce nouveau montant à chaque élève.

d) Comment pourrait-on calculer le prix du cadeau si on connaissait ce montant ?
Écris une expression littérale qui traduit ce calcul.

Phase 3

Phase 3

2. Entoure la (ou les) équation(s) permettant de résoudre chacun des problèmes suivants.
Précise, à chaque fois, ce que représente l'inconnue.

a) Martine a deux fois plus d'argent que son frère Didier.
À eux deux, ils possèdent 210 €. Combien Didier possède-t-il ?
$s + s/2 = 210$ $2s + s = 210$ $2s + 210 = s$ $2(s + s) = 210$
inconnue :

b) Quel nombre est égal à son opposé augmenté de 16 ?
$x = -(x + 16)$ $x = x - 16$ $-x = x + 16$ $x = -x + 16$
inconnue:

c) Que mesurent les côtés d'un triangle isocèle dont le périmètre mesure 34 cm si la base mesure 2 cm de moins que les autres côtés ?
$x \cdot (x - 2) = 34$ $3x - 2 = 34$ $2x - 2 = 34$ $3x + 2 = 34$
inconnue :

3. Résous les équations suivantes :

a) $13(x - 3) = 52$ b) $2x + 13 = 4x - 7$

c) $\frac{x}{2} = \frac{3}{5}$ d) $\frac{2}{3}x - \frac{3}{4} = \frac{4}{5}x + \frac{2}{3}$

4. a) Jean propose 5 comme solution de l'équation $2(5x - 1) = 3(4x - 8)$. Marie prétend qu'il se trompe. Pourtant, elle n'a pas résolu l'équation. Explique comment elle a procédé.

b) Pour chaque ligne du tableau, entoure la (ou les) affirmation(s) juste(s).

1°	L'égalité $3x = 3$ est vérifiée par	$x = 0$	$x = -1$	$x = 1$
2°	-3 est la solution de l'équation	$3x - 1 = -10$	$2x + 3 = -3$	$4x + 9 = 4$

Résultats

- 163 élèves de 14-15 ans

Tableau 1
Résultats des phases 1 et 2 de l'outil

Phase	% d'élèves ayant trouvé le prix du cadeau
1 – Tâche complexe	34 %
2 – Tâche décomposée	16 %

Tableau 2
Résultats de la phase 3 de l'outil

Phase	% moyen de réussite	Écart-type	Minimum	Maximum
3 – Procédures	57 %	17 %	15 %	92 %

Groupe	Phase 1	Phase 2	Moyenne à la phase 3	% d'élèves	Démarche mobilisée en phase 1
1	Réussite	Réussite	73 %	13 % (n=21)	Algébrique : n=13 Arithmétique : n=7 Indéterminée : n=1
2	Réussite	Échec	60 %	21 % (n=34)	Algébrique : n=6 Arithmétique : n=25 Indéterminée : n=3
3	Échec	Réussite	67 %	3 % (n=5)	Algébrique : n=5 Arithmétique : n=0 Indéterminée : n=0
4	Échec	Échec	55 %	63 % (n=103)	Algébrique : n=70 Arithmétique : n=10

Travaux actuels de C. Houdement

Problèmes basiques et autres

- *Le problèmes basiques « one step problem » (Vergnaud)*
- *les « problèmes complexes » qui sont des agrégats de «problèmes basiques ». La complexité des problèmes peut venir en effet de la distance, dans l'énoncé, entre des informations qui devront être connectées pour la construction de la réponse*
- *des « problèmes atypiques » définis justement par leur caractère non routinier, le fait qu'on suppose que les élèves ne disposent pas de stratégies connues pour les résoudre, qu'ils doivent en inventer de toutes pièces, en s'appuyant sur leurs connaissances passées, notamment leur mémoire des problèmes.*

Problèmes basiques

Jeux d'inférence et contrôle
- sémantique
- pragmatique
- syntaxique

- Vérifications internes et externes

Problèmes complexes

- Nécessité de connecter des informations et de qualifier les résultats
  - Découpage en sous problèmes basiques
  - Connecter les informations
  - Qualifier les résultats intermédiaires pour garder le lien avec problème de départ (Perrin Glorian, 1993 Petit x 35 sur les élèves en difficulté)

Rôle de la mémoire des problèmes

Des pistes pour l'enseignement

- Faire résoudre de nombreux problèmes de toutes sortes
- Laisser les élèves chercher, aller au bout de la résolution
- Organiser les problèmes basiques (résolution automatique)
- Réfléchir à la formulation des problèmes
- Organiser des moments de réflexion, de catégorisation des problèmes (classement, critères de tri)

Boites références (Priolet, 2014)

- Résolution du problème et comparaison de procédure
- Rapprocher ce problème d'autres déjà résolus
- Utiliser des représentations graphiques variées comme des opérations, des dessins, des schémas, du texte
- ranger les problèmes résolus dans des boîtes-référentes qui regrouperont les problèmes relevant des mêmes raisonnements au sens de Vergnaud.