

Reproduire une figure géométrique plane à l'école primaire : quand ? comment ? pourquoi ?

Valentina CELI

Espe d'Aquitaine, Lab-E3D, Université de Bordeaux

valentina.celi@u-bordeaux.fr

Plan de la conférence

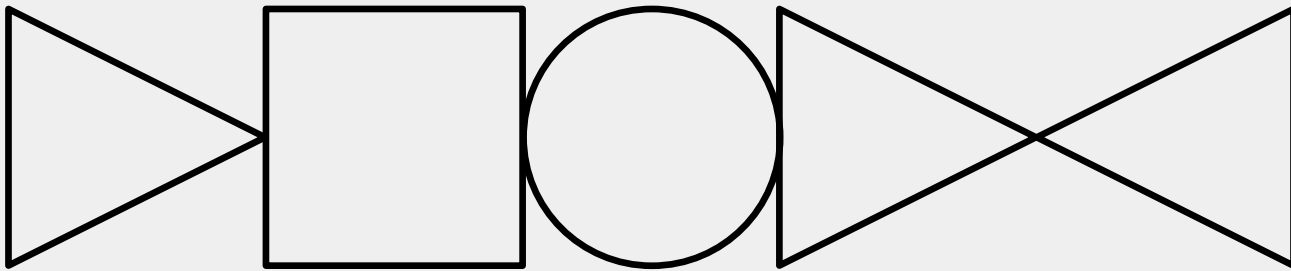
- En guise de préambule
 - Analyse d'une figure plane
- Partie 1
 - Les changements de regard sur les figures
- Partie 2
 - Un zoom sur le cercle
- En guise de conclusion

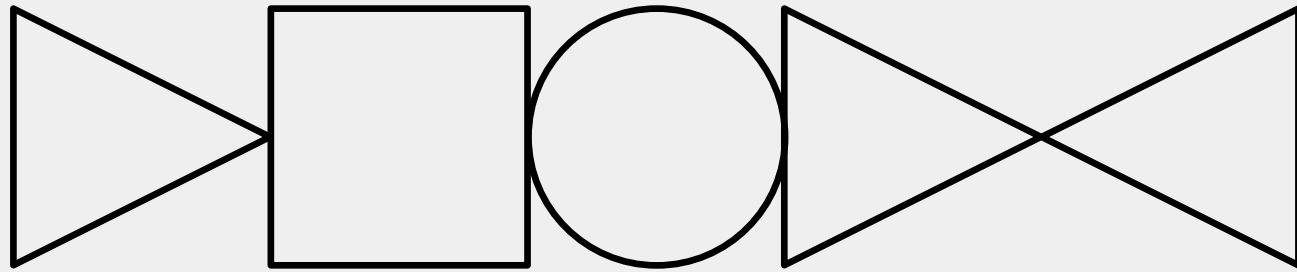
En guise de préambule

ANALYSE D'UNE FIGURE PLANE

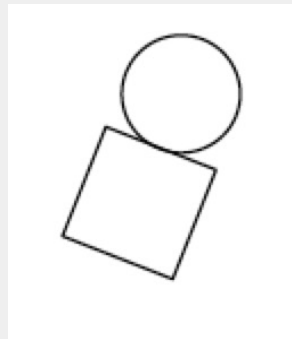
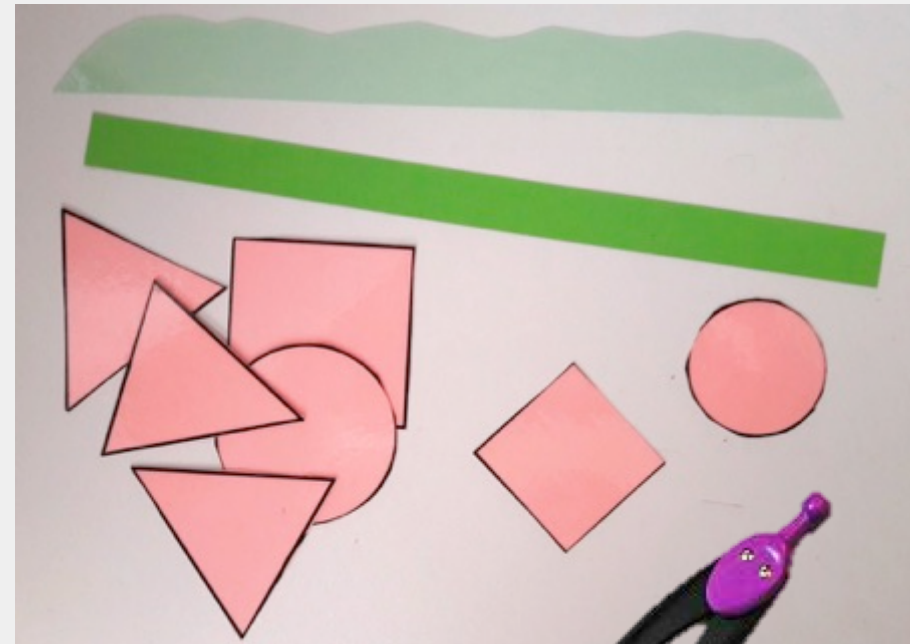
Une figure à reproduire : un problème ? des problèmes ?

- Reproduire une figure, c'est ...
 - ... réaliser une figure à partir d'un modèle fourni





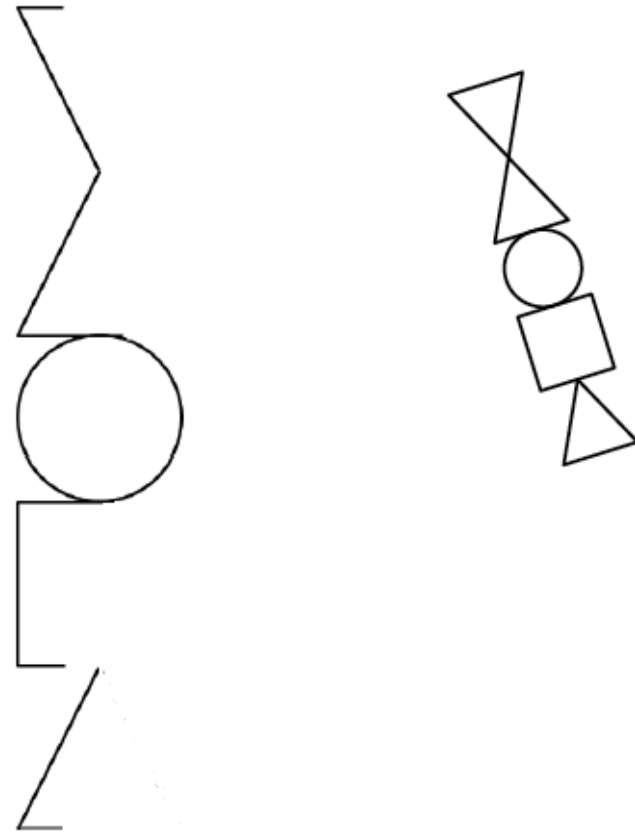
- Support papier
- Présence de couleurs ou non
- Modèle accessible ou non
- Instruments
- À partir d'une *amorce* ou non
- *Amorce* agrandie, réduite ou de la même taille que le modèle



| Modèle | Amorce | Instruments |
|---------|-----------------|---------------------------------|
| (mt) | Non | Tous les gabarits |
| Éloigné | Non | Tous le gabarits |
| ... | ... | ... |
| (agr) | Non | Tous les gabarits |
| (agr) | Non | Disque, carré, règle |
| ... | ... | ... |
| (agr) | “profile” | Règle |
| (agr) | Carré et disque | Règle <i>informable</i> , règle |
| (agr) | Carré | Règle, compas |
| ... | ... | ... |
| ... | ... | Règle, compas |

Une figure à reproduire : un problème ? des problèmes ?

- *Amorce* : « profile »
- *Instruments* : règle

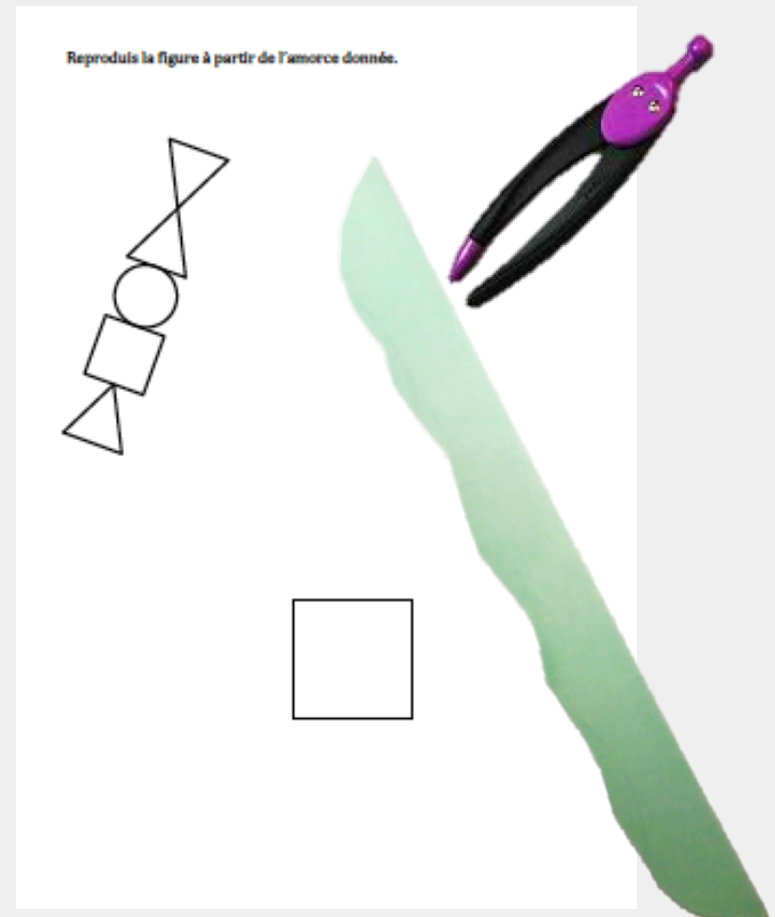
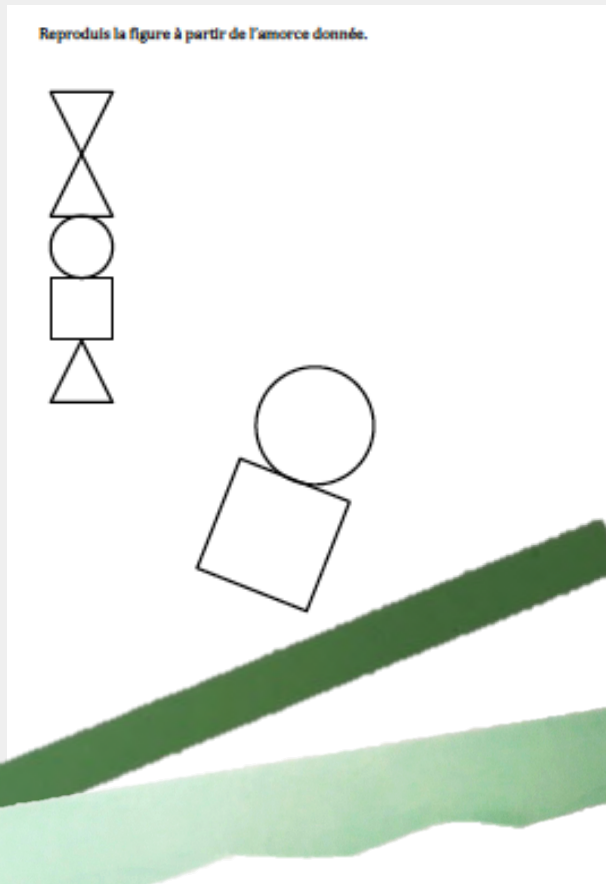


Reproduis la figure à partir de l'amorce donnée.

Une figure à reproduire : un problème ? des problèmes ?

- *Amorces* : carré, disque
- *Instruments* : règle, règle *informable*

- *Amorces* : carré
- *Instruments* : règle, compas



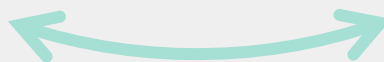
Instruments



Propriétés
géométriques



Appréhension
de la figure



Partie 1

LES CHANGEMENTS DE REGARD SUR LES FIGURES

(Duval & Godin, 2005 ; Duval, Godin & Perrin-Glorian, 2005 ; Godin & Perrin, 2009 ; Perrin-Glorian, Mathé & Leclercq, 2013 ; Perrin-Glorian & Godin, 2014 ; Perrin-Glorian, 2016)

- En géométrie, le discours mathématique porte sur des **figures**
- Résoudre un problème de géométrie conduit à produire une figure **mentalement** ou **matériellement**

En 2002, le rapport de la CREM

- Une des finalités de l'enseignement de la géométrie à l'école primaire :
 - Un premier *travail spécifique sur le thème « voir sur une figure »* doit demeurer primordial dans la perspective d'une utilisation plus importante de la figure à tous les niveaux



(Celi, 2013)

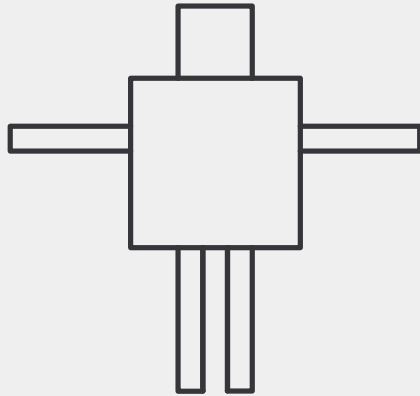
- D'après les attentes institutionnelles, le contrôle des propriétés de figures géométriques évolue



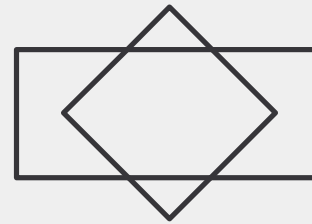
- Le contrôle de **propriétés** de figures géométriques avec les **instruments** usuels ou leur production demandent l'articulation des connaissances de ces propriétés géométriques avec celles sur les instruments

Comment regarde-t-on une figure ?

- Spontanément et au premier coup d'oeil, l'appréhension d'un objet est globale



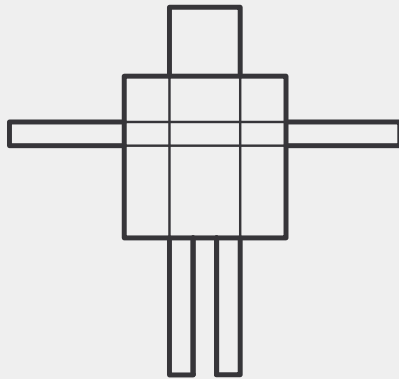
Assemblage par juxtaposition



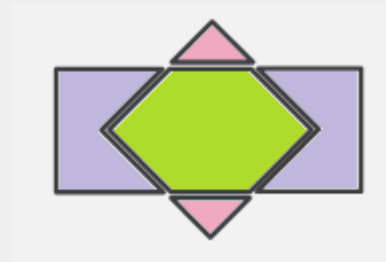
Assemblage par superposition.

Comment regarde-t-on une figure ?

- Comment amener les élèves à changer de regard sur les figures ?



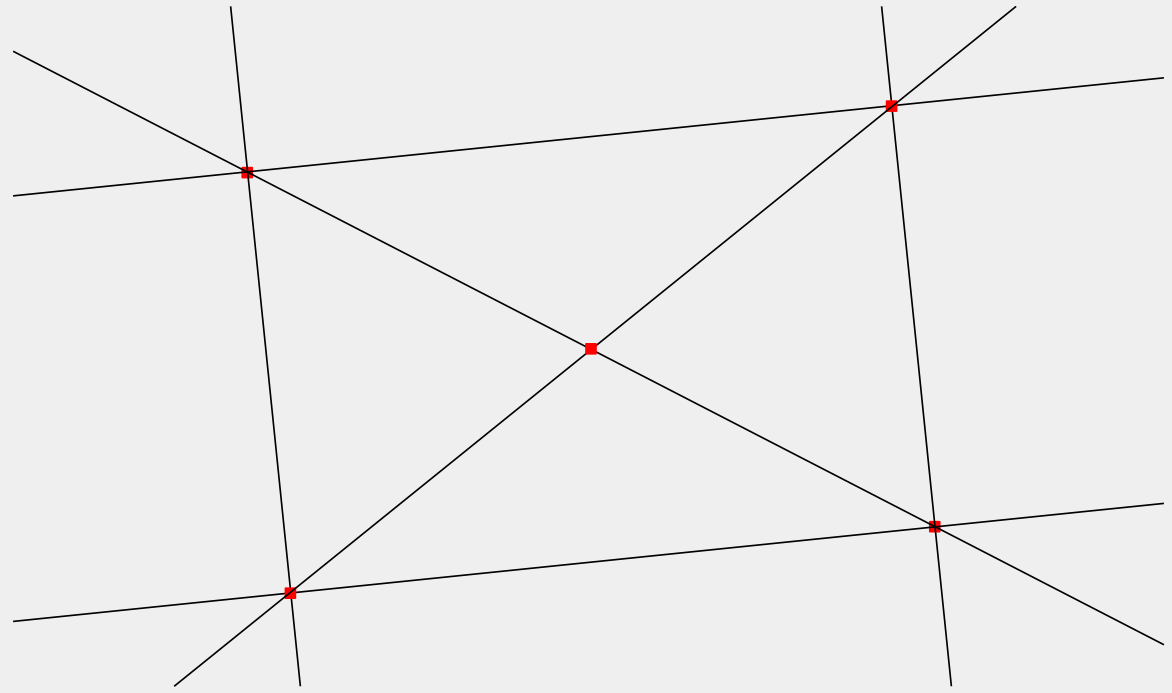
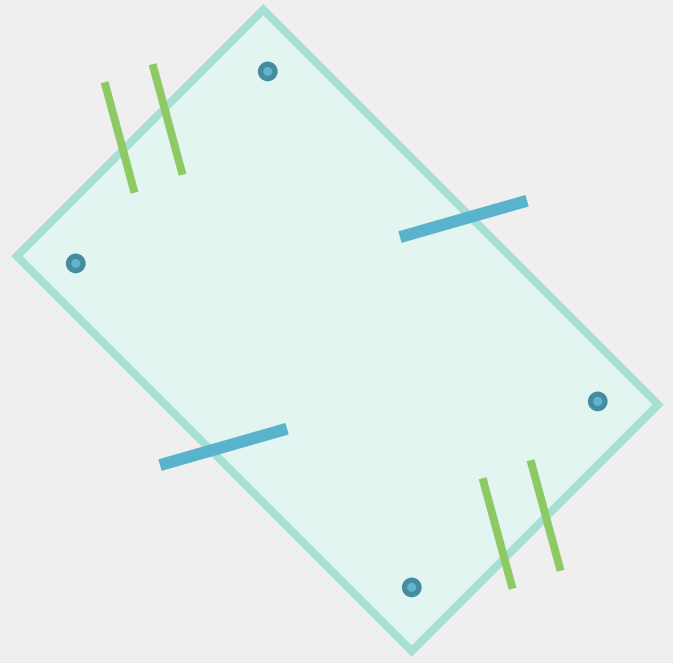
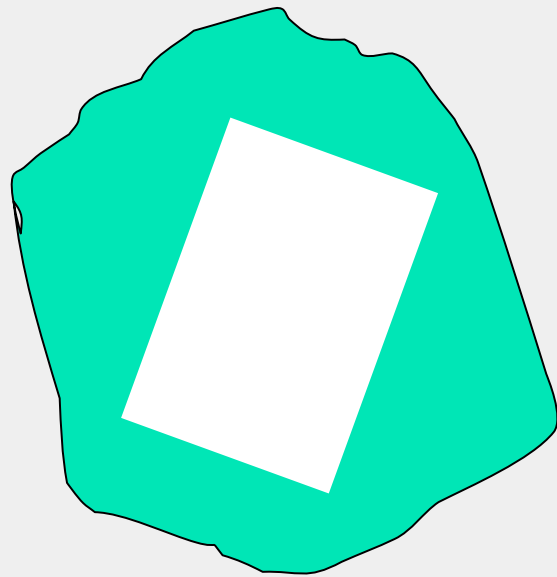
Le prolongement des traits inverse un assemblage par juxtaposition en un assemblage par superposition

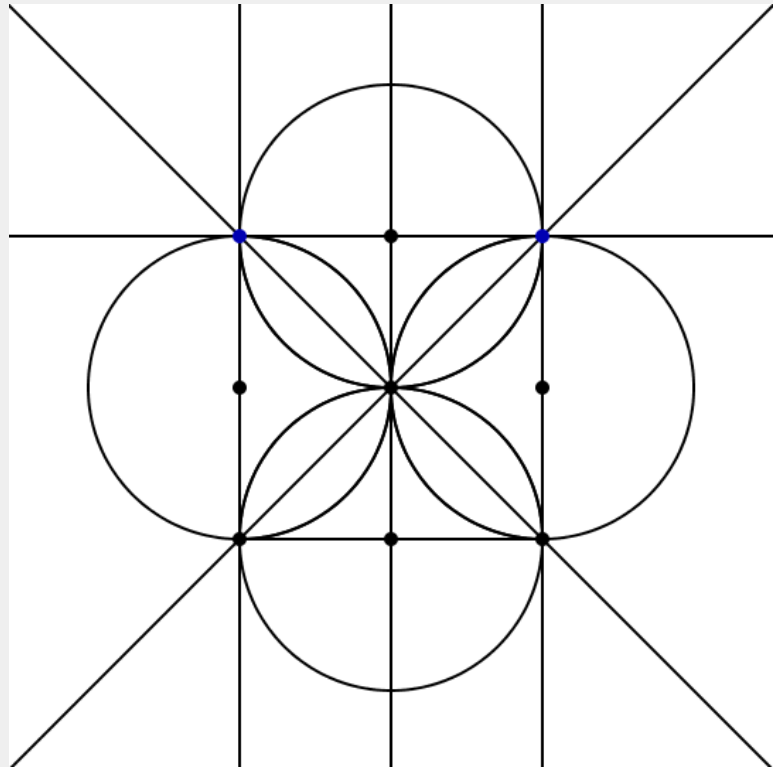
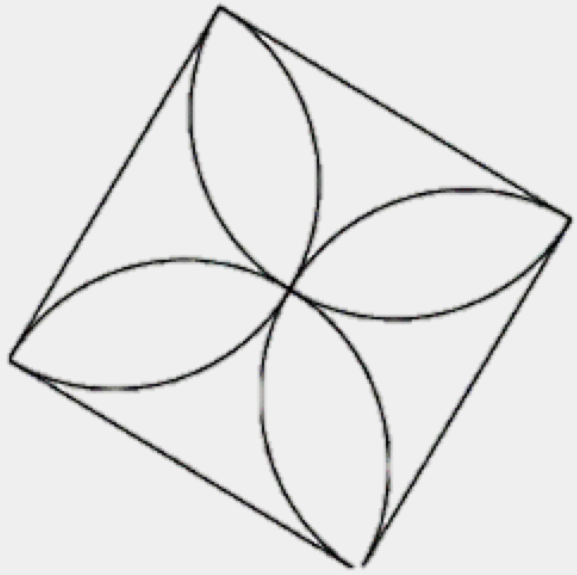


La décomposition en autant de formes que de contours fermés transforme un assemblage par superposition en un assemblage par juxtaposition

Les changements de regard sur les figures

- Comment aider les élèves à passer d'un regard centré sur les surfaces et leurs contours à un regard qui fait apparaître le réseau de droites et de points sous-jacent aux différentes figures étudiées à l'école ?
 - Comment opérer une *déconstruction dimensionnelle* de la figure ?





L'importance des instruments

Instruments qui permettent des manipulations matérielles. P. e. :

- Pièces d'un puzzle
 - Tangram
- Empruntes de formes

Instruments qui permettent de produire des tracés graphiques. P. e. :

- Gabarits et pochoirs dont on peut tracer le contour
- Règle non graduée
- Gabarit d'angle droit, équerre
- Règle *informable*, compas

Les changements de regard sur les figures

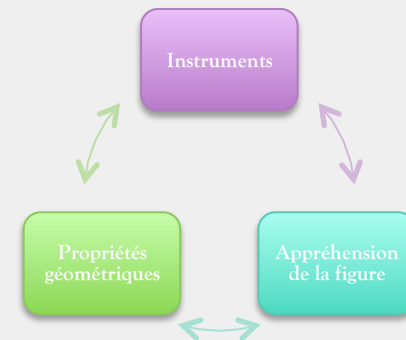
- Certaines instruments permettent de transporter des informations 2D
 - Donner aux élèves l'accès à des instruments tels que des **gabarits** permet de prendre en compte l'appréhension spontanée de la figure en termes de surfaces

Les changements de regard sur les figures

- D'autres instruments permettent de transporter des informations 1D
 - Encourager l'utilisation des instruments tels que la règle et le compas est nécessaire pour accompagner les élèves vers la déconstruction de la figure en un réseau de lignes et de points

Les changements de regard sur les figures

- En jouant sur des instruments différents, on permet d'entrer progressivement dans la **déconstruction dimensionnelle**
 - Passage d'une vision « surface » à une vision « lignes et points »
- La **déconstruction dimensionnelle** est une condition pour l'explicitation des connaissances géométriques



Les changements de regard sur les figures

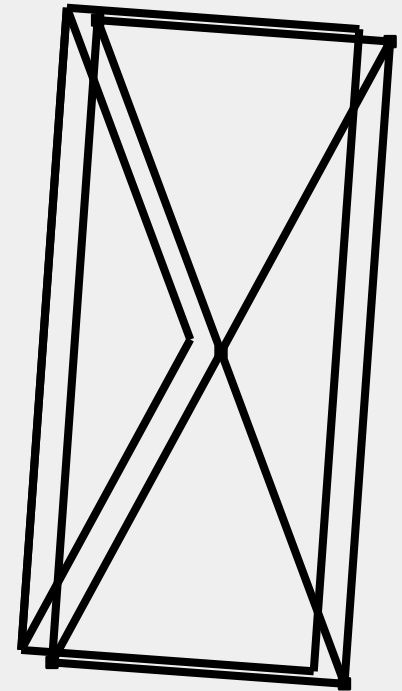
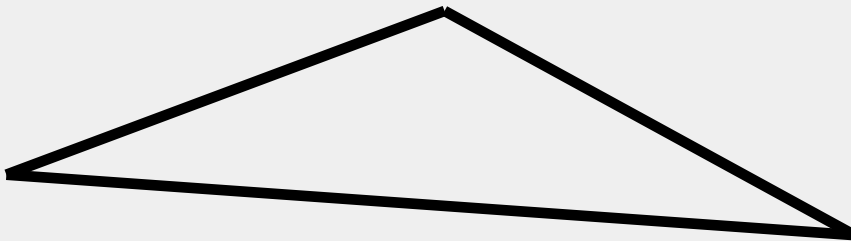
- Comment analyser une figure pour être capable de voir ce qu'il faut *géométriquement* y voir ?
- Quels types de tâche et quelles figures choisir pour faire changer la manière de voir des élèves ?
- Comment organiser des activités centrées sur l'analyse des figures ?

Les problèmes de *restauration*

- Il s'agit de **reproduire** une figure (modèle) à partir d'une amorce et d'instruments fournis
- Le modèle est une figure qui demande un véritable travail d'analyse pour identifier les éléments qui n'apparaissent pas explicitement
- Le problème dépend
 - du choix de la figure-modèle, de l'amorce et de la différence entre les deux
 - des instruments fournis et de leur *coût*
- Aucune mesure n'est donnée
 - La règle graduée n'est pas fournie ou bien elle a un coût élevé

Un exemple de problème de *restauration*

- Comment reproduire cette figure en économisant le plus de points ?
 - Règle : 1 point
 - Règle *informable* : 2 points
 - Compas : 1 point



Les problèmes de *restauration*

- Il faut articuler les propriétés de la figure à reproduire avec les instruments dont on dispose
- On rend opérationnels les concepts géométriques
- On apprend à maîtriser des aspects *techniques* essentiels (mais souvent ignorés dans l'enseignement)
 - Un segment est porté par une droite ; une droite peut se prolonger ; deux points définissent une droite
 - Un point comme intersection de deux courbes
 - Alignement des points
- On apprend à repérer des éléments non tracés sur la figure à reproduire mais indispensables pour la reproduire

Partie 2

UN ZOOM SUR LE CERCLE

Pochoir de
disque

Compas

Rond

Gabarit de
disque

Ficelle, punaise
et crayon

Cercle
Disque

Courbe plane admettant une
infinité d'axes de symétrie

Figure invariante
par rotation

Rond

Courbe plane fermé de
courbure constante

Ensemble de points à égale
distance d'un point fixe

Cercle
Disque

Pour tracer des
cercles

Compas

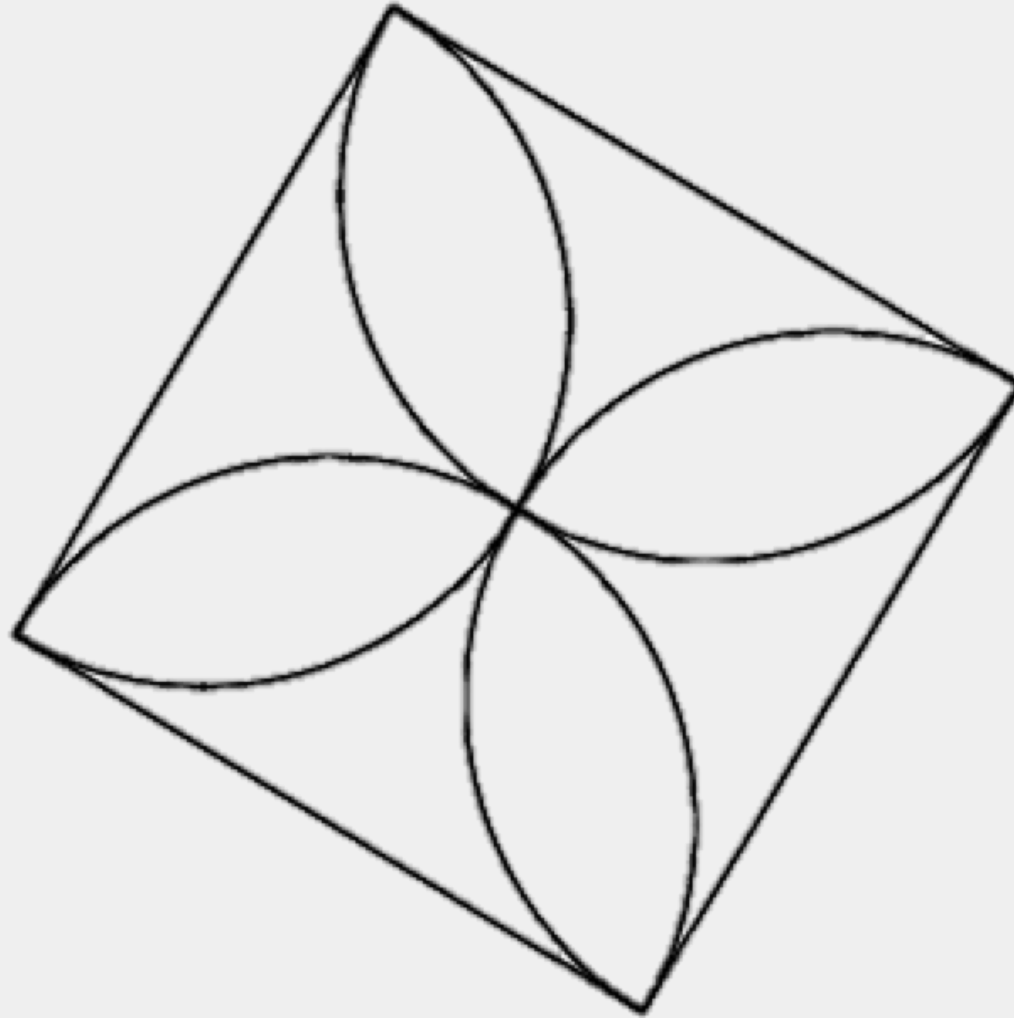
Pour comparer
des longueurs

Pour reporter des
longueurs

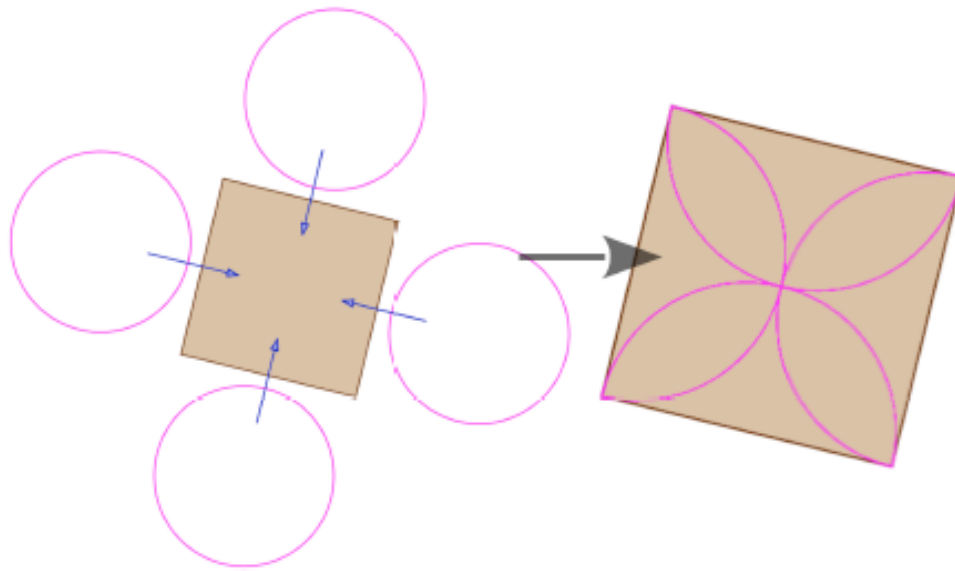
Dans une progression autour du cercle ...

- ... trois moments connus et cohérents :
 - Manipulation d'une forme, le « **rond** »
 - Usage de gabarits, de pochoirs
 - Usage du **compas** comme traceur de cercles
 - Le **cercle** vu comme un *lieu géométrique de points à égale distance d'un point fixe*
 - Ses éléments caractéristiques sont introduits : centre, rayon, diamètre
 - Le **compas** est introduit pour reporter et comparer des longueurs

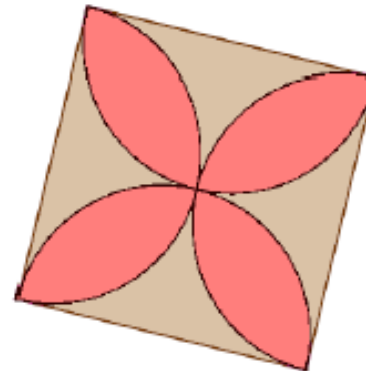
En partant d'une seule et même figure



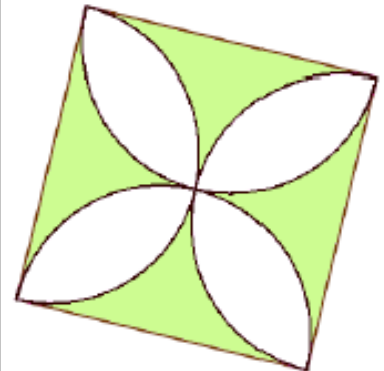
En partant d'une seule et même figure



Assemblage par superposition :
quatre disques transparents posés sur le carré

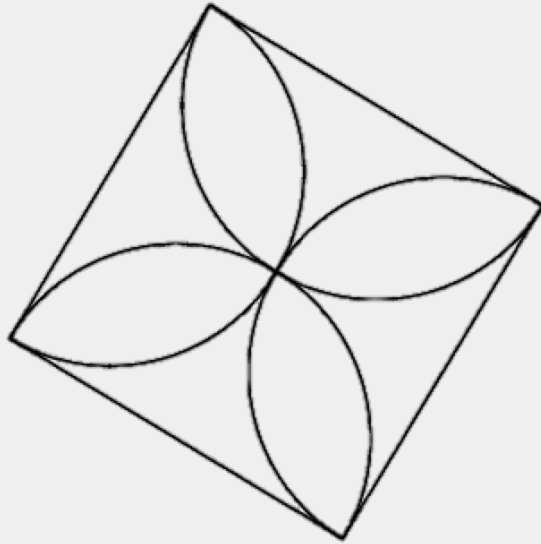


Assemblage par
superposition :
quatre « pétales » sur un
carré

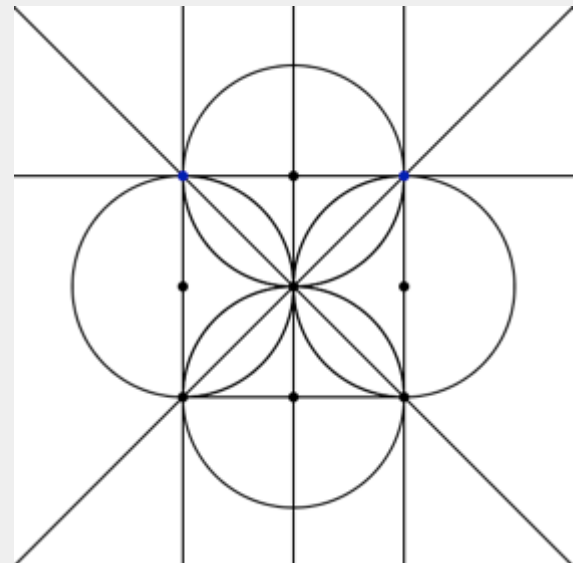


Assemblage par
juxtaposition :
les « motifs » verts sont
juxtaposés aux motifs
blancs, comme un puzzle

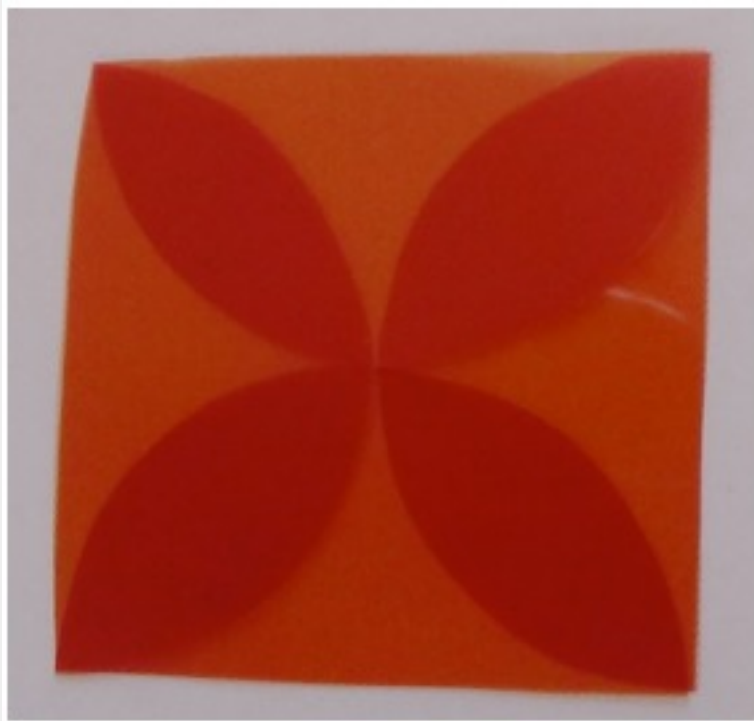
En partant d'une seule et même figure



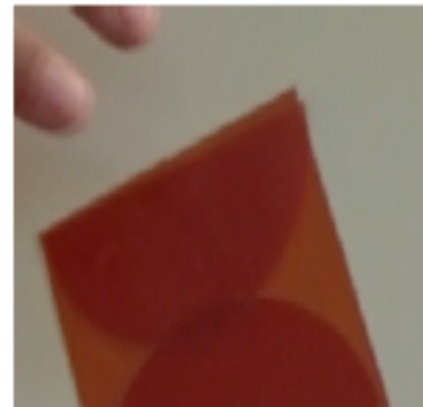
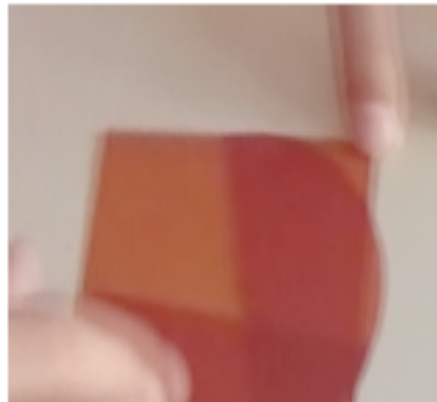
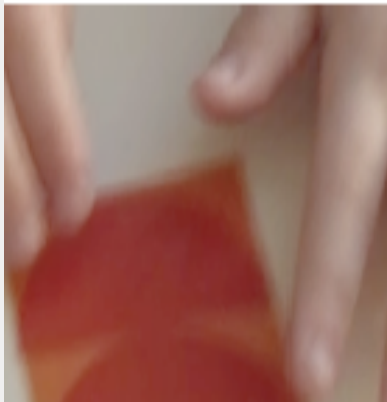
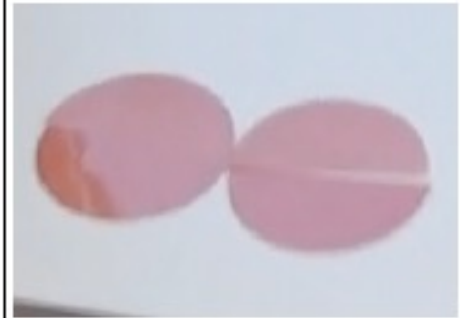
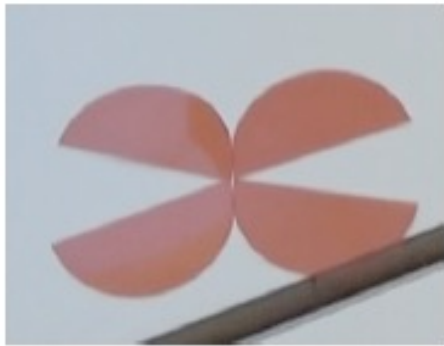
Déconstruction dimensionnelle
en réseau de droites et de points



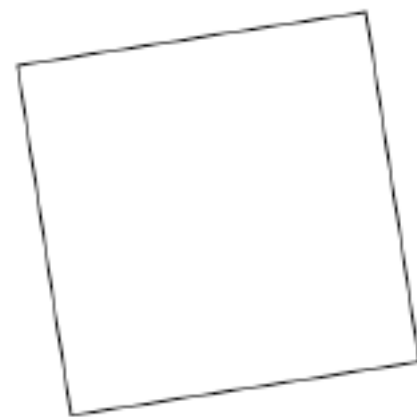
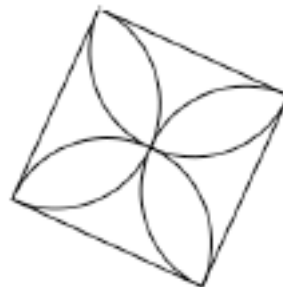
Un premier type de problèmes



Un premier type de problèmes



Un deuxième type de problèmes



Un deuxième type de problèmes

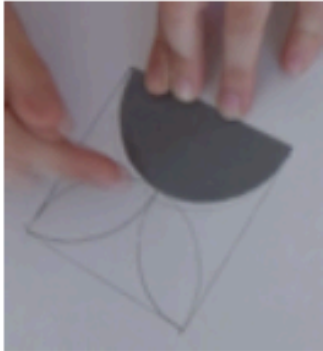


Figure 17a

L'élève fait reculer légèrement la pièce, celle-ci dépasse du carré.

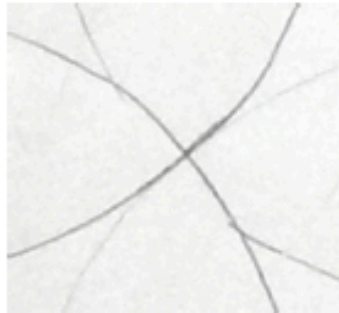


Figure 17b

L'élève lève le crayon s'il voit que les arcs de cercle ne se croisent pas correctement.



Figure 17c

L'élève repasse le centre en faisant une croix grossière.

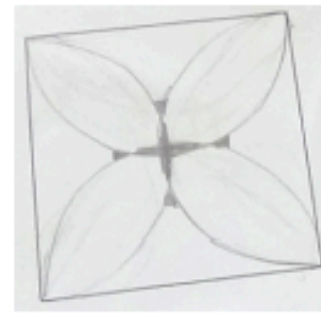


Figure 17d

L'élève colorie les espaces.

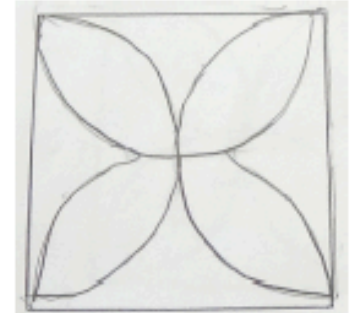


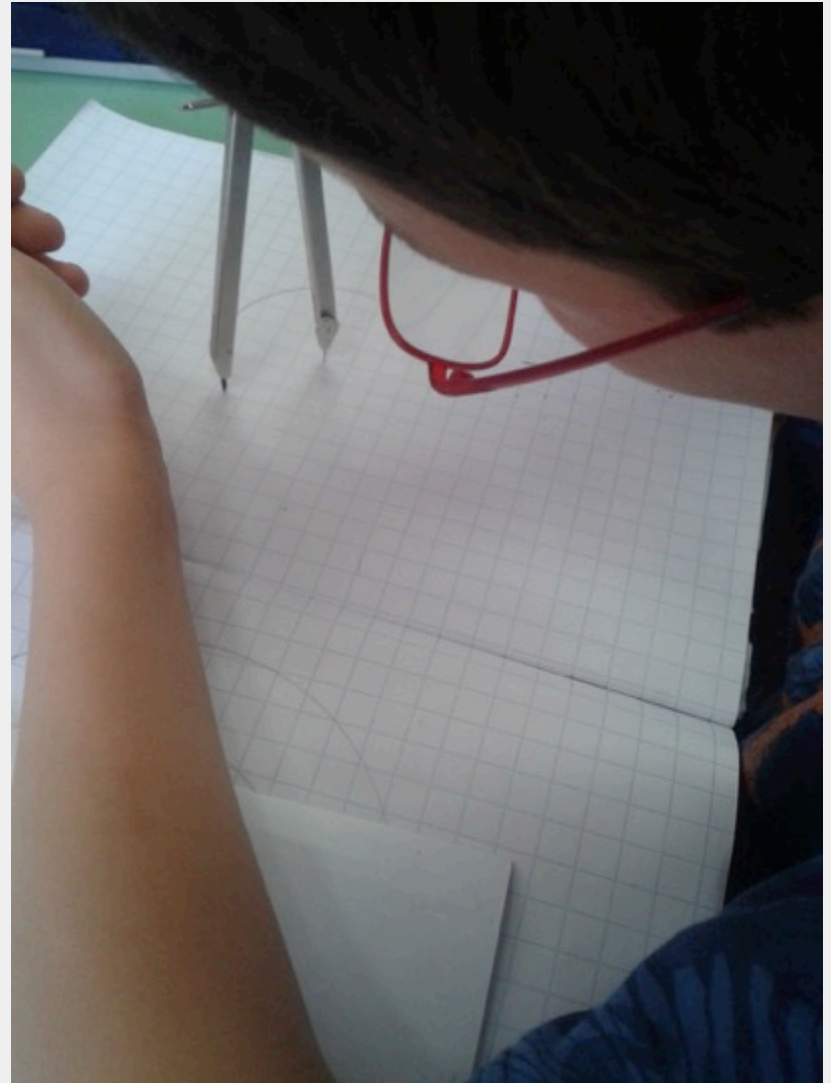
Figure 17e

L'élève refait à main levée (sans le recours aux gabarits).

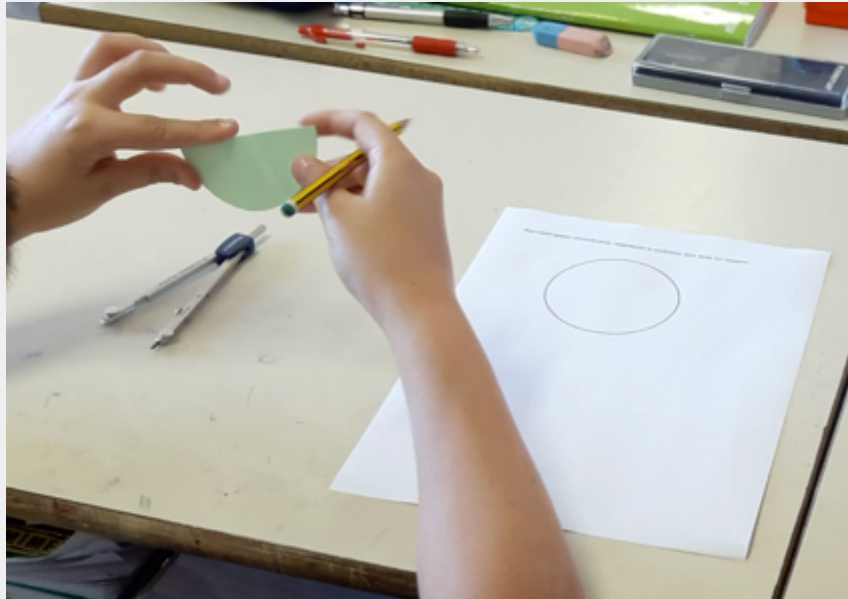
Figures 17 : Différentes procédures d'élèves pour que les arcs de cercle soient concourants

Introduction du compas comme traceur de cercles

- Il s'agit de prévoir une phase où les élèves apprennent à utiliser le compas (branches, pointes, écartement des branches)

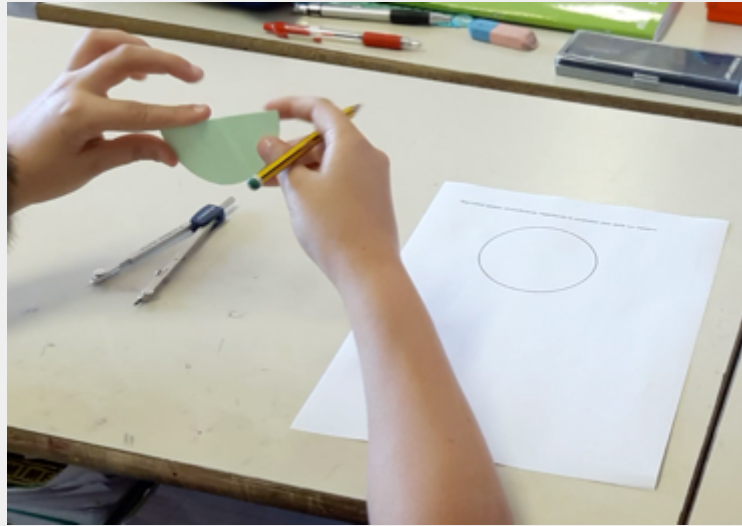


Du gabarit de disque au compas



“Reproduis le cercle-modèle en une seule fois, en te servant uniquement du compas pour le tracer. Le gabarit de demi-disque fourni ne devra te servir que pour prendre ou ajouter des informations sur le cercle-modèle. Le gabarit ne doit être ni plié ni coupé”

Du gabarit de disque au compas

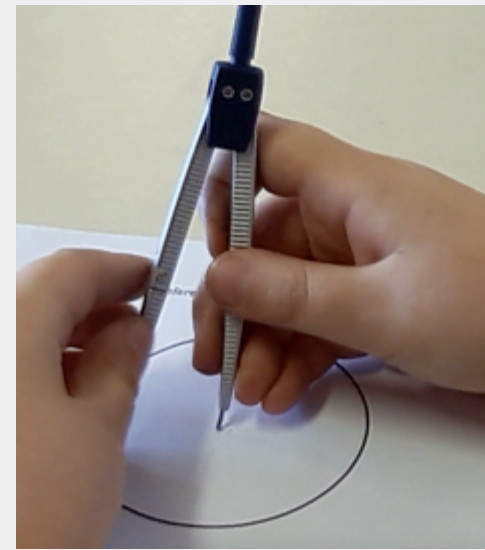
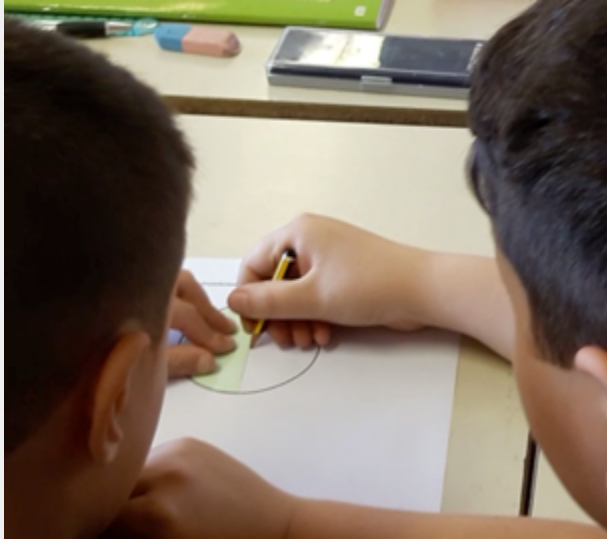


But du problème. Mettre en évidence le centre d'un cercle comme intersection de deux diamètres ; un rayon comme segment joignant le centre du cercle avec l'un de ses points ; le diamètre comme segment joignant deux points du cercle et passant par le centre ; sur le cercle, deux points comme intersection d'un diamètre avec le cercle.

Le compas pour reporter des longueurs, pour les comparer

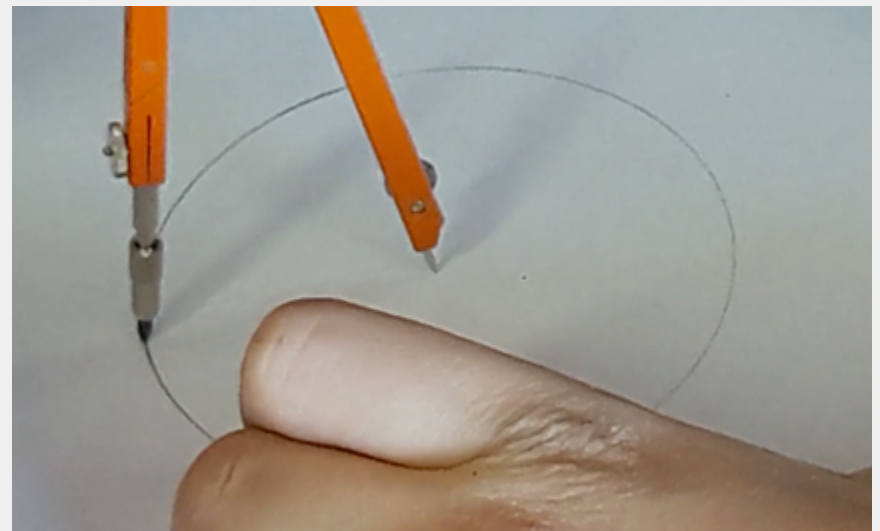
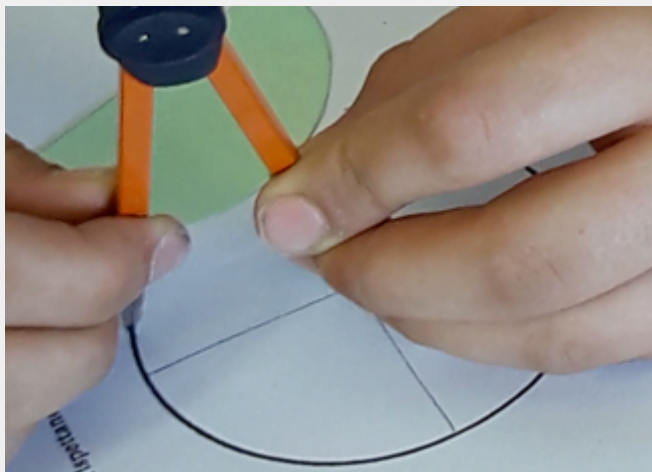
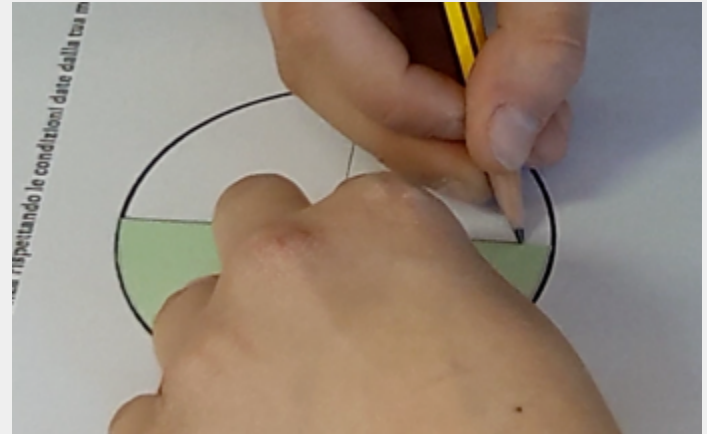
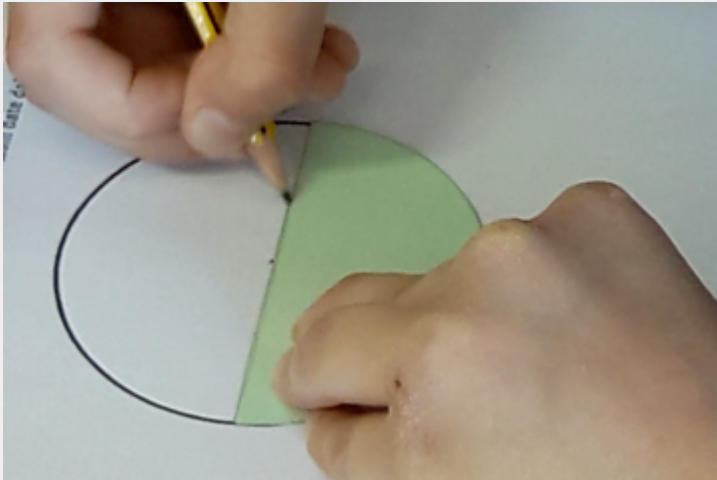
Du gabarit de disque au compas

Procédures d'élèves (1)

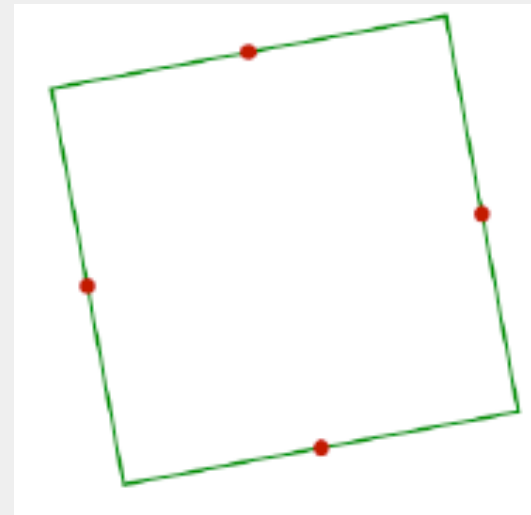
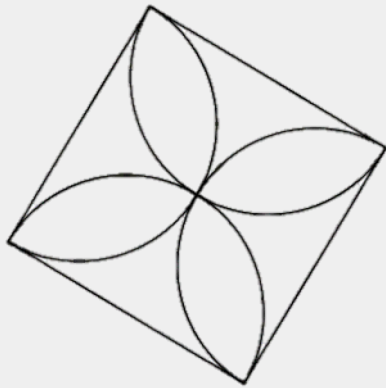


Du gabarit de disque au compas

Procédures d'élèves (2)

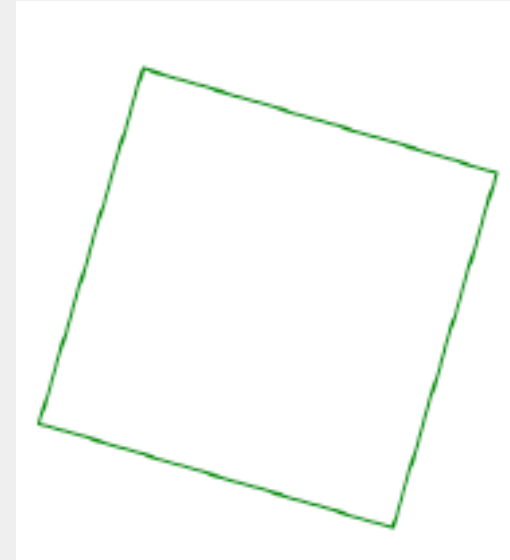
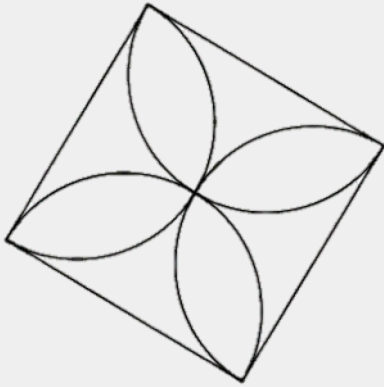


Un troisième type de problèmes



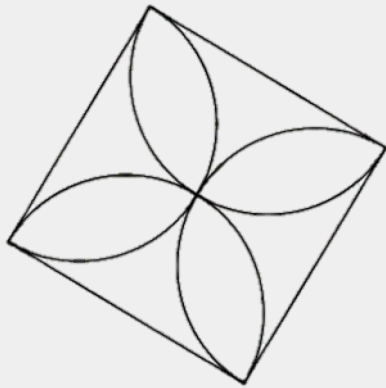
| <i>action</i> | <i>coût</i> | <i>comptes</i> |
|--|-------------|----------------|
| Règle non graduée pour tracer une ligne droite | 0 | |
| Règle pour reporter une longueur | 10 | |
| Règle graduée | 20 | |
| Gabarit d'angle droit | 5 | |
| Compas | 1 | |

Un troisième type de problèmes



| <i>action</i> | <i>coût</i> | <i>comptes</i> |
|---|-------------|----------------|
| Règle non graduée pour tracer une ligne droite | 0 | |
| Règle pour reporter une longueur | 10 | |
| Règle graduée | 20 | |
| Gabarit d'angle droit | 5 | |
| Compas | 1 | |

Un troisième type de problèmes



| <i>action</i> | <i>coût</i> | <i>comptes</i> |
|---|-------------|----------------|
| Règle non graduée pour tracer une ligne droite | 0 | |
| Règle pour reporter une longueur | 10 | |
| Règle graduée | 20 | |
| Gabarit d'angle droit | 5 | |
| Compas | 1 | |

En guise de conclusion

- Les problèmes de reproduction de figures planes constituent un terrain fertile
 - pour rendre opérationnels les concepts géométriques
 - pour apprendre à maîtriser les propriétés dont les instruments sont porteurs
- En jouant sur le choix des instruments, on favorise
 - un changement de regard sur les figures
 - un enrichissement de connaissances sur leurs propriétés

Bibliographie

Dans les bibliographies de ces articles, on trouvera les références citées dans l'exposé

- BULF C., CELI V. (2015a), Des problèmes de reproduction aux problèmes de restauration de figures géométriques planes : quelles adaptations pour la classe ?, *Actes du Colloque de la COPIRELEM*, ESPE d'Aquitaine, Mont-de-Marsan, 18-20 juin 2014 [sur CD-Rom]
- BULF C., CELI V. (2015b), Une étude diachronique de problèmes de reproduction de figures géométriques au cycle 3, *Grand N*, n. 96, 5-33
- BULF C., CELI V. (à paraître en 2016), Essai d'une progression sur le cercle pour l'école primaire. Une transition clé : du gabarit au compas, *Grand N*, n. 97, 21-58