

La résolution de problèmes comme objet ou moyen d'enseignement au cœur des apprentissages dans la classe de mathématiques : un point de vue fédérateur à partir d'études dans différents contextes

1 Résumé du plan de recherche

Depuis les années 1980, dans différents pays et à divers niveaux d'enseignement des mathématiques, tant les recherches en éducation que les responsables institutionnels et les programmes d'enseignement prônent la résolution de problèmes, non plus seulement comme une façon de valider la bonne utilisation des connaissances, mais aussi comme une méthode pour développer les apprentissages des élèves. Des recherches théoriques ou de type recherche-action ont été menées sous des appellations différentes (problèmes ouverts, situations de recherches, *Inquiry based learning*, *problem solving/posing*, etc.). Néanmoins, les études montrent que les pratiques des enseignants n'évoluent guère c'est pourquoi plusieurs projets européens se sont centrés sur le développement professionnel des enseignants et ont proposé des ressources, comme le projet PRIMAS auquel notre équipe a participé. Cependant, peu d'études interrogent de façon approfondie et sur le long terme les apprentissages effectifs réalisés dans ces différents cadres, ou s'intéressent aux effets différenciés selon certains profils d'élèves. Nous nous proposons d'interroger et d'évaluer les effets sur les apprentissages des élèves de la pratique de la résolution de problèmes en classe de mathématiques selon divers cadres théoriques de didactique des mathématiques et sur l'évaluation. Nous nous appuyons sur différents travaux de l'équipe passés, en cours ou débutants dans différents degrés scolaires. où la résolution de problèmes est soit moyen soit objet d'enseignement. Pour le premier axe (3 travaux), nous cherchons à déterminer à quelles conditions il s'avère possible et viable pour l'enseignant, en fonction des contraintes institutionnelles et sociales, de proposer un enseignement basé sur la résolution de problèmes et comment les apprentissages de thèmes mathématiques classiques peuvent se réaliser principalement par la résolution de problème. Pour cela, nous évaluerons dans des classes expérimentales, les effets sur les élèves par la comparaison de leurs résultats à des tests avec des groupes témoins, mais aussi par des questionnaires. Pour le second (4 travaux) nous cherchons à mieux déterminer ce que l'on peut apprendre quand on se centre sur la résolution de problème indépendamment des contenus mathématiques, puis comment les élèves peuvent repérer ces savoirs et savoirs faire construits et quelles aides peuvent leur être fournies, et enfin comment peuvent être gérées les institutionnalisations. Ici, il s'agit d'observer des classes, d'analyser à la fois les pratiques des enseignants (en particulier dans les phases de dévolution et d'institutionnalisation) et les apprentissages des élèves ainsi que les régulations en termes d'évaluation formative. L'objectif de cette requête est d'élaborer un dispositif fédérateur de questions communes portant sur ces travaux. Un travail de doctorat (*Candoc*) analysera les différentes données pour voir comment la gestion des erreurs, par les enseignants et les élèves peut jouer un rôle central dans les phénomènes d'apprentissage en résolution de problèmes. Notre réflexion sur l'évaluation formative, mais aussi plusieurs travaux de recherche et nos premières analyses de terrain nous ont en effet fait apparaître ce point comme central. Afin de développer et faire fonctionner des outils d'analyse et de comparaison communs à l'ensemble des travaux nous demandons un *Postdoc*. Son travail consistera d'une part à faire une typologie des contenus enseignés dans les différents travaux et de la façon dont la résolution de problèmes est abordée, et d'autre part à documenter la façon dont les élèves investissent les dispositifs expérimentés, en particulier quant à leur motivation afin de déterminer les effets différenciés selon des profils d'élèves. Ce dernier aspect s'appuiera également sur des enquêtes et des entretiens complémentaires sur des échantillons choisis d'élèves.

2 Plan de recherche

Depuis les années 1980, dans différents pays et à divers niveaux d'enseignement, en mathématiques, tant les recherches en éducation que les responsables institutionnels et les programmes d'enseignement prônent la résolution de problèmes non plus seulement comme une façon de valider la bonne utilisation des connaissances mais aussi comme une méthode pour développer les apprentissages des élèves. Des ressources ont été élaborées dans ce sens, mais les études menées sur les pratiques des enseignants montrent que l'évolution est encore lente, malgré des efforts certains du côté de la formation et du développement professionnel des enseignants. Dans ce contexte, l'objectif principal de notre projet est d'interroger et d'évaluer les effets sur les apprentissages de la pratique de la résolution de problèmes en classe de mathématiques dans différents degrés scolaires de l'instruction publique de l'Etat de Genève et dans quelques institutions connexes. Nous nous interrogeons notamment sur les effets différenciés en fonction du contexte institutionnel d'une part, mais aussi du niveau scolaire déclaré des élèves d'autre part. Par ailleurs, des collaborations internationales nous permettront de comparer nos recherches et résultats avec d'autres contextes.

Nous nous basons sur les travaux existants, y compris ceux de notre équipe, en particulier au sein du projet européen PRIMAS¹. La diversité des membres de l'équipe engagés dans le projet permet de disposer d'une large palette d'interventions et d'expertises à différents niveaux scolaires et dans des contextes variés.

2.1 Etat de la recherche

2.1.1 *Un constat inquiétant*

Les mathématiques n'attirent plus/pas les jeunes, qui les trouvent rébarbatives, austères, difficiles, déconnectées de la réalité, etc. Même celles et ceux qui y réussissent dans leurs études secondaires les fuient dès qu'ils entrent dans les études supérieures ou, s'ils en font encore, ce n'est la plupart du temps, que parce qu'il s'agit d'une discipline obligatoire dans leur cursus sans en être le but ultime. Ce désamour qui conduit à une désaffection pour les études scientifiques (au moins pour les mathématiques et la physique, car la biologie y échappe) dans la totalité des pays occidentaux est inquiétant au point que les politiques se sont emparés depuis plusieurs années du problème et développent dans de nombreux pays des programmes pour tenter d'y remédier. Se pose aussi le problème de la sous-représentation des filles dans les études et carrières scientifiques de façon différente selon les disciplines (OCDE 2008). En Europe le rapport Rocard et al. (2007) et les résultats des grandes enquêtes internationales de type PISA ont été les points de départ d'un grand plan de financement d'initiatives au sein de la communauté européenne. L'objectif de ces projets était de tenter de faire évoluer les pratiques des enseignants de mathématiques et sciences en donnant davantage de responsabilités aux élèves dans la construction de leurs apprentissages, afin de former des citoyens capables de se questionner, d'argumenter, de traiter la multitude des informations à leur disposition, en exerçant leur esprit critique dans un monde de plus en plus complexe. En outre, un rapport de l'OCDE (2008) mentionne que si les choix des étudiants sont largement déterminés par l'image plus ou moins positive des sciences et des métiers associés, ils le sont aussi par les programmes et les méthodes d'enseignement. Ainsi les auteurs recommandent une prise en compte plus importante des questions scientifiques actuelles dans les programmes et un changement dans les pratiques pour favoriser les pratiques scientifiques (p. 115). C'est également le cas aux Etats Unis, où le « National Research Council » (1996 et 2000)

¹ *Promoting Inquiry based education in MAtematics and Sciences*, financé par l'Union Européenne, 7e Programme Cadre (FP7/2007-2013) sous le Grant Agreement n°244380 qui a regroupé 14 équipes de 12 pays (Allemagne, Angleterre, Chypre, Danemark, Espagne, Hongrie, Malte, Norvège, Pays-Bas, Roumanie, Slovaquie, Suisse) du 1.1.2010 au 31.12.2013.

souligne que les méthodes d'enseignement scientifiques doivent être modifiées « Reforming science education requires substantive changes in how science is taught » (p. 5) et que les étudiants doivent être entraînés à observer et expérimenter « Inquiry is central to science learning » (p. 3) Ces rapports explicitent les buts de l'enseignement des sciences en mettant l'accent sur la qualité et la richesse des problèmes posés, en lien avec la vie courante et sur l'activité des élèves « Learning science is something students do, not something that is done to them » (p. 20).

Dans la contre-réforme qui a suivi celle des mathématiques modernes, depuis les années 1980, se sont développées de nombreuses expérimentations et divers travaux de recherche visant à rendre l'enseignement des mathématiques plus attractif et plus en lien avec le monde dit « réel » ou « quotidien ». Dans le même temps, les programmes et les textes officiels sur l'enseignement des mathématiques ont donné une large place à la résolution de problèmes contre une approche formelle et magistrale des mathématiques. En accord avec la demande sociale et politique, les injonctions officielles de nombreux pays ont clairement évolué dans ce sens depuis plus ou moins longtemps. On pourra à ce sujet consulter Coppé & Houdement (2010) et Coppé (2010) pour deux études du cas français (primaire et secondaire) et Dorier (2012c) qui fait le point dans les 12 pays européens du projet PRIMAS.

En Suisse romande, la résolution de problème est au cœur des enseignements depuis les années 1980 et le *Plan d'études romand* (PER) qui régit les onze années de la scolarité obligatoire de tous les cantons romands, entré en vigueur en 2011, affiche clairement cet objectif comme une visée prioritaire (cf. les commentaires généraux du domaine *Mathématiques et Sciences de la Nature* (CIIP 2010, p. 7)).

De plus, dans le canton de Genève, les élèves du profil scientifique de la section Littéraire et Scientifique du Cycle d'Orientation (secondaire 1) bénéficient, en classe de 10^e (élèves de 13-14 ans) d'une période supplémentaire dite de « Développements en mathématiques » et de deux périodes de « Développement en sciences physiques » ; et, en classe de 11^e, de deux périodes de « Développement en biologie » et de deux périodes dédiées à l'apprentissage de la démarche scientifique et de la modélisation.

Parallèlement, les moyens d'enseignement romands de mathématiques pour les onze années de la scolarité obligatoire sont composés d'une large palette de problèmes abordant tous les thèmes d'enseignement. Ces moyens officiels et communs à toute la Romandie privilégient donc nettement la résolution de problèmes et pas du tout l'exposé du cours, quasi inexistant dans les moyens primaires et concentré dans le livre « Aide-mémoire » commun aux trois ans du secondaire 1 (cycle 3 du PER dénommé Cycle d'orientation à Genève). Cependant, ils laissent totalement à la charge des enseignants leur organisation ce qui peut d'une part, se révéler être une difficulté et d'autre part, engendrer des pratiques très différentes comme l'a montré la thèse de Daina (2013).

2.1.2 *La résolution de problèmes dans les travaux francophones en didactique*

Dans le monde francophone, de l'origine du champ de la didactique des mathématiques dans les années septante jusqu'à la fin des années nonante, les premières recherches ont avant tout proposé des ingénieries didactiques visant à élaborer des « situations fondamentales » (Brousseau, 1998) permettant la construction d'objets/notions mathématiques (comme les fractions et les décimaux). Mais ces recherches, centrées sur la construction des savoirs mathématiques, ne se préoccupent pas vraiment de la question des conditions de la diffusion à plus grande échelle, ni des pratiques différenciées des enseignants (Dorier, 2014). Elles étaient conçues pour un

enseignant impliqué dans le projet de recherche s'adressant à des élèves génériques dans des conditions d'expérimentation particulières.

Dans le même temps, Vergnaud (1981, 1990) dans la théorie des champs conceptuels, indique que la notion de problème est centrale pour la construction des connaissances puisque « c'est à travers des situations et des problèmes à résoudre qu'un concept acquiert du sens pour l'enfant ». Ce point est central pour nous puisqu'il justifie notre entrée par la résolution de problèmes pour construire des connaissances mais aussi pour vérifier leur acquisition. Il définit ainsi un concept « comme un triplet de trois ensembles : l'ensemble de situations qui donnent du sens au concept, l'ensemble des invariants sur lesquels repose l'opérationnalité des schèmes et l'ensemble des formes langagières et non langagières qui permettent de représenter symboliquement le concept, ses propriétés, les situations et les procédures de traitement ».

Depuis les années 1990, la didactique des mathématiques a largement investi l'étude des pratiques enseignantes, objet de recherche abordé selon différentes approches.

Ces recherches ont ouvert la voie de la question de la diffusion et de la reproductibilité des ingénieries et plus largement du développement des actions à mener pour amener les enseignants à évoluer dans leurs pratiques. Dans les travaux francophones, on peut distinguer plusieurs courants. Tout d'abord certains travaux ont élargi l'usage des outils de la théorie des situations didactiques (TSD) de Brousseau à l'étude des pratiques ordinaires avec essentiellement les travaux de Hersant, 2001, 2010a et b ; Margolinas, 1992, 1999 ; Margolinas & al., 2011 ; Margolinas & Perrin-Glorian, 1998 ; Perrin-Glorian & Hersant, 2003. Ils ont permis de revoir et d'élargir les concepts de milieu et de contrat didactique, mais aussi de validation, d'institutionnalisation. En particulier Hersant (2010 a et b), en réinterrogeant la dynamique du duo milieu-contrat soulève des questions importantes sur le rôle et la place de la dévolution et de l'institutionnalisation dans des activités de recherche de problème. Ces travaux s'intéressent à « l'économie » du système didactique dans le sens où ils offrent des outils d'analyse des situations mathématiques pour la classe, des scénarios de leur mise en place et de ce que cela devrait produire comme apprentissages des élèves, ou en tout cas d'un élève générique pour lequel la dévolution aurait réussi. Cette approche fondamentalement constructiviste s'appuie de fait sur un présupposé fort d'autonomie de l'élève comme producteur de ses propres apprentissages dans une interaction avec un milieu suffisamment riche et antagoniste. S'il est une entrée essentielle pour notre questionnement, le cadre théorique de la TSD et ses ramifications ne nous permet toutefois pas à lui seul de questionner l'importance de la résolution de problèmes et sa viabilité sur le quotidien dans un réseau de contraintes plus larges.

Un point de vue complémentaire est adopté dans le cadre de la *Théorie anthropologique du didactique* (TAD) développé par Chevallard (1998 et 1999). Celui-ci permet de mieux prendre en compte l'enseignant qui est vu comme un sujet de plusieurs institutions, dont celle où il enseigne, mais pas seulement. Ainsi le rapport personnel au savoir d'un enseignant est-il la concaténation des différents rapports acquis dans les diverses institutions auxquelles il a été assujéti. Dans cette approche, le travail de l'enseignant consiste à mettre en œuvre dans la classe une organisation mathématique pour faire rencontrer à l'élève le savoir selon une organisation didactique qui en régit la mise en scène. La notion de *parcours d'étude et de recherche* (PER) qui a émergé dans ce contexte (Chevallard, 1999 ; Matheron & Noirfalise, 2011a et b ; Winslow, Matheron & Mercier, 2013) offre un cadre théorique pour problématiser la question d'une organisation de l'étude d'une œuvre mathématique en tentant d'en montrer « les raisons d'être » qui peuvent être internes ou externes aux mathématiques, et de déterminer (voire de faire construire aux élèves) des types de tâches qui pourront être résolues avec des

techniques justifiées par des éléments théoriques. Des expérimentations dans des classes ordinaires de tels parcours sont actuellement en cours, par exemple sur l'enseignement des nombres relatifs ou sur la soustraction (Ruiz Munzon & al., 2012 ; Matheron & Quilio, 2014). Ce cadre théorique nous permettra d'élaborer et d'analyser des séquences de classe en prenant en compte notamment les raisons d'être des savoirs enseignés qui pourront être au cœur des problèmes que les élèves élaboreront et résoudront. Il permet aussi d'analyser comment les responsabilités de l'enseignant et des élèves sont partagées dans la classe.

Parallèlement à ces recherches « théoriques », des travaux de « recherche-action » ont permis de développer des ressources et des dispositifs innovants qui ont été testés dans des expérimentations. Ces travaux ont donné lieu à des théorisations plus ou moins poussées en lien avec les cadres précédemment évoqués. Il s'agit des problèmes ouverts (Arsac, Germain & Mante, 1991 ; Arsac & Mante, 1997 et 2007), des situations problèmes (Brun, 1990), des situations de recherche pour la classe (Eysseric, 2002 ; Grenier, 2011 ; Grenier & Payan, 1998), du débat scientifique (Legrand, 1988 et 1990). On trouvera par ailleurs des revues de ces différents travaux dans Dorier (2012b) et Georget (2009).

Ces travaux essentiellement francophones font écho à un courant international que nous allons rapidement esquisser ci-dessous.

2.1.3 *Problem solving, Problem posing, Inquiry based learning*

A l'échelle internationale, les travaux de Polya (1945), ont initié dès les années 60 un courant de recherche, dit « problem solving », dans lequel on tente de comprendre comment des experts résolvent des problèmes de mathématiques pour développer des activités visant à entraîner les élèves à mettre en œuvre la démarche scientifique (comprendre le problème, concevoir un plan, le mettre à exécution et examiner la solution obtenue). Mais ces travaux n'ont pas donné les résultats attendus même si des programmes d'enseignement, basés sur la résolution de problèmes, ont été développés aux Etats-Unis. Schoenfeld (1985, 1992) a repris et donné des bases plus théoriques à ces premiers travaux et ainsi initié un important courant de recherches, principalement dans le monde anglo-saxon, mais aussi au-delà.

Des chercheurs ont prolongé cette approche en développant le concept du « problem posing » (Kilpatrick, 1987 ; Silver, 1985, 1994 ; Silver & Cai, 1996 ; Cai, & al., 2013). Cette approche postule qu'au-delà de la capacité à résoudre des problèmes, c'est l'activité qui consiste à bien savoir les poser qui serait un signe du développement des compétences mathématiques. Ainsi Silver & Cai (1996) partent du postulat que savoir poser des problèmes augmente chez les élèves la capacité à les résoudre. Cai & al. (2013) indiquent que lors d'évaluations classiques, les élèves ayant eu un enseignement intégrant régulièrement des séances de « problem posing », réussissaient au moins aussi bien que les autres sur des activités classiques, techniques, tout en témoignant d'une compréhension plus fine des concepts. Ces travaux sont fort intéressants, mais les exemples qu'ils donnent à voir sont constitués le plus souvent de problèmes relativement scolaires et complètement contrôlés par les enseignants. Il sera intéressant pour nous dans ce projet de mettre les hypothèses de ce courant de recherche à l'épreuve d'expérimentations qui donnent une plus grande autonomie à l'élève et font appel à des outils mathématiques et des contextes plus complexes.

Un autre courant d'envergure internationale concerne les nombreux travaux autour des liens entre les mathématiques et les disciplines dites « de service » et la question de la modélisation comme approche centrale dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. C'est en effet un moyen privilégié de sortir les mathématiques de leur fonctionnement théorique interne et de mettre en avant leurs applications aux autres

sciences. Ce courant a été particulièrement important en Allemagne et dans les pays scandinaves comme en atteste un des textes fondateurs de Blum & Niss (1991). On trouvera par ailleurs une synthèse internationale de ces approches dans le livre de l'étude ICMI² consacrée à ce sujet (Blum et al., 2007), ainsi que les comptes-rendus des groupes de travail dans différents congrès internationaux comme ICME³, CERME⁴ ou EMF⁵ ou dans la revue *Teaching Mathematics and its Applications* <https://teamat.oxfordjournals.org/>. Par ailleurs, dans le cadre de la Théorie Anthropologique du Didactique, la notion de modélisation est étendue à la notion de modélisation intra-mathématique (Chevallard 1989, p. 53) et dans le cadre des modélisations extra-mathématiques, se développe la notion de praxéologie mixte (Artaud 2003, voir aussi Bosch & Winslow, 2015). On notera également que la modélisation est au cœur du domaine *Mathématiques et Sciences de la Nature* du *Plan d'études Romand* (Burgermeister & Dorier 2013).

Plus récemment, les travaux sur les démarches d'investigation IBSL (*Inquiry Based Sciences Learning*), inspirés de Dewey (1916, 1938) élargissent la perspective de la résolution de problèmes puisqu'ils mettent fortement en avant l'investigation notamment grâce aux outils technologiques qui permettent aux élèves de rechercher des informations qui ne sont pas données mais que les élèves doivent aller chercher et organiser avant de les traiter (Artigue & Blomhøj, 2013 ; Dorier & Mass, 2014 ; Dorier & Weiss, 2016). Depuis une dizaine d'années, plusieurs projets européens de recherche comme Fibonacci <http://www.fibonacci-project.eu/>, Primas <http://www.primas-project.eu/>, S-Team <http://www.s-teamproject.eu/>, ou Lema <http://www.lemma-project.org/web.lemaproject/web/eu/tout.php> se sont centrés sur ce type d'approche et mettent en avant une plus grande authenticité des questions posées, plus en lien avec celles de la vie courante, une recherche plus ouverte, un aspect expérimental fort avec des retours critiques et une dimension collaborative du travail des élèves.

On voit bien à travers ces différents courants combien à la fois les chercheurs en éducation et les institutions d'enseignement, mais aussi les politiques tentent d'agir sur les pratiques d'enseignement pour les faire évoluer en donnant une place et une responsabilité plus grande aux élèves. Ces différentes approches ont ainsi développé des ressources pour les enseignants et des modules de formation en ligne, comme on en trouve sur les sites des différents projets européens cités plus haut ou d'institutions comme le Shell Institute : <http://www.mathshell.org.uk/>, le Freudenthal Institute : <http://www.uu.nl/en/research/freudenthal-institute>, ou l'Institut Français de l'Éducation : <http://educmath.ens-lyon.fr/>.

Ces différents travaux s'attachent, en présentant des activités innovantes, à donner des outils aux enseignants, mais peu d'entre eux questionnent les réels apprentissages des élèves, même si cette question est toujours sous-jacente. En effet, souvent, l'intérêt de la résolution de problème est un présupposé qui n'est peu ou pas questionné. En outre, questionner les effets des pratiques et des types de problèmes sur les apprentissages effectifs des élèves reste théoriquement et méthodologiquement complexe. Comme les évaluations mises en place dans les classes pour évaluer les apprentissages dépendent fortement du type d'enseignement donné, sur quels éléments se baser pour évaluer les apprentissages ? A quelle échelle de temps ? Quels sont les effets liés à l'enseignant, notamment ses compétences à engager et à maintenir les élèves dans les tâches, à soutenir la motivation ?

2.1.4 Liens entre pratiques et apprentissages dans la résolution de problèmes

² International Commission on Mathematical Instruction

³ International Congress on Mathematical Education

⁴ Congress of European Research in Mathematics Education

⁵ Espace Mathématique Francophone

Malgré ces différents travaux et les volontés politiques mettant en avant la résolution de problème dans les curricula de mathématiques dans de nombreux pays, on sait que la réalité des pratiques des enseignants ne reflète pas majoritairement cette injonction institutionnelle. Les raisons en sont complexes et les moyens d'intervention souvent de courte portée et sur des durées limitées (Dorier & Garcia, 2013). Ces résistances à utiliser la résolution de problème peuvent venir du fait que la formation des enseignants n'est pas suffisante d'autant plus que cette pratique rompt avec l'enseignement généralement reçu en tant qu'élèves.

En outre, Coppé & Grugeon-Allys (2015), dans une étude sur la diffusion des activités de résolution de problème, ont montré que celle-ci se limitait trop souvent à des activités certes riches, avec un potentiel didactique susceptible de provoquer une activité mathématique importante des élèves mais trop isolées. Ceci expliquerait pourquoi quand elles sont mises en place dans les classes, elles ont du mal à se déployer et sont souvent abandonnées. Il faudrait au contraire de véritables séquences d'enseignement mettant en œuvre une progression dans les types de tâches comportant de vrais moments d'institutionnalisation mais les ressources comportant de telles séquences sont encore rares.

De façon générale, peu d'études interrogent de façon approfondie et sur le long terme les apprentissages effectifs qui sont réalisés dans ces différents cadres, ou s'intéressent aux résistances de certains élèves, ou au contraire à ceux qui se révèlent à travers ce type d'approche, plus globalement aux effets différenciés selon les profils et aux bénéfices globaux. En fait, il semble que l'engouement général pour les approches par résolution de problèmes ou par investigation (IBL) a quelque peu occulté la question de leur pertinence pour les apprentissages. Aussi, nous semble-t-il important de renforcer cette dimension de la recherche en se centrant sur les élèves, et en interrogeant la qualité des apports de la résolution de problèmes pour les apprentissages. C'est ce que nous souhaitons développer dans ce projet.

Pour ce faire, nous allons faire appel de façon complémentaire à d'autres cadres théoriques que ceux que nous avons évoqués jusqu'à présent. Les travaux menés dans le cadre de la *double approche ergonomique et didactique* tentent de mettre en relation les pratiques déclarées ou observées des enseignants et les apprentissages potentiels et effectifs des élèves. En élargissant les outils de la didactique des mathématiques avec des emprunts à la théorie de l'activité développée à la suite des travaux de Vigotsky (1934, 1985), cette double approche permet une différenciation entre ce qui est de l'ordre de l'individu particulier et de l'individu générique par la distinction de cinq composantes de la pratique enseignante. Les deux premières (cognitive et médiative) permettent de dégager les logiques d'action des enseignants, révélatrices de choix propres par-delà les contraintes communes. Les trois autres (personnelle, sociale et institutionnelle) sortent du seul cadre de la classe et interviennent comme des déterminants des pratiques de classe (Robert & Rogalski, 2002).

Les travaux issus de ce courant mettent souvent l'accent sur les effets potentiellement négatifs quand la mise en œuvre de l'activité de résolution de problèmes n'est pas optimale. Par exemple, des recherches comme celles de Butlen, & al. (2004) ou Masselot (2004) dans les classes avec des élèves socialement défavorisés montrent que si les conditions de mises en œuvre des activités de résolution de problèmes ne sont pas remplies, notamment concernant l'équilibre entre dévolution et institutionnalisation, les élèves n'apprennent pas et les écarts se creusent.

Dans un autre ordre d'idée, mais toujours à l'aide d'outils de la double approche, Chesnais (2014) compare des enseignants d'un même niveau scolaire dans des contextes favorisés ou non. Elle montre que ce sont finalement les choix peu ambitieux de certains enseignants, qui consistent par exemple à se cantonner à des tâches avec peu

d'enjeu, ou à ne pas favoriser les aspects langagiers, qui ont une influence négative sur les apprentissages des élèves, plutôt que les effets de contexte. Choquet (2014 et 2016) en étudiant les pratiques d'enseignants français du primaire qui mettent en œuvre dans leurs classes des problèmes ouverts, montre que si les phases de recherche et de mise en commun sont bien organisées par tous les enseignants observés, avec des régularités intra-individuelles, il existe d'importantes différences inter-individuelles. Par ailleurs, la phase d'institutionnalisation est souvent oubliée, certainement parce que les enseignants peinent à dégager des savoirs ou savoir-faire en jeu dans la résolution de chaque problème. C'est pourquoi il est important de dégager les types de connaissances décontextualisées que les élèves peuvent construire à travers la résolution de problème. Ce travail montre également des différences importantes entre les enseignants sur la prise en compte des travaux des élèves lors des phases de recherche et des mises en commun. Ce dernier point nous invite à explorer comment l'évaluation formative dans le cours de la résolution de problèmes peut être une aide pour soutenir les apprentissages des élèves.

C'est ce que fait Lepareur (2016) dont la thèse se situe dans un autre cadre théorique. En se plaçant dans une perspective d'évaluation et dans le cadre plus large de la mise en place de démarches d'investigation dans l'enseignement des mathématiques et des sciences, elle étudie comment les processus d'évaluation formative (à la fois avec des outils formels comme des grilles ou informels dans les interactions) peuvent participer de façon positive à l'autorégulation des apprentissages. Elle montre que les professeurs (niveau primaire et secondaire 1) n'utilisent pas spontanément des outils d'évaluation formative (grilles de positionnement, débats sur les réponses des élèves, etc.) mais qu'il y a une évolution nette après une année de travail collaboratif entre professeurs et chercheurs et que ces nouvelles pratiques peuvent avoir des effets sur les apprentissages des élèves. En conclusion, elle souligne que ces outils ne peuvent être construits sans tenir compte des savoirs enseignés et de leur épistémologie.

Ces travaux amènent trois remarques importantes qui nous allons intégrer dans notre projet.

- Il ne suffit pas de mettre des problèmes dans la classe pour que des apprentissages se fassent ; la mise en œuvre de situations de classe incluant la résolution de problèmes suppose de construire des organisations mathématiques cohérentes et des organisations didactiques qui prennent notamment en compte les jeux entre contextualisation/décontextualisation, dévolution/institutionnalisation.
- Amener les élèves, par la résolution de problèmes, à prendre davantage de responsabilités dans la construction des savoirs suppose de faire évoluer la responsabilité de la validation dans la classe et il apparaît nécessaire de soutenir les apprentissages par des régulations (Allal, 1988 ; Allal & Mottier Lopez, 2007 ; Mottier Lopez, 2012) dans lesquelles les processus d'évaluation formative : « (...) all those activities undertaken by teachers, and/or by their students, which provide information to be used as feedback to modify the teaching and learning activities in which they are engaged. » (Black et Wiliam, 1998, p. 7-8) sont centraux. En effet, il faut conjointement que les enseignants développent leur capacité à prendre en compte les réponses des élèves pour leur apporter des feedback pertinents (Nicol & al., 2006) et que, selon Clark (2012), les élèves développent leurs capacités d'auto évaluation, ce qui améliore les apprentissages.
- Comme nous l'avons vu précédemment, les enseignants sont encore peu outillés pour développer de tels processus, d'autant plus que Shavelson & al. (2008) en proposent une vision élargie, continue et dynamique sur la durée des séquences de classe entre des évaluations formelles portant sur des

questionnaires ou des QCM ou informelles (« on the fly ») au cours des interactions entre un/des élève(s) et le professeur. Il y a donc nécessité d'une formation des enseignants : c'est ce qu'indiquent Ash & Levitt (2003) qui concluent que l'intégration de pratiques d'évaluation formative peut constituer un levier pour l'évolution des pratiques enseignantes notamment par une meilleure prise en compte des apprentissages des élèves de manière individuelle et collective, en développant un changement de regard sur l'élève, sur ses erreurs et en rendant plus explicite pour le professeur et les élèves ce qu'ils doivent savoir et savoir faire.

2.2 Etat de la recherche des requérants

2.2.1 Jean-Luc Dorier

Après ses recherches sur l'enseignement et l'apprentissage de l'algèbre linéaire à l'université, Jean-Luc Dorier s'est entre autres intéressé à l'usage des vecteurs en physique et de par ses fonction d'enseignant de mathématiques en sciences économiques, aux liens entre mathématiques et sciences économie. Ces deux volets de ses recherches l'ont conduit depuis les années 2000 à développer des travaux sur le thème de la modélisation et des liens entre les mathématiques et les autres disciplines (Ba & Dorier, 2011, Dorier, 2015b et une synthèse dans Dorier, 2012a). Ce sont ces travaux menés dans un contexte international qui l'ont conduit d'abord au sein de groupes de travail de colloques à s'intéresser aux activités de démarches d'investigation (Dorier et Maass, 2014). Il a ainsi piloté la participation de la Suisse au projet PRIMAS (2010-2013) (*PRomoting Inquiry based education in MATHematics and Sciences*) financé par l'Union Européenne, regroupant 14 équipes de 12 pays. L'objectif de ce projet était de mettre en place dans chacun des pays, des dispositifs pour initier et soutenir à large échelle et à long terme une évolution des pratiques d'enseignement des mathématiques et des sciences pour tous les degrés scolaires, dans le sens d'une utilisation accrue de la démarche d'investigation (Dorier & Weiss, 2016) (voir le site international <http://www.primas-project.eu/fr/index.do> et le site suisse <http://www.unige.ch/primas/>). Le projet PRIMAS a gagné en octobre 2014 le *Scientix Resources Award* pour son "Guide of supporting actions for teachers in promoting IBL" et l'ensemble du projet a été labélisé "success story" par la Commission Européenne. Les actions visaient le développement de la recherche, la formation des enseignants, mais aussi la diffusion vers les professionnels de l'éducation, les politique, les parents et plus largement la cité.

Le groupe genevois a été responsable pour l'ensemble du projet du *Working Package n°2* «Analysis of national contexts and existing materials», qui a conduit à un premier rapport en juillet 2010 faisant un état des lieux dans les 12 pays du consortium. Dans l'analyse ont été mis en œuvre des outils de la théorie anthropologique du didactique de Chevallard et en particulier l'échelle des niveaux de co-détermination du didactique. Une deuxième enquête a été menée à mi-projet et a conduit à un deuxième rapport à 6 mois de la fin du projet pour réactualiser l'état des lieux (Dorier, 2013 et Dorier & Garcia, 2013).

Ce projet a permis de mener une réflexion de fond, dans un contexte international, sur la démarche d'investigation dans l'enseignement des mathématiques et des sciences (Dorier 2012b). A l'échelle locale, il a pu être un moyen de renouveler et d'élargir la réflexion lors de l'introduction du Plan d'Etude Romand et des nouveaux moyens d'enseignement au secondaire 1. Notamment, à cette occasion, en collaboration avec le Département de l'Instruction Publique, a été proposée une formation continue pour tous les enseignants de mathématiques du Cycle d'Orientation (secondaire 1) à Genève (Dorier & Burgermeister, 2012, Burgermeister & Dorier 2013, Dorier 2015a).

Plusieurs travaux ont aussi été menés dans le cadre de l'enseignement primaire, comme en atteste des thèses, des articles et des présentations à des colloques (Daina, 2013 ; Dorier, 2015c ; Daina & Dorier, 2016 ; Dorier & Coutat, 2016).

Le projet PRIMAS a également conduit à une réflexion plus particulière en lien avec l'heure de développements en mathématiques de 10^e et d'introduction à la démarche scientifique et à la modélisation. C'est dans ce cadre qu'a été introduite la narration de recherche (Chevalier, 1993 ; Sauter, 1998 ; Bonafé et al. 2002) comme moyen pour que les élèves rendent compte de la suite des actions réalisées au cours de leur recherche. A la demande des enseignants qui doivent évaluer régulièrement ces enseignements, l'équipe a mené une réflexion de fond sur la question de l'évaluation d'abord sommative, puis finalement formative (Burgermeister, Coutat, Chanudet, Coray, Dorier, Guex, Merminod & Northcott, 2015). Ce travail a coïncidé avec l'arrivée de Sylvie Coppé, comme MER dans l'équipe qui a pu apporter ses compétences dans le champ de l'évaluation. Il a aussi été mené en lien avec le *Groupe de recherche en Évaluation, régulation et différenciation des apprentissages dans les systèmes d'enseignement*, EReD de la professeure Lucie Mottier de la section des Sciences de l'éducation de l'Université de Genève. Ce sont sur ces bases que s'est construit le projet de thèse de Maud Chanudet, que Jean-Luc Dorier et Sylvie Coppé co-encadrent.

2.2.2 Sylvie Coppé

Sylvie Coppé, a fait sa thèse sur les processus de vérification mobilisés par les élèves (Coppé, 1998). Elle a été responsable de la formation des maîtres à l'IUFM de Lyon de 1999 à 2008. Durant ces mêmes années elle a travaillé sur le thème de la résolution de problèmes au niveau du primaire (Coppé & Balmes, 1999 ; Coppé & Houdement, 2002, 2010). Depuis une quinzaine d'années, elle travaille sur l'enseignement de l'algèbre élémentaire au niveau du cycle d'orientation. En France, elle a animé un groupe de recherche collaborative SESAMES Situations d'Enseignement Scientifique : Activités de Modélisation, d'Evaluation, de Simulation) avec des professeurs de mathématiques, ayant pour but la construction collaborative de ressources pour les professeurs et les formateurs de mathématiques pour l'enseignement de l'algèbre au collège, chaque participant apportant une expertise différente et complémentaire à l'activité de conception. Les ressources produites sont diffusées sur le site PEGAME <http://pegame.ens-lyon.fr/> et sont utilisées en formation initiale et continue des enseignants. Ce travail a donné lieu récemment à un parcours national de formation qui a été déposé en octobre 2015, sur la plate forme M@gistere « Une entrée dans l'algèbre par les programmes de calcul » (<https://magistere.education.fr/dgesco/>).

L'objectif de ce groupe est d'élaborer des activités qui permettent d'introduire et de travailler sur l'algèbre à travers la résolution de problèmes dont on considère qu'ils ont un potentiel didactique important pour motiver l'emploi des notions algébriques. En résumé, il s'agit de proposer des activités motivantes, ouvertes, qui constituent de vrais problèmes, en mettant en place une gestion de classe adaptée qui permette aux élèves de prendre des responsabilités dans l'avancée du savoir, de pouvoir expérimenter, argumenter. Ce travail s'appuie sur des recherches nombreuses sur les aspects épistémologiques et didactiques de l'algèbre élémentaire dont on peut trouver des synthèses dans Coppé & Grugeon-Allys (2015), Chaachoua (2015) et Coulange, Dorier, Drouhard & Robert (2012). Mais il prend également en compte les pratiques ordinaires des professeurs afin de proposer des ressources viables, réalisables dans les classes et diffusables (Bednarz, 2013).

Un autre objectif de cette recherche est de faire évoluer les pratiques, de permettre un développement professionnel des enseignants (Coppé, 2013, Chaussecourte, Coppé, Roditi & Trgalova, à paraître).

Cette dimension de la recherche a été travaillée dans le projet de recherche européen S-TEAM (*Science-Teacher Education Advanced Methods*, 2007-2013) pour lequel nous avons fourni un livrable (Coppé & Tiberghien, 2010). Un des résultats de ce travail est qu'il est nécessaire d'élaborer et donc de diffuser non plus des activités isolées, comme cela a été le cas pendant de nombreuses années dans différentes recherches, mais des séquences d'enseignement articulant des phases d'action pour les élèves, des moments de synthèse et d'institutionnalisation, puis de nouvelles activités et incluant des réinvestissements de connaissances (Coppé, 2012, Coppé, Grugeon-Allys & Pilet, à paraître). Il s'agit également de travailler de façon conjuguée les aspects techniques, le sens et les justifications (Assude, Coppé & Pressiat, 2012 et Coppé, 2013). Des séances/ séquences d'enseignement ont été élaborées et testées dans les classes dans lesquelles nous utilisons notamment les programmes de calcul dont Chevillard (2007) souligne l'importance en algèbre (Alves & al., 2013 et Bombrun Nigon & Coppé, 2014) avec une gestion de classe originale.

Ce travail a été prolongé et enrichi dans le cadre du projet européen de recherche ASSIST ME (*Assess Inquiry in Science, Technology and Mathematics Education*) dans lequel il s'agissait de développer les pratiques d'évaluation formative (en lien avec l'évaluation sommative) en sciences et en mathématiques dans le cadre des démarches d'investigation (Coppé, 2015 et 2016). Un objectif a été d'introduire, dans des séquences portant notamment sur l'algèbre, des dispositifs d'évaluation formative (questionnaires élèves de positionnement, votes, auto-évaluation ou évaluation entre pairs), ce qui devait amener à développer les pratiques professionnelles des enseignants en leur permettant de prendre des informations sur les élèves et de les traiter plus efficacement. Un premier résultat est que mettre en place des évaluations formatives suppose un changement de contrat dans la classe en jouant sur les responsabilités respectives du professeur et des élèves quant à la construction des savoirs et en accordant davantage de responsabilités aux élèves dans les procédures de validation. Mais une étude en cours (Coppé, Moulin & Roubin, à paraître ; Coppé & Moulin, soumis) sur les processus d'évaluation entre pairs sur des réponses diverses données par la classe dans un problème de recherche montre combien il est difficile pour les élèves de valider, avec des arguments construits et mathématiquement valides, les réponses des autres et que, même après un travail collectif avec l'enseignant, sous forme d'un débat argumenté, le positionnement des élèves change peu alors que le débat pourrait le laisser penser. Cependant on constate une nette évolution dans les types d'arguments utilisés : au début les élèves se positionnent sur les réponses des autres par rapport à la leur alors qu'ensuite ils utilisent des arguments plus décontextualisés. En tenant compte de ces résultats, une autre séquence, avec d'autres problèmes est en cours d'élaboration.

Ces nouvelles questions plus centrées sur les apprentissages des élèves sont directement en lien avec le projet présenté ici.

2.3 Plan de recherche détaillé

Rappelons que la question principale de ce projet concerne les apprentissages des élèves lorsque la résolution de problème est soit le moyen principal d'enseignement sur des thèmes mathématiques précis, soit quand elle constitue elle-même l'objet d'enseignement.

De l'analyse de l'état de la recherche menée plus haut se dégagent des hypothèses qui guident notre projet :

- Un enseignement intégrant fortement la résolution de problèmes permet non seulement de développer la motivation des élèves pour les mathématiques mais aussi leurs compétences mathématiques spécifiques sur différents thèmes.

- Introduire fortement la résolution de problèmes au quotidien dans la classe de mathématiques ne peut se résumer à proposer des problèmes isolés, il faut les inclure dans une progression, où les élèves ont une plus grande responsabilité dans l'organisation de l'étude et de l'organisation des types de tâches qui portent sur les savoirs mathématiques en jeu mais aussi sur les démarches. Ceci nécessite entre autre pour le professeur de travailler l'articulation entre dévolution et institutionnalisation.
- L'introduction de la résolution de problèmes suppose donc un changement de contrat didactique dans la classe dans lequel les responsabilités du professeur et des élèves sont modifiées. Ainsi le changement du statut de l'erreur, les processus d'auto-évaluation ou d'évaluation entre pairs constitueront des outils pour ce changement et permettront de mieux réguler les apprentissages des élèves.

Sur la base des ces hypothèses, nous dégagons des questions que nous nous tenterons de documenter dans divers contextes :

- Quels savoirs ou savoirs faire sont construits et de fait, pourraient (devraient) être institutionnalisés lors des séances consacrées à la résolution de problèmes ? Existente-t-il des savoirs généraux communs à tous les contextes ou au contraire des spécificités institutionnelles liées à des contextes précis ? Comment organiser des progressions dans les problèmes proposés et les articuler avec les évaluations sommatives ?
- A quelles conditions l'évaluation formative dans le cours de la résolution de problèmes peut être une aide pour soutenir les apprentissages des élèves ? Quels outils (formels) d'évaluation formative peuvent être proposés aux élèves et avec quels effets ? Quels changements dans les interactions (informelles) peuvent induire un changement de contrat sur la responsabilité de la validation des réponses des élèves et des connaissances construites ?
- Comment, dans les interactions, favoriser les évaluations entre pairs et les autoévaluations afin de donner davantage de responsabilités aux élèves dans la construction de leurs connaissances ?
- Quels sont les effets différenciés de l'introduction de la résolution de problèmes sur les élèves en fonction en particulier de leur niveau scolaire déclaré ? Au-delà du niveau des élèves existe-t-il des profils d'élèves pour lesquels la résolution de problème serait particulièrement bénéfique ?

Ces questions seront abordées à l'aune des différents contextes de nos travaux. On peut d'emblée distinguer deux grandes catégories, selon que les problèmes sont à la source des apprentissages dans le cadre de l'enseignement de notions mathématiques déterminées ou que c'est la résolution de problèmes elle-même qui est l'enjeu d'apprentissage. Il nous a en effet paru important, au vu des travaux existants, de bien distinguer ces deux contextes où intervient la résolution de problèmes et de pouvoir les traiter dans une même recherche qui touche par ailleurs à différents contextes scolaires.

Dans le premier cas, où la résolution de problèmes est un moyen d'enseignement de contenus mathématiques précis, nous cherchons à déterminer à quelles conditions il s'avère possible et viable pour l'enseignant, en fonction des contraintes institutionnelles et sociales, de proposer un enseignement basé sur la résolution de problèmes. Il s'agit de déterminer sous quelles conditions et comment les apprentissages de thèmes mathématiques classiques peuvent se réaliser principalement par la résolution de problème. Du point de vue méthodologique, il s'agit d'expérimenter des séquences d'enseignement basées sur la résolution de problème et d'en évaluer les effets sur les élèves dans des classes d'enseignants volontaires travaillant avec le chercheur ; chacun apportant une expertise complémentaire soit sur les types de problèmes à partir de l'analyse des savoirs

en jeu soit sur la viabilité de la mise en œuvre. Dans chacun de ces travaux, nous utiliserons une méthode d'évaluation interne classique en didactique des mathématiques francophone qui permet de tester la validité d'une ingénierie par comparaison entre une analyse a priori et une analyse a posteriori (Artigue, 1988) pour garantir a minima de potentiels apprentissages. Par ailleurs, ces études s'appuieront sur des comparaisons de résultats des élèves à des évaluations sommatives avant (pré-test), pendant et après (post-test) l'expérimentation en les comparant aux résultats aux mêmes tests de groupes témoins constitués de classes de niveaux identiques ayant eu un enseignement « classique ». Nous nous appuierons sur des tâches classiques (qu'on trouve par exemple dans des évaluations communes ou cantonales), mais aussi des tâches proches de ce qui aura été enseigné et qui pourraient ne pas apparaître dans les premières.

Pour le second cas, où la résolution de problème est objet d'enseignement en soi, une question essentielle est celle de déterminer tout d'abord ce que l'on peut apprendre quand on se centre sur la résolution de problème indépendamment des contenus mathématiques, puis comment les élèves peuvent repérer ces savoirs et savoirs faire construits et quelles aides peuvent leur être fournies et enfin comment peuvent être gérées les institutionnalisations. Pour identifier a priori des savoirs et savoirs en jeu, nous utiliserons les travaux de Chevillard (1985) sur la transposition didactique. Ils nous permettront d'analyser selon les contextes, les documents institutionnels tels que les programmes, les moyens d'enseignement, voire les ressources pour les professeurs pour faire ensuite une comparaison avec les types de problèmes proposés effectivement dans les classes. Dans ce contexte, l'évaluation des apports du dispositif est plus délicate, en particulier parce que cela n'a pas de sens de comparer les performances dans la résolution de problèmes par rapport à des élèves qui n'auraient pas eu ce type d'enseignement. Il faudra donc s'appuyer sur des évaluations internes. De fait, tous ces travaux comportent une part essentielle liée à la question de l'évaluation des apprentissages.

Comme nous l'avons dit notre projet s'appuie sur un ensemble de travaux avancés, en cours ou débutants, qui permettront de traiter les questions précédentes en croisant les contextes, mais aussi les cadres théoriques et les méthodologies. L'intérêt de la multiplicité des approches est de pouvoir documenter différentes facettes des apprentissages sur des objets de savoir mathématiques ou transversaux dans des rapports institutionnels distincts. Plusieurs de ces travaux sont déjà financés. S'ils sont tous en lien avec l'équipe DiMaGe, ils débordent pour certains le contexte de l'enseignement public genevois et touchent à tous les degrés scolaires. L'objectif de cette requête est donc de pouvoir financer des travaux fédérateurs de l'ensemble qui permettront de lui donner sa cohérence et d'obtenir des résultats généraux.

Nous allons commencer par décrire brièvement les travaux déjà entamés ou programmés et pour la plupart financés, avant de détailler les éléments fédérateurs ou complémentaires pour lesquels nous sollicitons le financement du FNS.

2.3.1 La résolution de problème pour enseigner des mathématiques

Cette partie du travail sera réalisée à travers trois recherches, qui se proposent d'étudier l'enseignement d'un thème mathématique (un au primaire, un au secondaire 1, un au secondaire 2) pour lequel il s'agira de proposer des ingénieries didactiques incluant la résolution de problèmes comme moteur essentiel des apprentissages.

1. Les travaux de Sylvia Coutat et Céline Vendeira Maréchal (toutes deux chargées d'enseignement PhD à la section des sciences de l'éducation de l'université de Genève) s'intéressent aux premiers apprentissages de la géométrie au début du primaire (élèves de 4 à 8 ans) à travers des situations problèmes. Duval (2005) a identifié trois visions différentes et complémentaires des figures géométriques. La vision première,

opérationnelle dès l'entrée à l'école est une vision globale des formes basée sur leur surface (vision 2D). Une autre vision s'appuie sur les droites et segments qui constituent les formes (vision 1D). Enfin la troisième vision considère les points spécifiques (vision 0D) de la figure concernée. Si, à l'entrée à l'école les élèves ont une vision 2D très forte associée à un vocabulaire non géométrique, les deux dernières visions doivent faire l'objet d'un apprentissage.. L'objectif de cette recherche est d'interroger la pertinence de l'introduction des visions 1D et 0D au cycle 1 à travers des situations problèmes :

- pour la reconnaissance de formes géométriques usuelles (carré, triangle, rectangle) mais aussi des formes non usuelles (hexagone non régulier et non convexe),
- pour le développement d'un langage géométrique,
- pour le développement de compétences de classement et de tri.

Afin d'analyser cette pertinence, Coutat et Vendeira (2015, 2016) ont déjà construit des situations impliquant des formes géométriques non conventionnelles, observé la mise en œuvre de ces situations dans quatre classes de début de primaire. Ces premières observations sont encourageantes et méritent d'être complétées. Ainsi, dans le cadre de ce projet, ces auteures vont élargir leurs observations en introduisant notamment des entretiens avec des élèves qui visent à mieux identifier les conséquences de ce travail spécifique sur la vision, sur la reconnaissance de formes chez les élèves. Pour cela les analyses se focaliseront sur les productions des élèves au sens large (gestuel, discursif, graphique).

2. La thèse débutante (en septembre 2016) de Ismail Mili (chargé d'enseignement à la HEP Valais) porte sur l'enseignement de l'algèbre au niveau du cycle 3 (secondaire 1, élèves de 13-15 ans) dans le canton du Valais. Il s'agira d'implanter dans trois classes de professeurs volontaires deux séquences d'enseignement visant à introduire et à travailler l'algèbre par des problèmes qui mettent en avant ses raisons d'être (preuve et résolution d'équation) et non plus seulement ses aspects techniques, pour en étudier les effets sur les apprentissages des élèves. Ce travail s'appuiera sur divers travaux de recherches (voir synthèse dans Coulange, Dorier, Drouhard & Robert, 2012) et sur les ressources élaborées dans le cadre du groupe SESAMES <http://educmath.ens-lyon.fr/Educmath/recherche/equipes-associees/sesames> qui devront être adaptées au contexte valaisan. Le travail sera fait en deux temps : tout d'abord l'élaboration de séquences d'enseignement intégrant des problèmes pour le niveau de 10^e grâce à un travail collaboratif entre le doctorant et les professeurs volontaires, puis la mise en œuvre dans les classes et le suivi plus particulier de quelques élèves (recueil d'écrits, entretiens semi directifs) pour mieux comprendre comment ils apprennent.

3. Une autre recherche, menée par Pierre-François Burgermeister et Michel Coray (chargés d'enseignement à l'Institut Universitaire de Formation des Enseignants – IUFÉ de l'université de Genève) s'intéresse à l'enseignement des fonctions au collège. Ce travail part du constat qu'actuellement, au terme de l'enseignement des fonctions d'une variable réelle au niveau gymnasial, beaucoup d'élèves restent cloisonnés dans des démarches procédurales. En particulier, face à un problème complexe, ils n'effectuent pas spontanément de changement de registres de représentation sémiotique (Duval, 1995) entre le texte du problème et la situation pseudo-concrète auquel il se réfère ou entre sa modélisation algébrique et sa modélisation graphique, que ce soit pour élaborer une stratégie de résolution ou pour contrôler la validité de leurs résultats. Cette recherche vise à construire et expérimenter une séquence de classe basée sur les démarches d'investigation afin de donner plus de sens au concept de fonction en travaillant fortement les changements de registre (voir des travaux anciens comme ceux de Lacasta, 1995 ; Chauvat, 1999 ; Bloch, 2003 ; Coppé, Dorier et Yavuz, 2006 et

2007). Les activités élaborées seront testées dans deux classes de niveau 1^{ère} du collège (élèves de 15-16 ans). Un objectif est de déterminer si les élèves mobilisent des changements de registres pour élaborer une stratégie de résolution et pour contrôler la pertinence de leur démarche et la validité de leurs résultats. Il s'agira aussi de mieux cerner les effets différenciateurs de ce dispositif d'enseignement basé sur la résolution de problèmes : permet-il de favoriser les apprentissages des élèves les moins performants dans un dispositif classique ou favorise-t-il au contraire les élèves les plus performants dans un dispositif classique ?

Comme nous l'avons dit plus haut ces trois recherches s'appuient d'une part sur la méthodologie de l'ingénierie didactique avec une analyse a priori sur laquelle s'organise l'analyse a posteriori des éléments d'observations. D'un point de vue méthodologique, ceci nécessite de filmer toutes les séances de classe observées avec une caméra en fond de classe et un micro cravate pour l'enseignant et éventuellement des caméras d'action type GoPro pour l'observation des travaux de groupes d'élèves. Pour chaque recherche, les données porteront sur un nombre de classes plus ou moins réduit selon le nombre de séances observées par classe, sachant qu'on ne peut guère dépasser une vingtaine d'heures d'observations au total. Les données seront ensuite traitées avec le logiciel Transana⁶ pour organiser l'analyse a posteriori en faisant des retranscriptions de certains passages. Par ailleurs, afin de mesurer l'apport sur les apprentissages, les élèves des classes expérimentales et de classes témoins (de niveau équivalent n'ayant pas eu d'enseignement expérimental) seront soumis à un pré-test, un ou plusieurs test durant les expérimentations et un post-test quelques semaines après. Les résultats à ces divers tests seront soumis à des analyses statistiques.

2.3.2 *La résolution de problème comme objet d'enseignement*

Cet aspect du travail donnera lieu à quatre recherches dont deux thèses en cours. Ces travaux visent à déterminer plus finement quels apprentissages tout aussi bien potentiels qu'effectifs sont en jeu quand la résolution de problèmes est considérée pour elle-même comme un objet d'enseignement. En ce sens, ce sont des recherches prospectives d'une part parce que les recherches francophones en didactique des mathématiques abordent peu ce sujet et d'autre part, parce que c'est aussi l'occasion de faire des liens entre une approche didactique et des questions d'évaluation notamment formative qui font référence à d'autres cadres théoriques. Ainsi, chacune de ces recherches contribueront à définir plus précisément quels sont les apprentissages en jeu et ceux réalisés, comment ils peuvent être évalués dans le cadre de la classe et quels processus formatifs sont mis en œuvre pour soutenir les apprentissages des élèves dans le cadre de la résolution de problèmes. On peut penser qu'il existe des savoirs ou savoir faire généraux transversaux sur la résolution de problème de deux types : ceux qui ne sont pas strictement liés aux mathématiques comme être inventif ou persévérant, savoir raisonner ou argumenter, savoir traiter les informations et ceux qui sont plus spécifiques de la démarche scientifique ou mathématique comme faire des essais et en tirer des conjectures ou savoir démontrer un résultat. Ce qui caractérise ces savoirs transversaux c'est qu'ils sont transférables à plusieurs types de problèmes. Aussi les maîtriser permet-il d'améliorer de façon durable et générale les apprentissages mathématiques. La méthodologie est basée sur l'observation de classes sans intervention des chercheur/e/s et sur des entretiens avec les élèves portant sur des tâches à réaliser ou sur les effets déclarés des enseignements.

1. La thèse en cours de Maud Chanudet (commencée en septembre 2014 sur un contrat d'assistante financé par le budget de la Faculté) porte sur les pratiques évaluatives dans le cadre du cours de « développements mathématiques » dispensé en 10^e profil Sciences du cycle d'orientation (élèves de 13-14 ans)

⁶ <http://www.transana.org/>

à Genève. Dans ce cours d'une période hebdomadaire, les enseignants doivent faire une évaluation autonome, ce qui pèse à la fois sur les pratiques et sur les objectifs d'enseignement. Comme déjà précisé, en lien avec le projet PRIMAS, l'utilisation des narrations de recherche a été proposée comme support possible des évaluations. Ce travail cherche à déterminer à quelles conditions les enseignants, par le biais de l'utilisation d'une grille d'évaluation, mais aussi dans leurs interactions avec les élèves, peuvent mettre en lien les aspects sommatifs et formatifs et ce, notamment à l'aide de l'étude des feedbacks, qui d'une part lèvent certains implicites et d'autre part donnent aux élèves des informations sur les écarts entre ce qu'ils savent et ce qu'ils devraient savoir (Chanudet, 2015). Le travail d'analyse portera sur l'observation dans trois classes sur deux séquences. Le tout sera filmé (caméra en fond de classe, micro-cravate pour l'enseignant et caméras d'action type GoPro dans des groupes d'élèves) et traité avec le logiciel Transana avec des retranscriptions partielles. L'analyse portera sur l'identification et la catégorisation des moments où les enseignants mettent en œuvre des processus d'évaluation formative.

2. La thèse de Jana Lackova, (commencée en septembre 2016 sur un contrat d'assistante financé par le budget de la Faculté) prend pour contexte d'étude le baccalauréat international et plus particulièrement l'école internationale de Genève, pour y déterminer comment, à quelles conditions et avec quels effets sur les apprentissages des élèves, les démarches d'investigation sont spécifiquement développées dans ce contexte particulier. En effet, de longue date dans cette institution, l'épreuve du baccalauréat en mathématique comprend une part comptant pour 20% d'un travail de recherche que les élèves mènent en autonomie, mais qui donne lieu à un travail de préparation en amont dans la classe. Une analyse institutionnelle du contexte global et de cette composante du baccalauréat en particulier, permettra de dégager les éléments de savoir sur la résolution de problème ainsi mis en avant dans l'institution. Il s'agira ensuite d'identifier comment les enseignants adaptent leurs pratiques pour mener des démarches d'investigation, de caractériser les activités qui favorisent leur développement, de déterminer à quelles conditions les élèves s'engagent dans cette démarche et quels sont les apprentissages réalisés dans ce cadre institutionnel. Ici aussi les observations de classes (selon la même méthodologie que décrite pour la thèse précédente) devront permettre d'analyser les moments d'évaluation formative qui devront être mis en perspective avec les attendus de l'institution au niveau de l'épreuve du baccalauréat.

3. Audrey Daina (chargée d'enseignement, PhD HEP Vaud) a réalisé une thèse de doctorat (Daina, 2013) dans l'équipe DiMaGe sous la direction de Jean-Luc Dorier. Dans ce travail, elle a étudié les pratiques de cinq enseignants du primaire utilisant les moyens d'enseignement romands, sur un même thème mathématique. Elle fait actuellement partie d'un groupe d'experts qui intervient auprès du groupe des rédacteurs des nouveaux moyens d'enseignement romands de mathématiques pour les degrés 1 à 8 du primaire. La diffusion de ces nouveaux moyens, en cours de rédaction, est prévue de commencer à la rentrée 2017. Comme pour la précédente collection des moyens, l'accent est toujours mis sur la résolution de problèmes mais les auteurs, forts du constat qu'il ne suffit pas de proposer des situations aux élèves pour qu'ils développent des compétences sur la résolution de problèmes, prévoient de produire des ressources pour les enseignants pour leur permettre de développer un enseignement spécifique à la résolution de problèmes. C'est pourquoi ils ont prévu d'inclure, pour les degrés 3 à 8, un chapitre d'« aide à la résolution de problème », indépendant des axes thématiques.

Dans ce cadre institutionnel nouveau, Audrey Daina, grâce à des observations de classes et des entretiens avec des élèves, analysera la mise en place de ces dispositifs destinés à travailler « l'aide à la résolution de problème »

et cherchera à identifier d'une part, les apprentissages directs que l'on peut observer chez les élèves et, d'autre part, la transférabilité de ces apprentissages dans d'autres chapitres notionnels. Un point important sera de déterminer en quoi ces aides peuvent avoir un effet différentiel chez les élèves. Cette recherche pourra également produire des résultats pour les concepteurs de programmes.

4. Depuis son travail de thèse, Christine Del Notaro (2010) étudie des dispositifs expérimentaux au primaire où les élèves déploient des investigations d'un milieu mathématique (Brousseau, 1998), dans le domaine du numérique. A partir d'un contenu mathématique proposé sous forme de problème (que l'on peut qualifier d'« ouvert ») une interaction de connaissances entre élèves et expérimentatrice se construit sous la forme de jeux de tâches. La recherche doctorale (Del Notaro, 2010) a montré entre autres, que la dévolution d'un problème est un processus très long, mais que les élèves manifestent un goût prononcé pour le développement de questions personnelles et qu'il y a une émulation dans l'interaction. Dans le cadre de ce nouveau projet, Christine Del Notaro se propose de revisiter ce dispositif, en particulier en lien avec les travaux sur le *problem posing*, évoqués plus haut. Ces nouvelles observations viseront notamment à mieux identifier la nature des apprentissages effectifs des élèves et les conditions de leur apparition.

2.3.3 Les travaux fédérateurs

Les deux requérants Sylvie Coppé et Jean-Luc Dorier superviseront l'ensemble des travaux que nous venons de décrire. Des réunions d'équipe régulières (une demi-journée par mois environ) permettront à tous les participants du projet de présenter régulièrement l'avancée de leurs travaux et les questions en débat. Ceci constitue un premier niveau de cohésion de l'ensemble. Un des objectifs du projet sera, à l'issue des quatre ans, l'écriture d'un livre rassemblant l'ensemble des travaux.

Par ailleurs, nous voulons lancer un travail de doctorat qui abordera des questions transversales qui pourront se nourrir en partie de certaines données expérimentales des travaux précédents et y apporter un éclairage complémentaire (demande d'un financement FNS pour un *Candoc*). Comme nous l'avons dit nos travaux les plus récents se centrent sur des aspects de l'évaluation formative. Or dans cette approche, plusieurs analyses ont fait apparaître l'importance de la gestion des erreurs par les enseignants mais aussi par les élèves dans le cadre de la résolution de problèmes. Aussi dans ce travail de thèse, nous proposons de nous centrer sur la question du rôle et de la gestion des erreurs. Les travaux de psychologie cognitive et de didactique des mathématiques reconnaissent de longue date l'importance du rôle de l'erreur dans la construction des connaissances. Pour de nombreux thèmes mathématiques, des recherches en didactique ont permis de bien documenter les erreurs classiques et d'en produire des typologies. De plus, les formations d'enseignants comportent classiquement des modules portant sur l'analyse des erreurs. Cependant, les recherches portant sur leur gestion (DeBlois, 1996 ; Maurice, 1996 ; Roditi, 2005 et 2008 ; Horoks et Pilet, à paraître) et surtout sur leur traitement par les enseignants dans le cadre de la classe (par exemple, les travaux de Grugeon-Allys et al. (2012) ; Bedja (2015) ; Pilet (2015) sur l'élaboration de parcours différenciés en algèbre) montrent que les enseignants ont du mal à donner aux élèves des informations, des feedback sur les erreurs lors des phases de mise en commun par exemple. Or, l'évaluation formative, les notions de feedback ou de régulation rétroactive ou proactive (Allal 1988) sont des entrées qui pourront permettre d'aborder cette question avec un nouveau regard et de nouveaux outils. Les processus d'autoévaluation ou d'évaluation entre pairs constitueront des outils pour ce changement. Cette thèse viserait donc à mieux identifier comment les enseignants traitent les erreurs dans le cadre de la résolution de problèmes, à quels niveaux (des réponses, des procédures ou des connaissances) se font les

régulations. Côté élèves, les analyses porteront sur les procédures et les difficultés lors de résolution de problèmes, mais aussi sur les auto-régulations des erreurs dans les temps de recherche. Ce travail pourra dans un premier temps s'appuyer sur les données d'observations des autres travaux pour dégager les premières pistes qui pourront être affinées par de nouvelles observations propres, en ciblant prioritairement l'école primaire, sur un thème mathématique à déterminer, qui constituera le support de l'analyse et non le thème principal de recherche. En outre cette thèse pourra avoir une interaction particulièrement intéressante avec l'étude de l'utilisation des aides faite par Audrey Daina dans sa recherche décrite plus haut.

Outre les réunions collectives, la coordination par les deux requérants et la thèse précédente, nous envisageons de développer des outils d'analyse et de comparaison communs à l'ensemble des travaux. Ils porteront d'une part, sur les contenus enseignés dans les différents travaux et la façon dont la résolution de problèmes est abordée et d'autre part, sur la façon dont les élèves investissent les dispositifs expérimentés.

Pour le premier point, il s'agira tout d'abord de récolter, dans les différentes recherches, les activités proposées et les progressions et d'en faire une analyse afin de faire une typologie des tâches de résolution de problème. Un deuxième aspect consistera à documenter et analyser, dans les différentes recherches, la façon dont les enseignants gèrent les activités de résolution de problème. A l'appui des observations, qui pourront le cas échéant être complétées d'entretiens avec les enseignants, il s'agira de dégager comment les professeurs travaillent l'articulation entre dévolution et institutionnalisation, non seulement sur les savoirs enseignés mais aussi sur les démarches.

Le deuxième point porte sur les élèves. Plus précisément, nous nous intéressons ici à déterminer à quel point un enseignement intégrant fortement la résolution de problèmes (que ce soit comme objet ou comme moyen d'enseignement) permet d'une part de développer la motivation des élèves pour les mathématiques et d'autre part leurs compétences mathématiques. Il s'agira de concevoir des questionnaires communs à tous les travaux visant à mesurer le degré d'adhésion des élèves, ce qu'ils retirent des expérimentations.

Par ailleurs, nous voulons tenter de mesurer les effets différenciés notamment sur les élèves en difficulté, de la résolution de problème. Ce questionnement pourra être documenté sur la base des résultats à la fois internes aux différentes recherches et sur le questionnaire précédent. On vise ainsi à faire une certaine typologie des élèves, en fonction de leur niveau en mathématique (résultats aux pré-tests, données des enseignants ou déclaration des élèves) de leur réussite aux expérimentations (données obtenues dans les différentes recherches) et de la nature de leur motivation (résultats aux questionnaires communs). Sur la base de cette typologie, nous pourrions choisir un échantillon de quelques élèves représentatifs avec lesquels mener des entretiens individuels complémentaires. Ces entretiens visent à déterminer d'une part des facteurs motivationnels ou bloquants de la résolution de problèmes et d'autre part, de mieux décrire de façon qualitative les apports en termes d'apprentissages. Cette approche de type clinique s'appuiera en particulier sur la méthodologie de l'entretien d'explicitation (Vermersch 1994), certains membres de l'équipe étant formés à cette technique.

2.4 Calendrier et objectifs des étapes

Le projet s'appuie sur quatre travaux de recherches et quatre thèses, financés en interne à l'université de Genève ou dans des partenariats avec d'autres institutions hors de cette demande au FNS. Ces travaux auront commencé un ou deux, voire trois ans avant le début du projet. Outre un appui logistique (pour du matériel, des transcriptions, l'organisation de réunions et d'un colloque ou des déplacements scientifiques), l'objet de cette

demande est de pouvoir financer une part importante des travaux fédérateurs de l'ensemble du projet. Cela concerne :

- Une thèse décrite plus haut sur un poste de *Candoc* portant sur les erreurs.
- Un⁷ *Postdoc* à 100% sur les 4 ans du projet aura pour rôle principal de mener à bien les travaux fédérateurs décrits plus haut consistant à mettre en place des outils d'analyse et de comparaison communs à l'ensemble des travaux d'une part sur les contenus enseignés dans les différents travaux et la façon dont la résolution de problèmes est abordée et d'autre part sur la façon dont les élèves investissent les dispositifs expérimentés.

Nous donnons ci-dessous un calendrier à grands traits pour l'ensemble du dispositif.

Année 1. Pour les thèses et les travaux débutants, l'année précédant le début du financement du FNS et la première année seront consacrées à :

- définir et rédiger des canevas de thèse, ou les programmes de recherche,
- élaborer et partager les références bibliographiques,
- définir des méthodologies de recueil de données spécifiques, les partager et en élaborer des communes.

Chacune des recherches pourra s'appuyer sur un cadre théorique spécifique, cependant toutes partagent des outils et des éléments théoriques classiques en didactique des mathématiques, présentés plus haut comme les deux duos de notions contrat/milieu et dévolution/institutionnalisation, issues de la théorie des situations didactiques. Mais nous utilisons aussi des éléments de la théorie anthropologique du didactique ou de la double approche didactique et ergonomique, ou issus du champ de l'évaluation.

Des réunions d'équipe (d'une demi journée par mois environ sur toute la durée du projet) permettront de partager les questions, pour construire une culture commune. Le *Postdoc* sera amené à y jouer un rôle central et à en assumer progressivement le co-leadership avec les deux requérants au fur et à mesure de l'avancée du projet. En effet, il devra mener une réflexion globale sur les types d'activités qui seront en train de se mettre en place et aider à en dégager les traits communs, voire une forme de typologie. La vision surplombante sur l'ensemble devrait aussi permettre d'aider à dégager les savoirs transversaux sur la résolution de problème, ainsi que sur la façon dont ils peuvent être institutionnalisés. C'est durant cette année que devra être élaborée la méthodologie pour les observations et les entretiens avec les enseignants, qui seront menées dans les années suivantes sous la responsabilité du *Postdoc*. Par ailleurs, la partie du travail sur le recueil de données auprès des élèves commencera à être élaborée et permettra de fédérer les différents travaux autour de la question centrale des apprentissages. Pour les quelques travaux plus avancés, le *Postdoc* pourra déjà commencer à recueillir quelques données qui permettront d'affiner les questions et les outils d'analyse.

L'année 2 sera essentiellement consacrée aux expérimentations sur le terrain et au recueil des données. Les quelques recherches plus avancées permettront ici aussi d'anticiper certaines étapes.

Les années 3 et 4 seront consacrées aux retranscriptions, au traitement et à l'analyse des données et enfin à la rédaction des divers documents.

A la fin de l'année 3, un colloque avec les partenaires étrangers permettra de se donner une échéance pour communiquer les premiers résultats et bénéficier d'un regard critique.

A la fin du projet, nous visons la production d'un livre (voire d'un site web) synthétisant l'ensemble.

⁷ Le masculin est utilisé pour le *Candoc* et le *Postdoc* de façon générique, mais ne préjuge bien sûr pas du fait que chacun de ces emplois soit occupé par un homme ou une femme.

2.5 Portée du travail de recherche

Cette recherche vise à nous permettre d'avoir une connaissance plus approfondie des apprentissages des élèves en lien avec des pratiques d'enseignement des mathématiques intégrant fortement la résolution de problèmes à divers niveaux et dans différents contextes. Ces résultats seront bien sûr présentés lors de colloques et diffusés dans des articles, mais aussi dans un livre comme indiqué précédemment.

En outre, le travail pourra déboucher sur la production de ressources pour la formation initiale et continue des enseignants, tant sur le plan de certains thèmes mathématiques que sur les enseignements de la résolution de problèmes. Pour la formation c'est un point fondamental car cela devrait permettre d'apporter des éléments théoriques mais aussi des résultats et des ressources qui pourront être un levier pour faire évoluer les pratiques des enseignants formés.

A l'occasion de ces diverses recherches, nous pourrions développer un travail collaboratif avec des enseignants dont nous savons que c'est un moyen privilégié pour que les innovations se diffusent.

Comme déjà indiqué, nous souhaitons créer une collaboration avec l'équipe des concepteurs des nouveaux moyens du primaire pour faire évoluer ceux-ci et pour proposer des documents ressources pour les enseignants.

Pour le secondaire, nous avons déjà établi un partenariat pour l'heure de développements mathématiques de 10^e.

Les thèses de Maud Chanudet sur l'heure de développements mathématiques et Jana Lackova sur devrait fournir des ressources aux professeurs sur les savoirs et savoirs faire en jeu, sur les progressions pour la résolution de problèmes et sur les évaluations formatives et sommatives pouvant être mises en place pour soutenir les apprentissages.

Les ressources produites dans certaines recherches comme des séquences de classe, des grilles d'évaluation formative ou sommative seront diffusés sur le site local de PRIMAS géré par l'équipe.

Le travail avec les partenaires extérieurs à la Suisse devra permettre de faire des comparaisons institutionnelles sur les pratiques enseignantes dans différents contextes institutionnels.