

LA MACHINE DE SYLVESTER

Conception et Réalisation de deux Modèles à Usage Didactique

Mamadou Souleymane SANGARÉ*

Résumé

Ce texte présente de façon succincte la démarche suivie dans la conception et la réalisation de deux modèles de la machine de Sylvester : le premier réalise la rotation plane et le second réalise la similitude plane directe. Nous décrivons d'abord les principes fondateurs de ces modèles. Ensuite, nous donnons brièvement quelques types d'usage pour l'élaboration de situations expérimentales relatives à l'enseignement des transformations au lycée.

I. Du pantographe classique au pantographe de Sylvester

I.1. Introduction

Au plan historique, le pantographe classique fût conçu à partir d'un parallélogramme articulé réalisant des figures homothétiques. Il fût utilisé d'abord par les peintres au $XVII^e$ siècle puis perfectionné et décrit par le Père Scheiner vers 1631. Mais sa portée théorique en mathématiques n'apparût qu'au XIX^e siècle avec la notion de transformations ponctuelles introduite en géométrie. Cette théorisation apparaît dans les textes de Chasles en 1860 et ceux de Jordan en 1862. Sylvester donna ensuite une généralisation intéressante du pantographe classique qui permit la réalisation de figures directement semblables.

Au plan didactique, certains ouvrages font ressortir l'intérêt que peut avoir ces machines mécaniques dans l'enseignement et l'apprentissage de la géométrie. D'abord sur le plan théorique, on peut noter l'excellent traité de Lebesgue H. en 1941. Dans le domaine de l'ingénierie didactique, Gras (1983), et Brousseau (1986) ont étudié les problèmes soulevés par l'utilisation à des fins didactiques du pantographe respectivement pour les transformations géométriques planes et pour l'étude didactique des décimaux. De même, les travaux de l'équipe de didactique de Bartolini Bussi (1998) portent essentiellement sur l'approche historique des machines mécaniques dans l'éducation mathématique. Enfin, nous prendrons appui également sur l'approche instrumentale développée par Rabardel (1999) à propos d'activités mathématiques au lycée à l'aide du pantographe.

I.2. Le pantographe classique

Le pantographe classique est constitué d'un parallélogramme articulé $ABCD$ fixé à son support plan en un de ses points (ici le point O ; **fig. 1**). Les trois points O , P , Q sont choisis sur trois tiges du système ou sur leur prolongement, de façon qu'ils soient alignés. Dans le cas présent (**fig. 1**), on fixe arbitrairement le point O sur la tige $[AD]$, le point P sur la tige $[BC]$ de manière que (OP) ne soit pas parallèle (DC) et le point Q sur le prolongement de la tige $[DC]$, du côté de C .

I.2.1. Principes mécaniques

Le parallélogramme articulé a ses côtés formés de tiges rigides, donc de longueur constante. Il admet un seul paramètre de déformation, l'angle θ^1 et un seul point fixe, le point O . Dans ces conditions, le système articulé ainsi défini a dans le plan support deux degrés de liberté.

Ainsi, « chaque point lié à une tige de cette machine mécanique peut prendre en général toutes les positions dans une région bornée du plan (Lebesgue, 1941). »

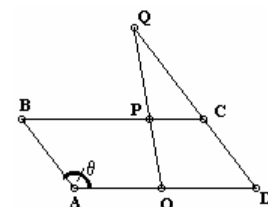


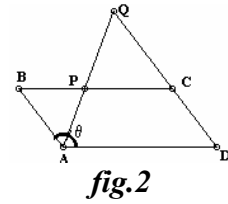
fig.1

* EDiMath (Equipe de Didactique des Mathématiques) - D.E.R. de Mathématique, École Normale Supérieure de Bamako, BP. 241, Bamako - Mali; Tél.: 22 21 89, Poste 19; Fax: 23 04 61. Adresse électronique : mamadoussangare@yahoo.fr

¹ En théorie, l'angle θ est tel que $0 \leq \theta \leq \pi$ mais les contraintes mécaniques (épaisseur des tiges) font que pratiquement l'on a : $0 < \theta < \pi$.

1.2.2. Principes géométriques

Il découle du théorème de Thalès que les points O, P, Q , (**fig.1**) sont toujours alignés car la condition d'alignement : $\frac{\overline{CP}}{\overline{DO}} = \frac{\overline{CQ}}{\overline{DQ}}$ ne dépend pas du paramètre de déformation θ . Dans ces conditions, le triplet de points (O, P, Q) reste semblable au triplet invariable (D, C, Q) .



En particulier, lorsque le point de fixation O de la machine coïncide avec le sommet A (**fig.2**), la figure variable APQ reste semblable aux figures invariables DCQ et BPC . Ainsi, le point Q reste l'image du point P dans l'homothétie de centre A et de rapport $k = \frac{\overline{AQ}}{\overline{AP}} = \frac{\overline{DQ}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BP}}$.

Dans le cas de la figure (**fig.2**) par exemple, lorsqu'on veut reproduire un dessin en modèle agrandi (respectivement en modèle réduit), on choisit le point P (respectivement le point Q), comme *point générique* de la figure objet et Q (respectivement le point P), comme point générique de la figure image.

1.3. Le pantographe de Sylvester

Le pantographe de Sylvester obéit aux mêmes principes mécaniques que le pantographe classique. Dans le domaine géométrique, l'homothétie réalisée ci-dessus (**fig.2**) peut être considérée comme une similitude plane directe particulière car $k > 0$. Cette propriété, généralisée par Sylvester est décrite et expliquée par Lebesgue (ibid.) en ces termes (**fig.3**):

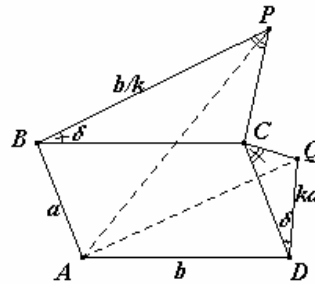


fig.3

Soient deux triangles invariables PBC et CDQ directement semblables; le triangle variable PAQ leur reste directement semblable au cours de la déformation du parallélogramme. Définissons par exemple le point Q à partir de CD par $(\overline{DC}, \overline{DQ}) = \delta$, angle défini à 2π près et $DQ = kDC = ka$;

nous lui associons le point P lié à BC , tel que $(\overline{BP}, \overline{BC}) = \delta$ et $BP = \frac{BC}{k} = \frac{b}{k}$.

Les triangles ABP et QDA sont directement semblables (2^e cas de similitude), d'où $\frac{AQ}{AP} = k, (\overline{AP}, \overline{QA}) = (\overline{BP}, \overline{DA})$, c'est à dire $(\overline{AP}, \overline{AQ}) = (\overline{BP}, \overline{AD}) = \delta$.

PAQ est donc directement semblable aux plaques triangulaires données.

Lebesgue (1941, p. 70)

On conclut alors que le point Q est l'image du point P par la similitude plane directe de centre A , de rapport k et d'angle δ .

II. Conception des deux modèles de machine de Sylvester²

II.1. La machine de Sylvester réalisant la rotation

II.1.1. Le modèle classique

Le seul point fixe du système articulé est encore le point A . Lorsque dans la figure (**fig. 3**) on pose $k = 1$, la similitude plane se réduit à une rotation plane. En effet, on a : $DQ = DC = a$ et $BP = BC = b$; donc $AQ = AP$. Dans ces conditions, le triangle variable PAQ ainsi que les triangles invariables PBC et CDQ sont isocèles et directement semblables (**fig.4**). Ce résultat qui assure la conservation des angles du triangle isocèle variable PAQ , permet de dire que le point Q est le transformé du point P par la rotation de centre A et d'angle dont une mesure est δ . Ce modèle classique avec ses 8 tiges articulées fixées à l'avance, offre la possibilité de réaliser une seule rotation.

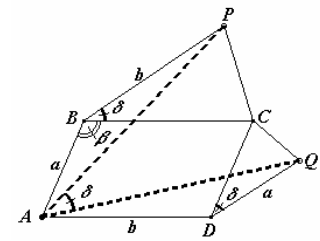


fig.4

II.1.2. Le modèle conçu réalisant des rotations de même centre

Signalons que les modèles conçus au Mali ont tous deux des supports plans en contreplaqué en forme de carré de 120 cm de côté. Le point de fixation qui est le point A est au centre du support plan.

Les contraintes mécaniques font que l'angle de mesure δ est tel que : $0 < \delta < \pi$ selon que l'on considère la rotation qui transforme P en Q ou la réciproque de celle-ci. On considère toujours que les longueurs a, b sont fixées. En appelant l_a et l_b respectivement les longueurs des tiges QC et PC ; δ est lié à chacune d'elles par les formules ci-dessous :

$$l_a = a\sqrt{2(1 - \cos \delta)} \text{ et } l_b = b\sqrt{2(1 - \cos \delta)} \text{ (fig.5).}$$

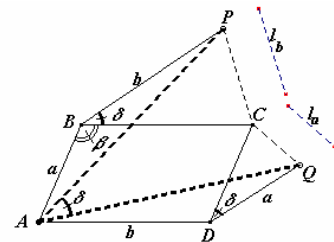


fig. 5

Dans ces conditions, il est possible de paramétrer δ à l'aide des longueurs l_a et l_b ; à chaque couple de valeurs (l_a, l_b) correspond une valeur unique de δ . A partir du même parallélogramme articulé $ABCD$ sur la figure (**fig.5**), il est possible de générer une famille de machines réalisant une famille correspondante de rotations planes, de même centre A , réalisables à partir du même parallélogramme articulé.

Parmi les familles de machines conçues pour la rotation plane, nous donnons un exemple pour les dimensions suivantes du parallélogramme $ABCD$:

$$AB = DC = DQ = a = 20\text{ cm} ; BC = AD = BP = b = 25\text{ cm}$$

Le tableau ci-dessous (**Tableau 1**) nous donne les dimensions du couple de tiges (l_a, l_b) en fonction des valeurs de l'angle de rotation δ .

$\delta(^{\circ})$	20°	30°	45°	50°	60°	75°	90°	110°	120°	150°
$l_a(\text{cm})$	6,9	10,2	15,2	17	20	24,3	28,3	32,7	34,6	38,7
$l_b(\text{cm})$	8,7	12,7	19	21,2	25	30,4	35,4	40,9	43,3	48,3

Tableau 1

² Nous avons conçu et réalisé en 2001 les maquettes des deux modèles présentés, mais leur confection a été faite par un professeur d'enseignement technique de l'E.C.I.C.A. de Bamako (à peu près un lycée professionnel en France).

II.2. Le modèle réalisant des similitudes planes directes de même centre (pour $k \neq 1$)

Ce modèle a été conçu en faisant le choix de fixer d'abord la valeur du rapport k en tenant compte de la contrainte liée aux dimensions du support plan. Cette fixation de k entraîne celle des longueurs de tiges $DQ = k \times DC$ et $BP = BC/k$. Ainsi, il est possible de faire des choix des valeurs appropriées de l'angle δ . Mais chaque valeur de l'angle δ permet de déterminer de façon unique les longueurs respectives des tiges CQ et CP par les formules ci-dessous :

$$CQ = \sqrt{DC^2 + DQ^2 - 2DC \times DQ \times \cos \delta} \quad \text{et} \quad CP = \sqrt{BP^2 + BC^2 - 2BP \times BC \times \cos \delta}$$

Ainsi, à partir du même parallélogramme articulé $ABCD$ sur la figure (fig.3) il est possible de générer une famille de machines réalisant une famille correspondante de similitudes planes notées $S_i(k, A, \delta_i)$, de même rapport k , de même centre A , mais d'angles distincts δ_i . Nous donnons deux exemples parmi les familles de machines conçues pour les dimensions suivantes du parallélogramme $ABCD$:

$$AB = DC = a = 10 \text{ cm} ; \quad BC = AD = b = 15 \text{ cm}.$$

Dans ces conditions pour $k = 2$ et $k = 0,5$, nous obtenons les deux familles de machines ci-dessous (Tableau 2 et Tableau 3).

$k = 2$	$DQ = 2 \times DC = 2 \times 10 \text{ cm} = 20 \text{ cm}$ et $BP = BC/2 = 15 \text{ cm} / 2 = 7,5 \text{ cm}$					
δ_i (degrés)	30°	45°	60°	75°	90°	120°
CQ_i (cm)	12,4	14,7	17,3	19,9	22,4	26,5
CP_i (cm)	9,3	11,1	13	14,9	16,8	19,8

Tableau 2

$k = 0,5$	$DQ = 0,5 \times DC = 0,5 \times 10 \text{ cm} = 5 \text{ cm}$ et $BP = BC/0,5 = 15 \text{ cm} / 0,5 = 30 \text{ cm}$			
δ_i (degrés)	20°	30°	45°	60°
CQ_i (cm)	5,6	6,2	7,4	8,7
CP_i (cm)	16,7	18,6	22,1	26

Tableau 3

III. Quelques possibilités d'usage des deux modèles dans l'enseignement au lycée

III.1. Quelques classes de problèmes

Les deux modèles de pantographe peuvent être utilisés pour la conception de situations d'enseignement/apprentissage liées à la rotation et à la similitude plane directe au lycée.

III.1.1. Etude théorique des deux modèles

L'étude théorique des deux modèles consiste à considérer les dessins (fig.5) et (fig.3) comme représentations dans l'environnement papier/crayon de deux figures géométriques du plan. Il s'agit alors de montrer que pour toute position du parallélogramme articulé $ABCD$, le point P est transformé en le point Q respectivement par :

- la rotation de centre A et d'angle δ ;
- la similitude plane directe de rapport k , de centre A , d'angle δ .

III.1.2. Les problèmes « boîte noire »

Les problèmes proposés ici sont fondés essentiellement sur l'idée de «boîte noire (Charrière, 1996, pp. 217-233)» en géométrie. Dans notre cas, il s'agit essentiellement d'élaborer des situations-problèmes dans lesquelles la tâche de l'élève est de trouver un procédé de construction d'un couple de figures homologues (F_o ; F_i) par une transformation inconnue des élèves comme l'illustre le schéma utilisé par Vergnaud (1989) (fig.6).

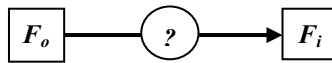


fig.6

Ainsi, à partir de couples de figures homologues objet/image (F_o , F_i) obtenues à l'aide de chacun des deux modèles de machine de Sylvester, les tâches de l'élève peuvent être : "Trouver les propriétés géométriques de la transformation en jeu" ou " Trouver un procédé de construction de F_i à partir de la donnée de F_o "

Dans le cas spécifique de la rotation, la fonctionnalité du modèle de générer une famille de cette transformation, offre des possibilités de construire des situations liées à leur composition permettant ainsi de rendre problématique les tâches de reconnaissance et de caractérisation de composées de rotations de même centre.

III.2. Une expérimentation en classe

Une séquence expérimentale intitulée « un premier enseignement de la rotation (Sangaré, 2003, p. 50)» a été réalisée sous forme de séances de *Travaux Pratiques* dans l'environnement du modèle de machine réalisant la rotation et dans celui du papier/crayon avec les instruments usuels de géométrie. À partir d'un couple de triangles homologues construits à l'aide de la machine, et après investigation de la figure avec les instruments de géométrie les élèves ont su modéliser ce que la machine réalise comme transformation en ces termes: "C'est un jeu d'instruments de géométrie" - "La machine fait une isométrie" - "La machine fabrique des triangles isocèles de même sommet et semblables."

Ces résultats sont partiels. De plus, les élèves ont été confrontés à deux principales difficultés. La première est relative au fait que la machine de Sylvester dans son déplacement ne simule pas un mouvement de rotation : c'est l'étude des traces laissées sur le support plan qui permet de découvrir la transformation en jeu. La seconde est liée à la coordination des activités des élèves entre les environnements machine mécanique" et "papier/crayon avec instruments de géométrie" ; actuellement nous explorons à cet effet, le concept de «système d'instruments (Rabardel, 1999, pp. 211-212) » pour la conception et la réalisation en classes de situations pertinentes.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] BROUSSEAU G. (1998), "Théorie des Situations Didactiques", Textes rassemblés et préparés par Balacheff N. Marin Cooper, Rosamund Sutherland, Virginia Wirfield, Recherche en didactique des mathématiques, pp. 225-237, La Pensée Sauvage éditions.
- [2] CHARRIÈRE P.M. (1996) "Vivre une démarche scientifique à l'aide de « boîtes noires », in Actes de l'université d'été « Cabri-géomètre », de l'ordinateur à la calculatrice (p.217-233). De nouveaux outils pour l'enseignement de la géométrie, EIAH-Leibniz, Université Joseph Fourier de Grenoble.
- [3] CHASLES M. (1860), " Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences", Paris, 51, 1860, pp. 855-905.
- [4] GRAS R. (1983), "Instrumentation de notions mathématiques, un exemple : la symétrie", Petit x, N°1, p. 7-39 .
- [5] JORDAN C. (1964), Mémoires sur les groupes de mouvements, 1862, œuvres, IV Vol., pp. 231-302.
- [6] LEBESGUE H. (1941) " Leçons sur les constructions géométriques" professées au Collège de France en 1940-1941, Réimpression autorisée de l'édition originale 1987 - Gautiers -Villars, 1949, Editions Jacques Gabay.
- [7] RABARDEL P. (1999) "Eléments pour une approche instrumentale en didactique des mathématiques", in Actes Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques , Coordinnés par Marc Bailleul, Académie de Caen, pp. 203-213.
- [8] SANGARÉ M.S. (2003) "La machine de Sylvester : principes mécaniques et principes mathématiques ; une étude de cas à propos de la rotation", Petit x n° 62, pp. 33-58, IREM de Grenoble.
- [9] VERGNAUD G. (1989), Psychologie du développement cognitif et Didactique des mathématiques : un exemple : les structures additives, Petit x, n°22, pp. 51-67.

Autres ouvrages consultés

- Cundy H.M. et Rollet A. (1978) "Modèles mathématiques", pp. 241-256, CEDIC.
- Modelo Costruito (1992), Presso il Liceo scientifico A. Tassoni, dal Nucleo di Ricerca, in Storia e Didattica della Matematica, Università di Modena Italia.
- Le supplément du Plot, Systèmes articulés n°1 (transformateurs géométriques), octobre 1983, IREM d'Orléans.