Théorie de jauge et groupoïdes

Jean-Claude HAUSMANN

Mars 2001

AMS MSC 2000: primary: 22A22, 55R10, 53C05;
secondary: 22A30, 55R37, 81T13.

Résumé

Dans cet article, nous montrons que les différents points de vue de la théorie de jauge (classique, sur graphe) sont des cas particuliers de représentations de groupoïdes topologique sur un fibré principal. Nous résolvons le problème de l'existence de telles de représentations et de leur classification à transformation de jauge près.

La théorie de jauge étudie l'espace des connexions sur un G-fibré principal, modulo l'action du groupe de jauge. Provenant de la physique, son intérêt s'est imposé en topologie différentielle, notamment par ses applications à la topologie des variétés de dimension 4. Il y a deux cadres de théorie de jauge, tout deux utilisés en physique mathématique :

- la topologie différentielle, où une connexion est une distribution de l'espace total du fibré de plans supplémentaires aux orbites de G.
- la théorie de jauge sur graphes, où une connexion est un procédé qui associe à chaque arrête a d'un graphe Γ un élément de $v(a) \in G$.

Le second point de vue est vu comme une discrétisation du premier : on imagine Γ comme une grille lisse par morceau, approximant la variété base. On trivialise le fibré au desus des sommets de Γ. Le transport parallèle le long de l'arrête détermine l'élément $v(a) \in G$. Le passage à la limite, lorsque la grille devient infiniment fine, suscite beaucoup d'intérêt.

Dans cet article, nous montrons que ces points de vue sont deux cas particuliers de la notion *représentation d'un groupoïde topologique* sur un fibré, une généralisation du concept de *fibré principal équivariant.* L'étude et la classification de ces représentations de groupoïdes topologiques jettent un nouvel éclairage sur divers points des différentes théorie de jauge.

Remerciements : Ce travail a bénéficié du support du Fonds National Suisse de la Recherche Scientifique. L'auteur tient également à remercier E. Dror-Farjoun, P. de la Harpe et R. Vogt pour d'utiles discussions.

Table des matières

1 Présentation des résultats

Soit X un espace topologique. Un *X-groupoïde* est un espace topologique C muni de :

a) deux applications continues $\alpha, \beta : C \to X$ (*source* et *but*). Pour $x, y \in X$, on note $C_x := \alpha^{-1}(\{x\})$, $C^y := \beta^{-1}(\{y\})$ et $C_x^y := C_x \cap C^y$. Le groupoïde C est dit *transitif* si $C_x^y \neq \emptyset$ pour tout $x, y \in X$.

b) une *composition* partiellement définie

$$C \times_X C := \{(c_1, c_2) \in C \mid \alpha(c_1) = \beta(c_2)\} \to C \quad , \quad (c_1, c_2) \mapsto c_1 c_2$$

qui est continue, $C \times_X C$ étant un sous-espace de $C \times C$ avec la topologie produit. On demande que $\alpha(c_1 c_2) = \alpha(c_2)$, $\beta(c_1 c_2) = \beta(c_1)$ et que la composition soit associative.

c) une application continue $i : X \to C$, associant à x l'*unité* $i_x \in C_x^x$ qui est élément neutre à gauche et à droite pour la composition.

d) une anti-involution continue $c \mapsto c^{-1}$ de C, envoyant C_x^y sur C_y^x, telle que $cc^{-1} = i_{\alpha(c)}$ et $c^{-1}c = i_{\beta(c)}$.

On suppose que X est muni d'un point base $* \in X$. En vertu de d), l'espace C_*^* est un groupe topologique que l'on note Ω_C.

On peut voir C comme l'espace des morphismes (tous inversibles) d'une petite catégorie topologique dont l'espace des objets est X. C'est le point de vue de [Ma]. Si l'on préfère les groupoïdes "sans objets" [Co, II.5], on présentera C comme un groupoïde topologique dont l'espace des unités est identifié à X.

Soit G un groupe topologique et soit $\xi : \; = (E \xrightarrow{p} X)$ un *G-espace principal au dessus de X*. On entend par là que p est continue et que l'on s'est donné une action continue libre $E \times G \to E$ telle que p induise une bijection continue du quotient E/G sur X. Par exemple, un G-fibré principal sur X est un G-espace au dessus de X qui est localement trivial. On suppose que l'espace E est pointé par $\tilde{*} \in p^{-1}(*)$.

Une *représentation* d'un X-groupoïde C sur un G-espace ξ est une application continue $w : C \times_X E \to E$ (où C est vu au dessus de X via α) telle que, pour tout $c, d \in C$, $z \in E$ et $g \in G$, on ait

1. $p(w(c,z)) = \beta(c)$.
2. $w(c\,d, z) = w(c, w(d,z))$.
3. $w(c^{-1}, (w(c,z)) = z$.
4. $w(c, z \cdot g) = w(c,z) \cdot g$.

Par exemple, si $X = *$, alors C est un groupe topologique et w correspond à une représentation (= homomorphisme continu) de C dans G. Plus généralement, si w est une représentation de C sur ξ, l'équation $w(c, \tilde{*}) = \tilde{*} \cdot h(c)$ définit un homomorphisme continu $h^w : \Omega_C \to G$ appelé l'*holonomie* de w.

Les résultats de cet article concernent l'existence et la classification de représentations d'un X-groupoïde C sur un G-fibré principal ξ donnés. Nos hypothèses principales seront que C est un X-groupoïde *localement trivial* et G un groupe *SIN* (définitions ci-dessous).

Soit C un X-groupoïde. Une *C-contraction* est une application continue $\rho : U_\rho \to C^*$, où U_ρ est un ouvert de X, telle que $\alpha(\rho(x)) = x$. Soit $\mathrm{Cont}_C(X)$ l'ensemble des C-contractions. Le X-groupoïde C est dit *localement trivial* si $\{U_\rho \mid \rho \in \mathrm{Cont}_C(X)\}$ est un recouvrement ouvert de X ([Ma, p. 32]; cette définition coïncide avec la terminologie de [Eh] si C est transitif). Si le recouvrement $\{U_\rho\}$ est de plus numérisable[1], c'est-à-dire s'il existe une partition de l'unité $\{\mu_\rho : X \to [0,1]\}$ qui lui est subordonnée, on dira que C est un *X-groupoïde localement trivial numérisable.* Plusieurs exemples naturels de tels groupoïdes sont présentés au paragraphe 6.

Reprenant les idées de Ch. Ehresmann [Eh], nous démontrerons au § 2 l'existence d'une *représentation universelle de C* et d'un principe de reconstruction :

Théorème 1.1 (Théorème A) *Soit C un X-groupoïde localement trivial numérisable. Alors :*

a) l'application $\beta : C_* \to X$ est un Ω_C-fibré principal numérisable (que nous appellerons ξ_C). La formule $\tilde{w}(c,u) : = c\,u$ définit une représentation de C sur ξ_C.

b) soit $\xi : = (E \xrightarrow{p} X)$ un G-espace principal muni d'une représentation w de C. Alors ξ est le fibré associé à ξ_C

$$E = C_* \times_{\Omega_C} G = C_* \times_{h^w} G\,,$$

où Ω_C agit à gauche sur G via l'holonomie h^w de w. En particulier, ξ est un G-fibré principal numérisable. De plus, la représentation w est obtenue de $\tilde{w}$ par la formule $w(c,[u,g]) = [\tilde{w}(c,u),g] = [cu,g]$.

Rappelons qu'un G-fibré principal numérisable ξ sur X est induit du fibré universel $EG \to BG$ sur le classifiant de Milnor BG par une application continue (unique à homotopie près) $\nu_\xi : X \to BG$. En particulier, d'après le théorème A, un X-groupoïde localement trivial numérisable C donnera une application $\nu_C : = \nu_{\xi_C} : X \to B\Omega_C$ induisant ξ_C. Le théorème d'existence d'une représentation de C sur ξ, qui découle facilement du théorème A, est le suivant :

Théorème 1.2 (Théorème d'existence) *Soit C un X-groupoïde localement trivial numérisable et ξ un G-fibré principal. Alors, ξ admet une représentation de C si et seulement si il est numérisable et s'il existe un homomorphisme continu $\phi : \Omega_C \to G$ tel que $B\phi \circ \nu_C$ soit homotope à ν_ξ.*

Ayant résolu la question de l'existence, intéressons-nous à l'ensemble $\mathcal{R}(C,\xi)$ des représentations de C sur ξ. Il est muni d'une action du *groupe de jauge* $\mathcal{G}$ de ξ. Les éléments de $\mathcal{G}$, les *transformations de jauge*, sont les

1. Nous utilisons "numérisable" pour équivalent français du néologisme anglais "numerable" introduit par Dold [Do]. De même, un fibré sera dit *numérisable* s'il admet un recouvrement numérisable d'ouverts trivialisants.

automorphismes G-équivariants de E au dessus de id_X. Pour $w \in \mathcal{R}(C,\xi)$ et $\chi \in \mathcal{G}$, on définit w^χ par

$$w^\chi(c,z) : = \chi^{-1}(w(c,\chi(z)).$$

ce qui donne une action à droite de $\mathcal{G}$ sur $\mathcal{R}(C,\xi)$. Le sous-groupe invariant $\mathcal{G}_1$ de $\mathcal{G}$ formé des transformations de jauge fixant $\tilde{*}$ joue un rôle important car il agit librement sur $\mathcal{R}(C,\xi)$ (voir 5.5).

Les ensembles $\mathcal{R}(C,\xi)$ et $\mathcal{G}$ sont munis de la topologie compact-ouvert (CO-topologie). Nous démontrerons, au § 3 que $\mathcal{G}$ est un groupe topologique et que l'action $\mathcal{R}(C,\xi) \times \mathcal{G} \to \mathcal{R}(C,\xi)$ est continue, ceci sous l'hypothèse que G est *SIN*. Rappelons qu'un groupe topologique est *SIN*, si son élément neutre admet un système fondamental de voisinages qui sont G-invariants (par conjugaison; *SIN* = small invariant neighbourhood). Par exemple, les groupes compacts, abélien ou discrets sont *SIN* (voir [Pa], pour la littérature classique sur ces groupes). Nous montrerons que si G est *SIN*, la CO-topologie sur $\mathcal{R}(C,\xi)$ et $\mathcal{G}$ provient de structures uniformes et que toutes les opérations sont uniformément continue (voir § 3).

Pour étudier les quotients $\mathcal{R}(C,\xi)/\mathcal{G}_1$ et $\mathcal{R}(C,\xi)/\mathcal{G}$, introduisons l'espace $\mathcal{R}(\Omega_C,G)$ des représentations (i.e. homomorphismes continus) de Ω_C dans G, muni de la CO-topologie. Soit $\mathcal{R}(\Omega_C,G)_\xi$ le sous-espace des $\phi \in \mathcal{R}(\Omega_C,G)$ tels que l'application composée $n(\phi) : = B\phi\circ\nu_C$ soit homotope à ν_ξ ($\mathcal{R}(\Omega_C,G)_\xi$ est une union de componates connexes par arc de $\mathcal{R}(\Omega_C,G)$).

Au niveau des espaces classifiants, on désigne par $\mathrm{Map}^\bullet(X,BG)_\xi$ l'espace des applications continues pointées de $f : X \to BG$ qui induisent ξ, muni de la CO-topologie.

Un espace topologique Z est dit *semi-localement contractile* si tout $z \in Z$ admet un voisinage U_z dont l'inclusion $U_z \hookrightarrow Z$ est homotope à une application constante. Cette condition ne dépend que du type d'homotopie de Z.

Théorème 1.3 (Théorème B) *Soit C un X-groupoïde localement trivial numérisable et séparé. Soit ξ un G-fibré principal numérisable sur X. On suppose que G est SIN, que X est localement compact et que $\mathrm{Map}^\bullet(X,BG)_\xi$ est semi-localement contractile. Soit $h : \mathcal{R}(C,\xi) \to \mathcal{R}(\Omega_C,G)_\xi$ l'application qui à une représentation de C w associe son holonomie h^w. Alors h est est un $\mathcal{G}_1$-fibré principal.*

Nous ne savons pas si l'hypothèse "$\mathrm{Map}^\bullet(X,BG)_\xi$ semi-localement contractile" est toujours vérifiée. Observons que cette condition ne dépend que des types d'homotopie de X et de G. Elle est vraie si, par exemple, X

est compact et G est un groupe de Lie compact. En effet, BG a alors le type d'homotopie d'un CW-complexe dénombrable, limite inductive quotients de variété de Stiefel [St, § 19.6]. L'espace $\mathrm{Map}^{\bullet}(X, BG)_{\xi}$ est ainsi semi-localement contractile par [Mi1, lemmes 2 et 3 p. 277]. D'autre part, tout recouvrement d'un espace compact est numérisable, ce qui prouve le :

Corollaire 1.4 *Soit C un X-groupoïde localement trivial et séparé, avec X compact. Soit ξ un G-fibré principal sur X avec G un groupe de Lie compact. Alors $h : \mathcal{R}(C, \xi) \to \mathcal{R}(\Omega_C, G)_{\xi}$ est est un $\mathcal{G}_1$-fibré principal.*

Le théorème B montre que le quotient $\mathcal{R}(C, \xi)/\mathcal{G}_1$ est homéomorphe à $\mathcal{R}(\Omega_C, G)_{\xi}$. Pour décrire $\mathcal{R}(C, \xi)/\mathcal{G}$, on considère l'action à droite de G sur $\mathcal{R}(\Omega_C, G)$ par conjugaison. Si G est connexe par arc, cette action préserve $\mathcal{R}(\Omega_C, G)_{\xi}$.

Théorème 1.5 (Théorème C) *Avec les hypothèses du théorème B, l'application h induit un homéomorphisme $\mathcal{R}(C, \xi)/\mathcal{G}_1 \xrightarrow{\cong} \mathcal{R}(\Omega_C, G)_{\xi}$. Si, de plus, G est connexe par arc, elle induit un homéomorphisme $\mathcal{R}(C, \xi)/\mathcal{G} \xrightarrow{\cong} \mathcal{R}(\Omega_C, G)_{\xi}/G$.*

Les théorèmes B et C présentent une analogie avec des résultats de la théorie de jauge qu'il serait intéressant d'étudier plus à fond. On sait que, si ξ est un G-fibré différentiable sur une variété compacte X (G groupe de Lie compact connexe), alors l'espace des connexions sur ξ modulo $\mathcal{G}_1$ a le type d'homotopie faible de $\mathrm{Map}^{\bullet}(X, BG)_{\xi}$ [DK, Prop. 5.1.4]. On verra au § 6.4 qu'une connexion donne une représentation d'un groupoïde $\mathbf{D}(X)$ construit à l'aide des chemins dans X lisses par morceau. Pour l'instant, observons que les espaces $\mathcal{R}(\Omega_C, G)_{\xi}$ et $\mathrm{Map}^{\bullet}(X, BG)_{\xi}$ sont reliés par une application continue $n : \mathcal{R}(\Omega_C, G)_{\xi} \to \mathrm{Map}^{\bullet}(X, BG)_{\xi}$ (détails en 5.3) dont on peut décrire la fibre homotopique lorsque X est "bien pointé" :

Théorème 1.6 (Théorème D) *Supposons que l'on ait les hypothèses du théorème B et que l'inclusion $\{*\} \subset X$ soit une cofibration. Alors, la fibre homotopique de $n : \mathcal{R}(\Omega_C, G)_{\xi} \to \mathrm{Map}^{\bullet}(X, BG)_{\xi}$ a le type d'homotopie faible de $\mathcal{R}(C, \xi)$.*

Le § 2 est consacré à la preuve du théorème A et du théorème d'existence. Les § 3 et 4 préparent aux preuves des théorèmes B,C et D qui sont données dans le § 5. Enfin, le § 6 présente quelques exemples et applications. Parmi ceux-ci, on mentionnera le fait qu'une connexion classique pour un fibré différentiable sur une variété X donne naissance à une représentation d'un X-groupoïde que l'on construit à l'aide des chemins lisses par morceau dans X. Ceci nous permet de montrer que, pour une connexion A, le transport parallèle le long des chemins lisses par morceau s'étend en un transport parallèle le long de tout chemin $\mathcal{C}^0$ si et seulement si la connexion A est plate (Prop. 6.8). On trouvera également, au § 6.6, des application à la classification des fibrés équivariants sur des espaces homogènes.

2 Preuve des théorèmes A et d'existence

Lemme 2.1 *Soit C un X-groupoïde localement trivial numérisable. Soit $\xi : (E \xrightarrow{p} X)$ un G-espace principal admettant une représentation w de C. Alors, ξ est un G-fibré principal avec recouvrement trivialisant (numérisable) $\{U_\rho \mid \rho \in \mathrm{Cont}_C(X)\}$. Plus précisément, ξ restreint à U_ρ admet la trivialisation $\psi_\rho^w : p^{-1}(U_\rho) \to U_\rho \times G$ donnée par*

$$\psi_\rho^w(z) : = (p(z), \lambda_w(z)) \quad \text{où} \quad w(\rho(p(z)), z) = \tilde{*}\lambda_w(z). \tag{1}$$

Preuve: Il est banal que ψ_ρ^w est G-equivariante et on vérifie que inverse de ψ_ρ^w est $(\psi_\rho^w)^{-1}(x,g) : = w(\rho(x)^{-1}, \tilde{*}) \cdot g$ □.

Preuve du théorème A Observons que l'application $\beta : C_* \to X$ est surjective si C est localement trivial. En effet, si $x \in X$, il existe $\rho \in \mathrm{Cont}_C(X)$ telle que $x \in U_\rho$ et alors $x = \beta(\rho(x)^{-1})$. L'action de Ω_C sur C_* est définie par $u \cdot c : = uc$. Si $\beta(u) = \beta(\bar{u})$, alors $\bar{u} = \bar{u} \cdot c$ avec $c : = (\bar{u}^{-1} u)$. L'application β induit donc une bijection continue $\bar{\beta} : C_*/\Omega_C \to X$. Les trivialistions construites ci-dessous font que β est ouverte et donc $\bar{\beta}$ est un homéomorphisme.

Pour $\rho \in \mathrm{Cont}_C(X)$, on définit la trivialisation $\hat{\psi}_\rho : \beta^{-1}(U_\rho) \to U_\rho \times \Omega_C$ de la manière suivante:

$$\hat{\psi}_\rho(u) = (\beta(u), \rho(\beta(u))\, u). \tag{2}$$

Elle admet pour inverse

$$\hat{\psi}_\rho^{-1}(x,c) = \rho(x)^{-1} c. \tag{3}$$

La Ω_C-equivariance de l'homéomorphisme $\hat{\psi}_\rho$ est banale. Ceci montre que $\beta : C_* \to X$ est un fibré Ω_C-principal avec recouvrement trivialisant numérisable $\{U_\rho\}$. Le fait que la formule $\tilde{w}(c,u) = c\,u$ définisse une représentation de C sur ce fibré provient des axiômes de groupoïde .

Passons au point b) du théorème A. Soit w une représentation de C sur un G-espace principal $\xi :\ = (E \xrightarrow{p} X)$. Le Lemme 2.1 montre que ξ est un fibré principal numérisable. L'espace E étant pointé par $\tilde{*} \in p^{-1}(*)$, on définit $\Phi : C_* \times_{\Omega_C} G \to E$ par

$$\Phi(u, g) = w(u, \tilde{*}) \cdot g \tag{4}$$

a) Φ *est bien définie :* Soit $c \in \Omega_C$. On a

$$\begin{aligned} \Phi(u\,c, g) &= w(u\,c, \tilde{*}) \cdot g = w(u, w(c, \tilde{*})) \cdot g = w(u, \tilde{*} \cdot h(c)) \cdot g = \\ &= w(u, \tilde{*}) \cdot (h(c)g) = \Phi(u, h(c)g). \end{aligned}$$

b) Φ *est G-equivariante :* évident.

c) Φ *est surjective :* Soit $z \in E$. Soit $\rho \in \mathrm{Cont}_C(X)$ telle que $p(z) \in U_\rho$. Posons $u :\ = \rho(p(z))^{-1} \in C_*^{p(z)}$. On a ainsi $p(\Phi(u, 1)) = \beta(u) = p(z)$. Il existe donc un unique $g \in G$ tel que $\Phi(u, g) = \Phi(u, 1) \cdot g = z$.

d) Φ *est injective :* Supposons que $\Phi(u, g) = \Phi(\bar{u}, \bar{g})$. On a donc $\bar{u} = u\,c$ avec $c :\ = u^{-1}\bar{u} \in \Omega_C$ et

$$\begin{aligned} \Phi(\bar{u}, \bar{g}) &= w(u\,c, \tilde{*}) \cdot \bar{g} = w(u, w(c, \tilde{*})) \cdot \bar{g} = \\ &= w(u, \tilde{*}) \cdot (h(c)\bar{g}) \end{aligned}$$

Comme d'autre part

$$\Phi(\bar{u}, \bar{g}) = \Phi(u, g) = w(u, \tilde{*}) \cdot g,$$

il s'en suit que $g = h(c)\bar{g}$. Dans $C_* \times_{\Omega_C} G$, on aura ainsi les égalités

$$(\bar{u}, \bar{g}) = (u\,c, \bar{g}) = (u, h(c)\bar{g}) = (u, g).$$

e) Φ *est un homéomorphisme :* Soit $\rho \in \mathrm{Cont}_C(X)\}$. Avec les trivialisations ψ_ρ et $\hat{\psi}_\rho$ introduites en (1) et (2), l'application

$$\Phi\rho :\ = \psi_\rho \circ \Phi \circ \hat{\psi}_\rho^{-1} : U_\rho \times (\Omega_C \times_{\Omega_C} G) \to U_\rho \times G$$

s'écrit $\Phi\rho(x, (c, g)) = (x, h(c)\,g)$. L'application Φ_ρ est donc un homéomorphsime pour tout ρ, ce qui implique que Φ est un homéomorphisme.

Preuve du théorème d'existence Supposons que ξ admette une représentation w de C. Par le point b) du théorème A, ξ est obtenu du fibré ξ_C par la construction de Borel avec l'holonomie h^w. Cela implique que ν_ξ est homotope à $Bh^w \circ \nu_C$.

Réciproquement, supposons qu'il existe un homomorphisme continu $\phi : \Omega_C \to G$ tel que ν_ξ est homotope à $B\phi \circ \nu_C$. L'espace total du fibré induit $\nu_x i^*(EG)$ est de la forme $C_* \times_{\Omega_C} G$ et admet donc la représentation $w(c, [u, g]) = [cu, g]$. Le fibré $\nu_x i^*(EG)$ étant isomorphe à ξ, cela donne une représentation de C sur ξ. □

3 Structures uniformes sur $\mathcal{G}$ et $\mathcal{R}(C, \xi)$

Dans ce paragraphe, $\xi : E \xrightarrow{p} X$ désigne un G-fibré principal numérisable et $\mathcal{G}$ son groupe de jauge, muni de la CO-topologie. Le fait que $\mathcal{G}$ est un groupe topologique est non-trivial, car E n'est même pas supposé localement compact. Pour démontrer ce fait, nous allons, lorsque G est *SIN*, munir $\mathcal{G}$ d'une structure uniforme $\mathbf{U}_\mathcal{G}$, dont on montrera, si X est séparé, qu'elle induit la CO-tolopogie (Proposition 3.5). La même stratégie sera utilisée pour l'action de $\mathcal{G}$ sur $\mathcal{R}(C, \xi)$.

Pour décrire $\mathbf{U}_\mathcal{G}$, considérons l'application continue $\gamma : E \times_X E \to G$ définie par l'équation

$$y = z \cdot \gamma(y, z) \quad , \quad (y, z) \in E \times_X E. \tag{5}$$

Soit $\mathcal{V}_G$ l'ensemble des ouverts V de G contenant l'élément neutre et tels que $V = V^{-1}$. Pour $V \in \mathcal{V}_G$ et K un compact de X, on définit

$$\mathcal{O}^\mathcal{G}(K, V) : = \{(\chi, \tilde{\chi}) \in \mathcal{G} \times \mathcal{G} \mid \gamma(\chi(z), \tilde{\chi}(z)) \in V \text{ pour tout } z \in p^{-1}(K)\}.$$

Comme $\mathcal{O}^\mathcal{G}(K_1, V_1) \cap \mathcal{O}^\mathcal{G}(K_2, V_2)$ contient $\mathcal{O}^\mathcal{G}(K_1 \cup K_2, V_1 \cap V_2)$, la famille $\mathcal{O}^\mathcal{G}(K, V)$ est un système fondamental d'entourages de la diagonale dans $\mathcal{G} \times \mathcal{G}$, déterminant, par définition, la structure uniforme $\mathbf{U}_\mathcal{G}$ sur $\mathcal{G}$.

Proposition 3.1 *Si G est un groupe SIN, le groupe de jauge $\mathcal{G}$, muni de la structure uniforme $\mathbf{U}_\mathcal{G}$, est un groupe topologique. De plus, $\mathcal{G}$ est alors SIN.*

PREUVE: Nous allons tout d'abord démontrer que la multiplication $\mathcal{G} \times \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ et le passage à l'inverse sont uniformément continus. La topologie induite par $\mathbf{U}_\mathcal{G}$ fera donc de $\mathcal{G}$ un groupe topologique dont on vérifiera directement qu'il est *SIN*.

Soient χ_1, χ_2, $\tilde{\chi}_1$, $\tilde{\chi}_2$ des éléments de $\mathcal{G}$. Par définition de l'application $\gamma : E \times_X E \to G$, on a, pour $z \in E$:

$$\tilde{\chi}_1 \circ \tilde{\chi}_2(z) = \chi_1 \circ \chi_2(z) \cdot \gamma(\tilde{\chi}_1 \circ \tilde{\chi}_2(z), \chi_1 \circ \chi_2(z)).$$

Par G-equivariance des transformations de jauge, on a:

$$\begin{array}{rcl} \tilde{\chi}_1 \circ \tilde{\chi}_2(z) & = & \tilde{\chi}_1(\chi_2(z) \cdot \gamma(\tilde{\chi}_2(z), \chi_2(z))) = \tilde{\chi}_1(\chi_2(z)) \cdot \gamma(\tilde{\chi}_2(z), \chi_2(z)) = \\ & = & \chi_1(\chi_2(z)) \cdot \gamma(\tilde{\chi}_1(\chi_2(z)), \chi_1(\chi_2(z))) \cdot \gamma(\tilde{\chi}_2(z), \chi_2(z)) \end{array}.$$

On en déduit que

$$\gamma(\tilde{\chi}_1 \circ \tilde{\chi}_2(z), \chi_1 \circ \chi_2(z)) = \gamma(\tilde{\chi}_1 \circ \chi_2(z), \chi_1 \circ \chi_2(z))\ \gamma(\tilde{\chi}_2(z), \chi_2(z)).$$

Soit $V \in \mathcal{V}_G$. Comme G est un groupe topologique, il existe $W \in \mathcal{V}_G$ tel que $W \cdot W \subset V$. La condition $(\tilde{\chi}_1 \circ \tilde{\chi}_2, \chi_1 \circ \chi_2) \in \mathcal{O}^{\mathcal{G}}(K, V)$ sera vraie si $(\tilde{\chi}_1, \chi_1)$ et $(\tilde{\chi}_2, \chi_2)$ sont dans $\mathcal{O}^{\mathcal{G}}(K, W)$. Ceci démontre la continuité uniforme de la composition $\mathcal{G} \times \mathcal{G} \to \mathcal{G}$.

Pour le passage à l'inverse, soient $\chi, \tilde{\chi} \in \mathcal{G}$. Les équations

$$\chi(z) = z \cdot \gamma(\chi(z), z) \quad , \quad \tilde{\chi}(z) = z \cdot \gamma(\tilde{\chi}(z), z)$$

donnent

$$\tilde{\chi}(z) = \chi(z) \cdot \gamma(\chi(z), z)^{-1} \cdot \gamma(\tilde{\chi}(z), z)$$

d'où

$$\gamma(\tilde{\chi}(z), \chi(z)) = \gamma(\chi(z), z)^{-1}\, \gamma(\tilde{\chi}(z), z). \tag{6}$$

Observons que

$$\chi_1(\chi_2(z)) = \chi_1(z) \cdot \gamma(\chi_2(z), z) = z \cdot \gamma(\chi_1(z), z) \cdot \gamma(\chi_2(z), z)$$

et donc

$$\gamma(\chi_1 \circ \chi_2(z), z) = \gamma(\chi_1(z), z)\, \gamma(\chi_2(z), z). \tag{7}$$

On en déduit que $\gamma(\chi^{-1}(z), z) = \gamma(\chi(z), z)^{-1}$. En changeant $\chi, \tilde{\chi}$ en $\chi^{-1}, \tilde{\chi}^{-1}$ dans (6), on obtient ainsi

$$\begin{array}{rcl} \gamma(\tilde{\chi}^{-1}(z), \chi^{-1}(z)) & = & \gamma(\chi(z), z)\, \gamma(\tilde{\chi}(z), z)^{-1} = \\ & = & \gamma(\chi(z), z)\, \gamma(\tilde{\chi}(z), \chi(z))^{-1}\, \gamma(\chi(z), z)^{-1}. \end{array} \tag{8}$$

Soit $V \in \mathcal{V}_G$ et K un compact de X. Comme G est *SIN*, il existe un voisinage invariant W de l'élément neutre contenu dans V. En remplaçant au besoin W par $W \cup W^{-1}$, on peut supposer que $W = W^{-1}$. Grâce à l'équation

(8), si $(\tilde{\chi},\chi) \in \mathcal{O}^{\mathcal{G}}(K,W)$, alors $(\tilde{\chi}^{-1},\chi^{-1}) \in \mathcal{O}^{\mathcal{G}}(K,V)$, ce qui prouve la continuité uniforme de $\chi \mapsto \chi^{-1}$.

Pour voir que $\mathcal{G}$ est *SIN*, on utilise que tout voisinage de id_E contient un voisinage du type $\mathcal{H}(K,W) : = \{\chi \mid (\chi, \mathrm{id}_E) \in \mathcal{O}^{\mathcal{G}}(K,W)\}$ où K est un compact de X et W un voisinage invariant de l'élément neutre dans G. Par la formule (7), on a, pour tout $\tilde{\chi} \in \mathcal{G}$ et tout $z \in E$

$$\gamma(\tilde{\chi}^{-1}\circ\chi\circ\tilde{\chi}(z), z) = \gamma(\tilde{\chi}(z), z)^{-1}\,\gamma(\chi(z), z)\,\gamma(\tilde{\chi}(z), z).$$

On en déduit immédiatement que $\mathcal{H}(K,W)$ est $\mathcal{G}$-invariant. □

Définissons res : $\mathcal{G} \to G$ par la formule

$$\chi(\tilde{*}) = \tilde{*} \cdot \mathrm{res}\,(\chi). \tag{9}$$

L'équation 7 implique que res est un homomorphisme. Le noyau de res est évidemment $\mathcal{G}_1$. Le groupe G est muni de sa structure uniforme naturelle : une base d'entourages est donnée par $\mathcal{O}^V : = \{(\tilde{g}, g) \mid \tilde{g}g^{-1} \in V\}$. On obtient la même structure uniforme avec la condition $\tilde{g}^{-1}g \in V$ lorsque G est *SIN*.

Proposition 3.2 *Si G est SIN, l'homomrophisme* res *est uniformément continu. Si G est connexe par arc,* res *est surjectif.*

PREUVE: Pour tout $V \in \mathcal{V}_G$, on a $\mathrm{res}\,(\mathcal{O}^{\mathcal{G}}(\{*\}, V) \subset V$, ce qui prouve la continuité uniforme de res (ceci ne semble pas utiliser que G est *SIN* mais rappelons que cette condition est nécessaire pour que $\mathcal{G}$ soit un groupe topologique par la proposition 3.1).

La preuve de la surjectivité de res utilise que ξ est numérisable. Soit $\mu : X \to \mathbf{R}$ une application continue telle que $\mu(*) \neq 0$ et dont le support est contenu dans un ouvert trivialisant U. Soit $\psi : p^{-1}(U) \to U \times G$ une trivialisation. Posons $\psi(z) = (p(z), \delta(z))$. En divisant μ par $\mu(*)$, on peut supposer que $\mu(*) = 1$. Soit $g \in G$. Comme G est connexe par arc, il existe un chemin continu $g(t)$ avec $g(0) = e$ et $g(1) = g$. On définit alors $\chi \in \mathcal{G}$ par

$$\chi(z) : = \begin{cases} \psi^{-1}(p(z), g(\mu(p(z))\,\delta(z)) & \text{si } p(z) \in U \\ z & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il est clair que $\mathrm{res}\,(\chi) = g$. □

Nous allons maintenant munir l'espace $\mathcal{R}(C,\xi)$ des représentations de C sur ξ de la structure uniforme $\mathbf{U}_{\mathcal{R}}(C,\xi)$ dont une base d'entourages est donnée par

$$\mathcal{O}^{\mathcal{R}}(L,V) : = \{(w,\tilde{w}) \in \mathcal{R}(C,\xi)\times\mathcal{R}(C,\xi) \mid \gamma(w(c,z), \tilde{w}(c,z)) \in V\ \forall (c,z) \in L\times_X E\}$$

où $V \in \mathcal{V}_G$ et L est un un compact de C.

Proposition 3.3 *L'action $\mathcal{R}(C,\xi) \times \mathcal{G} \to \mathcal{R}(C,\xi)$ est uniformément continue.*

PREUVE: Soient $\chi, \tilde{\chi} \in \mathcal{G}$ et $w, \tilde{w} \in \mathcal{R}(C,\xi)$. Pour $(c,z) \in C \times_X E$, on démontre, comme dans la preuve de la proposition 3.1 que $\gamma(\tilde{w}^{\tilde{\chi}}(c,z), w^{\chi}(c,z))$ est le produit $\gamma_1\,\gamma_2\,\gamma_3$ avec

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= \gamma(\tilde{\chi}^{-1}(w(c,\chi(z))), \chi^{-1}(w(c,\chi(z)))) \\
\gamma_2 &= \gamma(\tilde{w}(c,\chi(z)), w(c,\chi(z))) \\
\gamma_3 &= \gamma(\tilde{\chi}(z), \chi(z))).
\end{aligned}$$

Soit L un compact de C et $V \in \mathcal{V}_G$. Si $W \in \mathcal{V}_G$ est G-invariant et satisfait $W \cdot W \cdot W \subset V$, cela prouve, en utilisant la formule (8), que si $(\tilde{\chi}, \chi) \in \mathcal{O}^{\mathcal{G}}(\alpha(L), W) \cap \mathcal{O}^{\mathcal{G}}(\beta(L), W)$ et $(\tilde{w}, w) \in \mathcal{O}^{\mathcal{R}}(L, W)$, alors $(\tilde{w}^{\tilde{\chi}}, w^{\chi}) \in \mathcal{O}^{\mathcal{R}}(L, V)$. $\square$

Enfin, l'epace $\mathcal{R}(\Omega_C, G)$ peut être muni d'une structure uniforme $\mathbf{U}_{\mathcal{R}}$ ayant pour base d'entourages

$$\mathcal{O}^{\mathcal{R}}(K,V) :\, = \{(h,\tilde{h}) \in \mathcal{R}(\Omega_C, G) \times \mathcal{R}(\Omega_C, G) \mid \tilde{h}(c)h(c^{-1}) \in V,\ \forall c \in K\}$$

où $V \in \mathcal{V}_G$ et K est un un compact de Ω_C.

Proposition 3.4 *Si G est SIN, l'action de G sur $\mathcal{R}(\Omega_C, G)$ par conjugaison est uniformément continue.*

PREUVE: Soit $V \in \mathcal{V}_G$. Soit $W \in \mathcal{V}_G$ tel que W soit G-invariant et $W \cdot W \cdot W \subset V$. Soient $\varphi, \tilde{\varphi} \in \mathcal{R}(\Omega_C, G)$ et $g, \tilde{g} \in G$. Soit L un compact de Ω_C et $c \in L$. La formule

$$(\tilde{g}^{-1}\tilde{\varphi}(c)\tilde{g})(g^{-1}\varphi(c)g)^{-1} = \tilde{g}^{-1}\tilde{\varphi}(c)(\tilde{g}g^{-1})\tilde{\varphi}^{-1}(c)(\tilde{\varphi}(c)\varphi^{-1}(c))\tilde{g}\,(\tilde{g}^{-1}g)$$

montre que $\tilde{g}\,\tilde{g}^{-1} \in W$ et $(\tilde{\varphi}, \varphi) \in \mathcal{O}^{\mathcal{R}}(L, W)$ impliquent que $(\tilde{g}^{-1}\tilde{\varphi}\tilde{g}, g^{-1}\varphi g) \in \mathcal{O}^{\mathcal{R}}(L, V)$. $\square$

Nous terminons ce paragraphe en montrant que les structures uniformes considérées induisent la CO-topologie. Rappelons que, par définition, une sous-base de la CO-topologie sur l'espace fonctionnel $\mathrm{map}\,(X,Y)$ est formée des ensembles $CO(K,U) :\, = \{f \in \mathrm{map}\,(X,Y) \mid f(K) \subset U\}$, où K parcourt l'ensemble des compacts de X et U celui des ouverts de Y.

Proposition 3.5 *Si G est SIN et X est un espace séparé, les topologies sur $\mathcal{G}$, $\mathcal{R}(C,\xi)$ et $\mathcal{R}(\Omega_C, G)$ induites par les structures uniformes $\mathbf{U}_{\mathcal{G}}$, $\mathbf{U}_{\mathcal{R}}(C,\xi)$ et $\mathbf{U}_{\mathcal{R}}$ coïncident avec la CO-topologie.*

Nous aurons besoin d'un analogue du lemme de Lebesgue (voir aussi [Bo, II.4.3]) :

Lemme 3.6 *Soit $f : K \to E$ une application continue d'un compact dans l'espace total de ξ. Soit U un ouvert de E avec $f(K) \subset U$. Alors, il existe $V \in \mathcal{V}_G$ tel que $f(K) \cdot V \subset U$.*

PREUVE: Pour tout $z \in K$, il existe un ouvert S_z de E et $V_z \in \mathcal{V}_G$ tels que $f(z) \in S_z \subset U$ et S_z est de la forme $\sigma(p(S_z)) \times (f(z) \cdot V_z \cdot V_z)$, où σ est une section locale de ξ au voisinage de $p(f(z))$. Comme K est compact, on a $f(K) = \bigcup_{z \in K_0} S_z$ pour un sous-ensemble fini K_0 de K. Soit $V : = \bigcap_{z \in K_0} V_z \in \mathcal{V}_G$. Alors, pour tout $z \in K$, on a $f(z) \cdot V \subset U$. En effet, il existe $y \in K_0$ tel que $f(z) \in f(y)\dot{V}_y$ d'où

$$f(z)\dot{V} \subset f(y) \cdot V_y \cdot V \subset f(y) \cdot V_y \cdot V_y \subset U. \ \square$$

PREUVE DE 3.5 : L'affirmation pour $\mathcal{R}(\Omega_C, G)$ est un fait classique pour les applications dans un espace uniforme [Bo, X.3.4, théorème 2].

Preuve pour $\mathcal{G}$: Soit $\chi \in \mathcal{G}$, K un compact de E et U un ouvert de E tels que $\chi(K) \subset U$. Par le lemme 3.6, il existe $V \in \mathcal{V}_G$ tel que $\chi(K) \cdot V \subset U$. On a $\chi \in \mathcal{O}^{\mathcal{G}}(p(K), V)(\chi) \subset CO(K, U)$ (observons que $p(K)$ est compact puisque X est séparé).

Réciproquement, soit $\chi \in \mathcal{G}$, L un compact de X et $V \in \mathcal{V}_G$. Il faut trouver un ouvert Σ pour la CO-topologie tel que $\chi \in \Sigma \subset \mathcal{O}^{\mathcal{G}}(L, V)(\chi)$, où $\mathcal{O}^{\mathcal{G}}(L, V)(\chi) : = \{\tilde{\chi} \in \mathcal{G} \mid (\chi, \tilde{\chi}) \in \mathcal{O}^{\mathcal{G}}(L, V)\}$. Comme G est *SIN*, il existe $W \in \mathcal{V}_G$ qui est G-invariant avec $W \subset V$.

Considérons tout d'abord le cas où L est contenu dans un ouvert Y de X au dessus duquel ξ admet une section σ. L'ensemble $\chi(\sigma(L)) \cdot W$ est un ouvert de $p^{-1}(L)$. Il existe donc un ouvert U de E tel que $\chi(\sigma(L)) \cdot W = U \cap p^{-1}(L)$. Soit $\tilde{\chi} \in CO(\sigma(L), U)$. Si $z \in p^{-1}(L)$, il existe $g \in G$ tel que $z = \sigma(p(z)) \cdot g$. La G-équivariance de $\tilde{\chi}$ donne, pour tout $u \in E$, la formule

$$\gamma(\tilde{\chi}(u \cdot g), \chi(u \cdot g)) = g^{-1} \gamma(\tilde{\chi}(u), \chi(u))\, g. \tag{10}$$

Comme W est G-équivariant, la formule (10) appliquée à $u : = \sigma(p(z))$ entraîne que $\gamma(\tilde{\chi}(z), \chi(z)) \in W$, ce qui prouve que $\chi \in CO(\sigma(L), U) \subset \mathcal{O}^{\mathcal{G}}(L, V)(\chi)$.

Dans le cas général on recouvre L par un nombre fini d'ouverts trivialisants, $L \subset Y_1 \cup \cdots \cup Y_n$, au dessus desquels on choisit des sections σ_i de ξ. On choisit des compacts $L_i \subset L \cap Y_i$ tels que $L = L_1 \cup \cdots \cup L_n$. En construisant, comme ci-dessus, les $\chi(\sigma_i(L_i)) \cdot W \subset U_i$, on aura

$$\chi \in \bigcap_{i=1}^{n} CO(\sigma_i(L_i), U_i) \subset \mathcal{O}^{\mathcal{G}}(L, W)(\chi) \subset \mathcal{O}^{\mathcal{G}}(L, V)(\chi). \quad \square$$

Preuve pour $\mathcal{R}(C,\xi)$: Soit $w \in \mathcal{R}(C,\xi)$. Soit L un compact de $C \times_X E$ et U un ouvert de E tel que $w(L) \subset U$. Par le lemme 3.6, il existe $V \in \mathcal{V}_G$ tel que $w(L) \cdot V \subset U$ et l'on a $w \in \mathcal{O}^{\mathcal{R}}(L,V)(w) \subset CO(L,U)$.

Réciproquement, soit $w \in \mathcal{R}(C,\xi)$, K un compact de C et $V \in \mathcal{V}_G$. Comme G est *SIN*, il existe $W \in \mathcal{V}_G$ qui est G-invariant avec $W \subset V$. Considérons tout d'abord le cas où $\alpha(K)$ est contenu dans un ouvert Y de X au dessus duquel ξ admet une section σ. L'ensemble $w(\sigma(\alpha(K)))\cdot W$ est un ouvert de $p^{-1}(\beta(K))$. Il existe donc un ouvert U de E tel que $w(\sigma(\alpha(K))) \cdot W = U \cap p^{-1}(L)$. On démontre, comme dans la preuve pour $\mathcal{G}$ ci-dessus, que $w \in CO(\sigma(\alpha(K)), U) \subset \mathcal{O}^{\mathcal{G}}(K,V)(w)$. Le cas général s'obtient aussi comme dans la preuve pour $\mathcal{G}$. $\square$

4 Groupe de jauge et classifiant de Milnor

Les résultats de ce paragraphe seront utilisés pour la preuve du théorème D et les techniques se retrouveront dans la preuve du théorème C.

Soit $\xi : E \xrightarrow{p} X$ et $\eta : A \xrightarrow{\bar{p}} B$ deux G-fibré principaux numérisables. Tous les espaces sont pointés. Désignons par $\mathrm{Map}^{\bullet}_G(E,A)$ l'espace des applications continues pointées G-équivariantes de E dans A, muni de la CO-topologie. Le passage au quotient donne une application $q : \mathrm{Map}^{\bullet}_G(E,A) \to \mathrm{Map}^{\bullet}(X,B)_\xi$ où $\mathrm{Map}^{\bullet}(X,B)_\xi$ est l'espace des applications continues pointées $h : X \to B$ telles que $h^*\eta \approx \xi$, muni de la CO-topologie. Le groupe de jauge $\mathcal{G}_1$ de ξ agit à droite sur $\mathrm{Map}^{\bullet}_G(E,A)$ par pré-composition et $q(f \circ \chi) = q(f)$.

Théorème 4.1 *Supposons que X est localement compact, que $\mathrm{Map}^{\bullet}(X,B)_\xi$ est semi-localement contractile et que G est SIN. Alors, l'application q : $\mathrm{Map}^{\bullet}_G(E,A) \to \mathrm{Map}^{\bullet}(X,B)_\xi$ est un $\mathcal{G}_1$-fibré principal.*

Pour démontrer le théorème 4.1, on utilise, dans l'esprit du § 3, une sous-base particulière de la CO-topologie sur $\mathrm{Map}^{\bullet}_G(E,A)$. Considérons l'ensemble $\mathcal{T}$ des applications G-equivariantes $\tau : \bar{p}^{-1}(U_\tau) \to G$ où U_τ est un ouvert de B. Comme η est un G-fibré principal, la collection $\{U_\tau \mid \tau \in \mathcal{T}\}$ est un recouvrement ouvert de B. Soit $f \in \mathrm{Map}^{\bullet}_G(E,A)$. Soit K un compact de X et $\tau \in \mathcal{T}$ tel que $f(p^{-1}(K)) \in \bar{p}^{-1}(U_\tau)$. Soit encore $V \in \mathcal{V}_G$. On définit $\mathbf{W}(f, K, \tau, V)$ comme l'ensemble des $\tilde{f} \in \mathrm{Map}^\bullet_G(E, A)$ telles que , pour tout $z \in p^{-1}(K)$ on ait $\bar{p} \circ \tilde{f}(z) \subset U_\tau$ et $\tau(\tilde{f}(z)) \in \tau(f(z)) \cdot V$.

Lemme 4.2 *Si G est SIN, les ensembles $\mathbf{W}(f, K, \tau, V)$ forment une sous-base de la CO-topologie sur* $\mathrm{Map}^\bullet_G(E, A)$.

Preuve: Appelons $\mathbf{T}$ la topologie engendrée par les $\mathbf{W}(f, K, \tau, V)$ et $\mathbf{T}_{co}$ la CO-topologie. Pour L un compact de E et S un ouvert de A, notons $CO(L, S) := \{h \in \mathrm{Map}^\bullet_G(E, A) \mid h(L) \subset S\}$. Les ensembles $CO(L, S)$ forment la sous-base standard de $\mathbf{T}_{co}$.

Soit $\mathbf{W}(f, K, \tau, V)$. Soit $\sigma : U_\tau \to A$ une section de η restreint à U_τ. Comme l'application quotient $q(f) \in \mathrm{Map}^\bullet(X, B)_\xi$ envoie K dans U_τ, le fibré ξ admet une section $\hat{\sigma}$ au dessus de K telle que $f \circ \hat{\sigma} = \sigma \circ q(f)$. Soit $L := \hat{\sigma}(K)$ et $S := \sigma(U) \cdot W$ où $W \in \mathcal{V}_G$ est G-invariant et contenu dans V. Soit $\tilde{f} \in CO(L, S)$. Si $z \in p^{-1}(K)$, on a $z = z_0 \cdot g$ avec $z_0 := \hat{\sigma}(p(z)) \in L$ et

$$\tilde{f}(z) := \tilde{f}(z_0) \cdot g \in f(z_0) \cdot W \cdot g = f(z_0) \cdot g \cdot (g^{-1}\, W\, g) = f(z) \cdot W.$$

Ceci montre que $f \in CO(L, S) \subset \mathbf{W}(f, K, \tau, V)$ et donc $\mathbf{T} \subset \mathbf{T}_{co}$.

Réciproquement, soient L un compact de E et S un ouvert de A avec $f(L) \subset S$. Supposons tout d'abord que $S = S(\tau, V) := \sigma(U_\tau) \times V$ pour $V \in \mathcal{V}_G$ et σ la section de η restreint à U_τ telle que $\tau \circ \sigma(y) = e$, l'élément neutre de G. On a donc $\tau \circ f(L) \subset V$. Par l'analogue du lemme de Lebesgue [Bo, II.4.3], il existe $W \in \mathcal{V}_G$ tel que pour $\tau(f(z)) \cdot W \subset V$ pour tout $z \in K$. Il est alors clair que $f \in W(f, p(L), \tau, W) \subset CO(L; S)$.

Comme les ouverts $S(\tau, V)$ forment une base de la topologie de A, on aura, en général

$$CO(L, S) = \bigcap_{i=1}^{m} CO(L_i, S(\tau_i, V_i)) \supset \bigcap_{i=1}^{m} \mathbf{W}(f, p(L_i), \tau_i, W_i) \ni f.$$

On a ainsi prouvé $\mathbf{T} \supset \mathbf{T}_{co}$. □

Preuve du théorème 4.1 :

4.3 *Principe de la démonstration :* on va montrer que :

1. q est continue, $\mathcal{G}_1$-équivariante et induit une injection de $\mathrm{Map}^\bullet_G(E, A)/\mathcal{G}_1$ dans $\mathrm{Map}^\bullet(X, B)_\xi$.

2. l'action $\mathrm{Map}^{\bullet}_G(E,A)\times\mathcal{G}_1\to\mathrm{Map}^{\bullet}_G(E,A)$ est libre et continue.

3. si $f_1,f_2\in\mathrm{Map}^{\bullet}_G(E,A)$ satisfont $q(f_1)=q(f_2)$, les points 1) et 2) donnent un unique $\delta(f_1,f_2)\in\mathcal{G}_1$ tel que $f_2=f_1\circ\delta(f_1,f_2)$. Ceci définit une application $\delta:\mathrm{Map}^{\bullet}_G(E,A)\times_{\mathrm{Map}^{\bullet}(X,B)_\xi}\mathrm{Map}^{\bullet}_G(E,A)\to\mathcal{G}_1$. On démontre que δ est continue.

4. l'application q admet des sections locales continues.

Les points ci-dessus permettent de démontrer que q est un $\mathcal{G}_1$-fibré principal. En effet, pour construire des trivialisations locales, on choisit une section continue $s:T\to\mathrm{Map}^{\bullet}_G(E,A)$ de q au dessus d'un ouvert T de $\mathrm{Map}^{\bullet}(X,B)_\xi$. La correspondance $(f,\chi)\to s(f)\circ\chi$ donne une bijection continue $\mathcal{G}_1$-équivariante $\tau:T\times\mathcal{G}_1\to q^{-1}(T)$. Son inverse $\tau^{-1}(\tilde f)=(q(\tilde f),\delta(s(q(\tilde f)),\tilde f))$ étant continue par 3), l'application τ est un homéomorphisme.

4.4 *L'application* $q:\mathrm{Map}^{\bullet}_G(E,A)\to\mathrm{Map}^{\bullet}(X,B)_\xi$ *est continue :* Soit $f\in\mathrm{Map}^{\bullet}_G(E,A)$. Soit K un compact de X et U un ouvert de B avec $q(f)\in CO(K,U)$. On peut écrire $K=\bigcup_{i=1}^m K_i$ où K_i est un compact contenu dans le domaine de définition d'une section locale σ_i de ξ. On a alors

$$q(\bigcap_{i=1}^m CO(\sigma_i(K_i),p^{-1}(U))\subset\bigcap_{i=1}^m CO(K_i,U)=CO(K,U).$$

4.5 *L'action* $\mathrm{Map}^{\bullet}_G(E,A)\times\mathcal{G}_1\to\mathrm{Map}^{\bullet}_G(E,A)$ *est libre et continue :* Il est banal que cette action est libre. Soit $(f,\chi)\in\mathrm{Map}^{\bullet}_G(E,A)\times\mathcal{G}_1$. Considérons un voisinage de $f\circ\chi$ de la forme $\mathbf{W}(f\circ\chi,K,\tau,V)$. Soit $W\in\mathcal{V}_G$ tel que $W\cdot W\subset V$. Comme dans la preuve de la proposition 3.1, on vérifie que $\tilde f\circ\tilde\chi\in\mathbf{W}(f\circ\chi,K,\tau,V)$ si $\tilde f\in\mathbf{W}(f,K,\tau,W)$ et $(\tilde\chi,\chi)\in\mathcal{O}^{\mathcal{G}}(K,W)$.

4.6 *L'application q induit une injection continue de* $\mathrm{Map}^{\bullet}_G(E,A)/\mathcal{G}_1$ *dans* $\mathrm{Map}^{\bullet}(X,B)_\xi$ *:* Il est clair que q est $\mathcal{G}$-invariante. Supposons que $q(f_1)=q(f_2)=:f$. On a alors des uniques isomorphismes $\hat f_i:E\xrightarrow{\approx}E(f^*\eta)$, $(i=1,2)$. La composition $\phi:\ =\hat f_2^{-1}\circ\hat f_1$ est un élément de $\mathcal{G}$ et $f_1=f_2\circ\phi$. (Observons que q est évidemment surjective. Nous omettons ce fait car il est redonné par le point 4.8. Cette économie sera avantageuse dans la preuve du théorème B).

4.7 *Continuité de l'application* δ *:* Soient $f_1,f_2\in\mathrm{Map}^{\bullet}_G(E,A)$ telles que $f_2=f_1\circ\chi$. Il s'agit de montrer que χ dépend continûment du couple (f_1,f_2).

Soient K un compact de X et $V \in \mathcal{V}_G$. Soit $W \in \mathcal{V}_G$ tel que $W \cdot W \subset V$. Supposons tout d'abord qu'il existe τ telle que $K \subset f_1^{-1}(U_\tau) \cap f_2^{-1}(U_\tau)$. Soient $\tilde{f}_i \in \mathbf{W}(f_i, K, \tau, W)$ $(i = 1, 2)$ avec $\tilde{f}_2 = \tilde{f}_1 \circ \tilde{\chi}$. Pour $z \in p^{-1}(K)$, on a

$$\tau(\tilde{f}_2(z)) \in \tau(f_2(z)) \cdot W = \tau(f_1(\chi(z))) \cdot W \in \tau(\tilde{f}_1(\chi(z))) \cdot W \cdot W.$$

D'autre part :

$$\tau(\tilde{f}_2(z)) = \tau(\tilde{f}_1(\tilde{\chi}(z))) = \tau(\tilde{f}_1(\chi(z)))\gamma(\tilde{\chi}(z), \chi(z)).$$

Comme $V = V^{-1}$, on aura $\tilde{\chi}(z) \in \chi(z) \cdot V$. Dans le cas général, on utilise que K est une réunion finie de compacts K_i tels que $K \subset f_1^{-1}(U_{\tau_i}) \cap f_2^{-1}(U_{\tau_i})$.

4.8 *Construction de sections locales :* Nous allons construire une section locale au dessus de chaque ouvert T de $\mathrm{Map}^\bullet(X, B)_\xi$ dont l'inclusion $T \subset \mathrm{Map}^\bullet(X, B)_\xi$ est contractile. On suppose donc qu'il existe une application $H : I \times T \to \mathrm{Map}^\bullet(X, B)_\xi$, où $I = [0, 1]$, telle que $H(0, f) = f$ et $H(1, f) = f_1$. Comme X est localement compact, H donne naissance à une application continue $h : I \times T \times X \to B$ [Du, p. 261] telle que $h(t, f, *) = *$. Désignons par $h_t : T \times X \to B$ l'application continue $h_t(f, x) = h(t, f, x)$ et par $\mathcal{E}_t$ l'espace total du fibré induit sur $T \times X$ par h_t: $\mathcal{E}_t :\ = E(h_t^*\eta)$. Vu que $h_t(f, *) = *$, l'espace $\mathcal{E}_t$ est pointé par $(*, \tilde{*})$.

Comme η est numérisable, le relèvement des homotopies donne un isomorphisme de G-fibrés pointés de $h_1^*\eta$ sur $h_0^*\eta$. D'autre part, on a des isomorphismes de G-fibrés pointés $h_1^*\eta \approx T \times f_1^*\eta \approx T \times \xi$. Tout ceci forme un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc}
T \times E & \xrightarrow{\approx} & T \times E(h_1^*\eta) & \xrightarrow{\approx} & \mathcal{E}_1 & \xrightarrow{\approx} & \mathcal{E}_0 & \longrightarrow & A \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
T \times X & \xrightarrow{\mathrm{id}} & T \times X & \xrightarrow{\mathrm{id}} & T \times X & \xrightarrow{\mathrm{id}} & T \times X & \xrightarrow{h_0} & B.
\end{array}$$

Comme $\mathrm{Map}^\bullet_G(E, A)$ est munie de la CO-topologie, la ligne supérieure détermine une application continue $T \to \mathrm{Map}^\bullet_G(E, A)$ au dessus de l'inclusion $T \subset \mathrm{Map}^\bullet(X, B)_\xi$, c'est-à-dire une section locale continue au dessus de T.

Par 4.8, la démonstration du théorème 4.1 est ainsi terminée. De la même manière, on démontre le résultat analogue pour les applications non-pointées $q : \mathrm{Map}_G(E, A) \to \mathrm{Map}(X, B)_\xi$:

Théorème 4.9 *Supposons que X est localement compact, que* $\mathrm{Map}(X, B)_\xi$ *est semi-localement contractile et que G est SIN. Alors, l'application* $q : \mathrm{Map}_G(E, A) \to \mathrm{Map}(X, B)_\xi$ *est un $\mathcal{G}$-fibré principal.*

Le cas particulier où η est le fibré de Milnor $EG \to BG$ est intéressant à cause de la proposition suivante, utilisée pour démontrer le théorème D :

Proposition 4.10 *Soit ξ un G-fibré principal numérisable sur X. Alors, l'espace* $\mathrm{Map}_G(E, EG)$ *est contractile. Si, de plus, X est localement compact et que l'inclusion $\{*\} \subset X$ soit une cofibration,* $\mathrm{Map}^\bullet_G(E, EG)$ *est faiblement contractile (i.e. ses groupes d'homotopie sont ceux d'un point).*

PREUVE: La preuve habituelle que deux applications G-equivariantes $f_0, f_1 : E \to EG$ sont toujours homotopes fournit une homotopie *canonique* entre f_0 et f_1, qui dépend continûment de (f_0, f_1) (voir [Hu, prop. 12.3]). L'espace $\mathrm{Map}_G(E, EG)$ est donc contractile (convexe), de même que $EG = \mathrm{Map}_G(G, EG)$. Pour montrer l'assertion sur $\mathrm{Map}^\bullet_G(E, EG)$, il suffit de montrer que la suite

$$\mathrm{Map}^\bullet_G(E, EG) \hookrightarrow \mathrm{Map}_G(E, EG) \xrightarrow{\mathrm{ev}} EG$$

est, avec nos hypothèses sur X, une fibration de Hurewicz, où ev est l'évaluation sur le point base $\tilde{*}$.

Soit $f : A \to \mathrm{Map}_G(E, EG)$ une application continue et $F_{\tilde{*}} : [0,1] \times A \times \{\tilde{*}\} \to EG$ une homotopie de $\mathrm{ev} \circ f$. Par passage au quotient, on obtient $\bar{f} : A \to \mathrm{Map}\,(X, BG)$ et $\bar{F} : [0,1] \times A \times \{*\} \to BG$. Comme X est localement compact, ces applications induisent des applications continues $\bar{f}\check{}: A \times X \to BG$ et $\bar{F}_*\check{}: [0,1] \times A \times \{*\} \to BG$. Etant équivariante, l'application induite $f\check{}: A \times E \to EG$ est donc aussi continue (bien que E ne soit pas supposé localement compact).

Comme $* \subset X$ est une cofibration, il existe une rétraction de $[0,1] \times X$ sur $\{0\} \times X \cup [0,1] \times \{*\}$ qui permet d'étendre $\bar{F}_*\check{}$ en $\bar{F}\check{}: [0,1] \times A \times X \to BG$. Ceci prouve que $\mathrm{Map}^\bullet(X, BG) \to \mathrm{Map}\,(X, BG) \to BG$ est une fibration de Hurewicz. Par relèvement des homotopies, l'espace total du fibré induit sur $[0,1] \times A \times X$ par $\bar{F}\check{}$ est G-homéomorphe à $[0,1] \times A \times E$, ce qui produit une homotopie $F\check{}: [0,1] \times A \to \mathrm{Map}_G(E, EG)$ partant f et au dessus de F. $\square$

4.11 Remarque : On déduit de 4.1, 4.9 et 4.10 que $\pi_i(\mathrm{Map}^\bullet(X, BG)_\xi) \approx \pi_i(B\mathcal{G}_1)$ et $\pi_i(\mathrm{Map}\,(X, BG)_\xi) \approx \pi_i(B\mathcal{G})$. Nous ne savons pas, en général, si ces isomorphismes sont induits par une application $\mathrm{Map}\,(X, BG)_\xi \to B\mathcal{G}$. Observons que des résultats analogues ont été obtenus dans d'autres contextes ([DDK], [DK, Prop. 5.1.4]).

5 Preuve des théorèmes B, C et D

Préparatifs :

5.1 *Continuité des foncteurs de Milnor.* Nous aurons besoin de savoir que les foncteurs E et B de Milnor sont continus, ce qui ne semble pas figurer dans la littérature :

Lemme 5.2 *Soient $\mathcal{R}(F,G)$ l'espace des homomorphismes continus entre les groupes topologiques F et G. Supposons que F est séparé. Alors les applications*

$$E : \mathcal{R}(F,G) \to \mathrm{Map}^{\bullet}_{F}(EF, EG) \qquad (\phi \;\mapsto\; E\phi)$$

et

$$B : \mathcal{R}(F,G) \to \mathrm{Map}^{\bullet}(BF, BG) \qquad (\phi \;\mapsto\; B\phi)$$

sont continues (tous les espaces étant munis de la CO-topologie).

PREUVE: Comme l'application $\mathrm{Map}^{\bullet}_{F}(EF, EG) \to \mathrm{Map}^{\bullet}(BF, BG)$ est continue (se démontre comme 4.4), il suffit de donner une preuve pour l'application E.

Rappelons que si P est un groupe toplogique, les éléments de EP sont représentés par des suites $(t_j p_j)$, où $j \in \mathbf{N}$, $t_j \in [0,1]$ et $p_j \in P$. On désigne par $\tau_i : EP \to [0,1]$ l'application $\tau_i((t_j p_j)) := t_i$ et par $\gamma_i : \tau_i^{-1}(]0,1]) \to P$ l'application $\gamma_i((t_j p_j)) := p_i$ (on utilise les mêmes notations τ_i et γ_i pour tout groupe P). L'espace EP est muni de la topologie la plus grossière telle que les applications τ_i et γ_i soient continues. Une sous-base $\mathcal{S}$ de cette topologie est donc constituée par les ouverts du type

1. $\tau_i^{-1}(J)$ où J est un ouvert de $[0,1]$.
2. $\gamma_i^{-1}(V)$ où V est un ouvert de P.

Soit $\phi_0 \in \mathcal{R}(F,G)$, K un compact de EF et U un ouvert de EG tel que $\phi_0(K) \subset U$. Soit $CO(K,U) := \{\alpha \in \mathrm{Map}^{\bullet}_{F}(EF, EG) \mid \alpha(K) \subset U\}$. Il faut montrer que $E^{-1}(CO(K,U))$ est un voisinage de ϕ_0 dans $\mathcal{R}(F,G)$. Il suffit de le faire pour $U \in \mathcal{S}$ (voir [Bo, X.3.4, remarque 2].

Si U est du type 1 ci-dessus, cela ne pose pas de problème. En effet, $\tau_i \circ E = \tau_i$, d'où $E^{-1}(CO(K,U)) = \mathcal{R}(F,G)$. Si $U = \gamma_i^{-1}(V)$ avec V un ouvert de G, on pose $K_i := \gamma_i(K)$ (γ_i est définie sur K puisque $\tau_i \circ E = \tau_i$). L'espace K_i est compact puisque F est séparé. Comme $\gamma_i \circ E\phi = \phi \circ \gamma_i$, on a $\phi_0 \in CO(K_i, V) \subset E^{-1}(CO(K,U))$. □

5.3 *L'applcation* $n : \mathcal{R}(\Omega_C, G)_\xi \to \mathrm{Map}^\bullet(X, BG)_\xi$. En choisissant une partition de l'unité μ_ρ subordonnée au recouvrement U_ρ ($\rho \in \mathrm{Cont}_C(X)$), on détermine, grâce aux trivialisations $\hat{\psi}_\rho$ de (2), une application classifiante $\nu_C : X \to B\Omega_C$ (voir [Hu, ch. 4, prop. 12.1 et th. 12.2]). Il est possible de faire ce choix de manière que ν_C soit pointée (le point base de EF, pour un groupe topologique F, est toujours la suite $(1e, 0, 0, \ldots)$, où e élément neutre de F; le point base de BF est l'image de celui de EF). Pour cela, il faut tout d'abord avoir une partition de l'unité dénombrable et trivialisante μ_i ($i = 1, 2, \ldots$) telle que $\mu_1(*) = 1$. Or, une telle partition existe car :

a) il existe une partition de l'unité $\hat{\mu}_\rho$ et $\hat{\rho} \in \mathrm{Cont}_C(X)$ tels que $\hat{\mu}_{\hat{\rho}(x)} = 1$ au voisinage de $*$. Pour voir cela, on choisit $\hat{\rho}$ tel que $\mu_{\hat{\rho}}(*) \neq 0$. On considère une fonction $\delta : [0,1] \to [0,1]$ telle que $\delta(t) = 0$ si $t \geq \mu_{\hat{\rho}}(*)/2$ et $\delta(t) > 0$ si $t < \mu_{\hat{\rho}}(*)/2$. On pose

$$\mu'_\rho(x) : = \begin{cases} \mu_{\hat{\rho}}(x) & \text{si } \rho = \hat{\rho} \\ \delta(\mu_{\hat{\rho}}(x))\, \mu_\rho(x) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Avec ces définitions,

$$\hat{\mu}_\rho(x) : = \frac{\mu'_\rho(x)}{\sum_\sigma \mu'_\sigma(x)}$$

est une partition de l'unité avec $\hat{\mu}_{\hat{\rho}(x)} = 1$ au voisinage de $*$.

b) le procédé de [Hu, ch. 4, prop. 12.1] fournit, à partir de la partition $\hat{\mu}_\rho$ une partition de l'unité μ_i ($i = 1, 2, \ldots$) telle que $\mu_1(x) = 1$ au voisinage de $*$.

On peut supposer que $\hat{\rho}(*) = i_{\hat{\rho}(*)}$. Sinon, $\hat{\rho}(*) = b \in \Omega_C$ et l'on remplace $\hat{\rho}$ par $b^{-1}\,\hat{\rho}$. Dans ces conditions, l'application ν_C obtenue par [Hu, ch. 4, prop. 12.1] est pointée.

Ayant fixé $\nu_C \in \mathrm{map}\,(X, B\Omega_C)$ comme ci-dessus, on définit $n : \mathcal{R}(\Omega_C, G)_\xi \to \mathrm{Map}^\bullet(X, BG)_\xi$ par $n(\phi) : = B\phi \circ \nu_C$. Comme C est séparé, l'application $\phi \mapsto B\phi$ est continue (lemme 5.2), d'où la continuité de n.

Preuve du théorème B : Par le théorème d'existence, on a $\mathcal{R}(C, \xi) = \emptyset$ si et seulement $\mathcal{R}(\Omega_C, G)_\xi = \emptyset$. Dans ce cas, le théorème B est banal. On suppose donc que $\mathcal{R}(C, \xi) \neq \emptyset$. Le théorème A implique que l'image de h est dans $\mathcal{R}(\Omega_C, G)_\xi$. Le principe de la preuve du théorème B est alors le même que celui du théorème 4.1 (voir 4.3).

5.4 *h est continue.* Soit $w \in \mathcal{R}(C, \xi)$. Soit K un compact de Ω_C, U un ouvert de G tels que $h^w(K) \subset U$. En utilisant une trivialisation locale de ξ au voisinage de $*$, on peut trouver un ouvert $\tilde{U}$ de E tel que $\tilde{U} \cap E_* = \tilde{*} \cdot U$.

Alors $w \in CO(K \times \{\tilde{*}\}, \tilde{U})$ qui est un ouvert de $\mathcal{R}(C,\xi)$ et $h(CO(K \times \{\tilde{*}\}, \tilde{U}) \subset CO(K,U)$.

5.5 *l'action* $\mathcal{R}(C,\xi) \times \mathcal{G}_1 \to \mathcal{R}(C,\xi)$ *est continue et libre.* La continuité, utilisant le fait que G est *SIN*, a été démontrée dans la proposition 3.3. Soit $w \in \mathcal{R}(C,\xi)$ et $\chi \in \mathcal{G}$. Si $\chi \neq \mathrm{id}_E$, il existe $z \in E$ tel que $\chi(z) \neq z$. Soit $\theta \in C^*_{p(z)}$. Comme χ restreinte à $p^{-1}(*)$ est l'identité, on aura $w^\chi(\theta, z) \neq w(\theta, z)$ ce qui montre l'assertion 5.5.

5.6 $\mathcal{G}$*-invariance de* h *:* Soit $\chi \in \mathcal{G}$. Posons $\chi(\tilde{*}) = \tilde{*}\, g$, autrement dit: $g := \mathrm{res}\,(\chi)$. Pour $c \in \Omega_C$, on a

$$\begin{aligned} \tilde{*}\, h^{(w^\chi)}(c) &= w^\chi(c, \tilde{*}) = \chi^{-1}(w(c, \tilde{*} \cdot g)) = \chi^{-1}(\tilde{*} \cdot h^w(c)) \cdot g = \\ &= \chi^{-1}(\tilde{*}) \cdot (h^w(c)\, g) = \tilde{*} \cdot (g^{-1}\, h^w(c)\, g) \end{aligned}$$

d'où

$$h^{(w^\chi)}(c) = \mathrm{res}\,(\chi)^{-1}\, h^w(c)\, \mathrm{res}\,(\chi) \tag{11}$$

et h induit des applications

$$\bar{h}_1 : \mathcal{R}(C,\xi)/\mathcal{G}_1 \to \mathcal{R}(\Omega_C, G)_\xi \quad \text{et} \quad \bar{h} : \mathcal{R}(C,\xi)/\mathcal{G} \to \mathcal{R}(\Omega_C, G)_\xi/G.$$

5.7 *Injectivité de* $\bar{h}_1$ *:* Soient $w, \tilde{w} \in \mathcal{R}(C,\xi)$ telles que $h^w = h^{\tilde{w}}$. Soit $z \in E$. Choisissons $\rho \in \mathrm{Cont}_C(X)$ tel que $p(z) \in U_\rho$ et notons $\theta := \rho(p(z)) \in C^*_{p(z)}$. On définit

$$\chi(z) := \tilde{w}(\theta^{-1}, w(\theta, z)). \tag{12}$$

Nous allons montrer que l'égalité $h^w = h^{\tilde{w}}$entraîne que $\chi(z)$ ne dépend pas du choix de ρ. Soit $\bar{\rho}$ une autre C-contraction, donnant $\bar{\theta}$ et $\bar{\chi}(z)$. Rappelons que la fibre $p^{-1}(*)$ est identifiée à G par $g \mapsto \tilde{*} \cdot g$. Via cette identification, G agit à gauche sur $p^{-1}(*)$ et, si $c \in \Omega_C$ et $y \in p^{-1}(*)$, on a $w(c,y) = h^w(c) \cdot y$. Avec ces conventions, on a

$$\begin{aligned} \bar{\chi}(z) &= \tilde{w}(\bar{\theta}^{-1}, w(\bar{\theta}, z)) = \tilde{w}(\bar{\theta}^{-1}, w(\bar{\theta}\theta^{-1}\theta, z)) = \\ &= \tilde{w}(\bar{\theta}^{-1}, w(\bar{\theta}\theta^{-1}, w(\theta, z))) = \tilde{w}(\bar{\theta}^{-1}, h^w(\bar{\theta}\theta^{-1}) \cdot w(\theta, z)) = \\ &= \tilde{w}(\theta^{-1}\theta\bar{\theta}^{-1}, h^w(\bar{\theta}\theta^{-1}) \cdot w(\theta, z)) = \\ &= \tilde{w}(\theta^{-1}, \underbrace{h^{\tilde{w}}(\theta\bar{\theta}^{-1}) h^w(\bar{\theta}\theta^{-1})}_{=1} \cdot w(\theta, z)) = \tilde{w}(\theta^{-1}, w(\theta, z)) = \chi(z). \end{aligned}$$

On a ainsi défini une application $\chi : E \to E$ qui, par la formule (12) est continue. Son inverse s'obtient en échangeant w et $\tilde{w}$. Les formules $\chi(z \cdot g) =$

$\chi(z)\cdot g$, pour $g\in G$ et $p(\chi(z))=p(z)$ sont banales. De plus, on a $\chi(\tilde{*})=\tilde{*}$, d'où $\chi\in\mathcal{G}_1$.

Voyons maintenant que $\tilde{w}^\chi=w$. Soit $z\in E$ et $c\in C_{p(z)}$. Observons que, dans la la formule (12), on n'utilise la C-contraction ρ que pour garantir la continuité. La définition de $\chi(z)$ ne nécessite que l'élément $\theta\in C^*_{p(z)}$ et $\chi(z)$ ne dépend pas de θ. En choisissant θ pour la définition de $\chi(z)$ et θc^{-1} pour celle de $\chi^{-1}(\tilde{w}(c,\chi(z)))$, on aura

$$\begin{aligned}\tilde{w}^\chi(c,z) &= \chi^{-1}(\tilde{w}(c,\chi(z)))=\chi^{-1}(\tilde{w}(c,\tilde{w}(\theta^{-1},w(\theta,z)))=\\ &= \chi^{-1}(\tilde{w}(c\theta^{-1},w(\theta,z))=w(c\theta^{-1},\tilde{w}(\theta c^{-1},\tilde{w}(c\theta^{-1},w(\theta,z))=\\ &= w(c\theta^{-1},w(\theta,z))=w(c,z).\end{aligned}$$

5.8 *L'application $\delta:\mathcal{R}(C,\xi)\times_{\mathcal{R}(\Omega_C,G)_\xi}\mathcal{R}(C,\xi)\to\mathcal{G}$ est uniformément continue:* Soit $V\in\mathcal{V}_G$ et K un compact de X. Supposons d'abord que $K\subset U_\rho$ pour une C-contraction $\rho\in\mathrm{Cont}_C(X)$. Comme C est séparé, les sous-espaces L et L^{-1} de C définis par

$$L:=\{\rho(x)\mid x\in K\}\subset C^*\qquad\text{et}\qquad L^{-1}:=\{\rho(x)^{-1}\mid x\in K\}\subset C_*.$$

sont compacts. Soit $W\in\mathcal{V}_G$ tel que $W\cdot W\in V$. Soient $\tilde{w}_1,\tilde{w}_2\in\mathcal{R}(C,\xi)$. Il suit de 5.7 que δ satisfait, pour $z\in p^{-1}(K)$, à l'équation

$$\delta(\tilde{w}_1,\tilde{w}_2)(z)=\tilde{w}_1(\theta^{-1},\tilde{w}_2(\theta,z)) \tag{13}$$

avec $\theta:=\rho(p(z))\in C^*_{p(z)}$. Il s'en suit que si $(\tilde{w}_1,w_1)\in\mathcal{O}^{\mathcal{R}}(L^{-1},W)$ et $(\tilde{w}_2,w_2)\in\mathcal{O}^{\mathcal{R}}(L,W)$, alors $(\delta(\tilde{w}_1,\tilde{w}_2),\delta(w_1,w_2))\in\mathcal{O}^{\mathcal{G}_1}(K,V)$.

Dans le cas général, on utilise que $K:=\bigcup_{\rho\in P}K_\rho$ où P est un ensemble fini dans $\mathrm{Cont}_C(X)$ et K_ρ est un compact de U_ρ. On définit, comme cidessus, $L_\rho:=\rho(K_\rho)$ et $L_\rho^{-1}:=\rho(K_\rho)^{-1}$ et on aura

$$\left.\begin{array}{l}(\tilde{w}_1,w_1)\in\bigcap\limits_{\rho\in P}\mathcal{O}^{\mathcal{R}}(L_\rho^{-1},W)\\ \text{et}\\ (\tilde{w}_2,w_2)\in\bigcap\limits_{\rho\in P}\mathcal{O}^{\mathcal{R}}(L_\rho,W)\end{array}\right\}\Rightarrow\ (\delta(\tilde{w}_1,\tilde{w}_2),\delta(w_1,w_2))\in\mathcal{O}^{\mathcal{G}_1}(K,V).$$

5.9 *Sections locales :* Soit T un ouvert de $\mathrm{Map}^\bullet(X,BG)_\xi$ tel que l'inclusion $T\subset\mathrm{Map}^\bullet(X,BG)_\xi$ soit contractile. Soit $S:=n^{-1}(T)$, où $n:\mathcal{R}(\Omega_C,G)_\xi\to\mathrm{Map}^\bullet(X,BG)_\xi$ est l'application définie en 5.3. Considérons l'application composée

$$N:S\times X\xrightarrow{n\times\mathrm{id}}T\times X\xrightarrow{\mathrm{ev}_X}BG \tag{14}$$

Comme X est localement compact, l'évaluation ev_X est continue et N est continue. Désignons par $\mathcal{E} : = N^*EG$, l'espace total du G-fibré principal sur $S \times X$ induit par N.

Observons que N est aussi la composition

$$N : S \times X \xrightarrow{\mathrm{id_S} \times \nu_C} S \times B\Omega_C \xrightarrow{\mathrm{ev}_\Omega} BG \tag{15}$$

de $\mathrm{id_S} \times \nu_C$ avec l'application d'évaluation (peut-être non-continue) ev_Ω. Comme le Ω_C-fibré induit sur X par ν_C est $\xi_C : C_* \xrightarrow{\beta} X$, on obtient, en utilisant (15), que l'espace $\mathcal{E}$ est le quotient de $S \times C_* \times G$ par la relation d'équivalence $(\phi, ub, g) \sim (\phi, u, \phi(b)g)$, où $(\phi, u, g) \in S \times C_* \times G$ et $b \in \Omega_C$. Considérons $\mathcal{E}$ comme un espace au dessus de X par l'application $(\phi, u, g) \mapsto \beta(u)$ et définissons l'application continue $v : C \times_X \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ par $v(c, (\phi, u, g)) : = (\phi, cu, g)$.

Comme l'application $S \to \mathrm{Map}^\bullet(X, BG)_\xi$ est homotope à une application constante, on montre, comme dans 4.8, qu'il existe un homéomorphisme G-equivariant $S \times E \xrightarrow{\approx} \mathcal{E}$ au dessus de $\mathrm{id}_{S\times X}$. Via cet homéomorphisme et en composant avec la projection $S \times E \to E$, l'application v donne une application continue $\hat{v} : C \times_X (S \times E) \to E$. A son tour, $\hat{v}$ détermine une application continue $w : S \to \mathrm{map}\,(C \times_X E, E)$. On vérifie facilement que l'image de w est dans $\mathcal{R}(C, \xi)$. La préservation des points base par les divers isomorphismes utilisés entraîne que w est une section locale de h au dessus de S.

Ayant établi les points 5.4 à 5.9, la démonstration du théorème B se termine comme expliqué dans 4.3. $\square$

Preuve du théorème C : Soient $w, \tilde{w} \in \mathcal{R}(C, \xi)$ et $g \in G$ tels que $h^w = g^{-1} h^{\tilde{w}} g$. Comme G est connexe par arc, il existe, par le lemme 3.2, un élément $\chi \in \mathcal{G}$ tel que $\chi(\tilde{*}) = \tilde{*} \cdot g$. L'équation (11) montre qu'alors $h^{w^\chi} = h^{\tilde{w}}$. Comme $\bar{h}_1$ est injective par 5.7, les représentations w^χ et $\tilde{w}$ sont dans la même classe modulo $\mathcal{G}_1$. Cela prouve l'injectivité de $\bar{h}$. Le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{R}(C, \xi)/\mathcal{G}_1 & \xrightarrow{\bar{h}_1} & \mathcal{R}(\Omega_C, G)_\xi \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{R}(C, \xi)/\mathcal{G} & \xrightarrow{\bar{h}} & \mathcal{R}(\Omega_C, G)_\xi/\mathrm{G} \end{array} \tag{16}$$

et le fait que $\bar{h}_1$ soit un homéomorphisme (vu le théorème B) font que $\bar{h}$ est un homéomorphisme.

Preuve du théorème D :

Lemme 5.10 *L'application n est couverte par un morphisme de $\mathcal{G}_1$-fibrés principaux*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{R}(C,\xi) & \xrightarrow{\hat{n}} & \mathrm{Map}^{\bullet}_{G}(E,EG) \\ \downarrow h & & \downarrow \\ \mathcal{R}(\Omega_C,G)_{\xi} & \xrightarrow{n} & \mathrm{Map}^{\bullet}(X,BG)_{\xi}. \end{array} \tag{17}$$

Le théorème D découlera du lemme 5.10 puisque, i l'inclusion $\{*\} \subset X$ est une cofibration, l'espace $\mathrm{Map}^{\bullet}_{G}(E,EG)$ est faiblement contractile (Proposition 4.10). En fait, l'application n est classifiante pour le $\mathcal{G}_1$-fibré principal $h : \mathcal{R}(C,\xi) \to \mathcal{R}(\Omega_C,G)_{\xi}$.

Preuve du lemme 5.10 : Le procédé pour fixer l'application ν_c vu en 5.3 produit en fait un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} C_* & \xrightarrow{\hat{\nu}_C} & E\Omega_C \\ \downarrow\beta & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{\nu_C} & B\Omega_C \end{array}$$

où $\hat{\nu}_C \in \mathrm{map}^{\bullet}_{G}(C_*,E\Omega_C)$. L'application $\hat{n} \in \mathrm{map}_{\mathcal{G}}(\mathcal{R}(C,\xi),\mathrm{Map}^{\bullet}_{G}(E,EG))$ est définie par $\hat{n}(w) :\ = Eh^w \circ \hat{\nu}_C$. Le diagramme 17 est bien commutatif. Observons que $\hat{n}$ est obtenue par le procédé de [Hu, ch. 4, prop. 12.1] à l'aide de la partition de l'unité $\hat{\mu}_\rho$ construite en 5.3 et des trivialisations ψ^w_ρ du lemme 2.1.

6 Exemples et applications

6.1 Le groupoïde associé à un fibré principal

Soit $\xi : E \xrightarrow{p} X$ un G-fibré principal. Soit $EE :\ = EE(\xi) :\ = (E \times E)/G$, le quotient de $E \times E$ par l'action diagonale de G. Dénotons par $\langle a,b\rangle$ l'orbite de (a,b) dans EE. On fait de EE un X-groupoïde en posant $\alpha(\langle a_2,a_1\rangle) :\ = p(a_1)$, $\beta(\langle a_2,a_1\rangle) :\ = p(a_2)$, $i_x :\ = \langle a,a\rangle$ avec $p(a) = x$; la composition vient de la formule $\langle a_3,a_2\rangle\langle a_2,a_1\rangle = \langle a_3,a_1\rangle$, ou, plus généralement,

$$\langle a_3,a_2'\rangle\langle a_2,a_1\rangle = \langle a_3 \cdot \gamma(a_2',a_2),a_1\rangle$$

où γ est l'application définie en (5). L'inverse est évidemment donné par $\langle a,b\rangle^{-1} = \langle b,a\rangle$. Le X-groupoïde ainsi obtenu s'appelle le *X-groupoïde associé à ξ* [Ma, p. 5].

Le groupe structural G de ξ est isomorphe à Ω_{EE} par $g \mapsto \langle \tilde{*} \cdot g, \tilde{*} \rangle$. Observons que EE est localement trivial numérisable si ξ est numérisable. En effet, $x \mapsto \langle \tilde{*}, \sigma(x) \rangle$ est une EE-contraction lorsque σ est une section locale de ξ.

Le X-groupoïde EE a une représentation tautologique v sur ξ déterminée par l'application continue $v : (E \times E) \times E \to E$ définie par $v((a,b),z) : = a \cdot \gamma(b,z)$; son holonomie est id_G. Pour un X-groupoïde C, désignons par $\mathrm{Mor}\,(C, EE)$ l'ensemble des morphismes continus de C dans EE (au dessus de id_X).

Proposition 6.1 *La composition avec la représentation tautologique donne une bijection de* $\mathrm{Mor}\,(C, EE(\xi))$ *sur* $\mathcal{R}(C, \xi)$.

PREUVE: La bijection inverse $w \mapsto \Psi_w$ est donnée par $\Psi_w(c) : = \langle w(c,z), z \rangle$ $(z \in E_{\alpha(c)})$. La seule chose non-triviale à vérifier est que Ψ_w est continu.

Soit $c \in C$ et $T \ni \Psi_w(c)$ un ouvert de EE. Soit $z \in E_{\alpha(c)}$. Il existe

- V un ouvert de E contenant $w(c,z)$,
- U un ouvert de X contenant $x : = \alpha(c) = p(z)$ et $\sigma : U \to E$ une section continue locale de ξ avec $\sigma(x) = z$ et
- $W \in \mathcal{V}_G$

tels que $\pi(V \times (\sigma(U) \cdot W)) \subset T$, où π désigne la projection de $E \times E$ sur EE. Par continuité de w, il existe A un ouvert de C contenant c et R un ouvert de E contenant z tels que $w(A \times R) \subset V$. Soient U' un ouvert de X et $W' \in \mathcal{V}_G$ tels que $x \in U' \subset U$, $W' \subset W$ et $\sigma(u') \cdot W' \subset R$. Soit $A' : = A \cap \alpha^{-1}(U')$. On a $c \in A'$ et $\Psi_w(A') \subset \pi(V \times (\sigma(U') \cdot W') \subset T$, ce qui prouve la continuité de Ψ_w en c. $\square$

6.2 Prégroupoïdes

Comme nous le verrons plus loin, une façon commode de définir un groupoïde topologique est de partir d'une catérorie topologique avec anti-involution (prégroupoïde). Soit X un espace topologique muni d'un point base $* \in X$. Un X-*prégroupoïde* est un espace topologique $\tilde{C}$ muni de deux applications continues $\alpha, \beta : \tilde{C} \to X$, d'une *composition* partiellement définie et d'une application $x \mapsto i_x$ de X dans $\tilde{C}$ qui satisfont aux propriétés a), b) et c) de la définition du § 1 d'un X-groupoïde . En revanche, la condition d) consiste seulement en d') $\tilde{C}$ est muni d'une anti-involution continue $c \mapsto \bar{c}$, envoyant $\tilde{C}_x^y$ sur $\tilde{C}_y^x$.

Une *représentation* d'un X-prégroupoïde $\tilde{C}$ sur un G-espace ξ est une application continue $w : \tilde{C} \times_X E \to E$ (où $\tilde{C}$ est vu au dessus de X via α) telle que, pour tout $c, d \in \tilde{C}$, $z \in E$ et $g \in G$, on ait

1. $p(w(c,z)) = \beta(c)$.
2. $w(c\,d, z) = w(c, w(d,z))$.
3. $w(\bar{c}, (w(c,z)) = z$.
4. $w(c, z \cdot g) = w(c,z) \cdot g$.

Si X est séparé, un X-prégroupoïde détermine un X-groupoïde séparé, avec la propriété suivante :

Proposition 6.2 *Soit $\tilde{C}$ un X-prégroupoïde localement trivial numérisable avec X séparé. Alors, il esiste un unique X-groupoïde séparé localement trivial numérisable C avec un morphisme continu surjectif $\tilde{C} \to C$ satisfaisant à la condition suivante : toute représentation de $\tilde{C}$ sur un G-fibré principal ξ au dessus de X, avec G séparé, est induite par une unique représentation de C.*

La démonstration de 6.2 utilise le lemme suivant :

Lemme 6.3 *Soit C un X-groupoïde localement trivial. Alors, C est séparé si et seulement si X et Ω_C le sont.*

PREUVE: Supposons que X et Ω_C soient séparés (l'autre sens est banal). Comme C est localement trivial, $\beta : C_* \to X$ est un Ω_C-fibré principal, par le théorme A. L'espace C_* est donc séparé. Il en est évidemment de même pour C^*. On utilise alors que $C = C_* \times_{\Omega_C} C^*$ pour établir que C est séparé. □

PREUVE DE LA PROPOSITION 6.2 : Soit $\hat{C}$ l'ensemble quotient de $\tilde{C}$ par la relation d'équivalence engendrée par $c\bar{u}ud \sim cd$, pour tout $c, d, u \in \tilde{C}$ avec $\beta(d) = \alpha(u) = \alpha(c)$. Il est clair que la structure (algébrique) de X-prégroupoïde descend sur $\hat{C}$ et que $\hat{C}$ est un X-groupoïde (algébrique), avec $[c]^{-1} = [\bar{c}]$. La topologie sur $\hat{C}$ sera obtenue de la manière suivante : considérons l'ensemble $\mathcal{K}$ des paires (K, T), où

- K est un sous-groupe normal de $\Omega_{\hat{C}}$. Le quotient de $\hat{C}$ par le sous-groupoïde normal $N_K := \{uKu^{-1} \mid u \in \hat{C}_*\}$ est alors un X-groupoïde.

– T est une topologie sur $\hat{C}/N_K$ qui fait de $\hat{C}/N_K$ un groupoïde topologique et telle que la projection $\tilde{C} \to \hat{C}/N_K$ soit continue.

Les projections $\hat{C} \to \hat{C}/N_K$ ($(K,T) \in \mathcal{K}$) forment un système projectif de X-groupoïdes au dessous de $\hat{C}$ (non-vide, car on peut prendre pour T la topologie grossière). On munit $\hat{C}$ de la topologie de limite projective pour ce système de projections. On vérifie que $\hat{C}$ est alors un X-groupoïde, que $\tilde{C} \to \hat{C}$ est continue et que tout morphisme continu de $\tilde{C}$ dans un X-groupoïde se factorise de façon unique par l'un des quotient $\hat{C}/N_K$. Comme $\tilde{C}$ est localement trivial numérisable, $\hat{C}$ l'est aussi. Nous ignorons si la topologie ainsi obtenue sur $\hat{C}$ est la topologie quotient de celle de $\tilde{C}$.

Comme X est séparé, l'adhérence de $\{i_*\}$ est contenue dans Ω_C où elle constitue un sous-groupe fermé. En quotientant $\hat{C}$ par le sous-groupoïde normal engendré par $\overline{\{i_*\}}$, on obtient, avec la topologie quotient, un X-groupoïde C [Ma, Th. 2.15, p. 38]. Comme $\overline{\{i_*\}}$ est fermé dans Ω_C, le groupe Ω_C est séparé. On en déduit que C est séparé par le lemme 6.3. Il est aussi clair que que tout morphisme continu de $\tilde{C}$ dans un X-groupoïde séparé factorise de façon unique par $\tilde{C} \to C$.

Soit $\tilde{w} : \tilde{C} \times E \to E$ une représentation de $\tilde{C}$ sur un G-fibré principal ξ. Comme dans la proposition 6.1, $\tilde{w}$ détermine un morphisme continu $\Psi_{\tilde{w}}$ de $\tilde{C}$ dans $EE :\ = EE(\xi)$ tel que $\Psi_{\tilde{w}}(\bar{c}) = \Psi_{\tilde{w}}(c)^{-1}$. Puisque EE est localement trivial et que X et G sont séparés, l'espace EE est séparé par le lemme 6.3. Le morphisme $\Psi_{\tilde{w}}$ se factorise en un unique morphisme continu $\Psi_w : C \to EE$ correspondant, par la proposition 6.1, à $w \in \mathcal{R}(C,\xi)$. □

6.3 Groupoïdes de chemins

6.4 *Chemins de Moore :* Soit X un espace topologique séparé. Soit $\tilde{C} = \tilde{\mathbf{Ch}}(X)$ la catégorie des *chemins de Moore* dans X. Un chemin de Moore est un couple (a,c) où $a \in \mathbf{R}_{\geq 0}$ et $c : [0,a] \longrightarrow X$ est une application continue.

La topologie sur $\tilde{C}$ est induite par l'application $(a,c) \mapsto c^\sharp$ de $\tilde{C}$ dans $\mathrm{map}([0,1],X)$, où $c^\sharp(t) = c(at)$, avec la CO-topologie sur $\mathrm{map}([0,1],X)$). (Observons que $\tilde{C}$ n'est pas séparé puisque tous les chemins constants ont même image dans $\mathrm{map}([0,1],X)$). Les applications $\alpha,\beta : C \to X$ sont données par $\alpha(a,c) = c(a)$ et $\beta(a,c) = c(0)$. L'espace C_x^y est donc l'ensemble des chemins allant de y à x (cette malencontreuse inversion est due à la convention usuelle de la règle de composition des chemins). La composition $(a,c) = (a_2,c_2)(a_1,c_1)$, lorsque $\beta(a_1,c_1) = \alpha(a_2,c_2)$ est définie par $a :\ = a_2 + a_1$ et

$$c(t) = \begin{cases} c_2(t) & \text{si } t \leq a_2 \\ c_1(t-a_2) & \text{si } t \geq a_2 \end{cases}$$

Cette composition est bien associative et l'unité i_x est donnée par le chemin constant $[0,0] \longrightarrow \{x\}$. La définition de l'involution est donnée par $\overline{(a,c)} := (a,\bar{c})$ où $\bar{c}(t) := c(a-t)$. On vérifie facilement que $\mathbf{Ch}(X)$ est un prégroupoïde. Il est localement trivial si et seulement si X est connexe par arc et semi-localement contractile.

Le groupoïde séparé associé à $\tilde{\mathbf{Ch}}(X)$ par la proposition 6.2 sera noté $\mathbf{Ch}(X)$ et appelé le *groupoïde des chemins de Moore dans* X.

6.5 *Le groupoïde fondamental:* Soit $\mathbf{Ch}_1(X) \subset \mathbf{Ch}(X)$ l'ensemble des classes de chemins (a,c) qui sont des lacets $(c(0) = c(a))$ et tels qu'il existe une homotopie $H : [0,a] \times [0,1] \to X$ telle que $H(0,s) = H(a,s) = c(0)$, $H(t,0) = c(t)$ et $H(t,1) = c(0)$. Les éléments de $\mathbf{Ch}_1(X)$ forment un sous-X-groupoïde normal totalement intransitif de $\mathbf{Ch}(X)$. L'espace quotient $\pi(X)$ hérite donc d'une structure de X-groupoïde et la projection $\mathbf{Ch}(X) \to \pi(X)$ est un morphisme continu [Ma, Th. 2.15, p. 38].

Il est clair qu'algébriquement, $\pi(X)$ s'identifie au groupoïde fondamental de X et $\Omega_{\pi(X)}$ au groupe fondamental $\pi_1(X,*)$ [Sp, Ch. 1, § 7]. Cependant, $\pi(X)$ est ici muni d'une topologie. Il est localement trivial si X est connexe par arc et semi-localement simplement connexe [Sp]. Si, de plus, X est localement connexe par arc, on peut montrer que $\Omega_{\pi(X)} = \pi_1(X,*)$ est discret, que le $\Omega_{\pi(X)}$-fibré principal du théorème A est le revêtement universel de X et que la topologie sur $\pi(X)$ s'identifie à celle de [BD]. Nous n'utiliserons pas ces résultats. La proposition suivante est intéressante pour les G-fibrés principaux avec G un groupe de Lie.

Proposition 6.6 *Soit G un groupe topologique admettant un voisinage de son élément neutre qui ne contienne aucun sous-groupe non-trivial. Alors, toute représentation de $\mathbf{Ch}(X)$ sur un G-espace principal ξ au dessus de X se factorise par une représentation du groupoïde fondamental $\pi(X)$ de X.*

Preuve: Soit $w \in \mathcal{R}(\mathbf{Ch}(X),\xi)$. On regarde w comme un morphisme continu $w : \mathbf{Ch}(X) \to EE(\xi)$ par le lemme 6.1. Il s'agit de montrer que $\mathbf{Ch}_1(X) \subset \ker w$.

Pour $x \in X$, désignons par Vois_x l'ensemle des voisinages ouverts de x. Observons que l'ensemble $\{\tilde{\mathbf{Ch}}(W)^x_x \mid W \in \mathrm{Vois}_x\}$ constitue un système fondamental de voisinages ouverts de i_x dans le monoïde $\tilde{\mathbf{Ch}}(X)^x_x$. En choisissant $\tilde{x} \in E_x$, on obtient une holonomie $h^w_x : \tilde{\mathbf{Ch}}(X)^x_x \to G$ en x qui est un morphisme continu de monoïdes avec anti-involution. Comme il existe un voisinage de l'élément neutre dans G qui ne contient aucun sous-groupe non-trivial et que chaque élément de $\{\tilde{\mathbf{Ch}}(W)^x_x \mid W \in \mathrm{Vois}_x\}$ est un sous-monoïde avec anti-involution de $\tilde{\mathbf{Ch}}(X)^x_x$, on en déduit qu'il existe $U_x \in$

Vois_x tel que $\tilde{\mathbf{Ch}}(U_x)^x_x \subset \ker h^w_x$. Soit $\mathbf{Ch}_{\mathrm{loc}}(X)$ le sous-groupoïde normal de $\mathbf{Ch}(X)$ engendré par l'image des $\tilde{\mathbf{Ch}}(U_x)^x_x$ pour tous les $x \in X$. Par ce qui précède, on a $\mathbf{Ch}_{\mathrm{loc}}(X) \subset \ker w$.

Soit $\gamma \in \mathbf{Ch}_1(X)^x_x$ représenté par un lacet $c : [0,a] \to X$ en x. Par définition de $\mathbf{Ch}_1(X)$, il existe une homotopie de lacets $H : [0,a]\times[0,1] \to X$ entre c et le lacet constant. Par l'argument habituel du nombre de Lebesgue, on peut décomposer $[0,a] \times [0,1]$ en petits rectangles R_i $(1 = 1, \dots, N)$ tels que $H(R_i) \subset U_{x(i)}$. Il s'en suit facilement que $\gamma \in \mathbf{Ch}_{\mathrm{loc}}(X) \subset \ker w$, ce qui prouve que $\mathbf{Ch}_1(X) \subset \ker w$. □

6.4 Chemins lisses par morceaux – Connexions

Soit X une variété différentiable C^1 paracompacte. On dénotera par $\tilde{\mathbf{D}} = \tilde{\mathbf{D}}(X)$ l'espace des chemins C^1 par morceau sur X. En tant qu'ensemble, $\tilde{\mathbf{D}}$ est le sous-prégroupoïde de $\tilde{\mathbf{Ch}}X$ formé des chemins qui sont des compositions de chemins C^1. La topologie, plus fine, s'obtient via l'application $(a,c) \mapsto c^\sharp$ en topologisant l'ensemble $\mathbf{M}^\sharp$ des applications C^1 par morceau de $[0,1]$ dans X. Pour cela, soit

$$P = \{t_0 = 0 < t_1 < \cdots < t_k = 1\}$$

un partage de $[0,1]$. Soit

$$\mathbf{M}^\sharp_P :\ = \{c \in \mathbf{M}^\sharp \mid c_{\mid [t_i,t_{i+1}]} \in C^1([t_i,t_{i+1}],X)\}$$

où $C^1([a,b],X)$ est l'espace des applications C^1 de $[a,b]$ dans X muni de la topologie C^1. On a une application $\mathbf{M}^\sharp_P \to C^1([0,1],X)^k$ donné par

$$c \mapsto (c^\sharp_{\mid [t_0,t_1]}, c^\sharp_{\mid [t_1,t_2]}, \dots, c^\sharp_{\mid [t_{k-1},t_k]})$$

en étendant la définition de $c^\sharp$ à une chemin $c : [a,b] \longrightarrow X$ par $c^\sharp(t) :\ = c(a+(b-a)t)$. L'application $(a,c) \mapsto c^\sharp$ induit une topologie (non-séparée) sur $\mathbf{M}^\sharp_P$. Si P' est un partage plus fin que P (i.e. $P \subset P'$), on vérifie que l'inclusion naturelle $\mathbf{M}^\sharp_P \subset \mathbf{M}^\sharp_{P'}$ est continue. La topologie sur $\mathbf{M}$ est, par définition, celle de limite inductive des $\mathbf{M}^\sharp_P$ pour tous les partages de $[0,1]$.

Le groupoïde séparé associé à $\tilde{\mathbf{D}}(X)$ sera noté $\mathbf{D}(X)$ et appelé le *groupoïde des chemins lisses par morceaux dans* X. Si X est connexe, alors $\mathbf{D}(X)$ est localement trivial numérisable. On a un morphisme évident de groupoïdes topologiques de $\mathbf{D}(X)$ dans $\mathbf{Ch}(X)$.

Proposition 6.7 *Soit G un groupe de Lie et $\xi : E \xrightarrow{p} X$ un G-fibré principal différentiable C^1 au dessus d'une variété X. Soit A une connexion sur ξ [KN, Ch. II]. Alors, le transport parallèle associé à A détermine une représentation de $\mathbf{D}(X)$ sur ξ.*

PREUVE: Par la proposition 6.2, il suffit de voir qu'une connexion A définit une représentation $w_A : \tilde{\mathbf{D}}(X) \times E \to E$ de $\tilde{\mathbf{D}}(X)$, le point $w_A(c,z)$ étant le résultat du transport A-parallèle de z au dessus de c. Les conditions 1. à 4. de la définition d'une représentation découlent immédiatement des propriétés classiques du transport parallèle [KN, Ch. II, prop. 3.2. et 3.3]. La seule chose à vérifier est que w_A est continue en tout $(c,z) \in \tilde{\mathbf{D}}(X) \times E$. Vu la topologie sur $\tilde{\mathbf{D}}(X)$, il est suffisant de la faire pour $c :\ \in C^1([0,1],U)$ où U est un ouvert de X trivialisant pour ξ et domaine d'une carte. On peut donc supposer que $E = U \times G$ ou U est un ouvert d'un espace euclidien et $z = (c(0),e)$. Le relevé horizontal $\tilde{c}$ de c partant de z s'écrit alors $\tilde{c}(t) = (c(t),g(t))$ où $g \in C^1([0,1],G)$ avec $g(0) = e$.

Considérons un voisinage ouvert Q dans E de $w_A(c,z) = \tilde{c}(1) = (c(1),g(1))$. Il s'agit de tourver un voisinage T de (c,z) dans $C^1([0,1],U) \times E$ tel que $w_A(T) \subset Q$. On peut supposer que Q est de la forme $S \times (g(1) \cdot V)$ où $V \in \mathcal{V}_G$ où S est un ouvert de U. Soit $\varepsilon > 0$ tel que la boule ouverte $B(0,\varepsilon)$ de centre 0 et de rayon ε dans $T_eG = \mathrm{Lie}\,(G)$, muni de la métrique de Killing, est envoyée difféomorphiquement sur $W \in \mathcal{V}_G$ avec $W \cdot W \subset V$.

Par [KN, Ch. II, prop. 1.1], la connexion A est donnée par une 1-forme $\gamma_A \in \Omega^1(E, \mathrm{Lie}\,(G))$ et l'on a $\gamma_A(\dot{\tilde{c}}(t)) = 0$ pour tout t puisque $\tilde{c}$ est horizontal. Par continuité de γ_A, il existe $\delta > 0$ tel que $B(c(1),\delta) \subset S$ et

$$\sup_{t\in[0,1]} \{\|c_1(t) - c(t)\|, \|\dot{c}_1(t) - \dot{c}(t)\|\} < \delta \quad \Rightarrow \quad \|\gamma_A(\dot{\bar{c}}_1(t))\| < \varepsilon \qquad (18)$$

où $\bar{c}_1(t) :\ = (c_1(t),g(t))$. Soit $h \in C^1([0,1],G)$ la courbe telle que $\hat{c}_1(t) \cdot h(t)$ soit horizontal. Par [KN, preuve du lemme p. 69], la courbe h satisfait $h(0) = e$ et $\dot{h}(t) = T_eR_{h(t)}(\gamma_A(\dot{\bar{c}}_1(t)))$, où R_a est la translation à droite $g \mapsto ag$. On déduit de (18) que $\ell(h)$ est $< \varepsilon$, où $\ell(h)$ est la longueur de h pour la métrique riemannienne sur G obtenue par translations à droite de la métrique de Killing. L'exponentielle des rayons donnant des géodésiques minimisantes pour cette métrique riemannienne, on en déduit que $h(1) \in W$. L'ouvert $T :\ = T_\delta \times (B(c(0),\delta) \times W)$ de $C^1([0,1],U) \times G$, où T_δ est l'ouvert de $C^1([0,1],U)$ apparaissant dans (18), contient (c,z) et satisfait $w_A(T) \subset Q$. $\square$

Le langage des représentations de groupoïdes permet de bien poser le problème suivant : quand est-ce que le transport parallèle associé à une connexion sur un fibré différentiable s'étend aux chemins C^0 ? La réponse est la suivante :

Proposition 6.8 *Soient G, ξ et A comme dans la proposition 6.7. Alors, la représentation $w_A \in \mathcal{R}(\mathbf{D}(X), \xi)$ induite par le transport parallèle de A s'étend en un représentation de $\mathbf{Ch}(X)$ sur ξ si et seulement si A est une connexion plate.*

PREUVE: Par définition, A est plate si et seulement si et seulement si E est feuilletée en variétés horizontales [KN, II.9]. Il est clair que dans ce cas le transport parallèle de A s'étend en un représentation $\bar{w}_A \in \mathcal{R}(\mathbf{Ch}(X), \xi)$. Réciproquement, si une telle extension existe, comme le groupe de Lie G n'a pas de petits sous-groupes, la proposition 6.6 assure que $\bar{w}_A$ se factorise par le groupoïde fondamental $\pi(X)$. Le théorème de réduction classique [KN, II, th. 7.1] montre qu'alors le fibré $\xi_{|U} : p^{-1}(U) \to U$, au dessus de tout ouvert contractile U de X, admet une réduction de son groupe structural au groupe trivial et que A restreinte à $p^{-1}(U)$ est plate. □

6.5 Théorie de jauge sur graphes

Rappelons qu'un *graphe* (non-orienté) Γ consiste en une paire d'ensembles $(S(\Gamma), A(\Gamma))$ (sommets et arêtes) avec deux applications $\alpha, \beta : A(\Gamma) \to S(\Gamma)$ et une involution $a \mapsto \bar{a}$ sur A telle que $\alpha(\bar{a}) = \beta(a)$ et $\beta(\bar{a}) = \alpha(a)$. Par exemple, pour $n \in \mathbf{N}$, le graphe $[n]$ se définit par $S([n]) : = \{0, 1, \ldots, n\}$, $A([n]) : = \{(i,j) \mid |i-j| = 1\}$, $\alpha(i,j) : = j$, $\beta(i,j) : = i$ et $\overline{(i,j)} : = (j,i)$.

Un *chemin* (de longueur n) dans Γ est un morphisme de graphes de $[n]$ dans Γ. L'ensemble des chemins dans Γ forment un $S(\Gamma)$-prégroupoïde $\widetilde{C}_\Gamma$, muni de la topologie discrète. Les applications source et but, la composition et l'anti-involution sont définies comme pour les chemins de Moore dans un espace topologique (voir §6.3). Observons que $A(\Gamma)$ s'identifie naturellement au sous-ensemble de $\widetilde{C}_\Gamma$ formé des chemins de longueur 1. Le $S(\Gamma)$-groupoïde associé par la proposition 6.2 sera noté $\mathbf{C}(\Gamma)$. Il est également discret et s'identifie au groupoïde fondamental de la réalisation géométrique $|\Gamma|$ de Γ. De même, $\Omega_{\mathbf{C}(\Gamma)}$ s'identifie au groupe fondamental $\pi_1(|\Gamma|, *)$. Nous supposerons que $|\Gamma|$ est connexe.

Ce qui s'appelle en anglais un "G-valued lattice gauge field" sur Γ correspond à un G-fibré ξ sur $S(\Gamma)$ muni d'une représentation $w \in \mathcal{R}(\mathbf{C}(\Gamma), \xi)$. Comme $S(\Gamma)$ est discret, le fibré ξ est trivial. Une trivialisation peut en être obtenue à à l'aide de w en choisissant un arbre maximal T dans Γ. En effet, T donne une $\mathbf{C}(\Gamma)$-contraction sur tout $S(\Gamma)$. En fixant une trivialisation

$E(\xi) = S(\Gamma) \times G$ de ξ, la représentation w est déterminée par la donnée d'une application $w_1 : A(\Gamma) \to G$ telle que $w_1(\bar{a}) = w_1(a)^{-1}$. La formule reliant w à w_1 est la suivante :

$$w(a, (\alpha(a), g)) = (\beta(a), w_1(a)\, g) \ , \ a \in A(\Gamma). \tag{19}$$

Dans la littérature sur le sujet, l'application w_1 est prise comme définition d'un "G-valued lattice gauge field" ([Cr, Ch. 7], [PS, § 3]).

Si Γ est fini, le groupe $\pi_1(|\Gamma|, *)$ est libre de rang $1 - \chi(|\Gamma|)$, où $\chi(|\Gamma|)$ est la caractéristique d'Euler de $|\Gamma|$. Le théorèmes B et C donnent ainsi des homéomorphismes

$$\mathcal{R}(\mathbf{C}(\Gamma), \xi)/\mathcal{G}_1 \approx \mathcal{R}(\pi_1(|\Gamma|, *), G) \approx G^{1-\chi(|\Gamma|)}. \tag{20}$$

et

$$\mathcal{R}(\mathbf{C}(\Gamma), \xi)/\mathcal{G} \approx G^{1-\chi(|\Gamma|)}/\text{conjugaison}. \tag{21}$$

Sous certaines hypothèses, la donnée de (ξ, w) détermine un G-fibré principal ξ_w sur $|\Gamma|$ qui n'est pas trivial (voir, par exemple, [PS]). Par (21), on obtient une partition de $G^{1-\chi(|\Gamma|)}/\text{conjugaison}$ en fonction des classes d'isomorphisme de ξ_w qu'il serait intéressant d'étudier.

6.6 Fibrés équivariants

Soit Γ un groupe topologique agissant à gauche sur X. Le graphe de l'action

$$C : = \{(y, \gamma, x) \in X \times \Gamma \times X \mid y = \gamma x\}$$

est un X-groupoïde par les données suivantes : $\alpha(y, \gamma, x) : = x$, $\beta(y, \gamma, x) : = y$, $i_x : = (x, e, x)$, $(z, \gamma_2, y)(y, \gamma_1, x) : = (z, \gamma_2\gamma_1, x)$ et $(y, \gamma, x)^{-1} : = (x, \gamma^{-1}, y)$. Le groupe Ω_C est banalement isomorphe au groupe d'isotropie $\Gamma^{\{*\}}$ de $*$. Le X-groupoïde C est localement trivial si l'action de Γ sur X est transitive et si l'application $q : \Gamma \to X$ donnée par $\gamma \mapsto \gamma *$ admet des sections locales continues. Cette application sera alors un $\Gamma^{\{*\}}$ (le fibré ξ_C du théorème A). On sait que cette situation se produit si, par exemple, X est le quotient Γ/Γ_0 d'un groupe de Lie Γ par un sous-groupe fermé Γ_0 [St, § 7.5].

Soit $\xi : E \xrightarrow{p} X$ un G-fibré principal sur X. Une représentation de C sur ξ est simplement une action à gauche de Γ sur E telle que la projection $p : E \to X$ soit équivariante. On parle de G-fibré principal Γ-équivariant ou d'action de Γ sur ξ. L'espace $\mathcal{R}(C, \xi)$ classe ces Γ-actions sur ξ à conjugaison par une transformation de jauge près. Par le théorème

B, $\mathcal{R}(C,\xi) \approx \mathcal{R}(\Gamma^{\{*\}}, G)_\xi$. Remarquons que $B \times_{\Gamma\{*\}} E\Gamma \approx B\Gamma^{\{*\}}$; dans le cas où G est abélien, on retrouve ainsi le théorème A de [LMS]. Les relations avec d'autres approches de fibrés équivariants, comme par exemple [BH], restent à étudier.

Voici quelques exemples :

6.9 $\Gamma = SO(3)$ *agissant sur* $X = S^2$ *et* $G = S^1$. On a $\Omega_C = S^1$ et le fibré principal ξ_C du théorème A est le fibré tangent unitaire à S^2, dont la classe d'Euler est 2. Par le théorème d'existence, un S^1-fibré principal sur S^2 admettra une $SO(3)$-action si et seulement si sa classe d'Euler est paire. Dans ce cas, l'espace $\mathcal{R}(S^1, S^1)$ étant discret (homéomorphe à $\mathbf{Z}$ par le degré), le théorème B implique qu'il y a exactement une classe d'action de $SO(3)$ sur ξ à conjugaison par une transformation de jauge près. Observons qu'il n'y a aucun choix possible pour l'action sur la fibre au dessus de $*$; cette action est déterminée par ξ.

6.10 $\Gamma = SU(2)$ *agissant sur* $X = S^2$ *et* $G = S^1$. Le fibré ξ_C du théorème A est alors le fibré de Hopf $S^3 \to S^2$. On en déduit que tout S^1-fibré principal sur S^2 admet une $SU(2)$-action unique à conjugaison par une transformation de jauge près.

6.11 $\Gamma = SU(2)$ *agissant sur* $X = S^2$ *et* $G = SO(3)$. Il y a deux $SO(3)$-fibrés principaux ξ_0 et ξ_1 sur S^2, ξ_0 étant le fibré trivial. Tout deux associés au fibré de Hopf, ils admettent des $SU(2)$-actions mais seul ξ_0 admet des $SO(3)$-actions. Un homomorphisme continu de S^1 dans $SO(3)$ est différentiable, donc un élément de $\mathcal{R}(S^1, SO(3))$ est un sous-groupe à un paramètre dont l'image est un tore maximal de $SO(3)$. On en déduit que si l'on identifie l'algèbre de Lie $so(3)$ à $\mathbf{R}^3$ (quaternions purs), l'espace $\mathcal{R}(S^1, SO(3))$ est la réunion des sphères de rayons entiers $n = 0, 1, 2, \ldots$. Donc, $\mathcal{R}(C, \xi_0)/\mathcal{G}_1$ est homéomorphe à la réunion des 2-sphères de rayons $2n$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$) et $\mathcal{R}(C, \xi_1)/\mathcal{G}_1$ à celles de rayon $2n+1$. Quant à $\mathcal{R}(C, \xi_i)/\mathcal{G}$, ils sont tout deux discrets dénombrables.

Références

[BD] Brown R. & Danesh-Naruie G. The fundamental groupoid as a topological groupoid. *Proc. Edinburgh Math. Soc.* bf 19 (1975) 237–244.

[Bo] Bourbaki N. Élements de mathématique. Livre III : Topologie générale, 3e édition *Hermann (1960–61).*

[BH] Brandt D. & Hausmann J-Cl. Théorie de jauge et symétries des fibrés. *Ann. Inst. Fourier* **43** (1993) 509–537.

[Co] Connes A. Noncommutative geometry. *Academic Press Inc. 1994.*

[Cr] Creutz M. Quarks, gluons and lattices. *Cambridge University Press 1983.*

[Do] Dold A. Partitions of unity in the theory of fibrations. *Annals of Math.* bf 78 (1963) 223–255.

[DK] Donaldson S. & Kronheimer P. The geometry of four-manifolds. *Calenderon Press 1991.*

[DDK] Dror E., Dwyer W. & Kan D. Automorphisms of fibrations. *Proceedings of the AMS* bf 80 (1980) 491–494.

[Du] Dugundji J. Topology. *Allyn & Bacon Inc. 1966.*

[Eh] Ehresmann Ch. Catégories topologiques et catégories différentiables. *Colloque de géométrie différentielle globale, Bruxelles 1958, Gauthier Villars* (1959) 137–150

[Hu] Husemoller D. Fibre bundles *Springer-Verlag, 2e ed.* (1975)

[KN] Kobayashi S. & Nomizu K. Foundations of differential geometry. *J. Wiley & sons* (1963).

[LMS] Lashof R. & May, J. P. & Segal, G. B. Equivariant bundles with abelian structural group. *Proceedings of the Northwestern Homotopy Theory Conference (Evanston, Ill., 1982), Contemp. Math., 19, Amer. Math. Soc.* (1983) 167–176.

[Ma] Mackenzie K. Lie groupoids and Lie algebroids in differential geometry. *Cambridge University Press 1987.*

[Mi1] Milnor J. On spaces having the homotopy type of a CW-complex. *Trans. AMS* **90** (1959) 272–280

[Mi2] Milnor J. Construction of universal bundles II. *Annals of Math.* **63** (1956) 430–436

[Pa] Palmer T.W. Classes of nonabelian, noncompact, locally compact groups *Rocky Mountain J. of Math.* **8** (1978) 683–741

[PS] Philips A.V. & Stone D.A. The computation oc characteristic classes of lattice gauge fields. *Commun. Math. Phys.* **131** (1990) 255–282.

[Sp] Spanier E. Algebraic topology *McGraw Hill* (1966)

[St] Steenrod N. The topology of fibre bundles *Princeton Univ. Press* (1951)

Jean-Claude HAUSMANN
Mathématiques-Université
B.P. 240,
CH-1211 Genève 24, Suisse
hausmann@math.unige.ch