UNIVERSITE DE GENEVE
SECTION DE MATHEMATIQUES

FACULTE DES SCIENCES
Professeur Cl. WEBER

GROUPES DE SPHERES D'HOMOLOGIE ENTIERE

THESE

Présentée à la Faculté des Sciences
de l'Université de Genève pour obtenir le grade de
Docteur ès Sciences mention Mathématiques

par
Jean-Claude HAUSMANN
de
Genève

Thèse No 1657

Genève

Imprimerie de la Section de Physique

1 9 7 4

Introduction

Le but de ce travail est d'introduire quelques techniques nouvelles pour l'étude des sphères d'homologie entière, c'est-à-dire des variétés Σ de dimension n telles que $H_*(\Sigma) \cong H_*(S^n)$, où S^n désigne la sphère standard et H_* l'homologie singulière à coefficients entiers.

Lorsque l'homologie est à coefficients autres que $\mathbb{Z}$, les tentatives actuelles de classification des sphères d'homologie correspondantes (cf. par ex.[1]) s'appuient sur une généralisation de la construction de Kervaire-Milnor du groupe des sphères d'homotopie différentiables ([15]) : on regarde deux sphères d'homologie Σ_1^n et Σ_2^n comme équivalentes s'il existe un cobordisme W^{n+1} entre Σ_1 et Σ_2 tel que les inclusions de chaque Σ_i dans W induisent un isomorphisme sur les groupes d'homologie dans les coefficients considérés. La loi de composition est la somme connexe des variétés.

Avec des sphères d'homologie entière , en dehors du cas de dimension 3 que nous n'envisagerons pas, cette pratique n'est pas très intéressante. En effet, les groupes ainsi obtenus sont banals dans le cas semi-linéaire et isomorphe au groupe θ_n de Kervaire-Milnor dans le cas lisse. La raison en est que toute PL-sphère d'homologie entière Σ^n $(n \neq 3)$ est le bord d'une variété contractile et que θ_n opère simplement transitivement sur l'ensemble des structures différentiables d'une PL-sphère d'homologie donnée (cf. [13]).

Notre point de vue est de restreindre la relation d'équivalence décrite ci-dessus, en demandant principalement que les inclusions de Σ_i dans W induisent aussi un isomorphisme sur les groupes fondamentaux. Ceci impose évidemment de ne considérer simultanément que des variétés dont le groupe fondamental est préalablement fixé. La construction d'un analogue de la somme connexe pour de tels objets constitue la première partie de ce travail.

Parmi les diverses variantes possibles d'une telle construction, nous avons choisi d'en étudier deux qui nous semblent présenter un intérêt particulier. La première est attrayante d'un point de vue conceptuel, par sa généralité et son aspect fonctoriel (groupes C_n, chap. 2). La seconde est plus particulière mais donne des groupes dont la détermination paraît moins difficile (groupes Γ_n, chap. 3)

Au chapitre 4, les groupes Γ_n sont insérés dans une suite exacte longue dans laquelle apparaissent le groupe de Whitehead de π (π désigne le groupe fondamental des sphères d'homologie considérées) et certains groupes d'automorphismes de sphères d'homologie. La suite exacte de Rothenberg [24] reliant les groupes de Wall $L_n(\pi)$ et $L_n^h(\pi)$ s'envoie dans cette suite exacte.

Au chapitre 5, on utilise ces suites exactes pour prouver qu'une infinités de groupes Γ_n sont non-nuls. Ceci implique le phénomène géométrique suivant :, il existe des sphères d'homologie de dimension $n (n \geq 7)$ qui ne peuvent pas être obtenue par la construction standard de M.H.A. Newmann (cf. [22]). Rappelons que ce procédé, le seul connu jusqu'ici pour fabriquer des sphères d'homologie de grande dimension, consiste à plonger un polyèdre acyclique de dimension $\leqslant [n+1/2]$ dans l'espace euclidien R^{n+1} et de prendre le bord d'un voisinage régulier de l'image (cf. chap. 3).

Nous évoluerons dans la catégorie semi-linéaire (PL). La classification différentiable des sphères d'homologie entière ne pose pas de difficultés dès que l'on a une classification semi-linéaire de ces objets. En effet, on sait que l'ensemble des structures lisses sur une PL-sphère d'homologie entière donnée est en bijection avec celles sur S^n ([13] th. 3). La classification topologique quant à elle se ramène à la classification combinatoire puisque toute sphère d'homologie entière topologique de dimension $n \neq 4$ admet une unique structure semi-linéaire ([16] th. 1 et 2).

L'annonce d'une partie des résultats démontrés ici a fait l'objet d'une note aux comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris [6].

Je tiens à remercier chaleureusement les membres de la section de Mathématiques de l'Université de Genève pour leur bienveillante collaboration, toujours très précieuse. Mes remerciements vont plus particulièrement au professeur M. Kervaire qui m'a notamment donné les idées des démonstrations du § 5.3. Enfin, que le professeur Cl. Weber, directeur de cette thèse, veuille bien trouver ici l'expression de ma plus profonde gratitude pour le soutien , les conseils et les enseignements qu'il m'a constamment prodigués tout au long de l'élaboration de ce travail.

Conventions et notations :

S^n désigne la sphère standard de dimension n, bord du disque unité D^{n+1} (et non B^{n+1}, notation occasionnellement utilisée pour d'autres variétés). I dénote le segment [0,1].

L'homologie $H_*(\ )$ est toujours singulière et à coëfficients entiers.

Les variétés, même sans mention spéciale, sont supposées semi-linéaires (PL).

TABLE DES MATIERES

Epaississements de polyèdres acycliques

Soit K^k un polyèdre de dimension k. Rappelons la définition suivante ([29]) :

Définition

Un épaississement de dimension n de K est une équivalence d'homotopie simple $e : K \to T^n$ où T est une PL-variété compacte, à bord et orientée, telle que l'inclusion de Bd T^n dans T^n induise un isomorphisme sur les groupes fondamentaux.

Nous considérerons toujours des épaississements pour lesquels $n \geq 2k + 2$; e est alors homotope à un plongement, unique à isotopie près.

Théorème 1.1

Soit K^k un polyèdre acyclique et soient $e_i : K \to T_i^n$ (i=1,2) deux épaississements de K. Alors, si $n \geq 2k+2 \geq 5$, il existe un PL-homeomorphisme $h : T_1 \to T_2$ préservant l'orientation avec $h \circ e_1$ homotope à e_2. De plus, deux tels homeomorphismes seront toujours reliés par une PL-concordance.

Ce résultat peut se déduire de théorème généraux sur les épaississements ([29] prop. 5 pour l'existence de h et [7] th. 2.7 pour son unicité). Cependant, nous en donnerons ici une démonstration directe.

Démonstration

Le bord de T_i est une sphère d'homologie de dimension ≥ 4. Par [13], Bd T_i est le bord d'une variété contractile. En collant cette dernière à T_i on obtient une variété PL-homeomorphe à la sphère S^n (conjecture de Poincaré,[26]). On pourra ainsi considérer e_i comme un plongement semi-linéaire de K dans S^n et T_i comme un voisinage régulier de $e_i(K)$ dans S^n. e_1 et e_2 devenant isotopes dans S^n, la première partie du théorème découle de l'unicité des voisinages réguliers.

Pour montrer l'assertion d'unicité, il suffit maintenant de voir qu'un PL-automorphisme $h : T^n \to T^n$ (où $e : K \to T^n$) est un épaississement), préservant l'orientation et tel que $h \circ e$ soit homotope à e est concordant à l'identité. Par position générale, on peut supposer que $h \circ e = e$.

Plongeons T^n dans S^n comme précédemment ; on remarque ([11] lemme 2.1.1) que h s'étend en un PL-automorphisme $\bar{h}$ de S^n. Comme $\bar{h}$ préservera l'orientation, on trouvera une isotopie $H : S^n \times I \to S^n \times I$ avec $\bar{H}(x,0) = (x,0)$ et $\bar{H}(x,1) = (h(x),1)$.

$\bar{H}|e(K) \times I$ est homotope à $id|e(K) \times I$ relativement à $e(K) \times \{0,1\}$. A nouveau par position générale et relèvement des isotopies ([9] p.148)on peut remplacer $\bar{H}$ par une concordance $\tilde{H} : S^n \times I \to S^n \times I$ telle que :

$$\tilde{H}|S^n \times \{0,1\} = \bar{H} \quad \text{et}$$

$$\tilde{H}|e(K) \times I = id$$

$\tilde{H}(T^n \times I)$ et $T^n \times I$ sont maintenant deux voisinages réguliers, dans $S^n \times I$, de $e(K) \times I \cup T^n \times \{0,1\}$, modulo $BdT^n \times \{0,1\}$. Les théorèmes d'unicité des voisinages réguliers relatifs de [10] nous permettent d'amener $H(T^n \times I)$ sur $T^n \times I$ par une isotopie ambiante fixe sur $T^n \times \{0,1\}$. On obtient ainsi la concordance désirée entre h et l'identité.

<u>Corollaire 1.2</u>

Soit $e : K^k \to T^n$ un épaississement d'un polyèdre acyclique K et soit C^q une variété compacte contractile. Alors si $n + q \geqslant 2k + 2$, $T^n \times C^q$ est PL-homeomorphe à $T^n \times D^q$ (où D^q désigne le disque standard de dimension q).

<u>Démonstration</u>

Grâce au théorème 1.1, il suffit de démontrer que la composition $f : K \xrightarrow{e} T^n \times \{pt\} \longrightarrow T^n \times C^q$ est un épaississement. On se persuade que f est une équivalence d'homotopie simple à l'aide du diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & T^n \times C^q \arrow[r] & T^n \times C^q \times D^2 \arrow[r, "\overset{h}{\simeq}"] & T^n \times D^{q+2} \\
K \arrow[ur] \arrow[r, "e"] & T^n \times \{pt\} \arrow[u] \arrow[urr] & &
\end{tikzcd}$$

L'homeomorphisme h s'obtient en remarquant que $C^q \times D^2$ est une variété contractile de bord simplement connexe; elle est donc homeomorphe à D^{q+2} par le théorème du h-cobordisme. Le fait que l'inclusion de $Bd(T^n \times C^q)$ dans $T^n \times C^q$ induit un isomorphisme sur les groupes fondamentaux se vérifie à l'aide du th. de Van-Kampen.

Modèles pour les épaississements de polyèdres acycliques :

Soit K^k un polyèdre acyclique de dimension k. Par [31] th. 1, il existe un plongement semi-linéaire :

$$e : K \to S^{2k}$$

Choisissons une fois pour toutes un voisinage régulier de e(K) dans S^{2k} que nous noterons $E^{2k}(K)$.
Pour $n > 2k$, nous définirons par récurrence :

$$E^n(K) = E^{n-1}(K) \times [-1,1]$$

On considèrera toujours $E^{n-1}(K)$ comme une sous-variété de $BdE^n(K)$ en l'identifiant à $E^{n-1}(K) \times \{-1\}$. Via cette convention, nous avons pour tout $n > 2k$ un plongement semi-linéaire $e : K \to BdE^n(K)$.

Notons que le type d'homeomorphie semi-linéaire de $E^n(K)$ ne dépend pas du choix de $E^{2k}(K)$ lorsque $n \geqslant 2k+2$. (en fait $n \geqslant 2k + 1$, mais nous n'utiliserons pas ce résultat).

Lemme 1.3 :

Le PL-homeomorphisme h du théorème 1.1 peut aussi être choisi renversant l'orientation.

Démonstration :

Il suffit de démontrer qu'il existe un PL-automorphisme θ de $E^n(K)$ qui renverse l'orientation. Comme $E^n(K) = E^{n-1}(K)\times[-1,1]$ lorsque $n \geqslant 2k+1$, on pourra définir un tel θ par :

$$\theta(x,t) = (x,-t).$$

Le résultat technique suivant nous sera utile au § 2.2

Lemme 1.4

Soit K^k un polyèdre acyclique et V^n une PL-variété compacte, avec $n \geqslant 2k+2$. Soit $f : K\times I \to V$ un PL-plongement avec $f^{-1}(\mathrm{bdV}) = K \times \{0,1\}$ et soient N_0 et N_1 deux voisinages réguliers disjoints dans BdV de $f(K \times \{0\})$ et $f(K \times \{1\})$ respectivement. On suppose de plus, que f est une équivalence d'homotopie simple et que l'inclusion de BdV dans V induit un isomorphisme sur les groupes fondamentaux. Alors, il existe un PL-homeomorphisme :

$$F : E^{n-1}(K) \times [-1,1] \to V$$

tel que

1) $F(E^{n-1}\times \{-1\}) = N_0$, $F\circ e \ (z) = f(z,0)$
2) $F(E^{n-1}\times \{1\}) = N_1$, $F\circ e \ (z) = f(z,1)$

Démonstration

Par le théorème 1.1, il existe un PL-homéomorphisme $h : E^{n-1}(K) \times [-1,1] \to V$ avec $h(e(z),0) = f(z,\frac{1}{2})$. $h(e(K)\times\{-1\}) \subset \mathrm{BdV}$ et $h\circ e$ est homotope à $f\ |K \times \{0\}$ dans V. Par position générale, des deux derniers plongements sont isotopes dans BdV. Par extension des isotopies, on peut trouver un PL-homéomorphisme $h' : E^{n-1}(K) \times [-1,1] \to V$ tel que $h'\circ e \quad (z) = f(z,0)$.

Chapitre 2

Les groupes $C_n(K)$

2.1. K-variétés

Définition

Soit K^k un polyèdre acyclique. Une K-variété de dimension n est un couple (M^n, f) où M est une PL-variété close orientée de dimension n et $f : K \to M$ est une application continue induisant un isomorphisme sur les groupes fondamentaux.

Deux K-variétés de dimension n (M_1, f_1) et (M_2, f_2) seront dites K-cobordantes s'il existe une PL-variété compacte orientée W^{n+1} réalisant les conditions suivantes :

1) $BdW \cong M_1 + (-M_2)$ (où -M désigne la variété M avec l'orientation opposée).

2) les inclusions $\nu_i : M_i \to W$ $(i = 1,2)$ induisent des isomorphismes sur l'homologie et sur les groupes fondamentaux.

3) $\nu_1 \circ f_1$ est homotope à $\nu_2 \circ f_2$.

Le K-cobordisme est une relation d'équivalence ; L'ensemble des classes d'équivalences de K-variétés de dimension n sera noté $\mathcal{C}_n(K)$.

Le lecteur aura remarqué que, si $\pi_1(K) = 1$, K est alors contractile et $\mathcal{C}_n(K)$ s'identifie à l'ensemble des classes de h-cobordisme de PL-variétés simplement connexes de dimension n.

Théorème 2.1.1

Soit M^n une PL-variété close orientée avec $H_i(M) = 0$ pour $1 \leqslant i \leqslant q$. Alors, pour tout entier k avec $3 \leqslant k \leqslant q$, il existe un polyèdre acyclique K de dimension k et une application $f : K \to M$ qui est une équivalence d'homotopie sur les (k-1)-squelettes. En particulier (M,f) est une K-variété.

Démonstration

Soit k un entier satisfaisant $3 \leqslant k \leqslant q$. Nous noterons M^k le k-squelette d'une triangulation de M. Considérons les suites exactes d'homotopie et d'homologie de la paire (M^k, M^{k-1}) :

$$\begin{array}{ccccc}
\pi_k(M^k, M^{k-1}) & \xrightarrow{\partial^\pi} & \pi_{k-1}(M^{k-1}) & \xrightarrow{j} & \pi_{k-1}(M^k) \\
\downarrow \rho & & \downarrow & & \downarrow \\
H_k(M^k, M^{k-1}) & \xrightarrow{\partial^h} & H_{k-1}(M^{k-1}) & \longrightarrow & H_{k-1}(M^k) = 0
\end{array}$$

Soit $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ une base de $H_{k-1}(M^{k-1})$ qui est abélien libre. Comme ∂^h et ρ sont surjectives, on peut choisir $\beta_1, \ldots, \beta_n \in \pi_k(M^k, M^{k-1})$ tels que $\partial^h \circ \rho(\beta_i) = \alpha_i$ pour tout i. Soit K un polyèdre obtenu en attachant n cellules de dimension k à M^{k-1} à l'aide de représentants des classes $\partial^\pi(\beta_i)$.
On vérifie aisément que K est acyclique. Comme $j(\partial^\pi(\beta_i)) = 0$, l'inclusion $M^{k-1} \longrightarrow M$ s'étend en une application $f : K \longrightarrow M$ qui jouit des propriétés annoncées.

2.2. K– somme connexe

Rappelons que K est un polyèdre acyclique de dimension k. Si $n \geq 2k+2$, nous allons munir $\mathscr{C}_n(K)$ d'une loi de composition, se confondant avec la somme connexe lorsque K est un point et qui fera de $\mathscr{C}_n(K)$ un semi-groupe abélien.

Pour cela, soient (M_1, f_1) et (M_2, f_2) deux K-variétés de dimension n. Comme $n \geq 2k+2$, f_i est homotope à un plongement $\overline{f}_i : K \longrightarrow M_i$ $(i = 1,2)$. D'autre part, un voisinage régulier quelconque V_i de $\overline{f}_i(K)$ dans M_i est PL-homéomorphe à $E^n(K)$ par le théorème 1.1 (voir ch1 pour lés définitions de $E^n(K)$).

On choisit :

1) deux plongements $\overline{f}_i : K \to M$ homotopes à f_i ;

2) deux PL-plongements $h_i : E^n(K) \to M_i$, l'un préservant et l'autre renversant l'orientation et tels que $h_i \circ e = \overline{f}_i$

et on forme la PL-variété close M^n de la manière suivante :

$$M = [M_1 - \mathrm{int}(\mathrm{Im}\, h_1)] + [M_2 - \mathrm{int}\,(\mathrm{Im}\, h_2)] \Big/ \begin{array}{l}\{h_1(x) \cong h_2(x)\} \\ (x \in \mathrm{Bd}E^n(K))\end{array}$$

On munit M de l'orientation et de la structure semi-linéaire compatibles avec celles de M_1 et M_2. On a les inclusions $\mu_i : [M_i - \mathrm{int}(\mathrm{Im}\, h_i)] \to M$.

Lemme 2.2.1

Avec les notations ci-dessus, les inclusions μ_i $(i = 1,2)$ induisent les isomorphismes :

$$\pi_1(M_i) \xrightarrow{\cong} \pi_1(M)$$

$$\widetilde{H}_r(M_1) \oplus \widetilde{H}_r(M_2) \longrightarrow \widetilde{H}_r(M) \qquad 0 \leq r \leq n-1.$$

Ce résultat découle immédiatement du théorème de Seifert et Van Kampen et de la suite de Mayer-Vietoris.

Pour obtenir une K-variété à l'aide de M, on définit $f : K \to M$ de la manière suivante :

$$f = \mu_1 \circ h_1 \circ e \quad = \mu_2 \circ h_2 \circ e$$

(pour la définition de $e \quad : K \to E^n(K)$, voir ch.1).

Il est clair que f induit un isomorphisme sur les groupes fondamentaux. (M,f) est donc une K-variété.

<u>Proposition 2.2.2</u>

La classe de K-cobordisme de la K-variété (M,f) ainsi construite ne dépend que des classes de K-cobordisme de (M_1,f_1) et (M_2,f_2).

Ce résultat nous permet de munir $\mathcal{B}_n(K)$ d'une loi de composition que nous appelerons K-somme-connexe. Nous la noterons $\#_K$, ou simplement $\#$ lorsqu'aucune confusion n'est possible.

<u>Démonstration de 2.2.2</u>

a) <u>Indépendance du choix de f_i et h_i $(i = 1,2)$</u> :

Soient $\bar{f}_i'$ et h_i' d'autre choix vérifiants les conditions 1) et 2) ci-dessus, et appelons V_i (resp. V_i') l'image de $E^n(K)$ par h_i (resp. h_i'). On construit donc avec f_i' et h_i' une K-variété (M',f').

Comme $\bar{f}_i$ et $\bar{f}_i'$ sont homotopes à f_i, la condition $n \geq 2k+2$ implique que $\bar{f}_i$ et $\bar{f}_i'$ sont isotopes. Par extension des isotopies et unicité des voisinages réguliers, on trouvera une isotopie ambiante $G_i : M_i \times I \to M_i \times I$ telle que :

$$G_i(x,o) = (x,o) \text{ pour tout } x \in M_i$$

$$G_i(V_i \times \{1\}) = V_i' \times \{1\} \quad \text{et}$$

$$G_i(\overline{f}_i(z),1) = (\overline{f}_i'(z),1) \text{ pour tout } z \in K.$$

Soit $g_i : E^n(K) \times I \to M_i \times I$ l'application semi-linéaire injective définie par :

$$g_i(z,t) = G_i(h_i(z),t)$$

Le PL-automorphisme de $E^n(K) \times \{1\}$ défini par $(z,1) \to g_i^{-1}(h_i'(z),1)$ préserve $e(K) \times \{1\}$ point par point. Par le théorème 1.1 il existera une concordance $\rho_i : E^n(K) \times I \to E^n(K) \times I$ avec

$$\rho_i(x,o) = (x,o) \text{ et } \rho_i(x,1) = g_i^{-1}(h_i'(x),1).$$

L'application semi-linéaire injective $H_i : E^n(K) \times I \to M_i \times I$ définie par $H_i = g_i \circ \rho_i$ vérifie les conditions suivantes :

$$H_i(z,o) = (h_i(z),o), \quad H_i(z,1) = (h_i'(z),1)$$

et $$H_i^{-1}(M_i \times \{o,1\}) = E^n(K) \times \{o,1\}.$$

Formons la variété compacte W^{n+1} semi-linéaire par :

$$W = \frac{\displaystyle\coprod_{i=1,2} \left\{ M_i \times I - \operatorname{int}\left[H_i(E^n(K) \times \,]\,0,1\,[\,)\right] \right\}}{\{H_1(z,t) \cong H_2(z,t)\} \quad (z \in BdE^n(K),\ t \in I)}$$

W constitue un cobordisme entre M et M'. Par Van-Kampen et suite de Mayer-Vietoris on démontre que les inclusions de M et M' dans W induisent des isomorphismes sur les groupes fondamentaux et sur l'homologie. Par position générale, on vérifie que f et f' sont homotopes dans W. (M,f) et (M',f') sont ainsi K-cobordantes.

b) Indépendance du choix de (M_i,f_i) $(i = 1,2)$ dans leur classe de K-cobordisme

Soit W_i un K-cobordisme entre (M_i,f_i) et (M_i',f_i'). On suppose tout de suite que f_i et f_i' sont des plongements homotopes dans W_i. Par position générale ([3], lemme 4.8) on trouvera un plongement $\eta_i : K \times I \to W_i$ satisfaisant à :

$$\eta_i^{-1}(M_i) = K \times \{o\} \quad , \quad \eta_i^{-1}(M_i') = K \times \{1\}$$

$$\eta_i | K \times \{o\} = f_i \quad \text{et} \quad \eta_i | K \times \{1\} = f_i'$$

Soit V_i un voisinage régulier de η_i $(K \times I)$ dans W_i rencontrant le bord régulièrement. En utilisant le lemme 1.4 on trouvera une application semi-linéaire injective $\overline{\eta}_i : E^n(K) \times [-1,1] \to W_i$ ayant les propriétés voulues pour construire, comme précédemment, un K-cobordisme W entre M et M' à l'aide de W_1 et W_2.

Lemme 2.2.3

La loi $\#$ définie sur $\mathcal{C}_n(K)$ est associative.

Démonstration

Soient E_a, E_b et E_c trois copies de $E^{n-1}(K) \times [-1,1]$; en notant $(z,t)_a$ les points de E_a (notation analogue pour b et c), formons l'espace Ω suivant :

$$\Omega = E_a \amalg E_b \amalg E_c \Big/ \begin{array}{c}\{(z,-1)_a = (z,-1)_b = (z,-1)_c\} \\ (z \in E^{n-1}(K))\end{array}$$

Nous noterons $p_a : E_a \to \Omega$ l'application naturelle (notation analogue pour b et c) et $\omega : K \to \Omega$ sera défini par

$$\omega = p_a \circ e = p_b \circ e = p_c \circ e \ .$$

Soient (M_i,f_i) $(i = 1,2,3)$ trois K-variétés de dimension n. On choisit trois plongements α_i de la manière suivante :

$$\alpha_1 : p_b(E_b) \cup p_c(E_c) \longrightarrow M_1$$

$$\alpha_2 : p_a(E_a) \cup p_c(E_c) \longrightarrow M_2$$

$$\alpha_3 : p_a(E) \cup p_b(E) \longrightarrow M_3$$

tels que $\alpha_i \circ \omega$ soit homotope à f_i $(i = 1,2,3)$

Formons l'espace $\widetilde{M}$ de la façon suivante :

$$\widetilde{M} = M_1 \amalg M_2 \amalg M_3 \Big/ \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1(z) = \alpha_2(z), \; z \in p_c(E_c) \\ \alpha_2(z) = \alpha_3(z), \; z \in p_a(E_a) \\ \alpha_3(z) = \alpha_1(z), \; z \in p_b(E_b) \end{array} \right\}$$

Nous avons un plongement $\alpha : \Omega \to M$ induit par les α_i. Soit $M = \widetilde{M} = \text{int}\,[\alpha(\Omega)]$. M est alors une PL-variété compacte. On possède un plongement $f : K \to M$ construit à l'aide de l'un des α_i et dont la classe d'isotopie est indépendante de i. (M,f) est ainsi une K-variété de dimension n. Nous allons l'identifier successivement avec

$(M_1,f_1) \# [(M_2,f_2) \# (M_3,f_3)]$ et $[(M_1,f_1) \# (M_2,f_2)] \# (M_3,f_3)$.

<u>Identification avec</u> $(M_1,f_1) \# [(M_2,f_2) \# (M_3,f_3)]$:

On construit $(M_2,f_2) \# (M_3,f_3)$ en choisissant $h_2 = \alpha_2 \circ p_a$ et $h_3 = \alpha_3 \circ p_a$. L'application de K dans $M_2 \# M_3$ est donnée par $\alpha_i \circ p_a$ $(i = 2$ ou $3)$.

Soit $\gamma : [-1,1] \to [-1,1]$ l'application définie par : $\gamma(t) = 2\,|t|\,-1$. On construit $(M_1,f_1)\#[(M_2,f_2)\#(M_3,f_3)]$ en choisissant $h_1 : E^{n-1}(K) \times [-1,1] \to M_1$ et $h : E^{n-1}(K) \times [-1,1] \to M_2 \#_K M_3$ de la manière suivante :

$$h_1(z,t) = \begin{cases} \alpha_1 \circ p_b(z,\gamma(t)) & \text{si } t \geq 0 \\ \alpha_1 \circ p_c(z,\gamma(t)) & \text{si } t \leq 0 \end{cases}$$

$$h(z,t) = \begin{cases} \alpha_3 \circ p_b(z, \gamma(t)) & \text{si } t \geq 0 \\ \alpha_2 \circ p_c(z, \gamma(t)) & \text{si } t \leq 0 \end{cases}$$

où dans la définition de $h(z,t)$, les points de $M_i = \operatorname{int}[h_i(E^n(K))]$, $(i = 2,3)$ sont identifiés avec leur image dans $M_2 \#_K M_3$. Avec cette construction, on obtient un représentant de la classe de K-cobordisme de $(M_1,f_1)\#[(M_2,f_2)\#(M_3,f_3)]$ qui est naturellement PL-homéomorphe à M (un dessin aidera fortement le lecteur à en être convaincu).

Identification avec $[(M_1,f_1)\#(M_2,f_2)]\#(M_3,f_3)$:

On procède de manière analogue au cas précédent avec, pour construire $(M_1,f_1)\#(M_2,f_2)$:

$$h_1 = \alpha_1 \circ p_c \quad : \quad E^n(K) \longrightarrow M_1$$

$$h_2 = \alpha_2 \circ p_c \quad : \quad E^n(K) \longrightarrow M_2$$

et, pour construire $[(M_1,f_1)\#(M_2,f_2)]\#(M_3,f_3)$:

$$h_3 : E^{n-1} \times [-1,1] \longrightarrow M_3 \text{ défini par :}$$

$$h_3(z,t) = \begin{cases} \alpha_3\ p_b(z,\gamma(t)) & \text{si } t \leqslant o \\ \alpha_3\ p_a(z,\gamma(t)) & \text{si } t \geqslant o \end{cases}$$

et $h : E^{n-1}(K) \times [-1,1] \to M_1 \#_K M_2$ par

$$h(z,t) = \begin{cases} \alpha_1\ p_b\ (z,\ \gamma(t)) & \text{si } t \leqslant 0 \\ \alpha_2\ p_a\ (z,\ \gamma(t)) & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$$

Le lemme suivant est immédiat :

Lemme 2.2.4

La classe de K-cobordisme de

$(Bd(E^{n-1}(K) \times [-1,1]),\ e\quad)$

constitue l'élément neutre dans $\mathcal{C}_n(K)$ pour la K-somme connexe.

En résumé, et comme la K-somme connexe est commutative (la construction est symétrique en chaque argument), nous avons démontré le théorème suivant :

Théorème 2.2.5

La K-somme connexe définit sur $\mathcal{C}_n(K)$ une structure de semi-groupe abélien pour $n \geqslant 2\dim K + 2$.

Proposition 2.2.6

Soit K^k un polyèdre acyclique et $n \geqslant 2k + 2$. Une K-variété (M^n,f) représente l'élément neutre de $\mathcal{C}_n(K)$ si et seulement si M est le bord d'un épaississement d'un polyèdre acyclique quelconque (i.e. $M = BdV$, V acyclique et $\pi_1(M) \to \pi_1(V)$ est un isomorphisme).

Démonstration

Soit W un K-cobordisme entre (M,f) et $(BdE^{n+1}(K),e\ )$. La variété formée en collant W à $E^{n+1}(K)$ le long de $BdE^{n+1}(K)$ est un épaississement d'un complexe acyclique et son bord est M.

Réciproquement, soit A^{n+1} un épaississement d'un complexe acyclique avec $BdA = M$. Soit $f_t : K \to M$ $(t \in I)$ une homotopie avec $f_o = f$ et f_1 un plongement PL.

Construisons un col semi-linéaire $c : M \times I \to A$ de M dans A ; l'application $g : K \times I \to A$ définie par :

$$g(z,t) = c(f_t(z),t)$$

est telle que $g|K \times \{1\}$ est un plongement PL. Soit $W = A - \mathrm{int}V$ où V est un voisinage régulier de $g\ (K \times \{1\})$ dans A disjoint de M. (V est donc PL-homéomorphe à $E^{n+1}(K)$ par le théorème 1.1).

W est un K-cobordisme. En effet, les conditions sur l'orientation, l'homologie et les groupes fondamentaux sont faciles à vérifier. Quant à f et e, étant homotopes dans A, il le sont par position générale dans W.

2.3 Les groupes $C_n(K)$

Définition

Une n-sphère d'homologie Σ^n est une variété compacte de dimension n avec $H_*(\Sigma^n) = H_*(S^n)$.

Soit K^k un polyèdre acyclique.

Théorème 2.3.1

La classe de K-cobordisme de la K-variété (M^n,f) est inversible dans $\mathscr{C}_n(K)$ si et seulement si M^n est une n-sphère d'homologie. $(n \geqslant 2k + 2)$.

Démonstration

$BdE^n(K)$ est une n-sphère d'homologie ; pour que (M^n,f) soit inversible dans $\mathscr{C}_n(K)$, M^n doit donc être une n-sphère d'homologie à cause du lemme 2.2.1.

Réciproquement, supposons que M soit une n-sphère d'homologie. Nous allons montrer que $(-M,f)$ est un inverse de (M,f) pour la K-somme connexe (où $-M$ désigne la variété M munie de l'orientation opposée). Soit V un voisinage régulier de $f_n(K)$ dans M (on suppose que f est un PL-plongement). Soit $A^n = M - \mathrm{int}V$. La variété $M \#_K (-M)$ est PL-homéomorphe à $Bd(A^n \times I)$. Il est clair que $A^n \times I$ est acyclique. Si l'on démontre que l'inclusion $i : Bd(A^n \times I) \hookrightarrow A^n \times I$ induit un isomorphisme sur les groupes fondamentaux, le théorème découlera alors de la proposition 2.2.6

La théorème de Seifert et Van-Kampen nous assure de l'existence des isomorphismes non triviaux indiqués dans le diagramme suivant, où toutes les flèches sont induites par les inclusion :

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(\mathrm{Bd}A^n) & \xrightarrow{\simeq} & \pi_1(\mathrm{Bd}(A^n \times 1)) \\ \downarrow \simeq & & \downarrow i_* \\ \pi_1(A^n) & \xrightarrow{\simeq} & \pi_1(A^n \times I) \end{array}$$

d'où l'on tire que i_* est un isomorphisme.

Nous avons donc démontré que l'ensemble des classes de K-cobordisme de K-variétés qui sont des n-sphères d'homologie s forment, pour la K-somme connexe, un groupe abélien. Nous noterons ce groupe $\underline{C_n(K)}$.

La proposition 2.2.6 nous apprend que $C_n(K) = o$ si et seulement si toute n-sphère d'homologie qui est une K-variété est le bord d'un épaississement d'un polyèdre acyclique.

2.4.- Description fonctorielle de C_n :

Soit π un groupe de présentation finie. Nous allons considérer la catégorie $A_s(\pi)$ dont les objets sont les polyèdres acycliques de dimension $\leqslant s$ de groupe fondamental isomorphe à π et dont les morphismes sont les applications continues induisant un isomorphisme sur les groupes fondamentaux.

Lemme 2.4.1 (cf. M. Kervaire [13]).

$A_3(\pi)$ est une catégorie non-vide si et suelement si $H_1(\pi) = H_2(\pi) = 0$ (où $H_*(\pi)$ désigne l'homologie du groupe π à coefficients dans le π-module trivial $\mathbb{Z}$).

$A_2(\pi)$ est une catégorie non-vide si et seulement si $H_1(\pi) = 0$ et π admet une présentation avec nombre égal de générateurs et de relations.

Démonstration

Si K est acyclique et $\pi \cong \pi_1(K)$, on a :

$$H_1(\pi) \cong H_1(K) = 0$$

et
$$H_2(\pi) \cong H_2(K) \big/ h(\pi_2(K)) = 0 \qquad (*)$$

où h est l'homomorphisme d'Hurewicz. La relation (*) est le théorème de Hopf [8].

Réciproquement, soit K^2 un polyèdre avec $\pi_1(K^2) \cong \pi$. Le théorème de Hopf que l'on vient d'évoquer nous permet justement d'attacher des 3-cellules à K^2 pour obtenir un polyèdre acyclique. La démonstration de l'assertion sur $A_2(\pi)$ est laissée au lecteur (on utilise l'équivalence entre une présentation de π et un 2-complexe de groupe fondamental π).

Théorème 2.4.2

Soit $K \in Ob(A_s(\pi))$, $s \geqslant 3$. Soit n un entier, $n \geqslant 2s+2$. La correspondance $K \to C_n(K)$ permet de définir un foncteur contravariant de $A_s\ (\pi)$ à valeur dans la catégorie des groupes abéliens et des homomorphismes injectifs.

Démonstration

La définition du foncteur sur les morphismes est la suivante : soit $\alpha : L \to K$ un morphisme de $A_s(\pi)$. $A(M,f) \in C_n(K)$, on fait correspondre $(M, f \circ \alpha) \in C_n\ (L)$. Il est clair que cette construction donne une application bien définie de $C_n(K)$ dans $C_n(L)$. Nous allons vérifier que c'est un homomorphisme.

Soient (M_1,f_1) et $(M_2,f_2) \in \Gamma_n(K)$ et

$$(M,f) = (M_1,f_1) \#_K \ (M_2,f_2)$$

Il faut vérifier que :

$$(M,f\circ\alpha) = (M_1,f_1 \circ \alpha) \#_L \ (M_2,f_2 \circ \alpha)$$

Soit $g : E^n(L) \to \text{Int}\ (E^n(K))$ le plongement induit par $e \circ \alpha \ : L \to E^n(K)$. Formons les sphères d'homologie :

$$W_i = (M_i,f_i \circ \alpha) \#_L \ (-M_i,f_i \circ \alpha) \qquad (i = 1,2)$$

On peut identifier W_i avec le bord de $A_i^n \times I$, où $A_i = M_i - \text{int}\ [h_i \circ g(E^n(L))]$ ($h_i : E^n(K) \to M_i$ est le plongement utilisé pour construire $(M_1,f_1) \#_K (M_2,f_2)$). On choisira cette identification de manière à ce que $A_i \times \{0\}$ corresponde à $-M_i$. On a un plongement

$$\overline{h}_i : [E^n(K) - \mathrm{int}\ g\ (E^n(L))] \to W_i \qquad (i = 1,2)$$

construit à l'aide de h_i.

Soit S la variété à bord construite de la manière suivante :

$$S = (A_1 \times I) \amalg (A_2 \times I) \Big/ \left\{ \overline{h}_1(x) \cong \overline{h}_2(x) \;\middle|\; x \in E^n(K) - \mathrm{int}\ g\ (E^n(L)) \right\}$$

Il est aisé de voir que S constitue un L-cobordisme entre $(M, f \circ \alpha)$ et $(M_1, f_1 \circ \alpha) \#_L (M_2, f_2 \circ \alpha)$.

Le fait que cet homomorphisme est toujours injectif découle de la prop. 2.2.6

<u>Remarque</u> : Comme (M,f) et (M,f') sont K-cobordantes si f et f' sont homotopes, deux applications homotopes $\alpha, \alpha' : L \to K$ induiront le même homomorphisme entre $C_n(K)$ et $C_n(L)$.

<u>Corollaire 2.4.3</u>

Soit $\beta : K \to L$ une domination (i.e. il existe $\gamma : L \to K$ tel que $\beta \circ \gamma = id_L$). Alors β induit un isomorphisme entre $C_n(L)$ et $C_n(K)$ et γ induit un isomorphisme entre $C_n(K)$ et $C_n(L)$ (K et L comme précédemment.)

Ce résultat découle immédiatement de ce qui précède et du théorème 2.4.2

Chapitre 3

Les groupes $\Gamma_n(K)$

3.1 K^∞-variétés

Soit K un polyèdre que nous supposerons tout de suite acyclique, et soit (M,f) une K-variété. Soit $F : E^n(K) \to M$ un plongement semi-linéaire tel que $F\circ e$ soit homotope à f. Posons $A^n = M - \mathrm{int}F(E^n(K))$ et $\mu : K \to A^n$ l'application définie par

$$\mu = i\circ F\circ e$$

où i est l'inclusion de $\mathrm{Bd}(F\ (E^n(K))\ )$ dans A^n.

Remarquons que si $(M,f) = (\mathrm{Bd}E^{n+1}(K),e)$, μ est alors une équivalence d'homotopie simple. Nous allons nous intéresser à des K-variétés "ressemblant" à $(\mathrm{Bd}E^{n+1}(K),e)$, et ceci en posant la définition suivante :

Définition : Une K^∞-variété de dimension n est une K-variété (M^n,f) telle que l'application μ définie ci-dessus soit une équivalence d'homotopie.

Remarquons que M est obligatoirement une sphère d'homologie puisque K est acyclique.

Le fait d'être une K^∞-variété n'est pas un invariant de la classe de K-cobordisme. C'est pourquoi nous allons restreindre notre relation d'équivalence de la manière suivante :

Définition : Deux K^∞-variétés seront réputées K^∞-cobordantes s'il existe un K-cobordisme entre elles qui soit un h-cobordisme. L'ensemble des classes de K^∞-cobordisme de K^∞-variétés de dimension n sera noté $\Gamma_n(K)$.

Proposition 3.1.1

La K-somme connexe de deux K^∞-variétés est encore une K^∞-variété dont la classe de K^∞-cobordisme ne dépend que des classes de K^∞-cobordisme des deux précèdentes.

Démonstration

Il n'y a qu'à reprendre la démonstration de la proposition 2.2.2 et contrôler que tout l'argument peut se faire avec le nouveau concept de K^∞-variété.

La K-somme connexe munit donc $\Gamma_n^\infty(K)$ d'une structure de semi-groupe abélien. En suivant le schéma du chapitre 2, nous allons montrer qu'il sagit d'un groupe abélien.

Proposition 3.1.2

Une K^∞-variété (M^n,f) représente l'élément neutre de $\Gamma_n(K)$ si et seulement si M est le bord d'une variété semi-linéaire W^{n+1} telle que si $\nu : M \to W$ dénote l'inclusion naturelle, alors $\nu \circ f$ soit une équivalence d'homotopie.

D'autres caractérisations de l'élément neutre de $\Gamma_n(K)$ seront donnée au paragraphe suivant.

Démonstration

Il suffit de reprendre l'argument de la démonstration de la proposition 2.2.6. De même, le raisonnement de la démonstration du théorème 2.3.1 s'applique pour obtenir le résultat suivant :

Proposition 3.1.3 :

La classe de K^∞-cobordisme de $(-M,f)$ constitue un inverse de (M,f) pour la K-somme connexe dans $\Gamma_n(K)$.

En résumé, $\Gamma_n(K)$ est muni par la K-somme connexe d'une structure de groupe abélien. On remarque qu'il existe un homomorphisme d'oubli :

$$\theta \ : \ \Gamma_n(K) \longrightarrow C_n(K)$$

3.2 Sphères de Newmann :

A notre connaissance, toutes les sphères d'homologie de dimension ≥ 5 construites jusqu'ici dans la littérature le sont à l'aide d'un procédé dont l'origine remonte à M.H.A. Newmann ([22]) et que l'on peut décrire de la manière suivante : on prend un polyèdre acyclique de dimension k que l'on plonge semi-linéairement dans S^{n+1}, $n+1 \geq 2k$ et $n+1 \geq 5$ (ce qui est possible par [31] th.1) ; le bord d'un voisinage régulier de l'image dans S^{n+1} est une sphère d'homologie.

Définition :

Une sphère d'homologie Σ^n est appelée "sphère de Newmann" s'il existe un sous-polyèdre acyclique L de S^{n+1}, avec $2 \dim L \leqslant n+1$ et tel que Σ soit homeomorphe au bord d'un voisinage régulier de L dans S^{n+1}.

Nous nous proposons de résoudre le problème suivant : est-ce que toute sphère d'homologie de dimension $\geqslant 5$ est une sphère de Newmann ?

Remarquons que le groupe fondamental ne donne aucun renseignement relatif à cette question. En effet, si G est groupe fondamental d'une sphère d'homologie, il est aussi groupe fondamental d'un polyèdre acyclique de dimension $\leqslant 3$ (cf. § 2.4). Il existera donc des sphères de Newmann Σ^n pour tout $n \geqslant 5$ avec $\pi_1(\Sigma) \cong G$ (cf. également Kervaire [13]).

En revanche, la réponse à ce problème est étroitement liée à la non-nullité des groupes Γ_n. Si $\Gamma_n(K) = 0$, la prop. 3.1.2 impliquera que toute K^∞-sphère d'homologie Σ^n est le bord d'une PL-variété V^{n+1} de même type d'homotopie que K. En outre, par [13] il existe une PL-variété contractile C^{n+1} avec $\mathrm{Bd}C = \Sigma$. $V \cup_\Sigma C$ est alors PL-homeomorphe à la sphère standard S^{n+1} d'où l'on conclut que Σ est une sphère de Newmann.

Réciproquement, nous avons le théorème suivant :

Théorème 3.2.1

Soit (Σ^n, f) une K^∞-variété, $2k + 2 \geq n$. Supposons que Σ^n est le bord d'une variété L^{n+1} ayant le type d'homotopie d'un polyèdre de dimension i et telle que l'inclusion de Σ dans L induise un isomorphisme sur les groupes fondamentaux.

Alors, (Σ^n, f) représente l'élément neutre de $\Gamma_n(K)$ dès que l'une des deux conditions suivantes est réalisée :

a) $2i \leq n$

b) L acyclique, $\pi_1(K)$ fini et $2i = n+1$

Nous démontrerons, au chapitre 5, la non-nullité de certains groupes $\Gamma_n(K)$, en particulier si n est impair et $\pi_1(K) = \Delta$, où Δ est le groupe binaire de l'icosaèdre à 120 éléments. Grâce au th. 3.2.1 condition b), on en déduira l'existence de sphères d'homologie qui ne sont pas des sphères de Newmann.

L'auteur ignore si le th. 3.2.1 condition b) reste vrai avec des groupes fondamentaux infinis. Malgré cette restriction, le théorème est intéressant puisqu on connait de nombreux groupes finis apparaissant comme groupe fondamental de sphère d'homologie. L'algorithme pour fabriquer n'importe lequel de ces groupes est le suivant : soit P un groupe fini et parfait (i.e $H_1(P) = 0$). Considérons son extension centrale universelle (c.f [14]) :

$$0 \longrightarrow H_2(P) \longrightarrow \tilde{P} \longrightarrow P \longrightarrow 1$$

$\tilde{P}$ est alors un groupe fini tel que $H(\tilde{P})_1 = H_2(\tilde{P}) = 0$ (cf. [14]), ce qui suffit pour qu'il soit groupe fondamental d'une sphère d'homologie (§ 2.4). Parmis les exemples les plus connus, citons :

- $P = A_n$, le groupe alterné. Si $P = A_5$, alors $\tilde{P} = \Delta = \{ a,b \mid a^5 = b^3 = (ab)^2 \}$ le groupe icosaèdral binaire à 120 éléments bien connu depuis Poincaré.
- $P = Sl_n(F)$, $n \geq 5$ et F est le corps à q éléments, $q \neq 2$. En Alors $\tilde{P} = Sl_n(F_q)$. En effet, $H_2(Sl_n(F_q)) = 0$ par [21] th. 9.12, 9.11 et 9.9 et [14] p. 224.
- Plus généralement, $P = E_n(\Lambda)$ $n \geq 5$ où Λ est un anneau commutatif fini avec élément unité et $E_n(\Lambda)$ désigne le sous-groupe de $Gl_n(\Lambda)$ formé des matrices élémentaires. Alors $P = St(n,\Lambda)$, le groupe de Steinberg d'ordre n de Λ (c.f. [14] p. 224 pour la définition où l'on démontre également que $H_2(St(n,\Lambda)) = 0$ pour $n \geq 5$). Le fait que l'extension :

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker}\,p_n \longrightarrow St(n,\Lambda) \longrightarrow E_n(\Lambda) \xrightarrow{p_n} 1$$

est centrale provient de [28] th. 2.7 et [21] lemme 9.7.

Démonstration de 3.2.1

Désignons par $\nu : \Sigma \to L$ l'inclusion et par ρ la composition $\nu \circ f$. Grâce à l'hypothèse sur les groupes fondamentaux, toutes ces applications se relèvent dans les revêtements universels, et forment un diagramme :

$$\begin{tikzcd} \widetilde{K} \arrow[rr, "\widetilde{\rho}"] \arrow[dr, "\widetilde{f}"'] & & \widetilde{L} \\ & \widetilde{\Sigma} \arrow[ur, "\widetilde{\nu}"'] & \end{tikzcd}$$

Nous allons montrer que ρ est une équivalence d'homotopie; le résultat découlera alors de la proposition 3.1.2. Pour cela, il suffira d'établir que

$$\widetilde{\rho}_j : H_j(\widetilde{K}) \to H_j(\widetilde{L})$$

est un isomorphisme pour tout j, ou, ce qui est équivalent, pour tout $j \leqslant \max(k,i)$.

1) La condition a) est vérifiée :

Par position générale, $\widetilde{f}_j : H_j(\widetilde{K}) \to H_j(\widetilde{\Sigma})$ est :
- un isomorphisme pour $j \leqslant n-k-2$
- un épimorphisme pour $j = n-k-1$

Quant à $\widetilde{\nu}_j : H_j(\widetilde{\Sigma}) \to H_j(L)$ il se trouve être :
- un isomorphisme pour $j \leqslant n-i-1$
- un épimorphisme pour $j = n-i$.

On a toujours $n-k-2 \geqslant k$. Si $i \leqslant k$, on a aussi $n-i-1 \geqslant k$ et $\tilde{\rho}_j$ est un isomorphisme pour tout $j \leqslant k$ donc tout j. Si maintenant $i > k$, on a $H_i(\tilde{K}) = 0$, ce qui entraîne que $H_i(\tilde{L}) = 0$ car $\tilde{\rho}_j$ est un épimorphisme pour $j \leqslant n-i$ et que $n-i \geqslant i$. Ce point acquis, il est aisé de déduire que $\tilde{\rho}_j$ est un isomorphisme pour tout j.

2) la condition b) est vérifiée :

Par position générale, on déduit que $\tilde{\rho}_j$ est un isomorphisme pour $j \leqslant n-i-1 = \frac{n-3}{2}$ et est surjectif pour $j = n-i = \frac{n-1}{2}$.

Comme (Σ^n, f) est une K^∞-variété, l'inclusion de $\Sigma^n - F(\text{int}E^n(K))$ dans L^{n+1} jouit des mêmes propriétés de connexité (où $F : E^n(K) \to \Sigma$ est un PL-plongement avec $F \circ e$ homotope à f).

En considérant L^{n+1} comme un cobordisme entre $F(E^n(K))$ et $\Sigma^n - F(\text{int}E^n(K))$ on pourra, par la méthode habituelle d'élimination des anses ([12]), trouver une décomposition en anses de L de la forme suivante :

$$L = F(E^n(K)) \times [0,1] \cup \text{anses d'indice } i \cup$$
$$\cup \text{ anses d'indice } i+1$$

L'inégalité :

$$k \leqslant \left[\frac{n-2}{2} \right] = \frac{n-3}{2} = i - 2 \qquad (1)$$

et l'hypothèse que L est acyclique imposent que le nombre des anses d'indice i est égal à celui des anses d'indice i+1; cette égalité se retrouve dans le revêtement universel puisque $\pi_1(L) \cong \pi_1(K)$ est fini.

Comme $\widetilde{L}$ est de dimension homotopique i, on a $H_{i+1}(\widetilde{L}) = 0$ ce qui implique que l'homomorphisme :

$$\delta : H_{i+1}(\widetilde{L}, \widetilde{L}_i) \to H_i(\widetilde{L}_i, \widetilde{L}_{i-1})$$

est injectif (où $\widetilde{L}_s$ désigne la partie de $\widetilde{L}$ formée de la réunion des anses d'indice $\leqslant s$). On en déduit que le rang de $H_i(\widetilde{L})$ est zéro. Comme $\widetilde{L}$ est compacte et a le type d'homotopie d'un polyèdre de dimension i, $H_i(\widetilde{L})$ doit être abélien libre et donc $H_i(\widetilde{L}) = 0$.

En résumé, nous avons la situation suivante :

- $\widetilde{\rho}_j$ est un isomorphisme pour $j \leqslant i-2$ (position générale).
- $\widetilde{\rho}_{i-1}$ est un épimorphisme (position générale) mais $H_{i-1}(\widetilde{K}) = 0$ par l'inégalité (1).
- $H_j(\widetilde{K}) = H_j(\widetilde{L}) = 0$ pour $j \geqslant i$.

D'où on déduit que $\widetilde{\rho}_j$ est un isomorphisme pour tout j.

CHAPITRE 4

Suites exactes

4.1.- Les groupes $\wedge_n(K)$

Soit $\wedge_n(K)$ le groupe des classes de PL-concordance de PL-automorphismes de $BdE^n(K) = Bd(E^{n-1}(K) \times [-1,1])$ qui sont l'identité sur :

$$B = (E^{n-1}(K) \times \{-1\}) \cup (BdE^{n-1}(K) \times [-1,1])$$

La loi de composition est bien-entendu la composition des applications.

Les concordances peuvent être supposées égales à l'identité au-dessus de B ou non. Ceci revient au même en vertu du lemme suivant :

Lemme 4.1.1.-

Si deux PL-automorphismes g et h de $BdE^n(K)$ qui sont l'identité sur B sont PL-concordants, ils peuvent l'être par une PL-concordance qui reste l'identité sur $B \times I$

Démonstration :

Il suffit de démontrer ce lemme dans le cas où g = identité. Il existe alors un PL-automorphisme H de $E^{n-1}(K) \times [-1,1] = E^n(K)$ tel que $H|BdE^n(K) = h$. Notons :

$$H(x,t) = (H_1(x,t),\ H_2(x,t)).$$

La PL-concordance :

$$\widetilde{H} : Bd(E^{n-1}(K) \times [-1,1]) \times I \longrightarrow Bd(E^{n-1}(K) \times [-1,1]) \times I$$

désirée sera alors donnée par :

$$H((x,t);s) = \begin{cases} -((x,t);s) \text{ si } (x,t) \in B \\ -((H_1(x,1-2s),1);\frac{-1}{2} H_2(x,1-2s) + \frac{1}{2}) \text{ si } t = 1 \end{cases}$$

Proposition 4.1.2 :

$\Lambda_n(K)$ est un groupe abélien ($n \geq 2k+2$).

Démonstration :

Identifions $\Lambda_n(K)$ avec le groupe des classes de PL-concordance de PL-automorphismes de $E^{n-1}(K)$ qui sont l'identité sur $BdE^{n-1}(K)$ (les concordances sont supposées fixes sur le bord). Comme $n \geq 2k+2$, il résulte de nos définitions (cf. chap. 1) que $E^{n-1}(K) = E^{n-2}(K) \times [-1,1]$.

L'idée de la démonstration est de construire des représentants de α_0 et $\alpha_1 \in \Lambda_n(K)$ ayant des supports disjoints. La commutativité de $\Lambda_n(K)$ en résultera directement.

Soit h un automorphisme de $E^{n-1}(K)$ avec $h|BdE^{n-1}(K) = id$. Par unicité des voisinages réguliers, on peut, sans changer la classe de h dans $\Lambda_n(K)$, supposer que :

$$h(E^{n-2}(K)\times[-1,0]) = E^{n-2}(K)\times[-1,0]$$

Nous allons tout d'abord construire un PL-automorphisme H_0 de $(E^{n-2}(K) \times [-1,0]) \times I$ de la manière suivante : on pose tout d'abord :

$H_0((x,t);\ 0) = (h(x,t);\ 0)$ pour tout $(x,t) \in E^{n-2}(K) \times [-1,0]$

et $H_0((x,t);s) = ((x,t);s)$

lorsque $x \in BdE^{n-2}(K)$

ou $t = 1$

ou $s = 1$

ce qui nous définit H_0 sur un sous-espace

$$B \subset (E^{n-2}(K) \times [-1,0]) \times I$$

Comme la paire :

$$((E^{n-2}(K) \times [-1,0]) \times I \quad , B)$$

peut s'identifier à la paire $(B \times [0,1],\ B \times \{0\})$, on pourra étendre H_0 en un PL-automorphisme de $(E^{n-2}(K) \times [-1,0]) \times I$ qui constituera une PL-concordance(mouvante sur le bord) de $h \mid E^{n-2}(K) \times [-1,0]$ vers l'identité.

De la même manière, on définira un PL-automorphisme H de $E^{n-1}(K) \times [0,1]$ par l'extension de :

$$H \mid (E^{n-2}(K) \times [-1,0]) \times I \quad = H_0$$

$$H(z,0) = (z,0) \text{ pour tout } z \in E^{n-1}(K)$$

et $$H(z,s) = (z,s) \text{ si } z \in BdE^{n-1}(K).$$

La construction de H montre que toute classe α_0 de $\Lambda_n(K)$ contient un représentant h_0 tel que $h_0 \mid E^{n-2}(K) \times [-1,0] = \mathrm{id}$. D'une manière analogue, on pourra trouver un représentant h_1 d'une classe arbitraire $\alpha_1 \in \Lambda_n(K)$ tel que $h_1 \mid E^{n-2}(K) \times [0,1] = \mathrm{id}$. On a alors que $h_0 \circ h_1 = h_1 \circ h_0$ d'où $\alpha_0 \circ \alpha_1 = \alpha_1 \circ \alpha_0$.

A tout automorphisme h de $BdE^n(K)$ représentant une classe de $\Lambda_n(K)$ on peut associer une K^∞-sphère d'homologie (Σ^n, f) construite de la manière suivante :

$$\Sigma = \left(E^n(K) \times \{-1\} \cup BdE^n(K) \times [-1,1]\right) \sqcup E^n(K) \times \{1\} \Big/ \left\{ \begin{array}{l} (x,1) \cong (h(x),1) \\ x \in BdE^n(K) \end{array} \right\}$$

$f : K \longrightarrow \Sigma$ est la composition :

$$K \xrightarrow{\ e\ } E^n(K) \times \{-1\} \longrightarrow \Sigma$$

Si $E^n(K) \times \{-1\} \cup BdE^n(K) \times [-1,1]$ et $E^n(K) \times \{1\}$ sont munis de l'orientation induite par leur inclusion dans $E^{n+1}(K)$, Σ est naturellement orienté puisque h préserve l'orientation.

Proposition 4.1.3 :

La correspondance construite ci-dessus définit un homomorphisme :

$$\varepsilon_n : \Lambda_n(K) \longrightarrow \Gamma_n(K).$$

Démonstration :

La démonstration du résultat analogue pour les sphères d'homotopie différentiables ([19] lemma 4.1) se transpose aisément dans notre cas. Nous laisserons au lecteur le soin de cette vérification.

4.2.- Une suite exacte

Soit π un groupe. Le groupe de Whitehead de π, $Wh(\pi)$, est un $Z(\mathbb{Z}_2)$-module (où $\mathbb{Z}_2$ dénote les entiers modulo 2) par l'involution naturelle $w \to \bar{w}$ (cf. [20] § 6).
Rappelons que cette involution est définie de la manière suivante : Si $r = \sum n_\sigma \sigma \in \mathbb{Z}\pi (n \in \mathbb{Z},\ \sigma \in \pi)$, on pose $\bar{r} = \sum n_\sigma \sigma^{-1}$
L'involution sur $Wh(\pi)$ est alors induite par l'anti-automorphisme de $Gl(\mathbb{Z}\pi)$ qui, à chaque matrice (a_{ij}) fait correspondre la matrice $(\bar{a}_{ji})$.

Les groupes $H^n(\mathbb{Z}_2;\ Wh(\pi))$ de cohomologie de $\mathbb{Z}_2$ à coefficients dans ce $Z(\mathbb{Z}_2)$-module seront identifiés à : (cf. Cartan-Eilenberg, Homological Algebra p 250)

$$\frac{\{\, w \in Wh(\pi) \mid w = (-1)^n \bar{w} \,\}}{\{\, w \in Wh(\pi) \mid w = x + (-1)^n \bar{x},\ x \in Wh(\pi) \}}$$

Théorème 4.2.1

Soit K un polyèdre acyclique de dimension k. Pour tout $n \geq 2k+2$, il existe une suite exacte infinie à gauche de groupes abéliens et d'homomorphismes

$$\longrightarrow \Gamma_{n+1}(K) \xrightarrow{\beta_{n+1}} H^n(\mathbb{Z}_2; Wh(\pi_1(K))) \xrightarrow{\alpha_n} \Lambda_n(K) \xrightarrow{\varepsilon_n} \Gamma_n(K) \xrightarrow{\beta_n}$$

$$\xrightarrow{\beta_n} H^{n-1}(\mathbb{Z}_2; Wh(\pi_1(K)))$$

La suite du paragraphe est entièrement consacrée à la démonstration de ce théorème.

Démonstration :

L'homomorphisme ε_n a déjà été défini au § 4.1. Le premier travail est de définir α_n et β_n.

Définition de α_n :

Nous allons tout d'abord définir un homomorphisme $\tilde{\alpha}_n : A_n = \{w \in Wh(\pi_1(K)) \mid w = (-1)^n \overline{w}\} \to \Lambda_n(K)$.
Pour cela, soit $(W^{n+1}, E^n(K), V^n)$ un h-cobordisme de variété à bord de torsion $\tau(W, E^n(K)) = \tau \in A_n$. La propriété $\tau = (-1)^n \bar{\tau}$ implique que V est un s-cobordisme de variété à bord de base $E^{n-1}(K) \times \{-1\}$. Remarquons que $BdV = BdE^n(K)$. Il existe donc

un PL-homeomorphisme $g : E^{n-1}(K) \times [-1,1] \to V$ avec

$$g \mid E^{n-1}(K) \times \{-1\} \cup BdE^{n-1}(K) \times [-1,1] = id. \qquad (1)$$

Par définition, $\tilde{\alpha}_n(\tau)$ sera la classe dans $\wedge_n(K)$ de $g \mid BdE^n(K)$. Ceci est possible en vertu du lemme suivant :

Lemme 4.2.2

La classe de $g \mid BdE^n(K)$ dans $\wedge_n(K)$ est indépendante :

a) du choix du h-cobordisme W de torsion τ

b) du choix du PL-homeomorphisme $g : E^n(K) \to V$.

Démonstration du lemme 4.2.2

Le point a) découle du fait que si $(W,E^n(K),V)$ et $(W',E^n(K),V')$ sont deux h-cobordismes de torsion τ, il existe un PL-homeomorphisme $H : W \to W'$ avec :

$$H \mid E^n(K) \cup BdE^n(K) \times [0,1] = id.$$

Pour démontrer le point b), soient g et $g' : E^n(K) \to V$ deux PL-homeomorphismes satisfaisant (1). $g^{-1} \cdot g'$ sera alors un PL-automorphisme de $E^n(K)$ tel que :

$$g^{-1} \cdot g' \mid E^{n-1}(K) \times \{-1\} = id.$$

Par le th. 1.1, $g^{-1} \circ g'$ est concordant à l'identité, d'où l'on déduit que les restrictions de g et de g' à $BdE^n(K)$ représentent la même classe de $\Lambda_n(K)$.

Nous allons maintenant montrer que $\tilde{\alpha}_n$ est un homomorphisme.

Soient τ_1 et $\tau_2 \in A_n$. Pour définir $\tilde{\alpha}_n(\tau_1)$, choisissons un h-cobordisme $(W_1, E^n(K), V_1)$ tel que W_1 soit un produit au dessus de $T = E^{n-2}(K)\times[-1,0]\times[-1,1] \subset E^n(K)$. L'homeomorphisme $g_1 : E^n(K) \to V_1$ sera choisi tel que $g_1 \quad T$ = identité. Pratiquons maintenant de manière analogue pour $(W_2, E^n(K), V_2)$ en remplaçant T par $T' = E^{n-2}(K)\times[0,1]\times[-1,1]$.

La formule d'addition des torsions (cf. [25] th. 6.5) montre que le h-cobordisme $(W, E^n(K), V)$ de torsion $\tau_1 + \tau_2$ peut alors être construit en collant la partie de W_1 au-dessus de T à la partie de W_2 au-dessus de T'.

Toutes ces constructions permettent maintenant de choisir $g : E^n(K) \to V$ par :

$$g = g_1 \circ g_2$$

et de conclure ainsi que

$$\tilde{\alpha}_n(\tau_1 + \tau_2) = \tilde{\alpha}_n(\tau_1) + \tilde{\alpha}_n(\tau_2)$$

Nous allons maintenant vérifier que $\tilde{\alpha}_n(\tau + (-1)^n\bar{\tau}) = 0$ pour tout $\tau \in Wh(\pi_1(K))$. Ceci nous permettra de définir $\alpha_n : H^n(\mathbb{Z}_2; Wh(\pi_1(K))) \longrightarrow \Lambda_n(K)$ par :

$$\alpha_n(\ [\tau]\ ) = \tilde{\alpha}_n(\tau)$$

où $[\tau]$ désigne la classe de τ dans $H^n(\mathbb{Z}_2; Wh(\pi_1(K)))$.

Pour définir $\tilde{\alpha}_n(\tau + (-1)^n\bar{\tau})$, on construit un h-cobordisme $(W, E^n(K), V)$ de torsion $\tau + (-1)^n\bar{\tau}$ par recollement de deux copies d'un h-cobordisme $(W', E^n(K), V')$ de torsion τ le long de V'. V est alors égal à $E^n(K)$ et l'on peut choisir $g = id$. Ceci montre que $\tilde{\alpha}_n(\tau + (-1)^n\,\bar{\tau}\,) = 0$ pour tout $\tau \in Wh(\pi_1(K))$.

Définition de β_n :

Soit (Σ^n, f) une K^∞-sphère d'homologie et $F : E^n(K) \to \Sigma$ un PL-plongement avec $F \circ e$ homotope à f. Soit $B^n = \Sigma^n - \mathrm{int}F(E^n(K))$ et $\mu : K \to B^n$ la composition $F \circ e$. Par définition d'une K^∞-variété (§ 3.1), μ est une équivalence d'homotopie et B peut être considéré comme un h-cobordisme entre $F(E^{n-1}(K) \times \{-1\})$ et $F(E^{n-1}(K) \times \{1\})$.

Associons à toute K^{∞}-sphère d'homologie (Σ^n,f) l'élément de $Wh(\pi_1(K))$ égal à $\tau(\mu)$.
Comme μ est homotope dans B^n à $F\circ e_1$ (où e_1 est l'application qui envoie K dans $E^{n-1}(K) \times \{1\}$), la formule de dualité ([20]p. 394) implique que $\tau(\mu) = (-1)^{n-1}\,\overline{\tau(\mu)}$.

Voyons maintenant ce que devient $\tau(\mu)$ lorsqu'on fait varier (Σ^n,f) dans sa classe de K^{∞}-cobordisme. Si (Σ',f') est K^{∞}-cobordante à (Σ,f), il existe un h-cobordisme de torsion $\sigma \in Wh(\pi_1(K))$ dans lequel f et f' sont homotopes. Il s'en suit que $\tau(\mu')$ diffèrera de $\tau(\mu)$ d'un facteur $\sigma + (-1)^{n-1}\,\overline{\sigma}$. Ceci nous permet de définir :

$$\beta_n([(\Sigma^n,f)]) = [\tau(\mu)] \in H^{n-1}(\mathbb{Z}_2;Wh(\pi_1(K))).$$

β_n est un homomorphisme. En effet, si on a :

$$(\Sigma_1^n,f_1) \#_K (\Sigma_2^n,f_2) = (\Sigma^n,f)$$

avec les applications $\mu_i : K \to B_i$ $(i = 1,2)$ et $\mu : K \to B$ (notations comme précèdemment), le fait que :

$$\tau(\mu) = \tau(\mu_1) + \tau(\mu_2)$$

résulte directement de la description geométrique du groupe de Whitehead d'Eckmann-Maumary (cf. [5]). On a donc que β_n est un homomorphisme.

Exactitude en $\Gamma_n(K)$:

Le fait que $\beta_n \circ \varepsilon_n = 0$ est banal. Démontrons que $\operatorname{Ker} \beta_n \subset \operatorname{Im} \varepsilon_n$.

Soit (Σ^n, f) une K^∞-sphère d'homologie avec $\tau(\mu) = \sigma + (-1)^{n-1}\,\overline{\sigma}$ (voir la définition de β_n pour les notations). En utilisant un h-cobordisme (W,Σ,Σ') de torsion $-\sigma$, on obtient une K^∞-sphère d'homologie (Σ',f') avec $\tau(\mu') = 0$. Soit $B' = \Sigma' - \operatorname{int} F'(E^n(K))$, où $F' : E^n(K) \to \Sigma'$ est un PL-plongement avec $F' \circ e$ homotope à f'. B' est alors un s-cobordisme partant de $E^{n-1}(K)$ et $\operatorname{BdB}' = F(\operatorname{BdE}^n(K))$. Il va donc exister un PL-homeomorphisme $G : E^n(K) \to B'$ tel que $G \mid E^{n-1}(K) \times \{-1\} \cup \operatorname{BdE}^{n-1}(K) \times [-1,1] = F!$ (Σ',f') sera alors équivalente à l'image par ε_n de la classe de concordance de

$$(F')^{-1} \circ (G \mid \operatorname{BdE}^n(K)).$$

Exactitude en $\Lambda_n(K)$:

Montrons tout d'abord que $\varepsilon_n \circ \alpha_n = 0$. La classe de $\varepsilon_n \circ \alpha_n(\tau)$ contient un représentant (Σ^n,f) où Σ est le bord d'une variété W^{n+1} qui est un h-cobordisme de torsion τ partant de $E^n(K)$. Par la proposition 3.1.2, on en déduit que $\varepsilon_n \circ \alpha_n = 0$. Le fait que $\operatorname{Ker} \varepsilon_n \subset \operatorname{Im} \alpha_n$ s'obtient par le même raisonnement à l'envers.

Exactitude en $H^n(\mathbb{Z}_2;Wh(\pi_1(K)))$:

a) $\alpha_n \circ \beta_{n+1} = 0$:

Si un élément de $H^n(\mathbb{Z}_2;Wh(\pi_1(K)))$ est dans l'image de β_{n+1}, il admet un représentant τ tel qu'il existe un h-cobordisme $(W,E^n(K),E^n(K))$ de torsion τ avec $BdW = BdE^n(K)$ (tout ceci d'après la définition de β_{n+1}). Il est alors clair que $\alpha_n([\tau]) = 0$.

b) $\mathrm{Ker}\ \alpha_n \subset \mathrm{Im}\ \beta_{n+1}$:

Soit $\tau \in Wh(\pi_1(K))$ représentant une classe $[\tau]$ de $H^n(\mathbb{Z}_2;Wh(\pi_1(K)))$, avec $\alpha_n([\tau]) = 0$. Cela signifie que si $(W,E^n(K),V)$ est un h-cobordisme de torsion τ, BdW est une variété obtenue en collant $E^n(K) \times \{-1\} \cup BdE^n(K) \times [-1,1]$ à $E^n(K) \times \{1\}$ à l'aide d'un PL-automorphisme de $BdE^n(K) \times \{1\}$ PL-concordant à l'identité. BdW est donc PL-homeomorphe à $BdE^{n+1}(K)$ par un PL-homeomorphisme égal à l'identité sur $E^n(K) \times \{-1\}$. En collant $E^{n+1}(K)$ à W à l'aide de ce PL-homeomorphisme, on obtient une K^{∞}-sphère d'homologie de dimension n+1 qui représente un élément de $\Gamma_{n+1}(K)$ dont l'image par β_{n+1} est $[\tau]$.

La démonstration du th. 4.2.1 est ainsi achevée.

4.3 Relations avec la suite exacte de Rothenberg

Dans [24], Shaneson montre l'existence d'une suite exacte pour tout groupe G, dite "suite exacte de Rothenberg" :

$$\xrightarrow{a_n} L_n(G) \xrightarrow{e_n} L_n^h(G) \xrightarrow{b_n} H^n(Z_2;Wh(G)) \xrightarrow{a_{n-1}} L_{n-1}(G)$$

où $L_n(G)$ (resp. $L_n^h(G)$) désigne le groupe d'obstruction à la chirurgie de Wall pour obtenir une équivalence d'homotopie simple (resp. une équivalence d'homotopie).

Remarquons qu'avec nos conventions d'identification (voir § 4.2), on a :

$$H^{n+1}(Z_2;Wh(G)) = H^{n-1}(Z_2;Wh(G)).$$

Dans ce paragraphe, nous allons démontrer le théorème suivant :

Théorème 4.3.1

Soit K un polyèdre acyclique de dimension k. Alors pour tout entier $n \geqslant 2k+2$, il existe un diagramme commutatif, infini à gauche, de la forme suivante :

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r] & \Gamma_{n+1}(K) \arrow[r, "\beta_{n+1}"] & H^n \arrow[r, "\alpha_n"] & \Lambda_n(K) \arrow[r, "\varepsilon_n"] & \Gamma_n(K) \arrow[r, "\beta_n"] & H^{n-1} \\
{} \arrow[r] & L_{n+2}^h(\pi) \arrow[r, "b_{n+2}"] \arrow[u, "\rho_{n+1}^h"] & H^{n+2} \arrow[r, "a_{n+1}"] \arrow[u, equal] & L_{n+1}(\pi) \arrow[r, "e_{n+1}"] \arrow[u, "\rho_n"] & L_{n+1}^h(\pi) \arrow[r, "b_{n+1}"] \arrow[u, "\rho_n^h"] & H^{n+1} \arrow[u, equal]
\end{tikzcd}$$

./.

où la première ligne est la suite exacte du théorème 4.2.1 et la seconde celle de Rothenberg. H^i désigne $H^i(\mathbb{Z}_2 ; Wh(\pi_1(K)))$ et π désigne $\pi_1(K)$.

Démonstration

a) Interprétation géométrique des groupes de Wall et des applications de la suite exacte de Rothenberg.

Les théorèmes 5.8 et 6.5 de [30] donnent la description géométrique suivante des groupes de Wall : les éléments de $L^h_{n+1}(\pi_1(K))$ (resp. $L_{n+1}(\pi_1(K))$) sont en bijection avec les classes de bordisme de triples (W,φ,f) où :

- W est un PL-cobordisme entre $E^n(K)$ et une PL-variété V (cobordisme trivial sur le bord)
- $\varphi : (W, E^n(K) \cup BdE^n(K) \times I, V), V) \to$
  $\longrightarrow (E^n(K)\times I , E^n(K)\times\{0\} \cup BdE^n(K)\times I , E^n(K)\times\{1\}$
  est une application de degré 1 avec :
  $\varphi|E^n(K) \cup BdE^n(K) \times I = id$, et
  $\varphi|V : V \to E^n(K) \times \{1\}$ est une équivalence d'homotopie (resp. une équivalence d'homotopie simple).
- F est une trivialisation stable de $\tau(W) \oplus \varphi^*(\nu)$ où $\tau(W)$ est le micro-fibré tangent à W et ν le micro-fibré normal stable à $E^n(K) \times I$. F doit étendre la trivialisation stable évidente sur $E^n(K) \cup BdE^n(K) \times I$.

Les bordismes de tels triples sont bien entendu assujettis à des conditions analogues. A un triple (W,φ,F) on peut associer un élément de $L^h_{n+1}(\pi_1(K))$ (resp. $L_{n+1}(\pi_1(K))$ qui est l'obstruction à trouver dans la classe de (W,φ,F) un représentant (W', φ', F') avec φ'une équivalence d'homotopie (resp. une équivalence d'homotopie simple). Cette correspondance donne la bijection de notre ensemble de classes de bordisme de triples avec $L^h_{n+1}(\pi_1(K))$ (resp. $L_{n+1}(\pi_1(K))$).

Nous allons maintenant donner une description géométrique de la somme dans $L^h_{n+1}(\pi_1(K))$ (ou dans $L_{n+1}(\pi_1(K))$). Pour cela, construisons le cobordisme W_1 du triple (W_1,φ_1,F_1) représentant une classe arbitraire $\theta_1 \in L^h_{n+1}(\pi_1(K))$(ou $L_{n+1}(\pi_1(K))$ par attachement d'anses à $E^n(K) \times I$., comme cela est fait dans la démonstration des théorèmes 5.8 et 6.5 de [30]. Il est clair que l'on peut s'arranger pour ne pas attacher d'anses au-dessus de $E^{n-1}(K) \times [0,1] \subset E^n(K)$. W_1 sera alors formé de la réunion de $(E^{n-1}(K) \times [0,1]) \times I$ et d'un cobordisme $\overline{W}_1$ de base $E^{n-1}(K) \times [-1,0]$ avec :

$$\overline{W}_1 \cap \{(E^{n-1}(K) \times [0,1]) \times I = (E^{n-1}(K) \times \{0\}) \times I .$$

De plus on aura

$$\varphi_1 \mid (E^{n-1}(K) \times [0,1]) \times I = \mathrm{id}$$

et F_1 restreint à ce dernier sous-espace sera la trivialisation stable standard.

Un tel triple (W_1, φ_1, F_1) sera dit "trivial au-dessus de $E^{n-1}(K) \times [0,1]$".

On a bien entendu une définition analogue de triple "trivial au-dessus de $E^{n-1}(K) \times [-1,0]$".
A un élément arbitraire $\theta_2 \in L^h_{n+1}(\pi_1(K))$ (ou $L_{n+1}(\pi_1(K))$ associons donc un triple (W_2, φ_2, F_2) trivial au-dessus de $E^{n-1}(K) \times [-1,0]$.

Etant donné la façon dont sont construits W_1 et W_2, il résulte directement de la définition des groupes de Wall (c.f. chap. 5 et 6 de [30]) que l'élément somme $\theta_1 + \theta_2$ peut être représenté géométriquement par la classe du triple (W, φ, f) défini par :

$$W = W_1 \cup W_2 \quad (\text{réunion le long de } (E^{n-1}(K) \times \{0\}) \times I\ )$$

$$\left.\begin{array}{l} \varphi\ |W_i = \varphi_i \\ F\ |W_i = F_i \end{array}\right\} \quad (i = 1,2).$$

Nous avons ainsi une déscription géométrique de la somme dans $L^h_{n+1}(\pi_1(K))$ (ou $L_{n+1}(\pi_1(K))$); elle est équivalente à celle de [24] prop.1.4, convient cependant mieux aux techniques que nous emploierons dans la démonstration du théorème 4.3.1.

Avec ces descriptions, la définition géométrique des homomorphismes a_{n+1}, b_{n+1} et e_{n+1} est la suivante (cf. [24], pp. 313-317) :

L'homomorphisme e_{n+1} est évident : on oublie que l'équivalence d'homotopie $\varphi|V$ est simple.

Pour définir b_{n+1}, prenons un triple (W^{n+1},φ,F) représentant un élément $\theta \in L^h_{n+1}(\pi_1(K))$. W est donc PL-cobordisme entre $E^n(K)$ et une PL-variété V, et on a une application $i : K \to V$ donnée par la composition $K \to E^{n-1}(K) \times \{1\} \subset V$. On vérifie de la même manière qu'au § 4.2 que la torsion $\sigma = i_*^{-1}(\tau(\varphi|V))$ satisfait à : $\sigma = (-1)^{n-1}\overline{\sigma}$ et que si (W',φ',F') est un autre triple dans la classe de bordisme de (W,φ,F), σ' différera de σ d'un facteur de la forme $\omega + (-1)^{n-1}\overline{\omega}$. On posera alors :

$$b_{n+1}(\theta) = [\sigma]$$

où $[\sigma]$ désigne la classe de σ dans $H^{n+1}(Z_2;Wh(\pi_1(K)))$ qui, d'après ce que l'on vient de voir, est bien définie.

Passons à la définition de a_{n+1}. Posons, pour simplifier l'écriture : $B = E^n(K) \cup Bd\, E^n(K) \times I$. Soit $(W,E^n(K),V)$ un h-cobordisme de torsion τ et

$\Phi : (W,B,V) \longrightarrow (E^n(K) \times I \;,\; E^n(K) \times \{0\} \cup Bd E^n(K) \times I \;,\; E^n(K) \times \{1\})$

une application fabriquée à l'aide d'une rétraction par déformation de W sur $E^n(K)$ et telle que $\Phi\,|B = id$. Comme l'inclusion de B dans W est une équivalence d'homotopie, il existe une trivialisation stable de $\tau(W) \oplus \varphi^*(\nu)$ étendant la trivialisation évidente sur B; deux telles trivialisations stables sont pour la même raison, homotopes modulo B. Enfin, remarquons que la condition $\tau = (-1)^n\,\overline{\tau}$ entraîne que $\Phi\,|V : V \to E^n(K) \times \{1\}$ est une équivalence d'homotopie simple. Lorsque nous aurons vérifié que la classe de bordisme du triple (W,Φ,F) est indépendante des choix possibles de Φ et de W (le cas de F est déjà règlé), nous pourrons alors définir une application :

$$\tilde{a}_{n+1} : \{ \tau \in Wh(\pi_1(K)) \mid \tau = (-1)^n \bar{\tau} \} \longrightarrow L_{n+1}(\pi_1(K))$$

par :

$$\tilde{a}_{n+1}(\tau) = (W,\Phi,F).$$

Si

$$\Phi' : (W,B,V) \longrightarrow (E^n(K)\times I\ ,\ E^n(K)\times\{0\}\cup Bd E^n(K)\times I\ ,\ E^n(K)\times\{1\})$$

est une application construite de la même manière que Φ, il existera une homotopie Φ_t entre les mêmes triples d'espaces avec $\Phi_0 = \Phi$ et $\Phi_1 = \Phi'$; cela implique que $(W,\Phi,F) = (W,\Phi,F')$.

Enfin, si (W',Φ',F') est un autre triple construit comme ci-dessus avec $(W',E^n(K),V')$ un autre choix de h-cobordisme de torsion τ, il existera un PL-homeomorphisme $H : W \to W'$ avec $H|B = id$. Soit Ω le mapping-cylindre de H. On trouvera aisément une application :

$$\psi : \Omega \longrightarrow E^n(K) \times I \times I$$

telle que :

$$\psi \mid W = \Phi$$

$$\psi \mid B \times I \quad = id$$

$$\psi\ (W') = E^n(K) \times I \times \{1\}$$

$$\psi \mid V \times I \cup_{H|V} V' : V \times I \cup_{H|V} V' \longrightarrow E^n(K) \times \{1\} \times I$$

est une équivalence d'homotopie simple.

Par ce qui précède, on a également que $\psi \mid W' : W' \longrightarrow E^n(K) \times I \times \{1\}$ est homotope à Φ' modulo B.

Soit G une trivialisation stable de $\tau(\Omega) \oplus \psi^*(\nu)$ étendant **la trivialisation évidente sur** $W \cup B \times I$. **Pour les mêmes** raisons que pour F, G existe et est unique à homotopie modulo $W \cup B \times I$ près, et $G|W'$ est homotope à F' modulo B. (Ω,ψ,G) constitue dès lors un bordisme de (W,Φ,F) vers un triple lui-même équivalent à (W',Φ',F'). $\tilde{a}_{n+1}$ est donc bien défini.

Avec nos descriptions géométriques de la somme dans $L_{n+1}(\pi_1(K))$ (p. 49) et dans $Wh(\pi_1(K))$ (§ 4.2), il est clair que $\tilde{a}_{n+1}$ est un homomorphisme.

Pour se convaincre maintenant que $\tilde{a}_{n+1}(\tau + (-1)^n \bar{\tau}) = 0$, reprenons la construction que nous avons faite pour démontrer que la définition de $\tilde{a}_{n+1}(\tau)$ est indépendante du choix du h-cobordisme W. Appliquons-la à $W' = W$ et $H = id$. Si

$$\overline{W} = W \cup B \times I \cup W \subset \mathrm{Bd}\, \Omega$$

alors le triple $(\overline{W},\psi|\overline{W},G|\overline{W})$ représente $\tilde{a}_{n+1}(\tau + (-1)^n \bar{\tau})$ (quelques changements de paramètres anodins sont à effectuer pour retomber sur les définitions habituelles). L'existence de (Ω,ψ,G) prouve que $\tilde{a}_{n+1}(\tau + (-1)^n \bar{\tau}) = 0$.

D'où, par passage au quotient, la définition de l'homomorphisme $a_{n+1} : H^{n+2}(\mathbb{Z}_2;Wh(\pi_1(K))) \longrightarrow L_{n+1}(\pi_1(K))$.

b) Définition de ρ_n^h

Soit $\theta \in L_{n+1}^h(\pi_1(K))$ représenté géométriquement par un triple (W^{n+1}, φ, F). L'inclusion de $E^n(K)$ dans BdW donne une application $f : K \to \mathrm{BdW}$. (BdW,f) est alors une K^∞-sphère d'homologie représentant une classe de $\Gamma_n(K)$ qui sera par définition $\rho_n^h(\theta)$. Il est clair que la classe de K^∞-cobordisme de (BdW,f) ne dépend que de la classe de bordisme de (W,φ,F). De plus, nos descriptions géométriques des sommes dans $L_{n+1}^h(\pi_1(K))$ et dans $\Gamma_n(K)$ montrent directement que ρ_n^h est un homomorphisme.

c) Définition de ρ_n

Soit (W,φ,F) un triple représentant un élément $\theta \in L_{n+1}(\pi_1(K))$. W^{n+1} sera donc un cobordisme entre $E^n(K)$ et une PL-variété V^n, variété que l'on regardera comme un s-cobordisme partant de $E^{n-1}(K)$ avec $\mathrm{BdV} = \mathrm{BdE}^n(K)$. Cela permet de construire, comme au § 4.2, un élément de $\wedge_n(K)$ que l'on posera égal à $\rho_n(\theta)$. Le fait que ρ_n est bien défini et est un homomorphisme se démontre de la même manière que pour α_n au § 4.2.

d) Vérification que les carrés commutent.

Le fait que :

$$\alpha_n = \rho_n \circ a_{n+1}$$

et que

$$\rho_n^h \circ e_{n+1} = \varepsilon_n \circ \rho_n$$

découle directement de la définition des applications.

Montrons alors que $\beta_n \circ \rho_n^h = b_{n+1}$. Soit (W,φ,F) un triple représentant un élément $\theta \in L_{n+1}^h(\pi_1(K))$, avec $(W^{n+1},E^n(K),V)$ un PL-cobordisme. On a une application $i : K \to V$ donnée par la composition $K \to E^{n-1}(K) \times \{1\} \subset V$. Par définition des applications, on a :

$$\beta_n \circ \rho_n^h(\theta) = [\tau(i)]$$

et

$$b_{n+1}(\theta) = [\sigma]$$

où $\sigma = i_*^{-1}(\tau(\varphi|V))$. Or, dans $Wh(\pi_1(K))$, on a $\tau(i) = -\sigma$. Mais, comme dans $H^{n-1}(\mathbb{Z}_2;Wh(\pi_1(K)))$ tous les éléments sont d'ordre 2, on en déduit que

$$\beta_n \circ \rho_n^h = b_{n+1} .$$

Chapitre 5

Calculs pour le groupe de l'icosaèdre

5.1 Présentation des résultats

Soit $\Delta = \left\{ a,b \mid a^5 = b^3 = (ab)^2 \right\}$ le groupe binaire de l'icosaèdre, à 120 éléments.

Théorème 5.1.1

Soit K^k un polyèdre acyclique avec $\pi_1(K) \cong \Delta$. Alors, pour tout n impair avec $n \geqslant 2k+2$, on a que

$$\Gamma_n(K) \neq 0.$$

Remarquons que, comme la présentation de Δ donnée ci-dessus compte un nombre égal de générateurs et relations, on peut trouver un polyèdre acyclique K de dimension 2 avec $\pi_1(K) \cong \Delta$. Dans ce cas, les "premières" sphères d'homologie qui ne sont pas des sphères de Newmann (cf. § 3.2), dont l'existence nous est révélée par le théorème 5.1.1, sont de dimension 7.

On pourra tirer de la démonstration de 5.1.1 le résultat suivant :

Addendum 5.1.1 bis

Pour tout entier $r \geqslant 1$ et n impair avec $n \geqslant 7$, il existe un polyèdre L de dimension 2 acyclique tel que $\Gamma_n(K)$ contienne au moins r éléments linéairement indépendants.

Pour démontrer ces théorèmes, nous allons utiliser quelques propriétés de $Wh(\Delta)$. Soit t un générateur du groupe cyclique d'ordre 5, noté C_5. On a un monomorphisme $\nu : C_5 \to \Delta$ en envoyant t sur a^2 (cf.[25]lemma 9.14). On sait que $Wh(C_5)$ est cyclique infini engendré par l'unité de $\mathbb{Z}C_5$: $-1 + t + t^{-1}$ (cf. [20] ex.6.6). De plus, le lemme 9.14 de [25] donne que $Wh(\ )(-1 + t + t^{-1}) = -1 + a^2 + a^{-2}$ **est un élément d'ordre infini** de $Wh(\Delta)$. Nous démontrerons le théorème suivant :

<u>Théorème 5.1.2</u>

L'unité $-1 + a^2 + a^{-2}$ de $\mathbb{Z}\Delta$ engendre un facteur direct de $Wh(\Delta)$.

Remarquons qu'un tel résultat ne peut s'obtenir par la méthode de démonstration du lemme 9.14 de [25]. En effet, cette démonstration utilise une représentation orthogonale de Δ se factorisant par une représentation du groupe alterné A_5 **qui admet la présentation** $A_5 = \{ a,b \quad a^5 = b^3 = (ab)^2 = 1 \}$. Or, $-1 + a^2 + a^{-2}$ n'engendre pas un facteur direct dans $Wh(A_5)$. En effet, si $\sigma = (a^{-1}b^{-1}a)\ ab\ (a^{-1}ba) \in A_5$, on a, dans $\mathbb{Z}A_5$, les égalités suivantes :

$$(a^3\sigma)^{-1}(1 + (1-a)\sigma)\, a^3\sigma = 1 - (1-a)\sigma$$

et

$$(1 + (1-a)\sigma)\,(1 - (1-a)\sigma) = (-1 + a^2 + a^{-2})^{-1}$$

La seconde égalité montre que $(1 + (1-a)\sigma)$ et $(1 - (1-a)\sigma)$ sont des unités de $\mathbb{Z}A_5$ qui, par la première égalité, représentent le même élément $\xi \in Wh(A_5)$ puisque l'une s'obtient en multipliant l'autre par des élément de A_5. A nouveau par la seconde formule, on voit que $-1 + a^2 + a^{-2} = \xi^{-2}$ dans $Wh(A_5)$ et donc que $-1 + a^2 + a^{-2}$ ne saurait engendrer un facteur direct de ce dernier groupe.

Dans le paragraphe suivant, nous allons démontrer les théorèmes 5.1.1 et 5.1.1 bis en admettant le théorème 5.1.2 qui sera démontré au § 5.3.

5.2 Démonstration des théorèmes 5.1.1 et 5.1.1 bis

Démonstration de 5.1.1 :

L'involution $\tau \to \bar{\tau}$ de $Wh(\Delta)$ laisse fixe l'élément $-1 + a^2 + a^{-2}$. Cette unité représente donc une classe $\underline{u} \in H^{2i}(Z_2;\ Wh(\Delta))$ qui est dans l'image de l'homomorphisme :

$$\nu_{2i} : H^{2i}(Z_2;\ Wh(C_5)) \longrightarrow H^{2i}(Z_2;\ Wh(\Delta))$$

induit par ν. La suite exacte de Rothenberg est naturelle pour les homomorphismes de groupes (fait banal avec la description algébrique de [24] de cette suite; remarquons qu'il ne semble pas possible de l'obtenir avec nos constructions géométriques). On a donc un diagramme commutatif de la forme suivante :

$$\begin{tikzcd}
L^h_{2i}(\Delta) \arrow[r, "b_{2i}"] & H^{2i}(\mathbb{Z}_2;Wh(\Delta)) & & \\
L^h_{2i}(C_5) \arrow[u] \arrow[r, "s_{2i}"] & H^{2i}(\mathbb{Z}_2;Wh(C_5)) \arrow[u, "\nu_{2i}"'] \arrow[r] & L_{2i-1}(C_5) \arrow[r] & {}
\end{tikzcd}$$

D'après le théorème de A. Bak [0] (démontré précèdemment par R. Lee dans le cas où i est pair [18]) $L_{2i-1}(C_5) = 0$ pour tout i. On en déduit que u est dans l'image de $\nu_{2i} \circ s_{2i}$ et donc dans l'image de b_{2i}. Le théorème 4.3.1 nous dit maintenant que b_{2i} se factorise par $\Gamma_{2i-1}(K)$:

$$\begin{tikzcd}
& \Gamma_{2i-1}(K) \arrow[dr, "\beta_{2i-1}"] & \\
L^h_{2i}(\Delta) \arrow[ur, "\rho^h_{2i-1}"] \arrow[rr, "b_{2i}"'] & & H^{2i}(\mathbb{Z}_2;Wh(\Delta))
\end{tikzcd}$$

On en déduit que $u \in \operatorname{Im} \beta_{2i-1}$. Nous allons prouver maintenant par l'absurde que $u \neq 0$. Cela démontrera que $\Gamma_{2i-1}(K) \neq 0$ pour tout i tel que $2i-1 \geqslant 2\dim K + 2$.

<u>Non-nullité de u</u> :

Supposons que $u = 0$. Il existe donc un élément x de $Wh(\Delta)$ tel que :

$$v = -1 + a^2 + a^{-2} = x + \bar{x}$$

Dénotons par $Wh'(\Delta)$ le quotient de $Wh(\Delta)$ par son sous-groupe de torsion et par V (resp. X) la classe de v (resp. x) dans $Wh'(\Delta)$. Comme $x - \bar{x}$ est un élément d'ordre fini dans $Wh(\Delta)$ (cf. 20 cor. 6.10) on déduit que $X = \bar{X}$ et que :

$$V = 2X$$

Or, par le th. 5.1.2 et passage au quotient, on sait que V engendre un facteur direct de $Wh'(\Delta)$. Ceci contredit l'égalité $V = 2X$ ci-dessus d'où on déduit que $u \neq 0$.

Démonstration de 5.1.1 bis :

Soit K un polyèdre acyclique de dimension 2 avec $\pi_1(K) = \Delta$. Le polyèdre L annoncé dans notre théorème sera un bouquet de r copies de K. on a donc :

$$\pi_1(L) = \Delta * \Delta * \Delta * \quad \dots \quad * \Delta \qquad \text{(r termes)}.$$

On peut alors reprendre la démonstration de 5.1.1 en remplaçant Δ par $\pi_1(L)$ et C_5 par le produit libre de r copies de C_5. Comme $Wh(A * B) = Wh(A) + Wh(B)$ ([27]), on aura r éléments linéairement indépendant dans $H^{n-1}(\mathbb{Z}_2; Wh(\pi_1(L)))$ Le fait que $L_{impair}(C_5 * C_5 * \dots * C_5) = 0$ provient de la nullité de $L_{impair}(C_5)$ et du th. 5 de [4].

5.3 Démonstration du théorème 5.1.2

Les idées de cette démonstration m'ont été données par M. Kervaire, que je tiens à remercier encore ici.

Soit G le groupe donné par la présentation suivante :

$$G = \left\{ t,s \mid t^5 = s^4 = 1,\ s^{-1}ts = t^{-1} \right\}$$

Nous verrons plus tard que G est un sous-groupe hyperélémentaire de Δ. Pour l'instant, démontrons le résultat suivant :

Proposition 5.3.1

L'unité $-1+t+t^{-1}$ de $\mathbb{Z}G$ engendre un facteur direct cyclique infini de $Wh(G)$.

Démonstration :

Nous allons montrer le résultat plus fort que la classe de $-1+t+t^{-1}$ dans $\mathbb{Z}G/(1+s^2)$ (où $(1+s^2)$ désigne l'idéal de $\mathbb{Z}G$ engendré par l'élément central $1+s^2$) engendre un facteur direct dans $K_1(\mathbb{Z}G/(1+s^2))$ (cf.[20] pour la définition du foncteur K_1).

Toute classe de $\mathbb{Z}G/(1+s^2)$ possède un unique représentant dans $\mathbb{Z}G$ pouvant s'écrire sous la forme

$$z = x + ys \quad \text{avec} \quad x,y \in \mathbb{Z}C_5 \ .$$

On identifiera donc $\mathbb{Z}G/(1+s^2)$ avec les éléments de cette forme; les lois de compositions sont alors les suivantes :

$$(x + ys) + (x' + y's) = (x + x') + (y + y')s$$

$$(x + ys)(x' + y's) = (xx' - y\bar{y}') + (xy' + y\bar{x}')s$$

On a une application $\varphi : \mathbb{Z}G/(1+s^2) \longrightarrow M_2(\mathbb{Z}C_5)$, où $M_2(\mathbb{Z}C_5)$ désigne les matrices 2-2 à coefficients dans $\mathbb{Z}C_5$, définie par :

$$\varphi(x + ys) = \begin{pmatrix} x & y \\ -\bar{y} & \bar{x} \end{pmatrix}$$

Le lecteur voudra bien vérifier que φ est un homomorphisme d'anneau. Posons encore $n : \mathbb{Z}G/(1+s^2) \longrightarrow \mathbb{Z}C_5$ l'application définie par :

$$n(z) = \text{dét } \varphi(z)$$

on a $\quad n(zz') = n(z)n(z')$; $n(z)$ sera appelée la norme de z.

Soit $\psi : K_1(\mathbb{Z}G/(1+s^2)) \longrightarrow U(\mathbb{Z}C_5)$ (unités de $\mathbb{Z}C_5$) l'homomorphisme défini par la composition :

$$K_1(\mathbb{Z}G/(1+s^2)) \xrightarrow{\varphi_*} K_1(M_2(\mathbb{Z}C_5)) \cong K_1(\mathbb{Z}C_5) \xrightarrow{\det} U(\mathbb{Z}C_5)$$

On voit que $\psi(-1+t+t^{-1}) = (-1+t+t^{-1})^2$. Nous allons maintenant montrer que $\pm u(-1+t+t^{-1}) \notin \operatorname{Im} \psi$, quelque soit $u \in C_5$. Cela démontrera bien la proposition 5.3.1 puisque $U(\mathbb{Z}C_5)/\pm C_5$ est cyclique infini engendré par $-1+t+t^{-1}$.

Comme $\mathbb{Z}G/(1+s^2)$ est une $\mathbb{Z}$-algèbre de dimension finie, tout élément de $K_1(\mathbb{Z}G/(1+s^2))$ admet un représentant qui est l'image d'une matrice de $Gl_2(\mathbb{Z}G/(1+s^2))$ (cf. [2] démonstration de 18.6). Il nous suffira donc de montrer que :

$$(1) \qquad D = \text{dét}\, \varphi \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \neq \pm\, u(-1+t+t^{-1})$$

quelque soient α, β, γ et $\delta \in \mathbb{Z}G/(1+s^2)$ et $u \in C_5$.

En posant $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 s$, $\beta = \beta_1 + \beta_2 s$, etc, on a :

$$(2) \qquad D = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \beta_1 & \beta_2 \\ -\bar{\alpha}_2 & \bar{\alpha}_1 & -\bar{\beta}_2 & \bar{\beta}_1 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \delta_1 & \delta_2 \\ -\bar{\gamma}_2 & \bar{\gamma}_1 & -\bar{\delta}_2 & \bar{\delta}_1 \end{vmatrix}$$

En développant les déterminants, on établit la formule :

$$(3) \qquad D = n(X) + n(Y) + UV$$

où :

$$X = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \gamma_1 & \delta_1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \gamma_2 & \delta_2 \end{vmatrix}$$

$$Y = \begin{vmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \bar{\gamma}_1 & \bar{\delta}_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \bar{\gamma}_2 & \bar{\delta}_2 \end{vmatrix}$$

$$U = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \overline{\alpha}_2 & \overline{\beta}_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \overline{\alpha}_1 & \overline{\beta}_1 \end{vmatrix}$$

$$V = \begin{vmatrix} \gamma_1 & \delta_1 \\ \overline{\gamma}_2 & \overline{\delta}_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \gamma_2 & \delta_2 \\ \overline{\gamma}_1 & \overline{\delta}_1 \end{vmatrix}$$

On remarque que $D = \overline{D}$ ce qui implique que si $D = \pm\, u(-1+t+t^{-1})$ avec $u \in C_5$, alors $u = 1$.

La démonstration de la proposition 5.3.1 sera achevée lorsque nous aurons établi les deux lemmes suivants :

Lemme 5.3.2

$\pm\, (-1+t+t^{-1})$ n'est pas une somme de normes dans QC_5.

Lemme 5.3.3

D est une somme de deux normes dans QC_5.

Démonstration du lemme 5.3.2

Soit $\varepsilon : QC_5 \to Q$ l'homomorphisme d'anneau qui envoie t sur 1 (augmentation). On a :

$$\varepsilon(n(z)) = (\varepsilon(z))^2$$

Une somme de normes ira donc par ε sur une somme de carrés.

Comme $\varepsilon(\pm(-1+t+t^{-1})) = \pm\, 1$, seul $-1+t+t^{-1}$ pourra être une somme de normes. Mais ceci est impossible car le terme constant d'une somme de normes est également une somme de carrés.

Démonstration du lemme 5.3.3

Soit J l'idéal de QC_5 engendré par $1 + t + t^2 + t^3 + t^4$. Nous allons distinguer deux cas :

Cas 1 : α_1 et $\beta_1 \in J$

On a alors que $U \in J$ dans l'équation (3). Tout élément $z \in J$ satisfait à $z = \overline{z}$. Comme $U = -\overline{U}$, on en déduit que $U = 0$ et que

$$D = n(X) + n(Y), \text{ X et Y comme dans (3).}$$

Cas 2 : α_1 ou $\beta_1 \notin J$

Sans restreindre la généralité, on peut supposer que $\alpha_1 \notin J$. Comme QC_5/J est un corps (isomorphe à $Q(\xi)$ où ξ est une racine primitive cinquième de l'unité), il existera $\rho \in QC_5$ tel que :

$$\beta_1 - \alpha_1 \rho \in J.$$

En multipliant la matrice de (2) à droite par la matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\rho & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\overline{\rho} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

on obtiendra une matrice

$$M' = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \beta_1' & \beta_2' \\ -\overline{\alpha}_2 & \overline{\alpha}_1 & -\overline{\beta}_2' & \overline{\beta}_1' \\ \gamma_1 & \gamma_1 & \delta_1' & \delta_2' \\ -\overline{\gamma}_2 & \overline{\gamma}_1 & -\overline{\delta}_2' & \overline{\delta}_1' \end{pmatrix}$$

dont le déterminant vaut toujours D et, comme M' est de la forme

$$M' = \varphi \begin{pmatrix} \alpha & \beta' \\ \gamma & \delta' \end{pmatrix} \quad \text{avec } \alpha, \gamma, \beta', \delta' \in QG/(1+s^2)$$

on peut encore utiliser la formule (3) pour calculer son déterminant. Remarquons que $\beta_1' \in J$; pour simplifier les notations, posons $\beta_i = \beta_i'$, $\gamma_i = \gamma_i'$ et $M = M'$. On a donc $\beta_1 \in J$.

Si maintenant $\beta_2 \in J$, on a $U \in J$ et on peut appliquer le raisonnement du cas 1 pour montrer que $D = n(X) + n(Y)$ (X et Y sont comme dans (3) mais avec les nouveaux coefficients).

Si $\beta_2 \notin J$, il existera $\rho' \in QC_5$ tel que

$\alpha_1 - \beta_2 \rho' \in J$

En multipliant M à droite par la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \overline{\rho}' & 1 & 0 \\ -\rho' & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

on obtiendra une matrice :

$$M'' = \begin{pmatrix} \alpha_1' & \alpha_2' & \beta_1 & \beta_2 \\ -\bar{\alpha}_2' & \bar{\alpha}_1' & -\bar{\beta}_2' & \bar{\beta}_1 \\ \gamma_1' & \gamma_2' & \delta_1 & \delta_2 \\ -\gamma_2' & \bar{\gamma}_1' & -\bar{\delta}_2 & \bar{\delta}_1 \end{pmatrix}$$

telle que :

$D = \det M'' = n(X') + n(Y') + U'V'$

où X', Y', U' et V' sont calculés comme dans la formule (3). On a maintenant α_1' et $\beta_1 \in I$ et on est ainsi ramené au cas 1.

<u>Proposition 5.3.4</u>

Il existe un homomorphisme injectif $i : G \to \Delta$ tel que l'homomorphisme induit :

$i_* : Wh'(G) \longrightarrow Wh'(\Delta)$

soit un isomorphisme (où Wh'( ) est le quotient de Wh( ) par son sous-groupe de torsion).

Il est clair que les propositions 5.3.1 et 5.3.4 impliquent le théorème 5.1.2.

<u>Démonstration de 5.3.4.</u>

a) <u>Construction de i</u> :

Rappelons les présentations de G et de Δ :

$G = \{t,s \mid t^5 = s^4 = 1,\ s^{-1}ts = t^{-1}\}$

$\Delta = \{a,b \mid a^5 = b^3 = (ab)^2\}$

On a l'épimorphisme $\pi : \Delta \longrightarrow A_5$ définit par :

$$\pi(a) = (1,2,3,4,5)$$
$$\pi(b) = (1,4,2)$$

Le noyau de π est le sous-groupe $\{1,(ab)^2\}$ d'ordre 2 qui est le centre de Δ (pour diverses propriétés de Δ, consulter par ex. [32] p. 181).

On définira l'homomorphisme $i : G \to \Delta$ en posant :

$$i(t) = a^2$$
$$i(s) = a^{-1} b^{-1} a(ab) a^{-1} ba$$

Il est clair que $i(t)^5 = 1$ (a est d'ordre 10) et que $i(s)^4 = 1$ (ab est d'ordre 4). Quant à la troisième relation, posons $u = i(s^{-1}) i(t) i(s)$ et $v = i(t^{-1})$ et voyons que $u = v$. On vérifie par calcul direct que

$\pi(u) = \pi(v)$ dans A_5. On a donc, dans Δ :

$u = v$ ou bien $u = v(ab^2)$.

u et v sont d'ordre 5 tandis que l'ordre de $v(ab^2)$ est 10. On a donc bien $u = v$.

b) i est surjectif :

Soit $\mathfrak{D}$ un ensemble de sous-groupes d'un groupe fini F. Les inclusions des sous-groupes éléments de $\mathfrak{D}$ dans F induisent un homomorphisme :

$$v(\mathfrak{D}) : \bigoplus_{H \in \mathfrak{D}} Wh(H) \longrightarrow Wh(F)$$

On déduit des commentaires du th. 2.1 de [17] que $v(\mathcal{H}(F))$ est surjectif si $\mathcal{H}(F)$ est l'ensemble des sous-groupes hyperélémentaires de F (rappelons qu'un groupe H est dit hyperélémentaire s'il existe un sous-groupe cyclique normal R tel que H/R soit un p-groupe pour un nombre premier p). Comme $v(\mathfrak{D})$ est induits par les inclusions, $v(\mathcal{H}_{max}(F))$ est aussi surjectif, où $\mathcal{H}_{max}(F)$ désigne l'ensemble des sous-groupes hyperélémentaires maximaux de F.

Rappelons que deux sous-groupes H et H' de F sont dits conjugués s'il existe un élément a de F tel que $a^{-1}Ha = H'$. Wh(H) et Wh(H') ont alors même image dans Wh(F) car une conjugaison de F induit l'identité sur Wh(F) (cf.[20], lemme 6.1). On en déduit, avec ce qui précède que $v(\mathfrak{D})$ est surjectif si $\mathfrak{D}$ contient un sous-groupe de $\mathcal{H}_{max}(F)$ par classe de conjugaison. Enfin, par passage au quotient, toutes ces propriétés de surjectivité sont conservées si on remplace Wh par Wh' dans la définition de $v(\mathfrak{D})$.

Ceci étant, la démonstration que i_* est surjectif se fera en prouvant que les seuls sous-groupes hyperélémentaires maximaux H de Δ tels que $Wh'(H) \neq 0$ sont les conjugués de G dans Δ.

Le dépistage des sous-groupes hyperélémentaires maximaux de Δ se fera de la façon suivante : on dresse une liste $\{\Gamma_1,\Gamma_2,\ldots\ldots,\Gamma_r\}$ des sous-groupes cycliques de Δ, à conjugaison près ; puis, pour chaque Γ_i, on cherche dans son normalisateur le plus grand sous-groupe H_i tel que H_i/Γ_i soit un p-groupe pour un certain entier premier p.

Tout sous-groupe cyclique de A_5 est conjugué à l'un des suivants ([23] p. 167) :

$\{1\}$, $<(1,2,3,4,5)>$, $<(1,4,2)>$, $<(2,3)(4,5)>$

où $<x>$ désigne le sous-groupe cyclique engendré par x. En remontant dans Δ, on trouve la liste suivante de sous-groupes cycliques à conjugaison près :

$\{1\}$, $<a>$, $<a^2>$, $<b>$, $<b^2>$, $<ab>$, $<(ab)^2>$.

Commençons par le normalisateur de $<a>$ et de $<a^2>$. On vérifie par calcul direct que le normalisateur de $<(1,2,3,4,5)>$ (noté $N(<(1,2,3,4,5)>)$) dans A_5 est égal à $\pi(G)$, engendré par $(1,2,3,4,5)$ et $(2,5)(4,3)$; l'élément a de Δ appartient aussi à G car

$$a = a^{-4}(a^{-1}\,b^{-1}\,aaba^{-1}\,ba)^2$$

On a donc que $G = \pi^{-1}(\pi(G))$ et que c'est le normalisateur de $<a>$ et de $<a^2>$. C'est bien un sous-groupe hyperélémentaire car :

$$G/<a^2> \cong C_4 \text{ et } g/<a> \cong C_2.$$

Nous allons maintenant voir que ce procédé pour les autres sous-groupes cycliques de la liste donne des sous-groupes hyperélémentaires H avec, soit $Wh'(H) = 0$, soit $H \subset G$.

Pour cela, nous utiliserons à plusieurs reprises le résultat suivant, conséquence du th. 2 de [3] et du fait que $Wh'(C_r) = 0$ pour $r = 2,3,4$ ou 6.

Lemme 5.3.5

Si l'ordre de tout élément d'un groupe fini F appartient à l'ensemble $\{2,3,4,6\}$, alors

$$Wh'(F) = 0$$

Sous-groupe $\{1\}$:

Les sous-groupes hyperélémentaires que l'on obtient ici sont les p-sous-groupes de Sylow de Δ . Comme $120 = 2^3.3.5$ p peut prendre les valeurs 2,3 ou 5. Pour $p = 2$, ces sous-groupes sont d'exposant 4 car les 2-sous-groupes de A_5 sont d'exposant 2. Pour $p = 3$, on trouve $< b^2>$ d'exposant 3. D'après le lemme 5.3.5, le seul cas amenant un $Wh' \neq 0$ est donc $p = 5$, où l'on trouve $< a^2 >$ qui est contenu dans G.

Sous-groupe $< b >$ et $< b^2>$:

$N(< (1,4,2) >)$ est engendré par $(1,4,2)$ et $(2,4)(3,5)$; il est d'ordre 6, isomorphe au groupe symétrique S_3. Tous ses éléments sont donc d'ordre 2 ou 3. $\pi^{-1}(N(<(1,4,2)>))$ satisfait alors aux hypothèses du lemme 5.3.5 d'où $Wh'(\pi^{-1}(N(<(1,4,2)>))) = 0$.

Sous-groupe <ab>

Le normalisateur de $\pi(<(ab)>) = <(2,3)(4,5)>$ est $N(<(2,3)(4,5)>) = \{1,(2,3)(4,5),(2,5)(4,3),(2,4)(3,5)\}$ dont tous les éléments sont d'ordre 2. On peut donc à nouveau appliquer le lemme 5.3.5 à $\pi^{-1}(N<(2,3)(4,5)>))$.

Sous-groupe $<(ab)^2>$

Le normalisateur de $<(ab)^2>$ est Δ. Les sous-groupes hyperélémentaires correspondants sont $<a> \subset G$, $<b>$ d'exposant 6 et un sous-groupe d'exposant 4.

La surjectivité de i_* est ainsi démontrée.

c) i_* est injectif

Nous allons établir que :

$$\text{rang } Wh'(G) = \text{rang } Wh'(\Delta) = 2$$

Comme i_* est surjectif, on en déduira que i_* est aussi surjectif et donc que i_* est un isomorphisme.

D'après le théorème de Bass ([20] th. 6.2) le rang de Wh'(F) (F groupe fini) est égal à $r(F) - q(F)$ où :

$r(F)$ = nombre de classes de conjugaison de sous-ensembles $\{x, x^{-1}\}$, $x \in F$ (classes de $\mathbb{R}$-conjugaison)

$q(F)$ = nombre de classes de conjugaison de sous-groupes cycliques de F (classes de $\mathbb{Q}$-conjugaison).

<u>Rang de Wh'(Δ)</u> :

D'après [23] p. 167, les classes de $\mathbb{R}$-conjugaison de A_5 sont :

$\{1\}$, $\{u,u^{-1}\}$, $\{u^2,u^{-2}\}$, $\{(1,4,2),(1,2,4)\}$, $\{(2,3)(4,5)\}$

où $u = (1,2,3,4,5)$. Comme Δ est une extension centrale de A_5 de noyau $\{1,(ab)^2\}$, les classes de $\mathbb{R}$-conjugaison de Δ seront :

$\{1\}$, $\{a,a^9\}$, $\{a^2,a^8\}$, $\{a^3,a^7\}$, $\{a^4,a^5\}$, $\{b,b^5\}$, $\{b^2,b^4\}$, $\{ab,(ab)^3\}$ $\{(ab)^2\}$

d'où $r(\Delta) = 9$.

Les classes de $\mathbb{Q}$-conjugaisons de Δ ont déjà été déterminées p. 70 et on a $q(\Delta) = 7$.

Ceci permet de déduire que rang $Wh'(G) \geqslant 2$. Les sous-groupes cycliques de G qui ne sont pas d'ordre 2 sont contenus dans $< t >$ isomorphe à C_{10}. On a donc d'après [3] th. 2 :

$$\text{rang } Wh'(G) \leqslant \text{rang } Wh'(C_{10}) = 2$$

d'où rang $Wh'(G) = 2$ et i_* est un isomorphisme. La démonstration de la proposition 5.3.4 est ainsi achevée.

BIBLIOGRAPHIE

[0] A. Bak — Odd dimension surgery groups off odd torsion groups vanish, à paraître.

[1] J.Barge-J.Lannes F.Latour-P.Vogel — Λ - sphères, préprint, Univ. Paris XI (Orsay).

[2] H. Bass. — K-theory and stable algebra, Publ. Math. IHES No 22 (1964), 489-544.

[3] ———— — The Dirichlet unit theorem ... , Topology 4 (1966), 391-410.

[4] S. Cappell. — Mayer-Vietoris sequences in Hermitian K-theory, Algebraic K-theory III, Springer Lectures Notes No 343, 478-512.

[5] B. Eckmann - S. Maumary. — Le groupe des types simples d'homotopie sur un polyèdre, Essays on topology, Mémoire dédié à G. de Rham, Springer 1970, 173-187.

[6] J-CL.Hausmann. — Groupes de sphères d'homologie entières, à paraître aux Comptes rendus Acad. Sciences de Paris.

[7] J.P.E.Hodgson. — Obstruction to concordance of thickenings - Invent. Math, 5 (1968), 292-316.

[8] H. Hopf. — Fundamentalgruppe und zweite Bettische Gruppe. Comm. Math. Helv. 14 (1941), 257-309.

[9] J.F.P.Hudson. — Piecewise Linear Topology Benjamin - 1969.

[10] L.S. Husch. — On relative regular neighborhood - Proc. London Math. Soc. 19 (1969), 577-585.

[11] M. Kato. Embedding Spheres and balls in codim $\geqslant 2$. Invent. Math. 10 (1970), 89-107.

[12] M. Kervaire. Le théorème de Barden-Mazur-Stallings, Comm. Math. Helv. 40 (1965), 31-42.

[13] ——————— Smooth homology spheres and their fundamental groups, Trans. A.M.S. 144 (1969), 67-72.

[14] ——————— Multiplicateurs de Schur et K-théorie, réf. [5], 212-225.

[15] M. Kervaire - J. Milnor. Groups of homotopy spheres, Annals of Math. 77 (1963), 504-537.

[16] R.C. Kirby - L.C.Siebenmann. Some theorems on topological Manifolds, Manifolds-Amsterdam 1970, Springer Lectures Notes No 197, 1-7.

[17] T.Y. Lam. Induction theorems for Grothendieck and Whitehead groups of finite groups, Ann. scient. Ec. Norm. Sup. 4e série t. 1 (1968), 91-148.

[18] R. Lee. Computation of Wall Groups, Topology 10 (1971), 149-176.

[19] J. Milnor. Differentiable structures, Notes multicopiées Princeton 1961.

[20] ——————— Whitehead torsion, Bull. Amer. Math. Soc. 72 (1966), 358-426.

[21] ——————— Introduction to Algebraic K-theory, Princeton University Press 1971.

[22] M.H.A. Newmann. Boundaries of ULC sets in euclidean n-spaces, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 1 (1948), 193-196.

[23] J.P. Serre. Représentations linéaires des groupes finis, 2e édition, Hermann, Paris 1971.

[24] J.L. Shaneson. Wall's surgery obstruction groups for $\mathbb{Z} \times G$, Annals of Math. 90 (1969), 226-234.

[25] L.C.Siebenmann. The obstruction to finding a boundary for an open manifold..., Thesis, Princeton 1965.

[26] S. Smale. Generalized Poincaré's conjecture in dim.> 4, Annals of Math. 74 (1961), 391-406.

[27] J. Stallings. Whitehead torsion of free products, Annals of Math. 82 (1965), 354-363.

[28] M.R. Stein - R.K. Dennis. K_2 of radical ideals and semi-local rings revisited, Algebraic K-theory II, Springer Lectures Notes No 342.

[29] C.T.C. Wall. Classification problems ... IV (Thickenings) Topology 5 (1966), 73-94.

[30] ———— Surgery on compact manifolds, Académic Press 1970.

[31] Cl. Weber. Deux remarques sur les plongements d'un AR dans un espace euclidien, Bull. Acad. Polonaise Sci. XVI, No 11 (1968), 851-855.

[32] J.A. Wolf. Spaces with constant curvature, Mc Graw-Hill 1967.