**Exercice 1. (1)** La différentielle de $||\cdot||^2$ en $(x,y,z)$ est :

$$\mathrm{d}(||\cdot||^2)_{|(x,y,z)} = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \end{pmatrix}.$$

Les point critiques d'une fonction sont précisément les points pour lesquels la différentielle n'est pas surjective. Ainsi $||\cdot||^2$ a un unique point critique : $(0,0,0)$. Ainsi l'application $f := ||\cdot||^2 - 1$ est une submersion sur

$$\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \frac{1}{2} < ||(x,y,z)|| < \frac{3}{2}\right\}.$$

Cette ensemble est un voisinage de chaque point de $\mathbb{S}^2$ car pour tout point $p$ de $\mathbb{S}^2$, il contient $B_{\frac{1}{4}}(p)$. De plus, $\mathbb{S}^2 = f^{-1}(\{0\})$. Donc (d'après la propriété du cours sur les sous-variété et les submersions), $\mathbb{S}^2$ est une sous variété de $\mathbb{R}^3$ de dimension $3-1=2$.

**(2)** L'application $\phi$ est clairement différentiable. Pour montrer qu'elle induit un difféomorphisme sur son image, il suffit d'exhiber une application (différentiable) inverse. On considère

$$\begin{array}{rccc} \psi\colon & \mathbb{R}^2 \times \{z \in \mathbb{R} | z < 1\} & \to & \mathbb{R}^2 \times \{z \in \mathbb{R} | z > 0\} \\ & (x,y,z) & \mapsto & (x,y,\sqrt{-z+1+x^2+y^2}) \end{array}$$

On a en effet pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^2 \times \{z \in \mathbb{R} | z < 1\}$ :

$$\phi \circ \psi(x,y,z) = \phi((x,y,\sqrt{-z+1+x^2+y^2}) = (x,y,1-(x^2+y^2-z+1+x^2+y^2)) = (x,y,z),$$

et pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^2 \times \{z \in \mathbb{R} | z > 0\}$ :

$$\psi \circ \phi(x,y,z) = \phi((x,y,1-(x^2+y^2+z^2)) = (x,y,\sqrt{(-1+(x^2+y^2+z^2))+1+x^2+y^2}) = (x,y,z).$$

De plus, $\psi$ est différentiable (car ce qui est sous la racine n'est jamais nul), donc $\phi$ est un difféomorphisme sur son image. On peut argumenter de la même manière avec 5 fonctions analogues à $\phi$ (que l'on renomme $\phi_1$), à avoir :

$$\begin{array}{rccc} \phi_2\colon & \mathbb{R}^2 \times \{z \in \mathbb{R} | z < 0\} & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \mapsto & (x,y,1-||(x,y,z)||^2), \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} \phi_3\colon & \mathbb{R} \times \{y \in \mathbb{R} | y > 0\} \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \mapsto & (x,z,1-||(x,y,z)||^2), \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} \phi_4\colon & \mathbb{R} \times \{y \in \mathbb{R} | y < 0\} \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \mapsto & (x,z,1-||(x,y,z)||^2), \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} \phi_5\colon & \times\{z \in \mathbb{R} | x > 0\} \times \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \mapsto & (y,z,1-||(x,y,z)||^2,y,z), \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rccc} \phi_6\colon & \times\{z \in \mathbb{R} | x < 0\} \times \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \mapsto & (y,z,1-||(x,y,z)||^2), \end{array}$$

En prenant par exemple pour $\psi_4$ :

$$\begin{array}{rccc} \psi_4\colon & \mathbb{R} \times \{y \in \mathbb{R} | z < 1\} \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \times \{y \in \mathbb{R} | y < 0\} \times \mathbb{R} \\ & (x,y,z) & \mapsto & (x,-\sqrt{-y+1+x^2+z^2},y) \end{array}$$

Les 6 ouverts $U_1, U_2, U_3, U_4, U_5$ et $U_6$ recouvrent $\mathbb{R}^3\{(0,0,0)\}$ et donc $\mathbb{S}^2$. De plus pour tout $i \in \{1,\ldots,6\}$, $\phi_i(\mathbb{S}^2 \cap U_i) \subset \mathbb{R}^2 \times \{0\}$. Donc d'après la définition de sous-variété, $\mathbb{S}^2$ est une sous-variété de dimension 2.

**(2)** L'application $\varphi$ (que l'on appelle plus tard $\varphi_1$) est une immersion. En effet, elle est différentiable car ce qui est sous la racine ne s'annule pas et

$$d\varphi_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \\ 0 & 1 & \frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \end{pmatrix}$$

est toujours injective. De plus elle est clairement injective. Il en est de même pour ces 5 analogue $\varphi_2, \varphi_{"}, \varphi_4, \varphi_5$ et $\varphi_6$. On a

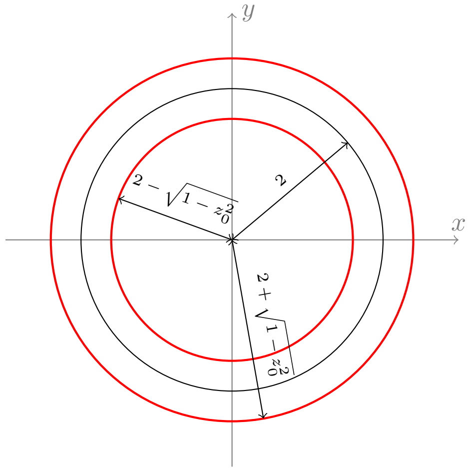
$$\begin{array}{ll} \varphi_1(B_1(0)) = \mathbb{S}^2 \cap \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+^* & \varphi_1(B_1(0)) = \mathbb{S}^2 \cap \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_-^* \\ \varphi_3(B_1(0)) = \mathbb{S}^2 \cap \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} & \varphi_1(B_1(0)) = \mathbb{S}^2 \cap \mathbb{R} \times \mathbb{R}_-^* \times \mathbb{R} \\ \varphi_5(B_1(0)) = \mathbb{S}^2 \cap \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^2 & \varphi_1(B_1(0)) = \mathbb{S}^2 \cap \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^2 \end{array}$$

Donc

$$\bigcup_{i=1}^{6} \varphi_i(B_1(0)) = \mathbb{S}^2 \cap (\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$$

Ainsi pour tout point $p$ de $\mathbb{S}^2$, on peut trouver un ouvert $U$ contenant $p$ de $\mathbb{R}^3$, un ouvert $V$ de $\mathbb{R}^2$ (en l'occurence $B_2(0)$ et une immersion (une des $\varphi_i$), tel que $\varphi_i(V) = \mathbb{S}^2 \cap U$. D'après la propriété du cours sur les immersions et les sous-variétés, on en déduit que $\mathbb{S}^2$ est une variété de dimension 2.

**Exercice 2. (1)** Si on coupe le tore avec un plan horizontal $z = z_0$ (avec $z_0$ entre $-1$ et 1), on voit deux cercles (un seul si $|z_0| = 1$).




De cela on déduit que les points $p = (x, y, z)$ satisfaisant

$$(\sqrt{x^2+y^2} - 2)^2 = 1 - z^2$$

sont sur le tore. On se convainc aisément que réciproquement, tous les points du tore satisfont cette équation. De manière générale, une équation d'un tore de rayons $(r, R)$ (dans notre cas $r = 1$ et $R = 2$, il faut avoir $r > R$ pour avoir vraiment un tore) est :

$$(\sqrt{x^2+y^2} - R)^2 = r^2 - z^2$$

On cherche maintenant à montrer que le tore $\mathbb{T}^2$ est effectivement une sous variété de $\mathbb{R}^3$. On considère donc l'application

$$\begin{array}{rccl} \varphi\colon & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y,z) & \mapsto & (\sqrt{x^2+y^2}-2)^2-1+z^2. \end{array}$$

Elle est clairement différentiable sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{0,0\} \times \mathbb{R}$. Sa différentielle en $(x,y,z)$ est :

$$\mathrm{d}\varphi_{(x,y,z)} = \begin{pmatrix} 2(\sqrt{x^2+y^2}-2)\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & 2(\sqrt{x^2+y^2}-2)\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} & 2z \end{pmatrix}$$

Pour quelle soit nulle il faut nécessairement que $z$ et que $x^2+y^2=4$. Ainsi $\varphi$ est une submersion sur $U := \mathbb{R}^3 \setminus (\{0,0\} \times \mathbb{R} \cup \mathbb{S}^1 \times \{0\}$. C'est un ouvert de $\mathbb{R}^3$ qui contient $\mathbb{T}^2$. Comme le tore $\mathbb{T}^2$ est égale à $\varphi^{-1}(\{0\})$, on déduit de la propriété sur les submersions et les sous-variétés que $\mathbb{T}^2$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$ de dimension $3-1=2$.

**(2)** On considère l'application

$$\begin{array}{rccl} h\colon & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (\theta,\phi) & \mapsto & ((2+\cos\theta)\cos\phi, (2+\cos\theta)\sin\phi, \sin\theta) \end{array}$$

On a clairement $\varphi(]0,3\pi[^2) = \mathbb{T}^2$. De plus il s'agit d'une immersion, en effet, sa différentielle est égale à

$$\mathrm{d}h_{(\theta,\phi)} = \begin{pmatrix} -\sin\theta\cos\phi & -(2+\cos\theta)\sin\phi \\ -\sin\theta\sin\phi & (2+\cos\theta)\cos\phi \\ \cos\theta & 0 \end{pmatrix}$$

On se convainc aisément que les trois sous-déterminant $2\times 2$ ne s'annulent pas simultanément. Ce qui prouve que $h$ est bien une immersion. De plus les restrictions $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ et $\varphi_4$ de $\varphi$ à

— $V_1 :=]0,2\pi[\times]0,2\pi[$,
— $V_2 :=]0,2\pi[\times]\pi,3\pi[$,
— $V_3 :=]\pi,3\pi[\times]0,2\pi[$,
— $V_4 :=]\pi,3\pi[\times]\pi,3\pi[$.

sont toutes injectives. Enfin pour tout $i$ dans $\{1,2,3,4\}$, on a $\varphi_i(V_i) = \mathbb{T}^2 \cap U_i$ avec $U_i$ les ouvert de $\mathbb{R}^3$ suivant :

— $U_1 := \mathbb{R}^3 \setminus (S_1 \cup S_3)$,
— $U_2 := \mathbb{R}^3 \setminus (S_1 \cup S_3)$,
— $U_3 := \mathbb{R}^3 \setminus (S_2 \cup S_3)$,
— $U_4 := \mathbb{R}^3 \setminus (S_2 \cup S_3)$.

avec

— $S_1 := \{(x,y,0) | x^2+y^2=9\}$,
— $S_2 := \{(x,y,0) | x^2+y^2=1\}$,
— $S_3 := \{(2+x,0,z) | x^2+y^2=1\}$,
— $S_4 := \{(-2+x,0,z) | x^2+y^2=1\}$.

Ce qui prouve, d'après la proposition sur les immersions et les sous-variétés que $\mathbb{T}^2$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$ de dimension 2.