Exercice 1. On considère un groupe à un paramètre $\{g_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ de transformations linéaires du plan. Ce groupe est complètement déterminé par

$$A := \lim_{h\to 0} \frac{g_h - I_2}{h}.$$

En effet, la fonction $t \mapsto g_t$ est solution du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} g_t' = Ag_t \\ g_0 = I_2. \end{cases}$$

Ce système admet une unique solution locale d'après le théorème de Cauchy Lipschitz et une solution globale donnée par $g_t = \exp(tA)$. Cette solution globale est donc l'unique solution et caractérise complètement le groupe $\{g_t\}_{t\in\mathbb{R}}$.

Si les groupes $\{g_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ et $\{h_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ sont conjugués, on a

$$h_t = Tg_tT^{-1}$$

pour une matrice inversible T et donc $A_h = Tg_tT^{-1}$. Ainsi si deux groupes sont conjugué les matrices les caractérisant sont semblables. Réciproquement si deux matrices sont semblables, les groupes à un paramètre qu'elles définissent sont conjugué (voir la série précédente).

Exercice 2. **(1)** Si $\phi := (y_1, \ldots, y_n)$ et $\psi := (y_1', \ldots, y_n')$ sont deux systèmes de coordonnées redresseuses, on a pour tout point x de U :

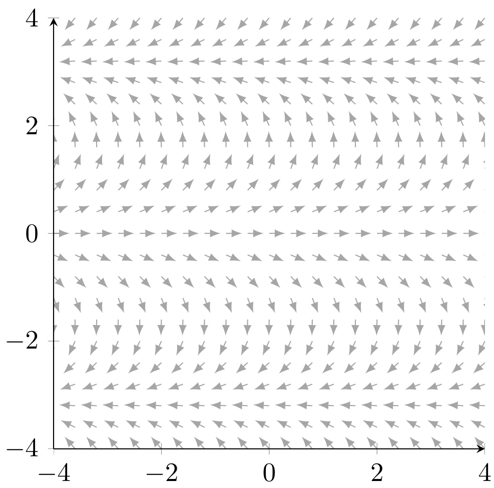
$$d(\psi \circ \phi^{-1})_{\phi(x)} = \begin{pmatrix} 1 & \star & \ldots & \star \\ 0 & \star & \ldots & \star \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \star & \ldots & \star \end{pmatrix}$$

Ceci implique que

$$\begin{matrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_n' \end{matrix} = \begin{matrix} y_1 + c \\ f_2(y_1, \ldots, y_m) \\ \vdots \\ f_m(y_1, \ldots, y_m). \end{matrix}$$

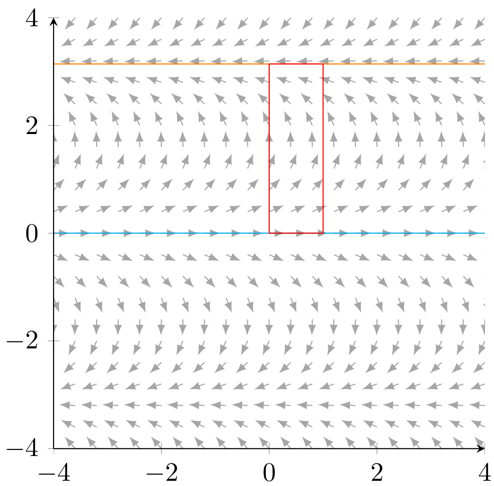
(2) On construit tout d'abord un champs de vecteur X sur RR^2 qui a les propriétés qui a la tête que l'on souhaite : on définit :

$$X \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} = \begin{matrix} \cos(y) \\ \sin(y) \end{matrix}$$



On va raisonner par l'absurde. On suppose donc qu'il existe un système de coordonnées redresseuses.

On considère un rectangle (orienté dans le sens positif) dans $\mathbb{R}^2$ dont les sommets sont $(0,0), (1,0), (1,\pi)$ et $(0,\pi)$ et les deux droites horizontales d'ordonnées 0 et π. Ces deux droites sont des courbes intégrales, elles sont donc envoyées sur des courbes intégrales par le système de coordonnées redresseuse.



On regarde l'image du rectangle et des droites dans les coordonnées redresseuses. L'image du rectangle est contenu dans la bande délimitée par l'image des deux droites. Les coté horizontaux sont envoyés sur ces droites. Si on fait attention à l'orientation, on constate que l'image des cotés verticaux doivent relier les sommets "en diagonal". Le théorème de Jordan permet alors de conclure que l'image des cotés verticaux doivent se croiser. Ceci n'est pas possible puisque l'application donnant les coordonnées redresseuses doit en particulier être injective.

Exercice 3. On note $a(t)$ et $b(t)$ les effectifs des armées (dépendant du temps) et λ et μ leur efficacité respectives. L'énoncé du problème se traduit par le système suivant :

$$a' = -\mu b b' = -\lambda a$$

En particulier, a et b sont solution de $y'' = \mu\lambda y$. On a donc :

$$a(t) = a(0)\cosh(\sqrt{\mu\lambda}t) + \frac{a'(0)}{\sqrt{\mu\lambda}}\sinh(\sqrt{\mu\lambda}t), b(t) \quad = b(0)\cosh(\sqrt{\mu\lambda}t) + \frac{b'(0)}{\sqrt{\mu\lambda}}\sinh(\sqrt{\mu\lambda}t).$$

Et en injectant $a'(0) = -\mu b(0)$ et $b'(0) = -\lambda a(0)$, on obtient :

$$a(t) = a(0)\cosh(\sqrt{\mu\lambda}t) - \sqrt{\frac{\mu}{\lambda}}b(0)\sinh(\sqrt{\mu\lambda}t), b(t) \quad = b(0)\cosh(\sqrt{\mu\lambda}t) - \sqrt{\frac{\lambda}{\mu}}\lambda a(0)\sinh(\sqrt{\mu\lambda}t).$$

Pour que $a(t)$ ne soit jamais nul pour $t > 0$ il faut $a(0) \geq \sqrt{\frac{\mu}{\lambda}}b(0)$. Pour que $b(t)$ ne soit jamais nul pour $t > 0$ il faut $b(0) \geq \sqrt{\frac{\lambda}{\mu}}a(0)$. Ainsi, il faut nécessairement que $\frac{a(0)}{b(0)} = \sqrt{\frac{\mu}{\lambda}}$. Dit autrement il faut que le produit du carré de l'effectif par l'efficacité soit le même pour les deux armées.

Réciproquement, on vérifie facilement qu'avec de tels paramètres, $a(t) = a(0)\exp -\sqrt{\mu\lambda}t$ et $b(t) = b(0)\exp -\sqrt{\mu\lambda}t$ et donc les effectifs des deux armées restent positifs.