Exercice 1. (1)
La différentielle du déterminant en un point A de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ (i. e. une matrice carré de taille n) est une application linéaire de $\mathbb{R}^{n^2} \simeq \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$, c'est à dire une forme linéaire sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Le déterminant d'une matrice $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}}$ est donnée par la formule suivante :

$$\det A = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} (-1)^{s(\sigma)} \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)}$$

On en déduit aisément pour tout matrice $B = (b_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}}$:

$$\mathrm{d}(\det)_A(B) = \sum_{i_0=1}^{n} \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} (-1)^{s(\sigma)} b_{i_0\sigma(i_0)} \prod_{\substack{i=1\\ i\neq i_0}}^{n} a_{i\sigma(i)}$$

On veut trouver une expression plus agréable pour cette différentielle. On va intervertir les sommes :

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(\det)_A(B) &= \sum_{i_0=1}^{n}\sum_{j_0=1}^{n} b_{i_0j_0} \sum_{\substack{\sigma\in\mathfrak{S}_n\\ \sigma(i_0)=j_0}} (-1)^{s(\sigma)} \prod_{\substack{i=1\\ i\neq i_0}}^{n} a_{i\sigma(i)}\\ &= \sum_{i_0=1}^{n}\sum_{j_0=1}^{n} b_{i_0j_0} a'_{i_0j_0},\end{aligned}$$

où $\mathrm{com}(A) = A' = (a'_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}}$ est la commatrice de A :

$$a'_{ij} = \sum_{\substack{\sigma\in\mathfrak{S}_n\\ \sigma(i)=j}} (-1)^{s(\sigma)} \prod_{\substack{i=1\\ i\neq i_0}}^{n} a_{i\sigma(i)}.$$

Si on note $\widetilde{a}_{ij} = a'_{ji}$, on a :

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(\det)_A(B) &= \sum_{i_0=1}^{n}\sum_{j_0=1}^{n} b_{i_0j_0}\widetilde{a}_{i_0j_0}\\ &= \mathrm{tr}(\mathrm{com}(A)^t B).\end{aligned}$$

(2)
La fonction déterminant est continue donc $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R}\setminus\{0\})$ est un ouvert de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{n^2}$, donc est une sous-variété de $\mathbb{R}^{n^2}$ de dimension n^2.

La fonction déterminant est continue donc $\det^{-1}(]\frac{1}{2},\frac{3}{2}[)$ est un ouvert et par là même un voisinage de $SL_n(\mathbb{R})\det^{-1}(\{1\})$. De plus la restriction de det à cet ensemble est une submersion : en effet sa différentielle en tout point est non-nulle donc surjective car :

$$\mathrm{d}(\det)_A(A) = \mathrm{tr}(\mathrm{com}(A)^t A) = n\det A \neq 0.$$

Donc $SL_n(\mathbb{R})$ une sous-variété de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \simeq$ de dimension n^2-1.

(3)
On commence par calculer la différentielle de $\varphi\mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \ni A \mapsto A^t\cdot A \in \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$. Pour tout A et H dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, on a :

$$\varphi(A+H) = \varphi(A) + A^t\cdot H + H^t\cdot A + H^t\cdot H = \varphi(A) + A^t\cdot H + H^t\cdot A + o(H).$$

On en déduit :

$$\begin{array}{rrcl} \mathrm{d}\varphi_A =: & \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R}) \\ & H & \mapsto & A^t \cdot H + H^t \cdot A. \end{array}$$

On veut montrer que si A est inversible alors $\mathrm{d}\varphi_A$ est surjective. Soit S une matrice symétrique, pour $H = \frac{1}{2}(A^t)^{-1}S$, on a :

$$\mathrm{d}(\varphi)_A(H) = \frac{1}{2}A^t(A^t)^{-1}S + \frac{1}{2}S^tA^{-1}A = \frac{1}{2}S + \frac{1}{2}S^t = S.$$

On a $O_n(\mathbb{R}) = \varphi^{-1}(\{I_n\})$ et φ est une submersion sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ qui est un voisinage de $O_n(\mathbb{R})$ (car det est continue). Ainsi, $O_n(\mathbb{R})$ est une sous variété de $M_n(\mathbb{R})$ de dimension $n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.

Exercice 2. (1)
Il faut montrer que :

(a) les ensembles $(V_i)_{1\leq i\leq n+1}$ sont ouverts et recouvrent $\mathbb{R}^n$;

(b) les applications ϕ_i sont des homeomorphismes sur leurs images ;

(c) les applications de changement de cartes sont $\phi_j\circ\phi_i^{-1} : \phi_i(V_i\cap V_j) \to \phi_j(V_i\cap V_j)$ sont lisses (le caractère est alors automatique car l'inverse est donné par $\phi_i\circ\phi_j^{-1}$)

(a) Toute droite $D \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ contient un point avec une coordonnée non-nulle, si on note i cette coordonnée, on a $D \in V_i$, donc les ensembles recouvrent $\mathbb{RP}^n$.

Pour le caractère ouvert, il faut se souvenir de ce qu'est la topologie quotient (et se demander de quel quotient on parle). On considère la relation d'équivalence suivante sur $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$: $x \sim y$ si il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que $x = \lambda y$. On note que les droites vectorielles de $\mathbb{R}^{n+1}$ sont en correspondance univoque avec les classes d'équivalence de $\sim$. On note π la projection de $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ sur $\mathbb{RP}^n$. La topologie quotient sur $\mathbb{RP}^n$ est la topologie la plus fine rendant l'application π continue. Plus concrètement, un ensemble, $U \subseteq \mathbb{RP}^n$ est ouvert si et seulement si $\pi^{-1}(U) \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ est ouvert.

Pour nous $\pi^{-1}(V_i) = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{x_i = 0\}$, qui est clairement ouvert. Donc les V_i sont ouvert.

(b) Les applications ϕ_i sont clairement bijectives. Reste à montrer qu'elles sont continues et d'inverse continues. Par symétrie on peut supposer que $i = 1$. L'application ϕ_1 est continue car

$$\begin{array}{rrcl} \phi_1 \circ \pi : & \pi^{-1}(V_i) & \to & \mathbb{R}^n \\ & (x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) & \mapsto & \frac{1}{x_1}(x_2, \dots, x_{n+1}) \end{array}$$

est continue. L'inverse de ϕ est donnée par :

$$\begin{array}{rrcl} \phi^{-1} : & \mathbb{R}^n & \to & V_1 \\ & (x_2, \dots x_{n+1}) & \mapsto & [1 : x_2 : \dots : x_{n+1}] \end{array}$$

où $[1 : x_2 : \dots : x_{n+1}]$ représente la droite vectorielle passant par $(1, x_2, \dots, x_{n+1})$. On s'aperçoit alors que ϕ_1^{-1} peut être vu comme la composée de π et de

$$\begin{array}{rrcl} \psi_1 : & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^{n+1} \\ & (x_2, \dots, x_{n+1}) & \mapsto & (1, x_2, \dots, x_{n+1}) \end{array}$$

comme ces deux applications sont continues, l'inverse de ϕ_1 est continue.

(c) Soient $1 \leq i \neq j \leq n+1$. On se convainc facilement que $\phi_i(V_i \cap V_j) = \mathbb{R}^n \setminus x_{j-1} = 0$ si $i < j$ et $\phi_i(U_i \cap U_j) = \mathbb{R}^n \setminus x_j = 0$ si $j < i$. Par symétrie on suppose $j > i$. On a :

$$\begin{array}{rccl} \phi_j \circ \phi_i^{-1} \phi_j(V_i \cap V_j) \colon & \phi_i(V_i \cap V_j) & \to & \phi_j(V_i \cap V_j) \\ & (x_1, \ldots, x_n) & \mapsto & \frac{1}{x_j}(x_1, \ldots, x_{i-1}, 1, x_i, \ldots, \widehat{x_j}, \ldots x_n) \end{array}$$

qui est clairement continue (et même de classe $\mathcal{C}^\infty$).

Tout ceci montre que $(\phi_i, V_i)_{1 \leq i \leq n+1}$ est un atlas de $\mathbb{RP}^n$ qui est donc une variété lisse de dimension n.

(2)

En premier lieu, on remarque que π (aka p) est lisse : en effet la composition avec les ϕ_i sont lisses :

$$\begin{array}{rccl} \phi_1 \circ \pi \colon & \pi^{-1}(V_i) & \to & \mathbb{R}^n \\ & (x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) & \mapsto & \frac{1}{x_1}(x_2, \ldots, x_{n+1}) \end{array}$$

est lisse. Donc par théorème de composition, si f est lisse $f \circ \pi$ est lisse.

Passons maintenant à la réciproque : On peut supposer que X est un espace vectoriel car si X était une variété lisse, on devrait composer avec une carte pour se poser la question de la différentiabilité de f. Par définition, f est différentiable si et seulement si $f \circ \phi_i$ est lisse pour tout i. Or $\phi_i = \pi \circ \psi_1$ (la définition de ψ_i est dans la question précédente), de plus ψ_i est lisse. Donc $f \circ \phi_i = f \circ \pi \circ \psi_i$ est lisse.

(3)

Pour donner du sens à cette affirmation, il faut choisir un atlas pour $\mathbb{S}^n$. On choisit $(U_i^\epsilon, \xi_i^\epsilon)_{\substack{1 \leq i \leq n+1 \\ \epsilon = \pm 1}}$ avec :

$$U_i = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{S}^n | x_i \neq 0, \mathrm{sign}(x_i) = \epsilon\} \quad \text{et}$$

$$\begin{array}{rccl} \xi_i^\epsilon \colon & & \to & D^n = \{y \in \mathbb{R}^n | ||y|| < 1|| \\ & (x_1, \ldots, x_{n+1}) & \mapsto & (x_1, \ldots, \widehat{x_i}, \ldots, x_{n+1}). \end{array}$$

On alors

$$\begin{array}{rccl} \xi_i^\epsilon \colon & D^n & \to & \pi^{-1}(U_i) \\ & (x_1, \ldots, x_n) & \mapsto & (x_1, \ldots, x_{i-1}, \epsilon\sqrt{1 - (x_1^2 + \cdots + x_n^2)}, x_i, \ldots, x_n) \end{array}$$

On veut alors montrer que $\phi_i \circ \pi \circ \xi_i^\epsilon$ est un diffeomorphisme locale. On a :

$$\phi_i \circ \pi \circ \xi_i^\epsilon(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{\epsilon\sqrt{1 - (x_1^2 + \cdots + x_n^2)}}(x_1, \ldots, x_n)$$

On calcule la différentielle de cette application :

$$\mathrm{d}(\phi_i \circ \pi \circ \xi_i^\epsilon)_{|(x_1, \ldots, x_n)} = \frac{1}{\epsilon\sqrt{1 - (x_1^2 + \cdots + x_n^2)}^3} \begin{pmatrix} a_{jk} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{array}{l} a_{jj} = 1 - x_j^2 \\ a_{jk} = -x_j x_k \quad \text{si } i \neq j \end{array}$$

Cette matrice est inversible car elle par hypothèse $\sum_{i=1}^n x_i^2 < 1$. Ceci prouve que $\phi_i \circ \pi \circ \xi_i^\epsilon$ est un localement un difféomorphisme (c'est en fait un vrai difféomorphisme) et donc que $\pi_{\mathbb{S}^n}$ est un difféomorphisme local (ce n'est pas un vrai difféomorphisme car deux points antipodaux sont envoyés sur la même droite).