**Exercice 1.** On va démontrer un résultat plus générale puis on se servira du théorème de la boule chevelue :

*Si $M$ et $N$ sont deux variétés de dimension $k$ et $\varphi : M \to N$ est une submersion surjective alors tout champ de vecteurs $Y$ sur $N$ se relève canoniquement en un champs de vecteur $X$ de $M$. De plus, si $Y$ ne s'annule pas alors $X$ ne s'annule pas.*

Comme $M$ et $N$ sont des variétés de même dimension, le caractère submersif de $\varphi$ signifie que $\varphi$ est un diffeomorphisme locale. Ainsi, pour tout point $x$ de $M$, il existe un ouvert $U$ de $M$ contenant $x$ et un ouvert $V$ de $N$ tel que $\varphi$ induise un difféomorphisme entre $U$ et $V$. Cette même application induit alors un isomorphisme de fibré vectoriel entre $TU$ et $TV$, noté $T\varphi$. Plus concrètement, si on note $y$ l'image de $x$ par $\varphi$ :

— si $v$ est un élément de $T_xU = T_xM$ représenté par une $c$ courbe de $[-1, 1]$ dans $U$ (avec $c(0) = x$), $T\varphi(v)$ ($\in T_yV = T_yN$ ) est représenté par la courbe $\varphi \circ c : [-1, 1] \to V$.

— si $v$ est représenté par une dériviation $D : \mathcal{F}_x(U, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $T\varphi(v)$ est représenté par la dérivation

$$\begin{array}{rccc} \widetilde{D}\colon & \mathcal{F}_y(V, \mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ & f & \mapsto & D(f \circ \phi^{-1}). \end{array}$$

Ainsi, si $Y$ est un champs de vecteur sur $N$, on peut définir un champs de veteur $X$ sur $M$ de la manière suivante : pour tout $x$ dans $M$, $X(x) = (T\varphi)^{-1}(Y(\varphi))$. Le fait que $T\varphi$ soit un difféomorphisme locale implique que $X$ est continue et l'unicité dans le théorème d'inversion locale implique que $X$ est défini sans ambiguïté. De plus, comme $T\varphi$ est un difféomorphisme de fibré, le champs $X$ en $x$ s'annule si et seulement si $Y$ s'annule en $\varphi(x)$. L'application $\varphi$ étant supposé surjective, si $Y$ ne s'annule pas, $X$ ne s'annule pas.

On répond maintenant à la question. On rappelle que $\mathbb{R}P^2$ est le quotient de $\mathbb{S}^2$ par $\{(x, y, z) \sim (-x, -y, -z))\}$. L'application de projection $\pi$ fournit une submserion surjective (on peut le voir sur des cartes locales si nécessaire). On raisonne par l'absurde et on se donne $Y$ un champ de vecteur sur $\mathbb{R}P^2$ qui ne s'annule pas. On peut alors appliqué le résultat précédent et trouvé un champs de vecteur de $\mathbb{S}^2$ qui ne s'annule pas, ceci contredit le théorème de la boule chevelue.

**Exercice 2.** On se convainc facilement que le champs définit par :

$$X_{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} z + x^2 - 1 \\ xy \\ x(z-1) \end{pmatrix}$$

convient. En effet, on a

$$X_{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}} = (z-1) \begin{pmatrix} -z \\ 0 \\ x \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$$

et donc $X$ définit bien un champ de vecteur sur $\mathbb{S}^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2+y^2+z^2 = 1\}$. De plus $X$ s'annule uniquement en $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$. On a trouvé ce champs de vecteur a l'aide de la projection stéréographique :

$$\begin{array}{rccc}\pi\colon & \mathbb{S}^2 \setminus \{0,0,1\} & \to & \mathbb{R}^2 \\ & \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} & \mapsto & \frac{1}{1-z}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\end{array}$$

On trouve facilement un champs de vecteur ne s'annulant nulle part sur $\mathbb{R}^2$. Par exemple le champ constant égale à $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$. On peut définir l'application $\pi$ sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{(x,y,z)|z>1\}$ sur lequel l'application est lisse et sa différentielle est donnée par :

$$\mathrm{d}\pi_{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}} = \frac{1}{1-z}\begin{pmatrix}1 & 0 & \frac{x}{1-z} 0 & 1 & \frac{y}{1-z}\end{pmatrix}$$

On cherche alors un antécédent de $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ qui soit combinaison linéaire de $\begin{pmatrix}-z\\0\\x\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}-y\\x\\0\end{pmatrix}$. On trouve aisément que le champs $X$ convient. Il aurait pu arriver que cette définition de $X$ ne s'étend pas à $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$. Le cas échéant nous aurions pu rendre la norme du champs sur $\mathbb{R}^2$ dépendante de $x^2+y^2$ de manière à nous assurer que le champs sur $\mathbb{S}^2$ s'étende (par 0) en $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$.

**Exercice 3.** Il y a beaucoup de manière de faire : On peut tout d'abord arguer que comme $T(M \times N) \simeq (TM) \times (TN)$, on peut construire un tel champs de vecteur en prenant un champs de vecteur sur $\mathbb{S}^1$ sans point singulier ceci nous donne une application $f : \mathbb{S}^1 \to T\mathbb{S}^1$, on peut ensuite fabriquer

$$\begin{array}{rccc}\widetilde{f}\colon & \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 & \to & T(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1) \simeq T\mathbb{S}^1 \times T\mathbb{S}^1 \\ & (\theta,\phi) & \mapsto & (s(\theta), 0_\phi)\end{array}$$

Pour trouver l'application $f$ on peut par exemple prendre celle de la dernière série.

Une autre approche consiste à considérer le tore comme une sous-variété de $\mathbb{R}^3$ :

$$\mathbb{T} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | (\sqrt{x^2+y^2}-2)^2 = 1 - z^2.$$

Le tore est donc donné par la submsersion

$$\begin{array}{rccc}\varphi\colon & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y,z) & \mapsto & (\sqrt{x^2+y^2}-2)^2 - 1 + z^2.\end{array}$$

dont la différentielle est :

$$\mathrm{d}\varphi_{(x,y,z)} = \begin{pmatrix} 2(\sqrt{x^2+y^2}-2)\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & 2(\sqrt{x^2+y^2}-2)\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} & 2z \end{pmatrix}$$

Ainsi

$$X\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$$

définit un champs de vecteur sur le tore qui est partout non-nul.

**Exercice 4.** La droite horizontale $\mathbb{R} \times \{x\}$ est une courbe intégrale de $\mathbb{R} \times M$ si et seulement si $x$ est une position d'équilibre du flot $(M, \{g^t\})$. On suppose que la droite horizontale est une $\mathbb{R} \times \{x\}$ est une courbe intégrale de $\mathbb{R} \times M$. Pour fixer les notations, on fixe $\gamma(t) = x$. Ceci signifie que $\gamma$ est solution d'une EDO. En d'autre terme, on a

$$\gamma'(t) = X_t(\gamma(t)) \quad \text{pour tout } t \text{ de } \mathbb{R}$$

pour un certain champ de vecteur $X_t$ complet dépendant du temps. On considère maintenant le flot de $\{g^t\}_{t\in\mathbb{R}}$ associé à ce champs de vecteur. Pour la fonction $\mathbb{R} \ni t \mapsto g^t(x) \in M$ est la solution du problème de Cauchy

$$\left\{ y'(t) = X_t(y), y(0) = x. \right.$$

Mais $\gamma$ est elle aussi solution. On conclut donc que $g^t(x) = \gamma(t) = x$ pour tout $t$ de $\mathbb{R}$ est donc $x$ est un point d'équilibre de $\{g^t\}$. La réciproque est évidente : si $x$ est un point stationnaire de $\{g^t\}$, alors $t \mapsto g^t(p)$ est une courbe intégrale pour tout point $p$, en particulier pour $x$, pour lequel c'est la droite horizontale.