Exercice 1. **(1)** Soit N une variété de dimension n. On la munis de son atlas maximal $\mathcal{A}$. Une sous-variété M de N de dimension m ($m \leq n$) est un sous-ensemble de N (séparé à base dénombrable pour la topologie trace), tel que pour tout point p de M, il existe une carte locale $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ avec p dans l'intérieur de U telle que

$$\varphi(M \cap U) = \varphi(U) \cap \mathbb{R}^m \times \{0\}^{n-m}$$

On considère $f : M \to N$. On veut montrer que si f est un plongement et N une variété alors $f(M)$ est une sous-variété de N. Soit p un point de $f(N)$, il existe une carte locale (U, ψ) pour p comme élément de la variété M. L'ensemble $f(U)$ est un ouvert de $f(M)$, il existe donc V un ouvert de N tel que $V \cap f(M) = f(U)$. Soit (U', ψ) une carte locale pour $f(p)$ comme point de la variété. On considère $V' = U' \cap V$. L'application $\psi_{|V'}$ induit un homéomorphisme entre V' et un ouvert de $\mathbb{R}^N$. Quitte à composer avec ψ et φ^{-1}, on peut voir f comme un plongement d'un ouvert de $\mathbb{R}^m$ dans un ouvert de de $\mathbb{R}^n$. On conclut en se servant de l'équivalence des définitions de sous-variété de $\mathbb{R}^n$.
(2) Quitte à raisonner dans des cartes locales, on peut supposer que M et N sont des ouverts U et V de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$ contenant 0, on peut aller plus loin et supposer que $P = \mathbb{R}^k \times \{0\}^{n-k} \cap V$ et f la réstriction d'une application linéaire. La condition de transversalité implique de $f^{-1}(P)$ est l'intersection de U avec un espace de dimension $k - m + n$. On remarque $k - m + n$ ne dépend pas du choix des cartes, donc $f^{-1}(P)$ est une variété de dimension $k + m - n$. Notons que la codimension de P est $n - k$ et la codimension de $f^{-1}(P)$ est $m - k - m + n = n - k$.

Exercice 2. C'est clairement une sous-variété défini par la sumbersion

$$f : (x, y) \mapsto ||x||^2 - ||y^2|| - 1$$

Les difféomorphismes sont donnés par :

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & Q \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p & \to & \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}^p \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \\ & (x, y) & \mapsto & \left(\frac{x}{1+||y||^2}, y \right) \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}^p \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p & \to & Q \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \\ & (x, y) & \mapsto & ((1 + ||y||^2)x, y) \end{array}$$

Exercice 3. **(1)** Soit D une droite projective et $P \simeq \mathbb{R}^2$ un plan vectoriel de $\mathbb{R}^{n+1}$ tel que $\pi(P) = D$. Quand on fixe un isomorphisme entre P et $\mathbb{R}^2$, on a le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \arrow[r, "\iota_{\mathbb{R}}"] \arrow[d, "\pi_1"'] & \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \arrow[d, "\pi_n"] \\ \mathbb{RP}^1 \arrow[r, dashed, "\iota_{\mathbb{RP}}"'] & \mathbb{RP}^n \end{tikzcd}$$

On veut montrer que $\iota_{\mathbb{RP}}$ est bien définie et est un plongement de $\mathbb{RP}^1$ dans $\mathbb{RP}^n$. On définit $\iota_{\mathbb{RP}}$ de la manière suivante : si $[x : y]$ est un élément, on définit $\iota_{\mathbb{RP}}([x : y])$ comme étant égale à $\pi_n(\iota_{\mathbb{R}}(x, y))$. Elle est bien définie et continue car $\pi_n \circ \iota_{\mathbb{R}}$ est continue.

C'est en fait un plongement :

— Soit (e_1, e_2) la base canonique de $\mathbb{R}^2$. On appelle f_1 et f_2 les images de e_1 et e_2 par φ. Tout élément de $P \setminus \{0\}$ s'écrit $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ avec $(\lambda_1, \lambda_2) \neq (0,0)$. L'application inverse de $\iota_{\mathbb{RP}}$ est donnée par : $[\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2] \mapsto [\lambda_1, \lambda_2]$ qui est continue pour essentiellement les même raisons que $\iota_{\mathbb{RP}}$. Notons que quitte à changer la base de $\mathbb{R}^{n+1}$, on peut supposer que $\varphi(e_1)$ et $\varphi(e_2)$ sont le premier et le dernier vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$.

— Reste à montrer que c'est une immersion. Pour cela nous avons besoin de carte. On choisit

$$U_1 := \{[1, x] | x \in \mathbb{R}\} \simeq \mathbb{R} \quad \text{et} \quad U_2 := \{[x, 1] | x \in \mathbb{R}\} \simeq \mathbb{R}$$

pour $\mathbb{RP}^1$ et

$$V_1 := \{[1, y] | y \in \mathbb{R}^n\} \simeq \mathbb{R}^n \quad \text{et} \quad V_2 := \{[y, 1] | y \in \mathbb{R}^n\} \simeq \mathbb{R}^n.$$

On a $\varphi(U_1) \subset V_1$ et $\varphi(U_2) \subset V_2$. Lue dans ces cartes l'application φ est donnée par :

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{pour } U_1, V_1 \text{ et}$$

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ x \end{pmatrix} \quad \text{pour } U_2, V_2$$

Les dérivée de ces application sont clairement injective.

Ainsi $\iota_{\mathbb{RP}}$ est un plongement et donc D est une sous-variété isomorphe (difféomorphe) à $\mathbb{RP}^1$.

(2) Soit D une droite projective de $\mathbb{RP}^2$ à changer de base de $\mathbb{RP}^n$, on peut supposer que $\pi^{-1}(D) = \langle e_1, e_2 \rangle$. Le complémentaire de D dans $\mathbb{RP}^2$ est alors constitué des $[x_1, x_2, x_3]$ avec $x_3 \neq 0$. On peut alors construire le difféomorphisme suivant :

$$\begin{array}{rccc} f\colon & \mathbb{RP}^2 \setminus D & \to & \mathbb{R}^2 \\ & [x_1, x_2, x_3] & \mapsto & \begin{pmatrix} x_1/x_3 \\ x_2/x_3 \end{pmatrix} \end{array}$$

L'application réciproque est donnée par

$$\begin{array}{rccc} f^{-1}\colon & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{RP}^2 \\ & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} & \mapsto & [x_1 : x_2 : 1] \end{array}.$$

On appelle $\mathcal{P}$ ce plan.

Si D' est une autre droite projective, on va montrer que $D' \cap \mathcal{P}$ est une droite affine de $\mathcal{P}$. Soit P' la préimage de D par π et f_1 et f_2 une base de P', pour f_1 ou f_2 la dernière coordonnée est non nulle sinon on aurait $D = D'$. En faisant éventuellement un changement de base on peut supposer que la dernière coordonnée de f_1 et f_2 est égale à 1. On note :

$$f_1 := \begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad f_2 := \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On va montrer que $D' \cap \mathcal{P}$ est la droite passant par $X_1 := \begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \end{pmatrix}$ et $X_2 := \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \end{pmatrix}$. Notons D'' cette droite. Tout point de D'' s'écrit $P_t := tX_1 + (1-t)X_2$, via l'isomorphisme précédent, P_t est la préimage de la droite vectorielle de $\mathbb{R}^3$ engendrée par $tf_1 + (1-t)f_2$ et donc P_t est bien dans D'. Réciproquement, si P est un point de D', alors P est la préimage d'une droite vectorielle de $\mathbb{R}^3$ engendré par une combinaison linéaire de f_1 et f_2 $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$. , mais P n'est pas dans $\mathcal{P}$, donc $\lambda_1 + \lambda_2 \neq 0$. On peut donc supposer que $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$. Et dont $P = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2$.

(3)

On considère D et D' deux droites projectives de $\mathbb{RP}^2$ et P et P' les plans vectoriels de $\mathbb{R}^3$ correspondant. Si $D \neq D'$ alors P et P' sont différent et s'intersectent donc le long d'une droite vetorielle. Donc $D \cap D'$ est un point (l'image de cette droite vectoriell par π).