Exercice 1. Seules les fonction $x \mapsto -2x$ et $x \mapsto e^x + x$ définissent des difféomorphismes de la droite réelle. En effet ces deux fonctions sont clairement bijective et leur fonctions dérivée ne s'annulent pas.

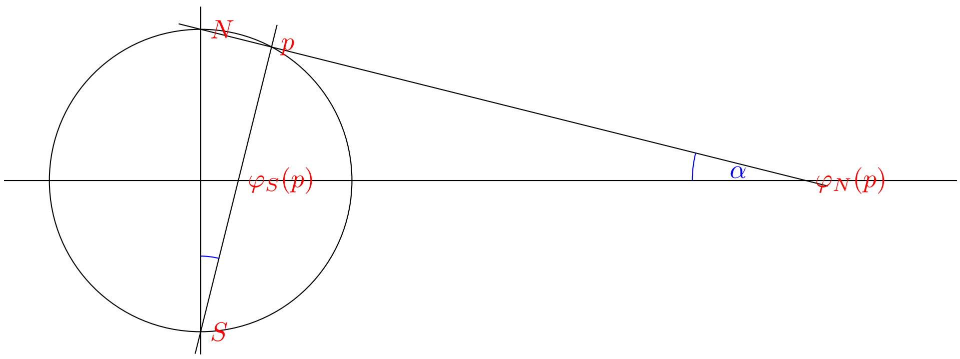
La fonction $x \mapsto x^2$ ne définit pas une difféomorphisme de la droite réelle car elle n'est pas bijective.

La fonction $x \mapsto x^3$ ne définit pas une difféomorphisme de la droite réelle : elle est bijective, mais ,sa dérivée s'annule en 0, son inverse n'est donc pas différentiable.

La fonction $x \mapsto e^x - x$ ne définit pas un difféomorphisme car elle n'est pas bijective. On s'en convainc facilement en remarquant que

$$\lim_{x\to\infty} e^x - x = \lim_{x\to-\infty} e^x - x = +\infty.$$

Exercice 2. **(1)** On prolonge $g_t = \varphi_N^{-1} \circ h_t \circ \varphi_N$ en définissant $g_t(N) = N$. Notez que c'est la seule manière de rendre $g_t : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ bijective. Montrons que c'est un difféomorphisme. Le seul point près duquel il faut vérifier quelque chose est N. Il n'est pas dans la carte $(\mathbb{S}^2 \setminus \{N\}, \varphi_N)$. Il faut donc travailler dans une autre carte. On considère la carte $(\mathbb{S}^2 \setminus \{S\}, \varphi_S)$. On cherche donc à comprendre la fonction g_t dans cette carte. Ainsi on s'intéresse à $\varphi_S \circ \varphi_N^{-1} \circ h_t \circ \varphi_N \circ \varphi_S^{-1}$. Pour cela il nous faut comprendre $\varphi_S \circ \varphi_N^{-1} : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. On identifie $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ avec $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Soit p un point de $\mathbb{S}^2$ différent de S et N. On se place dans le plan qui contient S, N et p. Dans ce plan on peut faire le dessin suivant :



On a donc

$$\begin{cases} |\varphi_S(p)| = \tan(\alpha), \\ |\varphi_S(p)| = \frac{1}{\tan(\alpha)}. \end{cases}$$

Ainsi, on a : $\varphi_S \circ \varphi_N^{-1}(\rho \exp(i\theta)) = \frac{1}{\rho} \exp(i\theta)$. Ce qui nous permet de comprendre g_t dans la carte $(\mathbb{S}^2 \setminus \{S\}, \varphi_S)$:

$$(\rho \exp(i\theta)) = e^{-t} \rho \exp(i\theta).$$

Et donc le prolongement de g_t dans la carte $(\mathbb{S}^2 \setminus \{S\}, \varphi_S)$ est l'homothétie de centre 0 et de rapport e^{-t}. C'est bien un difféomorphisme local en 0, donc g_t est un difféormorphisme de $\mathbb{S}^2$.

On a évidemment $g_t \circ g_s = g_{s+t} = g_s \circ g_t$.

(2) Le seul point fixe par g_t dans la carte $(\mathbb{S}^2 \setminus \{S\}, \varphi_S)$ est N et le seul point fixe par g_t dans la carte $(\mathbb{S}^2 \setminus \{N\}, \varphi_N)$ est S. Dans la carte $(\mathbb{S}^2 \setminus \{S\}, \varphi_S)$, on a clairement $\lim_{t\to\infty} \varphi_S(g_t(x)) = 0 = \varphi_S(N)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^2$ donc pour tout x dans $\mathbb{S}^2 \setminus \{S\}$ on a $\lim_{t\to\infty} g_t(x) = S$. Dans la carte $(\mathbb{S}^2 \setminus \{N\}, \varphi_N)$, on a clairement $\lim_{t\to-\infty} \varphi_N(g_t(x)) = 0 = \varphi_N(S)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^2$ donc pour tout x dans $\mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$ on a $\lim_{t\to-\infty} g_t(x) = S$.

(3) On remarque tout d'abord que $\{g_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ forme un groupe de difféomorphismes de $\mathbb{S}^2$ à un paramètre, ce qui est nécessaire pour être le flot d'un champs de vecteur. On veut montrer que le champs de vecteurs vitesses de $\{g_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ est le champs de vecteur X. Soit p un point de $\mathbb{S}^2$ différent de N. On identifie $T_p\mathbb{S}^2$ avec $\mathbb{R}^2 \times \{\varphi_N\}$. On a alors

$$\frac{\mathrm{d}g_t(p)}{\mathrm{d}t}_{|t=0} = \frac{\mathrm{d}e^t\varphi_N(p)}{\mathrm{d}t}_{|t=0} = \varphi_N(p) \in \mathbb{R}^2 \times \{\varphi_N\}$$

Pour pouvoir conclure il faut pouvoir lire le champs de vecteur X dans la carte $(\mathbb{S}^2 \setminus \{N\}, \varphi_N)$. Pour cela il nous faut comprendre la différentielle de la projection stéréographique. On se place dans le plan $\mathbb{R}^2 = \mathcal{P}_p$ contenant N, S et p et on étend la φ_N à $\mathcal{P}_p \setminus \{\mathbb{R} \times \{1\}\}$ en définissant

$$\begin{array}{rccc} \varphi_N : & \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,1)\} & \to & \mathbb{R} \\ & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & \frac{x}{1-y}. \end{array}$$

Dont la différentielle en $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est :

$$\begin{pmatrix} \dfrac{1}{1-y} & \dfrac{x}{(1-y)^2} \end{pmatrix}$$

Dans ce plan, le point p a pour coordonnées $(\cos\theta, \sin\theta)$ pour un θ dans $[0, 2\pi[\setminus\{\pi/2\}$. Le vecteur donnée par le champs de vecteur en X en p a pour coordonnées : $\begin{pmatrix} -\cos\theta\sin\theta \\ \cos^2\theta \end{pmatrix}$. Son image par la différentielle au point p est donc :

$$\begin{pmatrix} \dfrac{1}{1-\sin\theta} & \dfrac{\cos\theta}{(1-\sin\theta)^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta\sin\theta \\ \cos^2\theta \end{pmatrix} = \frac{-\cos\theta\sin\theta + \cos\theta\sin^2\theta + \cos^3\theta}{(1-\sin\theta)^2} = \frac{\cos\theta}{1-\sin\theta} = \varphi_N(p).$$

Ceci montre que le champs de vecteur vitesse de $\{g_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ est égale à X.