(1) Il y a une erreur d'énoncé : il faut lire

$$g(x,z) = (z_2, z_3, \dots z_n, f(x,z)) \quad \text{et non} \quad g(x,z) = (z_2, z_3, \dots z_{n-1}, f(x,z))$$

On réécrit l'EDO en colonne (chaque z_i est dans $\mathbb{R}^m$) :

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{n-1} \\ z_n \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} z_2 \\ z_3 \\ \vdots \\ z_n \\ f(x,z) \end{pmatrix}$$

Ainsi, si $\chi = (\chi_1, \dots, \chi_n)$ est solution de l'EDO, on a

$$\chi_1' = \chi_2, \qquad \chi_2' = \chi_3, \qquad \dots \qquad \chi_{n-1}' = \chi_n, \qquad \text{et} \qquad \chi_n' = f(x,z)$$

On obtient donc que χ_1 est de classe $\mathcal{C}^n$ et que pour tout i dans $\{1, \dots, n-1\}$, $\chi_i = \chi_1^{(i-1)}$. On nomme φ la fonction χ_1. On a alors $\chi = \psi_\varphi$. De plus, pour tout x dans le domaine de I, on a :

$$\varphi^{(n)}(x) = \chi_n'(x) = f(x,\chi) = f(x, \psi_\varphi).$$

(2) On commence par réécrire l'équation sous la forme.

$$y'' = G(y)$$

Avec $G = \frac{1}{m}\overrightarrow{F}$. On veut modifier cette équation pour la rendre d'ordre 1. Comme vu en cours (et dans l'exercice précédent) la contrepartie est que l'on va augmenter la dimension.

On reprend l'exercice précédent avec $m = 3$, $n = 2$ et $f(x,y) = G(y)$. On a alors

$$g\begin{pmatrix} x \\ z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_2 \\ G(y) \end{pmatrix}$$

Et l'équation d'ordre 1 équivalente à l'équation de Newton est :

$$z' = g(x,z).$$

Notons que g ne dépend pas de x, cette équation est donc autonome.

(3)

On rappelle que pour calculer les itérés de Picard–Lindelöf, on commence avec la fonction g_0 constante égale à y_0 puis on calcule $g_1 = T(g_0)$, $g_2 = T(g_1)$, …avec

$$T(g) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, g(t))\mathrm{d}t$$

Dans notre cas, $f(t, g(t)) = g(t)$. On a donc :

$$\begin{aligned} g_1(x) &= 1 + \int_0^x 1\mathrm{d}t = 1 + x \\ g_2(x) &= 1 + \int_0^x 1 + t\mathrm{d}t = 1 + x + \frac{x^2}{2} \\ g_3(x) &= 1 + \int_0^x 1 + t + \frac{t^2}{2}\mathrm{d}t = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} \end{aligned}$$

Montrons par récurrence que $g_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!}$. C'est vrai pour $n \leq 3$. On suppose que c'est vrai pour un certain n. On a alors

$$\begin{aligned} g_{n+1} = T(g_n) &= 1 + \int_0^x \sum_{i=0}^{n} \frac{t^i}{i!}\mathrm{d}t = 1 + \sum_{i=0}^{n} \int_0^x \frac{t^i}{i!}\mathrm{d}t \\ &= 1 + \sum_{i=0}^{n} \frac{t^{i+1}}{(i+1)!} = 1 + \sum_{i=1}^{n+1} \frac{x^i}{i!} &= \sum_{i=0}^{n+1} \frac{x^i}{i!} \end{aligned}$$

Ce qui montre le résultat.

Pour tout x dans $\mathbb{R}$, $g_n(x)$ converge vers $\exp(x)$. On remarque (et ce n'est pas un hasard) que exp est solution du problème de Cauchy.

(4.a) On a $f(x, y) = y^2 + 3x^2 - 1$, $x_0 = 1$, $y_0 = 1$, donc :

$$\begin{aligned} g_1(x) &= 1 + \int_1^x 3t^2\mathrm{d}t = t^3 \\ g_2(x) &= 1 + \int_1^x t^6 + 3t^2 - 1\mathrm{d}t = \frac{t^7}{7} + t^3 - t + \frac{6}{7} \\ g_3(x) &= 1 + \int_1^x 3t^2 + \left(\frac{t^7}{7} + t^3 - t + \frac{6}{7}\right)^2 - 1\mathrm{d}t \\ &= \frac{x^{15}}{735} + \frac{2x^{11}}{77} - \frac{2x^9}{63} + \frac{3x^8}{98} + \frac{x^7}{7} - \frac{2x^5}{5} + \frac{3x^4}{7} + \frac{4x^3}{3} - \frac{6x^2}{7} - \frac{13x}{49} + \frac{4099}{6930} \end{aligned}$$

(4.b) On a $f(x, y) = y + \exp(y - 1)$, $x_0 = 0$, $y_0 = 1$, donc :

$$\begin{aligned} g_1(x) &= 1 + \int_0^x 2\mathrm{d}t = 1 + 2t \\ g_2(x) &= 1 + \int_0^x 1 + 2t + \exp(2t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2} + x + x^2 + \frac{1}{2}\exp(2x) \\ g_3(x) &= 1 + \int_0^x \frac{1}{2} + t + t^2 + \frac{1}{2}\exp(2t) + \exp\left(-\frac{1}{2} + t + t^2 + \frac{1}{2}\exp(2t)\right)\mathrm{d}t \end{aligned}$$

(4.c) On a $f(x, y) = 1 + x\sin(y)$, $x_0 = \pi$, $y_0 = 2\pi$, donc :

$$\begin{aligned} g_1(x) &= 2\pi + \int_\pi^x 1 + 0\mathrm{d}t = \pi + x \\ g_2(x) &= 2\pi + \int_\pi^x 1 + t\sin(\pi + t)\mathrm{d}t = 2\pi + x - \sin(x) + x\cos(x) \\ g_3(x) &= 2\pi + \int_\pi^x 1 + t\sin(2\pi + t - \sin(t) + t\cos(t))\mathrm{d}t \end{aligned}$$

(4.d) On a $f(x, y, z) = (2x + z, y)$, $x_0 = 1$, $(y_0, z_0) = (1, 0)$, donc :

$$\begin{aligned} g_1(x) &= (1, 0) + \int_1^x (2t, 1)\mathrm{d}t = (x^2, x - 1) \\ g_2(x) &= (1, 0) + \int_1^x (3t - 1, t^2)\mathrm{d}t = \left(\frac{3x^2}{2} - x + \frac{1}{2}, \frac{x^3}{3} - \frac{1}{3}\right) \\ g_3(x) &= (1, 0) + \int_1^x \left(\frac{t^3}{3} + 2t - \frac{1}{3}, \frac{3t^2}{2} - t + \frac{1}{2}\right)\mathrm{d}t \\ &= \left(\frac{x^4}{12} + x^2 - \frac{x}{3} + \frac{1}{4}, \frac{x^3}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

(4.e) On a $f(x,y,z) = (z, y^2)$, $x_0 = 0$, $(y_0, z_0) = (1,2)$, donc :

$$g_1(x) = (1,2) + \int_0^x (2,1)\mathrm{d}t = (2x+1, x+2)$$

$$g_2(x) = (1,2) + \int_0^x (t+2, 4t^2+4t+1)\mathrm{d}t = \left(\frac{x^2}{2} + 2x + 1, \frac{4x^3}{3} + 2x^2 + x + 2\right)$$

$$g_3(x) = (1,2) + \int_0^x \left(\frac{4t^3}{3} + 2t^2 + t + 2, \frac{t^4}{4} + 2t^3 + 5t^2 + 4t + 1\right)\mathrm{d}t$$

$$= \left(\frac{x^4}{3} + \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x + 1, \frac{x^5}{20} + \frac{x^4}{2} + \frac{5x^3}{3} + 2x^2 + x + 2\right)$$

(4.f) On a $f(x,y,z) = (z, 3xy)$, $x_0 = 1$, $(y_0, z_0) = (2,-1)$, donc :

$$g_1(x) = (2,-1) + \int_1^x (-1, 6t)\mathrm{d}t = (-t+3, 3t^2-4)$$

$$g_2(x) = (2,-1) + \int_1^x (3t^2-4, -3t^2+9t)\mathrm{d}t = \left(x^3 - 4x + 5, -x^3 + \frac{9x^2}{2} - \frac{9}{2}\right)$$

$$g_3(x) = (2,-1) + \int_1^x \left(-t^3 + \frac{9t^2}{2} - \frac{9}{2}, 3t^4 - 12t^2 + 15t\right)\mathrm{d}t$$

$$= \left(-\frac{x^4}{4} + \frac{3x^3}{2} - \frac{9x}{2} + \frac{21}{4}, \frac{3x^5}{5} - 4x^3 + \frac{15x^2}{2} - \frac{51}{10}\right)$$