(1)

On cherche à utiliser le théorème du cours. On se donne donc un intervalle sur lequelle f (dans l'équation $y' = f(x, y)$) est lipschitzienne.

(1.a)

On a $f(x, y) = x + y^3$ et $(x_0, y_0) = (0, 0)$. Cette fonction est lipschitzienne sur $[-1, 1]^2$ et la valeur maximale (en valeur absolue) de f sur ce carré est 2. On applique le théorème (on a $\alpha = \min(1, \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$). On obtient que l'EDO admet une unique solution sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

(1.b)

On a $f(x, y) = -x + 2y^2$ et $(x_0, y_0) = (1, 1)$. Cette fonction est lipschitzienne sur $[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]^2$ et la valeur maximale (en valeur absolue) de f sur ce carré est 4 (en $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$). On applique le théorème (on a $\alpha = \min(\frac{1}{2}, \frac{\frac{1}{2}}{4}) = \frac{1}{8}$). On obtient que l'EDO admet une unique solution sur $[\frac{7}{8}, \frac{9}{8}]$.

(1.c)

On a $f(x, y, z) = (z^2, y^2)$ et $(x_0, y_0, z_0) = (0, 1, 2)$. Cette fonction est lipschitzienne sur $\mathbb{R} \times [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}] \times [\frac{3}{2}, \frac{5}{2}]2$ et la valeur maximale (en norme) de f sur ce cube est $\frac{\sqrt{706}}{4}$ (en $(0, \frac{3}{2}, \frac{5}{2})$). On applique le théorème (on a $\alpha = \min(\infty, \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{706}}{4}}) = \frac{2}{\sqrt{706}}$). On obtient que l'EDO admet une unique solution sur $[-\frac{2}{\sqrt{706}}, \frac{2}{\sqrt{706}}]$.

Notons que dans tout ces exemples, l'intervalle donné n'a aucune raison (et n'est pas) l'intervalle maximal.

(2)

On choisit (a, b) dans $[-c, 0] \times \mathbb{R}_+$ et on considère

$$\begin{array}{rccl} f_{a,b}\colon & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \begin{cases} -(x-a)^2 & \text{si } x \in]-\infty, a], \\ 0 & \text{si } x \in [a, b], \\ (x-b)^2 & \text{si } x \in [b, \infty[\end{cases} \end{array}$$

On a bien $f_{a,b}(x) \neq 0$ pour tout $x < -c$ et $f_{a,b}(0) = 0$. On a d'une part :

$$\begin{array}{rccl} 2\sqrt{|f_{a,b}|}\colon & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \begin{cases} -2(x-a) & \text{si } x \in]-\infty, a], \\ 0 & \text{si } x \in [a, b], \\ 2(x-b) & \text{si } x \in [b, \infty[\end{cases} \end{array}$$

et d'autre part $f_{a,b}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ (et pas seulement sur $\mathbb{R} \setminus \{a, b\}$) et :

$$\begin{array}{rccl} f'_{a,b}\colon & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \begin{cases} -2(x-a) & \text{si } x \in]-\infty, a], \\ 0 & \text{si } x \in [a, b], \\ 2(x-b) & \text{si } x \in [b, \infty[\end{cases} \end{array}$$

On a donc : $f'_{a,b} = 2\sqrt{|f_{a,b}|}$ et $f_{a,b}$ est solution de l'EDO pour tout $(a, b) \in [-c, 0] \times \mathbb{R}_+$

(3.a)

On se sert de la méthode de séparation des variables. On obtient : Si $y_0 = \pm 1$,

$\varphi : \mathbb{R} \ni x \mapsto \pm 1 \in \mathbb{R}$ est solution globale, comme f est localement lipschitzienne en tout points cette solution est l'unique solution. et $I_{\max} = \mathbb{R}$.

Si maintenant (I, φ) est solution on peut supposer que φ ne prend pas la valeur 1. On distingue deux cas : soit $|\varphi(x)| > 1$ pour tout x soit $|\varphi(x)| < 1$ pour tout x. On a

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x} = 1 - \varphi^2$$

Ainsi

$$\frac{1}{1-\varphi^2}\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{\varphi - 1} + \frac{1}{\varphi + 1}\right)\mathrm{d}\varphi = \mathrm{d}\left(\frac{1}{2}\log\left(\left|\frac{\varphi+1}{\varphi-1}\right|\right)\right) = \mathrm{d}x$$

On se place dans le premier cas, on a alors :

$$\mathrm{d}\log\left(\left|\frac{\varphi+1}{\varphi-1}\right|\right) = \mathrm{d}\log\left(\frac{\varphi+1}{\varphi-1}\right) = 2\mathrm{d}x$$

et donc :

$$\frac{\varphi(x)+1}{\varphi(x)-1} = \exp(2x+c)$$

Ainsi :

$$\varphi(x) = \frac{1+\exp(2x+c)}{1-\exp(2x+c)} = \coth\left(x + \frac{c}{2}\right)$$

avec $\frac{c}{2} = \operatorname{arccoth}(y_0) - x_0$. Cette fonction n'est pas définie en $x = -\frac{c}{2}$. L'intervalle maximale $I_{\max}$ est donc $]-\infty, \frac{c}{2}[$ si $y_0 > 1$ et $]\frac{c}{2}, \infty[$ si $y_0 < 1$.

On regarde maintenant le cas $|\varphi(x)| < 1$. Les calculs sont éssentiellement les mêmes. On obtient :

$$\varphi(x) = \frac{1-\exp(2x+c)}{1+\exp(2x+c)} = \tanh\left(x + \frac{c}{2}\right)$$

avec $\frac{c}{2} = \operatorname{arctanh}(y_0) - x_0$. Cette fonction est définie sur $\mathbb{R}$ donc $I_{\max} = \mathbb{R}$.

(3.b)

Comme dans la question précédente, on sépare les variables. On obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}x}{x} &= \frac{e^y - 1}{e^y - 2}\mathrm{d}y \\
&= e^y \frac{e^y - 1}{e^y(e^y-2)}\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{2}e^y\left(\frac{e^y-1}{e^y(e^y-2)}\right)\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{2}\mathrm{d}\left(\log|e^y(e^y-2)|\right)
\end{aligned}$$

Donc si (I, φ) est solution et x est dans I on obtient :

$$\log(x^2) - \log(x_0^2) = \log\left|e^{\varphi(x)}(e^{\varphi(x)} - 2)\right| - \log|e^{y_0}(e^{y_0} - 2)|$$

et donc si $e^{\varphi(x)} \in]2, +\infty[$

$$Cx^2 = e^{\varphi(x)}(e^{\varphi(x)} - 2)$$

avec $C = \frac{e^{y_0}(e^{y_0}-2)}{x_0^2} > 0$. On résout cette équation en $z = e^{\varphi(x)}$:

$$e^{\varphi(x)} = 1 \pm \sqrt{1 + Cx^2}$$

et donc

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \log\left(1 \pm \sqrt{1 + Cx^2}\right) \\ &= \log\left(1 + \sqrt{1 + Cx^2}\right)\end{aligned}$$

donc $I_{\max} = \mathbb{R}_+^*$ si $x_0 > 0$ et $I_{\max} = \mathbb{R}_-^*$ si $x_0 < 0$.

Si $e^{\varphi(x)} \in]0, 2[$, les calculs sont essentiellement les mêmes, on a

$$Cx^2 = -e^{\varphi(x)}(e^{\varphi(x)} - 2)$$

avec $C = \frac{-e^{y_0}(e^{y_0}-2)}{x_0^{-2}} > 0$. On obtient :

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \log\left(1 + \sqrt{1 - Cx^2}\right) && \text{si } e^{y_0} - 1 > 0, \\ \varphi(x) &= \log\left(1 - \sqrt{1 - Cx^2}\right) && \text{si } e^{y_0} - 1 < 0.\end{aligned}$$

On a alors $I_{\max} =]\frac{x_0}{\sqrt{-e^{y_0}(e^{y_0}-2)}}, 0[$ si $x_0 < 0$ et $I_{\max} =]0, \frac{x_0}{\sqrt{-e^{y_0}(e^{y_0}-2)}}[$ si $x_0 > 0$.

(3.c)

On sépare les variables :

$$\cos(x)\mathrm{d}x = \mathrm{d}(\sin(x)) = \frac{\mathrm{d}y}{y^2} = -\mathrm{d}\left(\frac{1}{y}\right)$$

Donc si ϕ est solution, on a :

$$\sin(x) - \sin(x_0) = -\frac{1}{\phi(x)} + \frac{1}{y_0}.$$

Donc

$$\phi(x) = \frac{1}{\sin(x_0) + \frac{1}{y_0} - \sin(x)}.$$

Donc si $|\sin(x_0) + \frac{1}{y_0}| > 1$, on a $I_{\max} = \mathbb{R}$. Sinon $I_{\max}$ est de l'unique intervalle de la forme $]a_i, a_{i+1}[$ pour un i dans $\mathbb{Z}$ et $a_{2k} = 2k\pi + \arcsin(\sin(x_0) + \frac{1}{y_0})$ et $a_{2k+1} = 3\pi - \arcsin(\sin(x_0) + \frac{1}{y_0})$ qui contient x_0.