(1)

Soit x un élément de I et t tel que $x+t$ soit dans I. On se sert de la différentiabilité des fonctions f_i pour écrire :

$$\begin{aligned} g(x+t) =& \alpha(f_1(x+t), \dots, f_n(x+t)) \\ =& \alpha(f_1(x) + tf_1'(t) + o(|t|), \dots, f_n(x+t) + tf_n'(x) + o(|t|)) \\ =& \alpha(f_1(x) + tf_1'(t), \dots, f_n(x+t) + tf_n'(x)) + o(|t|). \end{aligned}$$

On peut maintenant développer grâce à la multi-linearité de α. Ceci nous donne théoriquement 2^n termes. On remarque, les termes qui contiennent deux $tf_\bullet'(x)$ en argument de α sont négligeable devant $|t|$, on peut donc "faire rentrer" ces termes dans $o(|t|)$. On a donc :

$$\begin{aligned} g(x+t) =& \alpha(f_1(x+t), \dots, f_n(x+t)) + \sum_{i=1}^{n} \alpha(f_1(x), \dots, f_{i-1}(x), tf_i'(x), f_{i+1}(x), \dots, f_n(x)) + o(|t|) \\ & \alpha(f_1(x+t), \dots, f_n(x+t)) + t\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha(f_1(x), \dots, f_{i-1}(x), f_i'(x), f_{i+1}(x), \dots, f_n(x))\right) + o(|t|). \end{aligned}$$

Ceci prouve que la dérivée de g est dérivable en x et que sa dérivée est donnée par :

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha(f_1(x), \dots, f_{i-1}(x), f_i'(x), f_{i+1}(x), \dots, f_n(x)).$$

(2)

On applique la méthode de la variation des constantes et on cherche donc une solution de la forme : $\varphi : x \mapsto R(x,1)c(x)$ pour c une fonction de $\mathbb{R}_{>0}$ dans $\mathbb{R}^2$.

$$R(x,1) = \begin{pmatrix} x^2(1-\log(x)) & -x^2\log(x) \\ x\log(x) & x(1+\log(x)) \end{pmatrix}$$

Le cours (ou un calcul rapide) nous donne que

$$c(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \int_1^x R(1,t) \begin{pmatrix} 1 \\ t^2 \end{pmatrix} \mathrm{d}t$$

Or on sait que $R(1,t) = R(t,1)^{-1}$. De plus $\det R(t,1) = t^3$, ce qui nous donne :

$$R(1,t) = R(t,1)^{-1} = \frac{1}{t^3} \begin{pmatrix} t(1+\log(t)) & t^2\log(t) \\ -t\log(t) & t^2(1-\log(t)) \end{pmatrix}$$

Ce qui nous donne

$$R(1,t)\begin{pmatrix} 1 \\ t^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{t^3}\begin{pmatrix} t + t\log(t) + t^4\log(t) \\ t^4 - t\log(t) - t^4\log(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{t^2} + \frac{\log(t)}{t^2} + t\log(t) \\ t - \frac{\log(t)}{t^2} - t\log(t) \end{pmatrix}$$

Pour intégrer $\frac{\log(t)}{t^2}$, on remarque que $\left(\frac{\log(t)}{t}\right)' = -\frac{\log(t)}{t^2} + \frac{1}{t^2}$ et donc

$$\left(-\frac{\log(t)}{t} - \frac{1}{t}\right)' = \frac{\log(t)}{t^2} - \frac{1}{t^2} + \frac{1}{t^2} = \frac{\log(t)}{t^2}.$$

De même, on trouve
$$\left(\frac{1}{2}t^2\log(t)-\frac{t^2}{4}\right)'=t\log(t)+\frac{t}{2}-\frac{t}{2}=t\log(t).$$
Ainsi on a
$$\begin{aligned}c(x)&=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}+\int_1^x R(1,t)\begin{pmatrix}1\\t^2\end{pmatrix}\mathrm{d}t\\&=\begin{pmatrix}\int_1^x \frac{1}{t^2}+\frac{\log(t)}{t^2}+t\log(t)\mathrm{d}t\\ \int_1^x t-\frac{\log(t)}{t^2}-t\log(t)\mathrm{d}t\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}-\frac{1}{x}+1-\frac{\log(x)}{x}-\frac{1}{x}+1+\frac{1}{2}x^2\log(x)-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{4}\\ \frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}+\frac{\log(x)}{x}+\frac{1}{x}-1-\frac{1}{2}x^2\log(x)+\frac{x^2}{4}-\frac{1}{4}\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}+\frac{9}{4}-\frac{2}{x}-\frac{1}{4}x^2-\frac{\log(x)}{x}+\frac{1}{2}x^2\log(x)-x\\ -\frac{7}{4}+\frac{1}{x}+\frac{3}{4}x^2+\frac{\log(x)}{x}-\frac{x^2\log(x)}{2}.\end{pmatrix}\end{aligned}$$

On obtient donc
$$\begin{aligned}\varphi(x)&=R(x,1)c(x)\\&=\begin{pmatrix}x^2(1-\log(x)) & -x^2\log(x)\\ x\log(x) & x(1+\log(x))\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-x+3-\frac{2}{x}-\frac{\log(x)}{x}+x\log(x)\\ \frac{1}{4}+\frac{3x^2}{4}-\frac{1}{x}+\frac{\log(x)}{x}-\frac{x^2\log(x)}{2}\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}x(1-\log(x)) & -x\log(x)\\ \log(x) & 1+\log(x)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2+3x-x^2-\log(x)+x^2\log(x)\\ -1+\frac{x}{4}+\frac{3x^3}{4}+\log(x)-\frac{x^3\log(x)}{2}\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}-2x-x^3+3x^2-x\log(x)+x^3\log(x)-x\log(x)\left(-3+\frac{13}{4}x-x^2+\frac{3x^3}{4}+x^2\log(x)-\frac{x^3\log(x)}{2}\right)\\ \frac{3x^3}{4}+\frac{x}{4}-1+\log(x)-\frac{x^3\log(x)}{2}+\log(x)\left(-3+\frac{13}{4}x-x^2+\frac{3x^3}{4}+x^2\log(x)-\frac{x^3\log(x)}{2}\right)\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}-2x-x^3+3x^2-x\log(x)\left(-2+\frac{13}{4}x-2x^2+\frac{3x^3}{4}+x^2\log(x)-\frac{x^3\log(x)}{2}\right)\\ \frac{3x^3}{4}+\frac{x}{4}-1+\log(x)\left(-2+\frac{13}{4}x-x^2+-\frac{3x^3}{4}+x^2\log(x)-\frac{x^3\log(x)}{2}\right)\end{pmatrix}\end{aligned}$$

(3)

On a $A(x_1)A(x_2)=x_1A(x_2)\neq x_2A(x_1)=A(x_2)A(x_1)$ si $x_1\neq x_2$, donc les matrices $A(x)$ ne commutent pas deux à deux. On ne peut donc pas utiliser la formule faisant intervenir les exponentiels de matrices. On réécrit l'équation différentielle sous la forme d'un système :

$$\begin{aligned}y_1'&=xy_1+y_2\\y_2'&=0\end{aligned}$$

On en déduit immédiatement toute solution φ a sa deuxième coordonnée constante (disons égale à c_2), et que la première coordonnée vérifie l'équation différentielle suivante :
$$y'=xy+c_2.$$

Si $c_2 = 0$, l'équation est homogène. La solution générale de l'équation homogène associée est :

$$x \mapsto y_0 \exp\left(\frac{x^2 - x_0^2}{2}\right)$$

Si $c_2 \neq 0$ On utilise la variation de la constante pour trouver une solution : on cherche une solution de la forme :

$$\lambda(x) \exp\left(\frac{x^2}{2}\right).$$

On a donc que $y_0\lambda'(x) = c_2 \exp\left(\frac{-x^2+x_0^2}{2}\right)$, et donc les solutions de l'équation homogène sont de la forme :

$$x \mapsto y_0 \exp\left(\frac{x^2 - x_0^2}{2}\right) + c_2 \int_{x_0}^{x} \exp\left(\frac{-t^2 + x_0^2}{2}\right) \mathrm{d}t.$$

Ainsi la resolvante s'obtient en mettant côte à côte les solution correspondant à $\{y_0 = 1, c_2 = 0\}$ et $\{y_0 = 0, c_2 = 1\}$. On a donc :

$$R(x, x_0) = \begin{pmatrix} \exp\left(\frac{x^2-x_0^2}{2}\right) & \int_{x_0}^{x} \exp\left(\frac{-t^2+x_0^2}{2}\right) \mathrm{d}t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$