(1)

La décomposition de Jordan nous dit que toute matrice carrée $n \times n$ M à coefficient complexe est semblable à une matrice diagonale par blocs avec ℓ blocs, où les blocs sont donnée par des matrices carrées $k_i \times k_i$ du type :

$$J_{k_i}(\lambda_i) = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ \vdots & & & 0 & \lambda_i & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \lambda_i \end{pmatrix}$$

appelée *blocs de Jordan.* On a alors $\sum_{i=1}^{\ell} k_i = n$. Notons en particulier que si une matrice carrée est diagonalisable, tout ses blocs de Jordan sont de taille 1×1. Les λ_i ne sont pas nécessairement distincts.

On écrit

$$J_{k_i}(\lambda_i) = \lambda_i I_{k_i} + J_{k_i}(0).$$

La matrice $J_{k_i}(0)$ est clairement nilpotente d'undice de nilpotence k_i, la matrice $\lambda_i I_{k_i}$ est diagonal donc diagonalisable et ces deux matrices commutent (car l'une d'entre elles est un multiple de I_{k_i}).

On considère maintenant la matrice

$$\begin{aligned} M' &= \mathrm{DiagBloc}(J_{k_1}(\lambda_1), J_{k_2}(\lambda_1), \dots, J_{k_\ell}(\lambda_\ell)) \\ M' &= \mathrm{DiagBloc}(\lambda_1 I_{k_1}, \lambda_2 I_{k_2}, \dots, \lambda_\ell I_{k_\ell}) + \mathrm{DiagBloc}(J_{k_1}(0), J_{k_2}(0), \dots, J_{k_\ell}(0)) \\ &= D' + N'. \end{aligned}$$

La matrice D' est diagonal. De plus la multiplication des matrices diagonale par bloc se faisant bloc par bloc, la matrice N' est nilpotente d'indice de nilpotence $\max_{i=1,\dots,\ell}(k_i)$ et D' et N' commutent.

On sait qu'il existe une matrice inversible P telle que

$$M = PM'P^{-1} = PD'P^{-1} + PN'P^{-1} = D + N.$$

La matrice D est diagonalisable, la matrice N est nilpotente et N et D commutent.

(2.a)

La matrice A est diagonalisable et ses valeur propres sont i et $-i$. On trouve facilement que le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ est vecteur propre associé à $-i$ et que le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$ est vecteur propre associé à i.

On a donc :

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 0 \\ -i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 0 \\ -i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 1 \\ -i & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\exp(xA) &= \begin{pmatrix}-i & i\\ 1 & 1\end{pmatrix}\exp\left(\begin{pmatrix} ix & 0\\ 0 & -ix\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}-i & i\\ 1 & 1\end{pmatrix}^{-1}\\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-i & i\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\exp(ix) & 0\\ 0 & \exp(-ix)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} i & 1\\ -i & 1\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}\cos(x) & \sin(x)\\ -\sin(x) & \cos(x).\end{pmatrix}\end{aligned}$$

(2.b)

Une des valeur propre de A est 3. De plus la trace de A est 7 et son déterminant est 12 donc A a une seule autre valeur propre égale à deux et de multiplicité algébrique égale à 2. Autrement dit, le polynôme caractéristique de A est $\chi_A(x) = (3-X)(2-X)^2$. On constate que $A - 2I$ est de rang 2. Donc la multiplicité géométrique de 2 comme valeur propre de A est 1. Ceci montre que A est semblable à la matrice :

$$\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$$

On voit facilement que $v_3 := \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ est vecteur propre associé à 3. En considérant

$$A - 2I = \begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

On s'aperçoit que $v_1 := \begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix}$ est vecteur propre associé à 2. Pour touver le dernier vecteur qui nous intéresse, On cherche à compléter ce dernier vecteur en une base de $\ker((A-2I)^2)$.

$$\begin{aligned}(A-2I)^2 &= \begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}^2\\ &= \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ -2 & 5 & 1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Le vecteur $v_2' := \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$ donne un deuxième vecteur de $\ker((A-2I)^2)$.

On a $(A-2I)v_2' = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = -v_1$. On considère donc $v_2 = -v_2'$. Ainsi on a :

$$\begin{cases} Av_1 = 2v_1 \\ Av_2 = 2v_2 + v_1 \\ Av_3 = 3v_3 \end{cases}$$

Donc

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \exp(xA) &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \exp\left(x \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \exp\left(x \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \right) \exp\left(x \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \exp(2x) & 0 & 0 \\ 0 & \exp(2x) & 0 \\ 0 & 0 & \exp(3x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (1-x)\exp(2x) & x\exp(2x) & 0 \\ -x\exp(2x) & (1+x)\exp(2x) & 0 \\ (2+3x)\exp(2x) - 2\exp(3x) & (-5-3x)\exp(2x) + 5\exp(3x) & \exp(3x) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(2.c)

On cherche à Jordaniser la matrice A. On calcule son polynôme caractéristique :

$$\chi_A(X) = \det\left(\begin{pmatrix} 1-X & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2-X & -3 & 3 \\ 1 & 1 & -1-X & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -2-X \end{pmatrix}\right)$$

$$= (-1-X)\det\left(\begin{pmatrix} 1-X & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2-X & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -2-X \end{pmatrix}\right)$$

$$= (-1-X)^2\det\left(\begin{pmatrix} 1-X & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & -2-X \end{pmatrix}\right)$$

$$= (1-X)(-1-X)^2\det\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -2-X \end{pmatrix}\right) \qquad = (1-X)^2(-1-X)^2$$

On constate que $A-I$ et $A+I$ ont rang 3. Les valeurs propres 1 et -1 ont donc toute les deux une multiplicité géométrique égale à 1. La matrice 1 est donc semblable à :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

On cherche un vecteur du noyau de

$$A-I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ convient. On cherche à compléter ce vecteur en une base du noyau de

$$(A-I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & -4 & 8 \end{pmatrix}$$

Le vecteur $v_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ convient, et on a $Av_2 = v_2 + v_1$.

On cherche un vecteur du noyau de

$$A+I=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Le vecteur $v_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ convient. On cherche à compléter ce vecteur en une base du noyaux de

$$(A+I)^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -4 & 4 \\ 4 & 8 & -8 & 8 \\ 4 & 4 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le vecteur $v_4 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ convient, et on a $Av_4 = -v_4 + v_3$. Ainsi on a :

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \exp(xA) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \exp\left(x \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \exp(x) & x\exp(x) & 0 & 0 \\ 0 & \exp(x) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \exp(-x) & x\exp(-x) \\ 0 & 0 & 0 & \exp(-x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^x & xe^x & -xe^x & xe^x \\ e^x - e^{-x} & (1+x)e^x & e^{-x} - (1+x)e^x & -e^{-x} + (1+x)e^x \\ (-1-x)e^{-x} + e^x & xe^x & (1+x)e^{-x} - xe^x & xe^x - xe^{-x} \\ -xe^{-x} & 0 & xe^{-x} & (1-x)e^{-x} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(3)

On commence par remarquer que $\phi_0(x) = \frac{1}{3}\exp(4x)$ est solution de l'équation non-homogène. Pour avoir la solution générale de l'équation non-homogène il suffit d'additionner la solution générale de la solution homogène avec ϕ_0.

On considère donc le polynôme caractéristique $X^2 + 3X - 10$. Il a deux racines réelles -5 et 2. On en conclut que $\phi_1(x) = \exp(-5x)$ et $\phi_2(x) = \exp(2x)$ sont solutions indépendante de l'équation homogène. Ainsi la solution générale de l'équation non-homogène est :

$$\psi_{\lambda_1,\lambda_2}(x) = \phi_0(x) + \lambda_1\phi_1(x) + \lambda_2\phi_2(x) \quad = \frac{1}{3}\exp(4x) + \lambda_1\exp(-5x) + \lambda_2\exp(2x).$$