(1)
On sait que la norme sur $E = \mathcal{L}(F)$ induite par la norme de F est une norme d'algèbre, c'est à dire que

$$\|ab\| \leq \|a\| \, \|b\| \quad \text{pour tout } a, b \text{ dans } E.$$

En effet, pour tout t de F de norme 1, on a :

$$\|ab(t)\|_F = \|a(b(t))\|_F \leq \|a\| \, \|b(t)\|_F \leq \|a\| \, \|b\| \, .$$

Ainsi pour tout tout x de E de norme 1, on a :

$$\|Ax\| = \|ax + xa\| \leq \|ax\| + \|xa\| \leq 2 \|a\| \, \|x\| = 2 \|a\| \, .$$

Donc $\|A\| \leq 2 \|a\|$ et donc l'opérateur A est borné.

On considère $y = \mathrm{id}_F \in E$. C'est bien un opérateur borné sur F et sa norme est égale à 1. On a

$$\|Ay\| = \|a + a\| = 2 \|a\| \, .$$

Donc $\|A\| \geq 2a$ et finalement $\|A\| = 2a$.

(2)
On a pour tous entiers a, b : $\left\|A^{am+b}\right\| \leq \|A^m\|^a \left\|A^b\right\|$.

Soit n un entier. On écrit $n = am + b$ pour $b \in \{0, \ldots, m-1\}$ (autrement dit, on fait la division euclidienne de n par m. On a

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{k=0}^{n} A^k\right\| &\leq \sum_{k=0}^{n} \|A^k\| \\
&\leq \sum_{k=0}^{am+m-1} \|A^k\| \\
&\leq \sum_{k=0}^{a} \sum_{\ell=0}^{m-1} \left\|A^{km)+\ell}\right\| \\
&\leq \left(\sum_{\ell=0}^{m-1} \left\|A^\ell\right\|\right) \sum_{k=0}^{a} \|A^m\|^k \\
&\leq \frac{\sum_{\ell=0}^{m-1} \left\|A^\ell\right\|}{1 - \|A^m\|}
\end{aligned}$$

Ainsi la série de terme générale A^k, converge absolument. De plus comme E est un espace de Banach, $\mathcal{L}(E)$ est aussi un espace de Banach, donc la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} A^k\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. Appelons B sa limite. On a :

$$\begin{aligned}
&\mathrm{id}_E + AB = B && \text{et} && \mathrm{id}_E + BA = B \\
&(A - \mathrm{id}_E)B = \mathrm{id}_E && && B(A - \mathrm{id}_E) = \mathrm{id}_E
\end{aligned}$$

et donc B est l'inverse de $A - \mathrm{id}_E$ et donc $A - \mathrm{id}_E$ est inversible.

(3.a)

On monter par récurence que pour tout n dans $\mathbb{N}$ et pour tout f dans E, on a :

$$|(V^n f)(t)| \leq \frac{\|f\|_\infty}{n!} t^n.$$

Pour $n = 0$, c'est trivial. On suppose le résultat vrai pour un certain rang n.

$$\begin{aligned}\left|(V^{n+1}f)(t)\right| &\leq \left|\int_0^t (V^n f)(s)\mathrm{d}s\right| \\ &\leq \int_0^t \left|(V^n f)(s)\right| \mathrm{d}s \\ &\leq \int_0^t \frac{\|f\|_\infty}{n!} s^n \mathrm{d}s & \leq \frac{\|f\|_\infty}{(n+1)!} t^{n+1}.\end{aligned}$$

On a donc pour tout n de $\mathbb{N}$, $\|V^n\|_\infty \leq \frac{1}{n!}$ et donc pour tout n de $\mathbb{N}$ et tous λ dans $\mathbb{R}$, on a $\left\|(\frac{1}{\lambda}V)^n\right\|_\infty \leq \frac{1}{\lambda^n n!}$. Or

$$\frac{\lambda^n}{n!} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Donc pour tout λ, il existe un m_λ tel que $\|(\lambda V)^n\|_\infty < 1$. D'après la question précédente, on obtient que $(\mathrm{id}_E - \frac{1}{\lambda}V)$ est inversible dans $\mathcal{L}(E)$. Il est en de même pour $(\lambda\mathrm{id}_E - V)$.

(3.b)

On note

$$\begin{aligned} W_\lambda \colon \quad E &\to E \\ g &\mapsto x \mapsto \tfrac{1}{\lambda}g(x) + \tfrac{1}{\lambda^2}\textstyle\int_0^x g(t)\exp\left(\frac{x-t}{\lambda}\right)\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Soit f un élément de E et F sa primitive s'annulant en 0. On a :

$$\begin{aligned} W_\lambda V f(x) &= \frac{1}{\lambda}F(x) + \frac{1}{\lambda^2}\int_0^x F(t)\exp\left(\frac{x-t}{\lambda}\right)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\lambda}F(x) - \frac{1}{\lambda}\left[F(t)\exp\left(\frac{x-t}{\lambda}\right)\right]_{t=0}^{t=x} + \frac{1}{\lambda}\int_0^x f(t)\exp\left(\frac{x-t}{\lambda}\right)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\lambda}F(0)\exp\left(\frac{x}{\lambda}\right) + \frac{1}{\lambda}\int_0^x f(t)\exp\left(\frac{x-t}{\lambda}\right)\mathrm{d}t & = -f(x) + \lambda(W_\lambda f)(x)\end{aligned}$$

On a donc : $W_\lambda V = -\mathrm{id} + \lambda W_\lambda$ et ainsi $W_\lambda(\lambda\mathrm{id}_E - V) = \mathrm{id}$, ce qui en composant à droite par $(\lambda\mathrm{id}_E - V)^{-1}$, montre le résultat.

(4)

Il suffit de constater que pour les deux série convergent absolument, en effet, vue comme série entière elles ont un rayon de convergence infini.