PROSEMINAR DARSTELLUNGEN ENDLICHEN GRUPPEN: FUNDAMENTALE BEGRIFFEN

LOUIS-HADRIEN ROBERT

1. Gruppe und Wirkungen

Definition 1.1. Eine *Gruppe* $(G, \cdot_G)$ ist eine Menge G mit einer Multiplikation:

$$\begin{array}{rcl} \cdot_G : G \times G & \to & G \\ (g_1, g_2) & \mapsto & g_1 \cdot_G g_2, \end{array}$$

so dass

- für alle (g_1, g_2, g_3) in G^3 $(g_1 \cdot_G g_2) \cdot_G g_3 = g_1 \cdot_G (g_2 \cdot_G g_3)$ gilt,
- ein *neutrales Element* e_G existiert, so dass für jedes g in G $e_G \cdot_G g = g \cdot_G e_G = g$ gilt,
- für alle g in G ein Element g^{-1} (die *Inverse* von g) existiert, so dass $g \cdot_G g^{-1} = g^{-1} \cdot_G g = e_G$ gilt.

Eine Gruppe $(G, \cdot_G)$ ist *abelsch* oder *kommutativ*, wenn für alle Elemente g_1 und g_2 aus G $g_1 \cdot_G g_2 = g_2 \cdot_G g_1$ gilt.

Seien $(G_1, \cdot_{G_1})$ und $(G_2, \cdot_{G_2})$ zwei Gruppen. Eine Abbildung $\phi : G_1 \to G_2$ ist ein *Gruppemorphismus*, wenn für jede Elemente g und h aus G_1 $\phi(g \cdot_{G_1} (h^{-1})) = \phi(g) \cdot_{G_2} (\phi(h))^{-1}$ gilt.

Die Mächtigkeit einer Gruppe G heißt *die Ordnung* von G und ist $|G|$ oder $\#G$ bezeichnet.

Bemerkung 1.2. Man kann beweisen, dass das neutral Element und die Inverse eindeutig definiert sind. Man schreibt oft *„Sei G eine Gruppe“*. Das bedeutet, dass die Multiplikation implizit gegeben ist. Die Multiplikation von g_1 und g_2 ist $g_1 \cdot g_2$ oder $g_1 g_2$ geschrieben.

Beispiel 1.3.
1. Wir betrachten $I_n := \{1, 2, \ldots, n\}$ (für n in $\mathbb{N}\backslash\{0\}$). Die Menge $\mathfrak{S}_n$ von allen Bijektion auf I_n mit der Verknüpfung als Multiplikation ist eine Gruppe, die *die symmetrische Gruppe auf n Elemente* heißt.
2. Sei V eine $\mathbb{K}$-Vektorraum. Die Menge $GL(V)$ von allen invertierbaren linearen Abbildungen mit der Verknüpfung als Multiplikation ist eine Gruppe, die *die allgemeine lineare Gruppe von V* heißt. Es gibt viele Variante: $SL(V)$, $O(V)$, $SO(V)$, $PSL(V)$ usw.
3. Sei X eine endliche[1] Menge. Wir betrachten die Menge $\mathcal{W}(X)$ von allen[2] endlichen Wörtern in den Buchstaben $(x)_{x\in X} \cup (x^{-1})_{x\in X}$. Wir betrachten die kleinste Äquivalenzrelation $\sim$, die

$$\{(w_1 x x^{-1} w_2, w_1 w_2) | w_1, w_2 \in \mathcal{W}(X), x \in X\} \cup \{(w_1 x^{-1} x w_2, w_1 w_2) | w_1, w_2 \in \mathcal{W}(X), x \in X\}$$

[1] Das geht auch mit X unendlich.

[2] Das leere Wort, das ε genannt ist, ist ein Wort.

enthält. Die Menge $F(X) := \mathcal{W}(\mathcal{X})/\sim$ mit der (Quotient)-Verknüpfung ist eine Gruppe, die heißt *die freie Gruppe auf* X.

(4) Wenn G_1 und G_2 zwei Gruppen sind, dann ist die direkte Produkt $G_1 \times G_2$ mit der Multiplikation

$$(g_1, g_2) \cdot_{G_1 \times G_2} (g_1', g_2') := (g_1 \cdot_{G_1} g_1', g_2 \cdot_{G_2} g_2')$$

ist eine Gruppe, die *direkte Produkte von* G_1 *und* G_2 heißt.

Definition 1.4. Sei G eine Gruppe, und H eine Teilmenge von G, die e_G enthält. Wir sagen dass, H *eine Untergruppe von* G *ist*, wenn für jede h_1 und h_2 aus H $h_1 \cdot_G h_2$ in H ist und für jedes h in H h^{-1} in H ist. Wir sagen, dass eine Untergruppe H von G *normal* ist, wenn für jedes h in H und jedes g in G, ghg^{-1} in H ist.

Satz 1.5. *Sei G eine Gruppe und H eine normale Untergruppe von G. Die Menge*

$$G/H := G/\sim_H \qquad \text{mit } g_1 \sim_H g_2 \text{ genau dann wenn } g_1 g_2^{-1} \text{ in } H \text{ ist.}$$

mit der wohldefiniert (!) Multiplikation $\overline{g_1} \cdot_{G/H} \overline{g_2} = \overline{g_1 \cdot_G g_2}$ ist eine Gruppe, die heißt die Faktorgruppe von G durch H.

Seien G_1 und G_2 zwei Gruppen und $\phi : G_1 \to G_2$ eine Gruppenmorphismus. Die Teilmenge

$$\operatorname{Ker} \phi = \{g \in G_1 | \phi(g) = e_{G_2}\}$$

von G_1 ist eine normale Untergruppen von G_1.

Definition 1.6. Sei X eine endliche Menge und R eine endliche Teilmenge von $\mathcal{W}(X)$. Die Gruppe $\langle X|R\rangle$ ist der Faktorgruppe $F(X)/N(R)$, wobei $N(R)$ ist die kleinste normale Untergruppe von $F(X)$ die $\overline{r}$ für jedes r in R enthält. Wenn $G = \langle X|R\rangle$, sagen wir, dass G durch *Ergänzter und Relationnen präsentiert ist* oder, dass (X, R) *eine Präsentation von G ist.*

Beispiel 1.7.

$\langle a|a^n\rangle = \langle a|a^n = e\rangle = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

$\langle a, b|aba^{-1}b^{-1}\rangle = \langle a, b|ab = ba\rangle = \mathbb{Z}^2$

$$\left\langle s_1, \dots s_{n-1}, \left| \begin{array}{l} s_i^2 \quad \text{für alle } i \text{ in } \{1, \dots, n-1\}, \\ s_i s_j s_i s_j \quad \text{für alle } i \text{ und } j \text{ in } \{1, \dots, n-1\} \text{ wenn } |i-j| \geqslant 2, \\ s_i s_{i+1} s_i s_{i+1} s_i s_{i+1} \quad \text{für alle } i \text{ in } \{1, \dots, n-2\}. \end{array} \right. \right\rangle$$

$$= \left\langle s_1, \dots s_{n-1}, \left| \begin{array}{l} s_i^2 = 1 \quad \text{für alle } i \text{ in } \{1, \dots, n-1\}, \\ s_i s_j = s_j s_i \quad \text{für alle } i \text{ und } j \text{ in } \{1, \dots, n-1\} \text{ wenn } |i-j| \geqslant 2, \\ s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1} \quad \text{für alle } i \text{ in } \{1, \dots, n-2\}. \end{array} \right. \right\rangle = \mathfrak{S}_n.$$

Bemerkung 1.8. Eine Gruppe kann verschiedene Präsentationen haben.

Definition 1.9. Sei G eine Gruppe und X eine Menge. Eine (links) Wirkung w von G auf X (wir schreiben $G \circlearrowright X$) ist eine Gruppenmorphismus $w : G \to \operatorname{Bij}(X)$. Wenn g ein Element aus G und x ein Element aus X sind, schreiben wir $g \cdot x$ statt $w(g)(x)$.

Beispiel 1.10. (1) Die Gruppe $O(3)$ wirkt auf die 2-dimensionale Sphäre.

(2) Die Gruppe $PGL(V)$ wirkt auf die Menge alle Gerade in V, auf die Menge alle Ebene in V. Die Gruppe $GL(V)$ wirkt auf V und auf die Menge alle alle Base von V.
(3) Die Gruppe $\mathbb{S}^1$ wirkt auf die Menge alle 2π-periodische reelle Funktionen auf $\mathbb{R}$ durch $e^{i\theta} \cdot f := x \mapsto f(x+\theta)$.
(4) Eine Gruppe G wirkt auf G selbst durch links Multiplikation: $g \cdot g' := gg'$ und durch Konjugation: $g \cdot_c g' = gg'g^{-1}$.

Satz 1.11. *Sei G eine Gruppe und X eine Menge. Wir nehmen an, dass G auf X wirkt. Die Relation $\mathcal{R}$ auf X definiert durch*

$$x\mathcal{R}y \quad \text{genau dann wenn eine Element } g \text{ auf } G \text{ existiert, so dass} \quad x = g \cdot y$$

ist eine Äquivalenzrelation.

Beweis. Wir müssen Symmetrie, Reflexivität und Transitivität von $\mathcal{R}$ beweisen.

Symmetrie Für jedes x aus X, gilt $x\mathcal{R}x$, weil $x = e_G \cdot x$.

Reflexivität Seien x und y zwei Elemente aus X. Wenn $x\mathcal{R}y$ gilt, gilt auch $y\mathcal{R}x$, weil, wenn $x = g \cdot y$ gilt, $y = g^{-1} \cdot x$ gilt.

Transitivität Seien x, y und z drei Elemente aus X. Wenn $x\mathcal{R}y$ und $y\mathcal{R}z$ gelten, gilt auch $x\mathcal{R}z$, weil, wenn $x = g \cdot y$ und $y = g' \cdot z$ gelten, $x = gg'z$ gilt.

□

Sei G eine Gruppe. Die Äquivalenzklasse von G für die Konjugationwirkung heißen die *Konjugation klasse*.

2. Linear Algebra

Alle Vektorräume sind für uns endlich dimensionale $\mathbb{C}$-Vektorräume.

Bemerkung 2.1. Sei V ein n-dimensionaler Vektorraum. Eine Basis auswählen ist wie Isomorphismus zwischen V und $\mathbb{C}^n$ entscheiden.

Definition 2.2. Seien V ein Vektorraum und W_1 und W_2 Unterraüme mit triviale Schnitt ($W_1 \cap W_2 = \{0\}$). Die Summe $W_1 + W_2$ heißt die *innere direkte Summe* und ist $W_1 \oplus W_2$ geschrieben. Man kann jedes Element x in $W_1 \oplus W_2$ eindeutig als Summe $x_1 + x_2$ mit x_i in W_i schreiben. Falls $V = W_1 \oplus W_2$, sagen wir dass W_2 ein *Komplement* von W_1 ist (und W_1 ein Komplement von W_2 ist). In dem Fall $V = W_1 \oplus W_2$, die Projektion auf W_1 entlang W_2 ist die linear Abbildung

$$\begin{array}{rcl} p : V & \to & V \\ v = x_1 + x_2 & \mapsto & x_1 \end{array} \quad \text{mit } x_1 \text{ in } W_1 \text{ und } x_2 \text{ in } W_2.$$

Satz 2.3. *Seien V ein Vektorraum und W_1 und W_2 zwei Unterraüme mit triviale Schnitt. Wir betrachten $(e_1, \dots, e_{k_1})$ und $(f_1, \dots, f_{k_2})$, Basen von W_1 und W_2. Die Familie $(e_1, \dots, e_{k_1}, f_1, \dots, f_{k_2})$ ist eine Basis von $W_1 \oplus W_2$. Es gilt* $\dim W_1 \oplus W_2 = \dim W_1 + \dim W_2$.

Beweis. Die Familie $(e_1, \dots, e_{k_1}, f_1, \dots, f_{k_2})$ ergänzt $W_1 \oplus W_2$. Wir müssen nur zeigen, dass diese Familie linear unabhängig ist. Sei $(\lambda_1, \dots, \lambda_{k_1}, \mu_1, \dots \mu_{k_2})$ in $\mathbb{C}^{k_1+k_2}$, so dass

$$\sum_{i=1}^{k_1} \lambda_i e_i + \sum_{j=1}^{k_2} \mu_j f_j = 0.$$

Das Element $x := \sum_{i=1}^{k_1} \lambda_i e_i = -\sum_{j=1}^{k_2} \mu_j f_j$ ist in W_1 und W_2. Deswegen gilt $x = 0_V$. Daraus folgt, dass $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{k_1}) = 0_{\mathbb{C}^{k_1}}$ und $(\mu_1, \ldots, \mu_{k_2}) = 0_{\mathbb{C}^{k_2}}$. □

Definition 2.4. Sei V_1 und V_2 zwei[3] Vektorräume. Die *äußere direkte Summe* ist das Produkt der Räume V_1 und V_2 mit der kanonische Struktur. Dieser Raum ist $V_1 \oplus V_2$ bezeichnet. Es gilt $\dim V_1 \oplus V_2 = \dim V_1 + \dim V_2$

Definition 2.5. Seien V und W und T drei Vektorräume. Eine Abbildung $f : V \times W \to T$ ist *bilinear*, falls gilt

$$\begin{aligned} &f(x_1 + x_2, y_1) = f(x_1, y_1) + f(x_2, y_1), && f(x_1, y_1 + y_2) = f(x_1, y_1) + f(x_1, y_2), \\ &f(\lambda x_1, y_1) = \lambda f(x_1, y_1), && f(x_1, \lambda y_1) = \lambda f(x_1, y_1). \end{aligned}$$

für jedes (x_1, x_2, y_1, y_2) in $V^2 \times W^2$ und jedes λ in $\mathbb{C}$.

Definition 2.6. Seien V und W zwei Vektorräume. Ein *Tensorprodukt* von V und W ist Paar (Z, ϕ) wobei Z ein Vektorraum ist und $\phi : V \times W \to Z$ eine bilineare Abbildung ist, so dass für jeden Vektorraum T und jede bilinear Abbildung $f : V \times W \to Z$ eine lineare Abbildung $\widehat{f} : Z \to T$ eindeutig existiert, so dass $f = \widehat{f} \circ \phi$.

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "f"'] & Z \arrow[dl, dashed, "\exists! \widehat{f}"] \\ T & \end{tikzcd}$$

Bemerkung 2.7.
- Es gilt $\widehat{\phi} = \mathrm{id}_Z$.
- Das ist noch nicht klar das ein Tensorprodukt existiert und in welche Sinn es eindeutig ist.
- Man sagt, dass der Begriff von Tensorprodukt durch einer *universellen Eigenschaft* definiert ist.

Satz 2.8. *Seien V und W zwei Vektorräume. Seien (Z, ϕ) und (Z', ϕ') zwei* Tensorprodukte *von V und W. Es exsitiert eine eindeutig Isomorphismus $\psi : Z \to Z'$, so dass $\phi' = \psi \circ \phi$. Das bedeutet, dass das Tensorprodukt von V und W eindeutig bis auf einem eindeutigen Isomorphismus definiert ist.*

Beweis. Um ψ zu definieren, spielen wir mit dem Diagramm:

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\phi'"'] & Z \arrow[dl, dashed, "\exists! \widehat{\phi'} =: \psi"] \\ Z' & \end{tikzcd}$$

Das ist noch nicht klar, dass ϕ ein Isomorphismus ist. Wir spielen mit dem Diagramm anderes Rum um eine Morphismus $\psi' : Z \to Z'$ zu definieren (wir schreiben

[3]Die direkte Summe eine unendlich Familie ist ein echt Unterraum des Produkts.

$\widetilde{\bullet}$ statt $\widehat{\bullet}$):

$$\begin{tikzcd}
Z & V \times W \arrow[l, "\phi"'] \arrow[d, "\phi'"] \\
& Z' \arrow[ul, dashed, "\exists!\widetilde{\phi}' =: \psi'"]
\end{tikzcd}$$

Die folgende Diagramm kommutieren

$$\begin{tikzcd}
Z & V \times W \arrow[l, "\phi"'] \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\phi'"] & Z \arrow[ll, bend right, "\widehat{\phi} = \mathrm{id}_Z"'] \arrow[dl, "\psi"] \\
& Z' \arrow[ul, "\psi'"] &
\end{tikzcd}$$

Deswegen gilt $\psi' \circ \psi = \widehat{\phi} = \mathrm{id}_Z$. Bei Symmetrie haben wir auch $\psi \circ \psi' = \widetilde{\phi}' = \mathrm{id}_{Z'}$. $\square$

Wir wollen noch zeigen, dass das Tensorprodukt existiert. Dafür machen wir eine explizit Konstruktion.

Satz 2.9. *Seien V und W zwei Vektorräume. Es existiert ein Tensorprodukt von V und W.*

Beweis. Seien $(e_i)_{i=1,\dots,m}$ eine Basis von V und $(f_j)_{j=1,\dots,n}$ eine Basis von W. Wir betrachten der Vektorraum Z ergänzt bei den Symbolen $(e_i \otimes f_j)_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$ und die und die bilineare Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \phi : V \times W & \to & Z \\ \left(\sum_{i=1}^m \lambda_i e_i, \sum_{j=1}^n \mu_j f_j\right) & \mapsto & \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \lambda_i \mu_j e_i \otimes f_j \end{array}$$

Die Paar (Z, ϕ) ist ein Tensorprodukt von V und W: Sei T ein Vektorraum und $f : V \times W \to T$ eine bilineare Abbildung. Wir suchen eine lineare Abbildung $\widehat{f}$, so dass $f = \widehat{f} \circ \phi$. Wir müssen haben $\widehat{f}(e_i \otimes f_j) = f(e_i, f_j)$ für jedes (i, j) in $\{1, \dots, m\} \times \{1, \dots n\}$. Das definiert $\widehat{f}$ eindeutig, weil $(e_i \otimes f_j)_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$ eine Basis von Z ist. Wir überprüfen, dass $f = \widehat{f} \circ \phi$ gilt:

$$\begin{aligned} \widehat{f} \circ \phi \left(\sum_{i=1}^m \lambda_i e_i, \sum_{j=1}^n \mu_j f_j \right) &= \widehat{f} \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \lambda_i \mu_j e_i \otimes f_j \right) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \lambda_i \mu_j \widehat{f}\,(e_i \otimes f_j) \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \lambda_i \mu_j f\,(e_i, f_j) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \lambda_i \mu_j f\,(e_i, f_j) \\ &= f \left(\sum_{i=1}^m \lambda_i e_i, \sum_{j=1}^n \mu_j f_j \right). \end{aligned}$$

$\square$

Bemerkung 2.10.

(1) Das Symbol $V \otimes W$ steht für ein Tensorprodukt von V und W. Die Abbildung ϕ ist normalerweise nicht *explizit* geschrieben. Das Symbol $x \otimes y$ steht für $\phi(x, y)$ für x in V und y in W (das heißt, dass wir ϕ *implizit* brauchen). Wir missbrauchen dieses Begriff und sprechen über das Tensorprodukt, weil alle Tensorprodukte isomorph sind und die Isomorphismus zwischen zwei Tensorprodukt ist eindeutig. Ein Element von $V \otimes W$ ist nicht immer der Form $x \otimes y$ aber ist immer eine Summe von Elementen dieser Form.

(2) Es gilt $\dim(V \otimes W) = (\dim V)(\dim W)$.

(3) Man kann definieren das Tensorprodukt von mehrere Vektorräume.

Übung 2.11. Man kann den Begriff von äußerer direkter Summe auch durch einer universellen Eigenschaft definieren. Wie?

Universität Hamburg, Bundesstrasse 55, 20146 Hamburg, Deutschland
E-mail address: `louis-hadrien.robert@uni-hamburg.de`