1 Wiederholung

1.1 Darstellung und Invarianz

Sei G eine endliche Gruppe und V ein komplexer Vektorraum. ρ ist eine **Darstellung**, falls es ein Homomorphismus ist, die von G nach $\mathrm{GL}(V)$ abbildet. Manchmal schreiben statt $\rho(s)$ auch manchmal ρ_s. Wir bezeichnen V als den **Darstellungsraum** von G. (kurz: **Darstellung** von G)

Sei ρ eine lineare Darstellung von G nach $\mathrm{GL}(V)$ und W einen Untervektorraum. Dann ist W **stabil**, falls für alle $w \in W$ folgt, dass $\rho_s w \in W$. Wir nennen W eine **Unterdarstellung** von V.

1.2 Satz über stabile Komplemente

Sei $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ eine lineare Darstellung und W einen Untervektorraum, welches stabil in G ist. Dann existiert ein Komplement $\overline{W} \subset V$, welches stabil in G ist.

2 Irreduzible Darstellung

2.1 Definition Irreduzible Darstellung

Sei (V, ρ) eine Darstellung von G. Wir nennen sie **irreduzibel**, falls, außer V und die Nullmenge, keine Unterdarstellung von V existiert.

Aus Satz 1.2 geht hervor, dass die Definition äquivalent ist zu der Aussage, dass V nicht die direkte Summe von zwei echten Unterdarstellungen ist.

2.2 Satz über direkte Summen von irreduziblen Darstellungen

Jede Darstellung ist eine direkte Summe von irreduziblen Darstellungen.

Bemerkung Falls V irreduzibel, dann ist $V = V$.

Beweis Beweis über vollständige Induktion mit der Aussage: Jede Darstellung V mit $\dim(V) \leq n$ ist eine direkte Summe von irreduziblen Darstellungen.

Induktionsanfang mit $n = 1$ Falls die Dimension gleich 1 ist, folgt, dass außer V und 0 kein Untervektorraum von V existiert. V ist irreduzibel.

Induktionsschluss Falls V irreduzibel ist, so gilt $V = V$.

Sei V nicht irreduzibel. Sei V_1 mit $0 \subsetneq V_1 \subsetneq V$, wobei V_1 eine Unterdarstellung ist. Sie existiert, weil V nicht irreduzibel ist. Dann existiert eine weitere Unterdarstellung V_2 mit $V = V_1 \oplus V_2$. Es gilt dann $\dim(V_1) < \dim(V)$ und $\dim(V_2) < \dim(V)$. Nach dem Induktionsschritt folgt, dass V_1 und V_2 aus einer direkten Summe von irreduziblen Darstellungen besteht und somit tut dies auch V. $\square$

2.3 Tensorprodukt und Darstellungen

Seien $\rho_1 : G \to \mathrm{GL}(V_1)$ und $\rho_2 : G \to \mathrm{GL}(V_2)$ zwei Darstellungen. Wir wollen eine Darstellung ρ auf dem Tensorprodukt von V_1 und V_2 definieren. Seien $(e_i)_{i\in I}$ die Basis von V_1 und $(f_j)_{j\in J}$ die Basis von V_2. Dann definieren wir für jedes s aus G, jedes i aus I und jedes j aus J

$$\rho_s(e_i \otimes f_j) = \rho_s^1(e_i) \otimes \rho_s^2(f_j).$$

Das gibt uns für jedes s aus G eine lineare Abbildung $\rho_s : V_1 \otimes V_2 \to V_1 \otimes V_2$. Wie gezeigt wurde, ist ρ eine Darstellung.

Beweis Wir zeigen, dass ρ ein Gruppenhomomorphismus ist.

$$\rho_{s\cdot t}(e_i \otimes f_j) = \rho^1_{s\cdot t}(e_i) \otimes \rho^2_{s\cdot t}(f_j) \overset{\text{Verknüpfungen von } \mathrm{GL}(V_1) \text{ und } \mathrm{GL}(V_2) \text{ : Komposition}}{=} \rho_s^1 \circ \rho_t^1(e_i) \otimes \rho_s^2 \circ \rho_t^2(f_j)$$

Zudem gilt:

$$\rho_s \circ \rho_t(e_i \otimes f_j) = \rho_s(\rho_t^1(e_i) \otimes \rho_t^2(f_j)) = \rho_s^1(\rho_t^1(e_i)) \otimes \rho_s^2(\rho_t^2(f_j)) = \rho_s^1 \circ \rho_t^1(e_i) \otimes \rho_s^2 \circ \rho_t^2(f_j) \Rightarrow \rho_{st} = \rho_s \circ \rho_t$$

$$\rho_1 = \rho_1^1 \otimes \rho_1^2 = \mathrm{id} \otimes \mathrm{id} = \mathrm{id}$$

Daraus ergibt sich: $\mathrm{id} = \rho_1 = \rho_{t\cdot t^{-1}} = \rho_t \circ \rho_{t^{-1}} \Rightarrow \rho_{t^{-1}} = (\rho_t)^{-1} \square$

2.4 Symmetrisches und alternierendes Tensorquadrat

Wir betrachten das Tensorprodukt $V \otimes V$. Sei $(e_i)_{1\le i\le n}$ eine Basis V. Wir definieren $\mathrm{Sym}^2 V = \mathrm{Span}\{(e_i \otimes e_j + e_j \otimes e_i)_{i\le j}\}$ und $\mathrm{Alt}^2 V = \mathrm{Span}\{(e_i \otimes e_j - e_j \otimes e_i)_{i<j}\}$.

Behauptung $V \otimes V = \mathrm{Sym}^2 V + \mathrm{Alt}^2 V$

Beweis

$$x = \sum_{i\le j} \lambda_{ij} e_i \otimes e_j =$$

$$\sum_{i\le j} \lambda_{ij} \frac{e_i \otimes e_j + e_i \otimes e_j + e_j \otimes e_i - e_j \otimes e_i}{2} =$$

$$\underbrace{\sum_{i\le j} \lambda'_{ij}(e_i \otimes e_j + e_j \otimes e_i)}_{\text{in } \mathrm{Sym}^2 V} + \underbrace{\sum_{i<j} \lambda'_{ij}(e_i \otimes e_j - e_j \otimes e_i)}_{\text{in } \mathrm{Alt}^2 V}$$

$\square$

Behauptung $V \otimes V = \mathrm{Sym}^2 V \oplus \mathrm{Alt}^2 V$

Beweis Es gilt: $\dim(\operatorname{Sym}^2 V) \leq \frac{n(n+1)}{2}$ $\dim(\operatorname{Alt}^2 V) \leq \frac{n(n-1)}{2}$.

$$\dim(\operatorname{Sym}^2 V + \operatorname{Alt}^2 V) \leq \dim(\operatorname{Sym}^2 V) + \dim(\operatorname{Alt}^2 V) \leq \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2}$$
$$n^2 \leq \dim(\operatorname{Sym}^2 V) + \dim(\operatorname{Alt}^2 V) \leq n^2$$
$$\Rightarrow \dim \operatorname{Sym}^2 V = \frac{n(n+1)}{2}$$
$$\dim \operatorname{Alt}^2 V = \frac{n(n-1)}{2}$$

Wir benutzen die Dimensionsformel:

$$\dim(\operatorname{Sym}^2 V + \operatorname{Alt}^2 V) = \dim(\operatorname{Sym}^2 V) + \dim(\operatorname{Alt}^2 V) - \dim(\operatorname{Sym}^2 V \cap \operatorname{Alt}^2 V)$$
$$n^2 = n^2 - \dim(\operatorname{Sym}^2 V \cap \operatorname{Alt}^2 V)$$
$$0 = \dim(\operatorname{Sym}^2 V \cap \operatorname{Alt}^2 V)$$
$$\operatorname{Sym}^2 V \cap \operatorname{Alt}^2 V = \{0\}$$

□

Wir werden jetzt zeigen, dass $\operatorname{Sym}^2 V$ eine Unterdarstellung ist. (Für $\operatorname{Alt}^2 V$ ist der Beweis ähnlich). Dies bedeutet, dass kein irreduzibles Tensorquadrat gibt außer, wenn $\dim V = 1$ gilt.

Behauptung $\operatorname{Sym}^2 V$ ist stabil.

Beweis Sei $\rho : G \to \mathrm{GL}(V \otimes V)$ eine Darstellung und $s \in G$

$$\begin{aligned}
\rho_s(e_i \otimes e_j + e_j \otimes e_i) &= \rho_s(e_i \otimes e_j) + \rho_s(e_j \otimes e_i) \\
&= \rho_s(e_i) \otimes \rho_s(e_j) + \rho_s(e_j) \otimes \rho_s(e_i) \\
&= (\sum \lambda^i_k e_k) \otimes (\sum \lambda^j_{k'} e_{k'}) + (\sum \lambda^j_{k''} e_{k''}) \otimes (\sum \lambda^i_{k'''} e_{k'''}) \\
&= \sum_{k,k'} \lambda^i_k \lambda^j_{k'} e_k \otimes e_{k'} + \sum_{k''k'''} \lambda^j_{k''} \lambda^i_{k'''} e_{k''} \otimes e_{k'''} \\
&= \sum_{k,k'} \lambda^i_k \lambda^j_{k'} e_k \otimes e_{k'} + \sum_{k'k} \lambda^j_{k'} \lambda^i_k e_{k'} \otimes e_k \\
&= \sum_{k,k'} \lambda^i_k \lambda^j_{k'} (e_k \otimes e_{k'} + \otimes e_{k'} \otimes e_k)
\end{aligned}$$

□

3 Beispiele

3.1 Die zyklische Gruppe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Wir suchen die Darstellung von $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}, \ldots, \overline{n-1}\}$. Die Gruppe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ist abelsch und wir suchen für $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ die 1-dimensionalen Darstellungen. Jede linear Abbildung $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist characterisiert bei eine komplexe Zahl, $\mathrm{GL}(\mathbb{C}) \cong (\mathbb{C}^*, \cdot)$. Für jede Darstellung von $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ muss gelten, dass $\rho_0 = \rho(0) = 1_{\mathbb{C}}$ und $\rho(\bar{1} + \bar{1} + \cdots + \bar{1}) = \rho(\bar{0}) = 1 \Rightarrow 1 = \rho(\bar{1}) \cdot \rho(\bar{1}) \cdot ... \rho(\bar{1}) = \rho(\bar{1})^n$. $\rho(\bar{1})$ ist also eine n-te Wurzel von 1. Wir definieren $\rho^h(\bar{k}) = e^{\frac{2i\pi kh}{n}}$ mit $h \in \{0, \dots, n-1\}$

Behauptung $\bar{k} \to \rho(\bar{k})$ definiert eine Darstellung von $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Beweis Seien $\bar{k}, \bar{l} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

$$\rho(\bar{k} + \bar{l}) = e^{\frac{2i\pi(k+b)h}{n}} = e^{\frac{2i\pi kh}{n}} \cdot e^{\frac{2i\pi lh}{n}} = \rho(\bar{k}) \cdot \rho(\bar{l})$$
$$\rho(-\bar{k}) = e^{\frac{2i\pi(-k)h}{n}} = \left(e^{\frac{2i\pi kh}{n}}\right)^{-1} = \left(\rho(\bar{k})\right)^{-1}$$

Wir zeigen noch die Repräsentantenunabhängigkeit. Seien $z, z' \in \mathbb{Z}$, sodass $\bar{z} = \bar{z'}$ und $k, n \in \mathbb{Z}$ mit $z' = z + kn$

$$\rho(\bar{z'}) = \left(e^{\frac{2i\pi z'}{n}}\right)^h = \left(e^{\frac{2i\pi z}{n}} e^{\frac{2i\pi kn}{n}}\right)^h = \left(e^{\frac{2i\pi z}{n}} e^{2i\pi k}\right)^h = e^{\frac{2i\pi zh}{n}} = \rho(\bar{z}).$$

□

3.2 Die symmetrische Gruppe $\mathfrak{S}_3$ und ihre Darstellung

Die symmetrische Gruppe $\mathfrak{S}_3$ beinhaltet alle Permutationen von 3 Elementen. Sie ist nicht abelsch. Nun können wir ein Element aus $\mathfrak{S}_3$ auf die Koordinaten von $\mathbb{C}^3$ wirken lassen. Sei $\rho_g : \mathfrak{S}_3 \to \mathrm{GL}(\mathbb{C}^3)$, die ein Element aus $\mathfrak{S}_3$ in eine Abbildung abbildet, die die Permutation auf die Koordinatoren eines Vektor anwendet. Wie gezeigt wurde, ist dies eine Darstellung von $\mathfrak{S}_3$.

Die Darstellung von $\mathfrak{S}_3$ ist nicht irreduzibel. Trivialerweiße ist span $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ eine Unterdarstellung. Wir betrachten die Unterdarstellung. $V = \left\{ \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C} : z_1 + z_2 + z_3 = 0 \right\}$.

Behauptung V ist irreduzibel

Beweis Da V 2-dimensional ist, muss jeder nicht-trivialer Untervektorraum und jede nicht-triviale Unterdarstellung 1-dimensional sein. Wir nehmen, dass V nicht irreduzibel wäre. Dann existierte eine Unterdarstellung U mit $U = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \right\}$ mit $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \neq 0_{\mathbb{C}^3}$. Wir nehmen an, dass z_1 nicht null ist. Da U stabil ist, folgt dass auch $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_3 \\ z_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_2 \\ z_3 \\ z_1 \end{pmatrix} \in U$. Damit gilt $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_3 \\ z_2 \end{pmatrix} \Rightarrow$ $\lambda = 1$ Da $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \neq 0$, weil es sonst keine Basis wäre, ist auch $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_3 \\ z_2 \end{pmatrix} \neq 0$. Eine ähnliche Argumentation benutzen wir bei den anderen Vektoren. Wir folgern, dass $z_2 = z_3 = z_1 \Rightarrow 0 = z_1 + z_2 + z_3 = 3z_2$ und damit haben wir einen Widerspruch. Fall $z_1 = 0$, kann man gleich argumentieren mit der zweiten oder der dritten Koordinate. $\square$

3.3 Übungsaufgabe

Es gibt eine analoge Darstellung $\rho : \mathfrak{S}_4 \to \mathrm{GL}(\mathbb{C}^4)$. Ist die komplementäre Darstellung von span $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$ irreduzibel ?