Charakter: Grundlegende Definitionen

Sei V ein n-dimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum mit $n \in \mathbb{N}$ und G eine endliche, multiplikative Gruppe.

Wiederholung: Sei $\varphi : V \to V$ eine lineare Abbildung mit darstellender Matrix $(a_{ij})_{i,j\in\{1,..,n\}}$. Dann ist die **Spur von** φ wie folgt definiert:

$$Tr(\varphi) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Die Spur ist unabhängig von der Basiswahl.

Lemma: Seien $\varphi, \psi : V \to V$ lineare Abbildungen. Dann gilt:

$$Tr(\varphi \circ \psi) = Tr(\psi \circ \varphi)$$

Achtung: Es existieren lineare Abbildungen $\varphi, \psi, \tau : V \to V$, sodass $Tr(\varphi\circ\psi\circ\tau) \neq Tr(\varphi\circ\tau\circ\psi)$ gilt.

Lemma: Sei $\rho : G \to GL(V)$ eine lineare Darstellung von G und $s \in G$ beliebig. Weiter seien $\lambda_1, .., \lambda_n \in \mathbb{C}$ die (nicht notwendig verschiedenen) Eigenwerte von ρ_s, dann gilt:

$$Tr(\rho_s) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$$

Anmerkung: Die Eigenwerte $\lambda_1, .., \lambda_n$ von ρ_s existieren, das ρ_s diagonalisierbar ist.

Definition: Sei $\rho : G \to GL(V)$ eine lineare Darstellung von G. Die Abbildung

$$\chi_\rho : G \longrightarrow \mathbb{C},\ s \longmapsto Tr(\rho_s)$$

heißt **Charakter von der linearen Darstellung** ρ.

Satz: Sei χ_ρ der Charakter der linearen Darstellung $\rho : G \to GL(V)$. Dann gilt:
(i) $\chi_\rho(1) = n$
(ii) $\chi_\rho(s^{-1}) = \overline{\chi_\rho(s)}\ \forall s \in G$
(iii) $\chi_\rho(tst^{-1}) = \chi_\rho(s)\ \forall s, t \in G$

Beweis: (i) $\chi_\rho(1) = Tr(\rho_1) = Tr(Id_{GL(V)}) = \sum_{i=1}^{n} 1 = n$

(ii) Seien $\lambda_1, .., \lambda_n \in \mathbb{C}$ die Eigenwerte von ρ_s und $v_1, .., v_n$ die zugehörigen Eigenvektoren.
Weiter sei $k = |G|$. Dann gilt für alle $i = 1, .., n$:

$$\lambda_i^k v_i = \rho_s^k(v_i) = \rho_{s^k}(v_i) = \rho_1(v_i) = Id_{GL(V)}(v_i) = v_i$$

Wir erhalten $\lambda_i^k = 1$. Daraus folgt $|\lambda_i|^2 = \lambda_i\overline{\lambda_i} = 1$ und somit $\lambda_i^{-1} = \overline{\lambda_i}$ für alle $i = 1, .., n$.
Insgesamt erhalten wir:

$$\chi_\rho(s^{-1}) = Tr(\rho_{s^{-1}}) = Tr(\rho_s^{-1}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{-1} = \sum_{i=1}^{n} \overline{\lambda_i} = \overline{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i} = \overline{Tr(\rho_s)} = \overline{\chi_\rho(s)}\ \forall s \in G$$

(iii) Setze $u = ts,\ v = t^{-1}$. Dann gilt für alle $s, t \in G$:

$$\chi_\rho(tst^{-1}) = \chi_\rho(s) \Leftrightarrow \chi_\rho(uv) = \chi_\rho(vu) \Leftrightarrow Tr(\rho_{uv}) = Tr(\rho_{vu}) \Leftrightarrow Tr(\rho_u \cdot \rho_v) = Tr(\rho_v \cdot \rho_u)$$

Die Behauptung folgt direkt aus dem ersten Lemma. $\square$

Satz: Seien V_1, V_2 endlichdimensionale $\mathbb{C}$-Vektorräume und $\rho^1 : G \to GL(V_1), \rho^2 : G \to GL(V_2)$ lineare Darstellungen von G. Weiter seien $\chi_{\rho^1}, \chi_{\rho^2}$ die zugehörigen Charaktere.
(i) Für den Charakter χ_ρ von der direkten Summendarstellung $\rho : G \to GL(V_1 \oplus V_2)$ gilt: $\chi_\rho = \chi_{\rho^1} + \chi_{\rho^2}$
(ii) Für den Charakter χ_ρ von der Tensorproduktdarstellung $\rho : G \to GL(V_1 \otimes V_2)$ gilt: $\chi_\rho = \chi_{\rho^1} \cdot \chi_{\rho^2}$

Beweis: (i) Seien A_s^1, A_s^2 die darstellenden Matrizen von ρ_s^1 bzw. ρ_s^2. Dann hat die darstellende Matrix von ρ die folgende Form: $A_s = \begin{pmatrix} A_s^1 & 0 \\ 0 & A_s^2 \end{pmatrix}$ Daraus folgt direkt:

$$Tr(A_s) = Tr(A_s^1) + Tr(A_s^2) \Rightarrow \chi_\rho(s) = \chi_{\rho^1}(s) + \chi_{\rho^2}(s)\ \forall s \in G$$

(ii) Seien $A_s^1 = (a_{i_1 j_1})$, $A_s^2 = (a_{i_2 j_2})$ die darstellenden Matrizen von ρ_s^1 bzw. ρ_s^2. Dann ist $A_s = (a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2})$ die darstellende Matrix von ρ. Insgesamt gilt daher für alle $s \in G$:

$$\chi_\rho(s) = \sum_{i_1, i_2} a_{i_1 i_1} \cdot a_{i_2 i_2} = \sum_{i_1} a_{i_1 i_1} \cdot \sum_{i_2} a_{i_2 i_2} = \chi_{\rho^1}(s) \cdot \chi_{\rho^2}(s)$$

$\square$

Satz: Sei $\rho : G \to GL(V)$ eine lineare Darstellung von G und χ_ρ sei der zugehörige Charakter. Weiter sei χ_σ^2 der Charakter der Darstellung von $Sym^2(V)$ und χ_α^2 der Charakter der Darstellung von $Alt^2(V)$. Dann gilt:
(i) $\chi_\sigma^2(s) = \frac{1}{2}(\chi_\rho(s)^2 + \chi_\rho(s^2))\ \forall s \in G$
(ii) $\chi_\alpha^2(s) = \frac{1}{2}(\chi_\rho(s)^2 - \chi_\rho(s^2))\ \forall s \in G$
(iii) $\chi_\sigma^2 + \chi_\alpha^2 = \chi_\rho^2$

Beweis: (i)+(ii) Wir können eine Basis $\{v_1, .., v_n\}$ von V wählen, die aus Eigenvektoren von ρ_s besteht. Seien nun $\lambda_1, .., \lambda_n \in \mathbb{C}$ die zugehörigen Eigenwerte von ρ_s, dann gilt:

$$(\rho_s \otimes \rho_s)(v_i \otimes v_j + v_j \otimes v_i) = \rho_s(v_i) \otimes \rho_s(v_j) + \rho_s(v_j) \otimes \rho_s(v_i) = \lambda_i \lambda_j (v_i \otimes v_j + v_j \otimes v_i)$$

$$(\rho_s \otimes \rho_s)(v_i \otimes v_j - v_j \otimes v_i) = \lambda_i \lambda_j (v_i \otimes v_j - v_j \otimes v_i)$$

Da $(v_i \otimes v_j + v_j \otimes v_i)_{i \leq j}$ eine Basis von $Sym^2(V)$ ist, sind $(\lambda_i \lambda_j)_{i \leq j}$ die Eigenwerte von ρ_s eingeschränkt auf $Sym^2(V)$. Da $(v_i \otimes v_j - v_j \otimes v_i)_{i<j}$ eine Basis von $Alt^2(V)$ ist, sind $(\lambda_i \lambda_j)_{i<j}$ die Eigenwerte von ρ_s eingeschränkt auf $Alt^2(V)$. Damit gilt insgesamt für alle $s \in G$:

$$\chi_\alpha^2(s) = \sum_{i<j} \lambda_i \lambda_j = \frac{1}{2}(\sum_{i,j} \lambda_i \lambda_j - \sum_{i=1}^n \lambda_i^2) = \frac{1}{2}((\sum_{i=1}^n \lambda_i)^2 - \sum_{i=1}^n \lambda_i^2) = \frac{1}{2}(\chi_\rho(s)^2 - \chi_\rho(s^2))$$

$$\chi_\sigma^2(s) = \sum_{i \leq j} \lambda_i \lambda_j = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 + \frac{1}{2}((\sum_{i=1}^n \lambda_i)^2 - \sum_{i=1}^n \lambda_i^2) = \frac{1}{2}(\sum_{i=1}^n \lambda_i)^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 = \frac{1}{2}(\chi_\rho(s)^2 + \chi_\rho(s^2))$$

(iii) Die Behauptung folgt direkt aus Teil (i)+(ii). $\square$

Übung: Seien χ, χ' die Charaktere von zwei linearen Darstellungen der Gruppe G. Beweise die folgenden Formeln: $(\chi+\chi')^2_\sigma = \chi^2_\sigma + \chi'^2_\sigma + \chi\chi'$ und $(\chi+\chi')^2_\alpha = \chi^2_\alpha + \chi'^2_\alpha + \chi\chi'$

Beispiel: Charaktertafel der symmetrischen Gruppe S_4

Es gibt fünf irreduzible Darstellungen der Gruppe S_4:
(1) Die triviale Darstellung $\rho^1 : S_4 \to GL(\mathbb{C})$, $\sigma \mapsto Id_{GL(\mathbb{C})}$ ist irreduzibel.
(2) Die alternierende Darstellung $\rho^2 : S_4 \to GL(\mathbb{C})$, $\sigma \longmapsto \rho^2_\sigma$ mit $\rho^2_\sigma(v) = sgn(\sigma)\cdot v$ $\forall v \in \mathbb{C}$ ist irreduzibel.
(3) Betrachte die lineare Darstellung $\rho^{3^*} : S_4 \to GL(\mathbb{C}^4)$, $\sigma \mapsto \rho^{3^*}_\sigma$ mit $\rho^{3^*}_\sigma(v_1,v_2,v_3,v_4) = (v_{\sigma^{-1}(1)}, v_{\sigma^{-1}(2)}, v_{\sigma^{-1}(3)}, v_{\sigma^{-1}(4)})$. Diese Darstellung ist nicht irreduzibel, da span$\{\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}^T\}$ S_4-invariant ist. Wir können aber ein Komplement U von span$\{\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}^T\}$ in $\mathbb{C}^4$ finden, das auch S_4 invariant ist. Die Darstellung $\rho^3 : S_4 \to GL(U)$ ist dann irreduzibel.
(4) Die Tensorproduktdarstellung $\rho^4 = \rho^2 \otimes \rho^3 : G \to GL(\mathbb{C}\otimes U)$ ist irreduzibel.
(5) Die lineare Darstellung $\rho^5 : G \to GL(\mathbb{C}^2)$, die durch die Abbildungen $\rho^5_{(12)} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $\rho^5_{(23)} = \begin{pmatrix}-1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ und $\rho^5_{(34)} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ induziert wird, ist irreduzibel. (Da sich jedes Element aus S_4 durch ein Produkt aus den Transpositionen (12), (23) und (34) darstellen lässt, ist ρ^5 auf diese Weise eindeutig bestimmt.)

S_4 hat die fünf verschiedenen Konjugationsklassen $(1), (12), (123), (1234), (12)(34)$.
Da der Wert des Charakters für alle Elemente einer Konjugationsklasse gleich ist, reicht es für diese fünf Elemente von S_4 den Charakter der Darstellungen zu berechnen.
Wir erhalten die **Charaktertafel** von S_4:

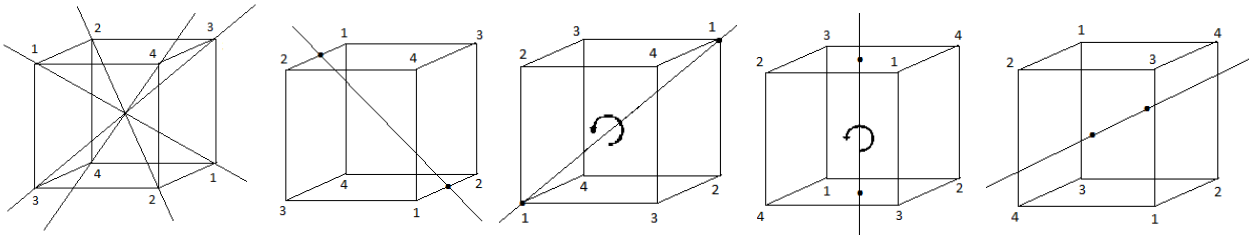
S_4	(1)	(12)	(123)	(1234)	(12)(34)
ρ^1	1	1	1	1	1
ρ^2	1	-1	1	-1	1
ρ^3	3	1	0	-1	-1
ρ^4	3	-1	0	1	-1
ρ^5	2	0	-1	0	2

Diese Tabelle gibt die Charaktere aller irreduziblen Darstellungen von S_4 an.
In den folgenden Vorträgen werden wir sehen, wie man dies beweisen kann.

Satz: Sei X eine endliche Menge und W ein $|X|$-dimensionaler Vektorraum mit Basis $(e_x)_{x\in X}$. Weiter wirke G auf X und ρ sei die zugehörige Permutationsdarstellung mit Charakter χ_X. Dann gibt $\chi_X(s)$ für jedes $s \in G$ die Anzahl der Elemente von X an, die bei der Wirkung von s auf X invariant bleiben.

Beweis: Die darstellende Matrix $(a_{yx})_{y,x\in X}$ von ρ_s erhält man durch $\rho_s(e_x) = \sum_{y\in X} a_{yx}e_y$.
Wegen $\rho_s(e_x) = e_{sx}$ gilt $a_{yx} = 1$ für $y = sx$ und $a_{yx} = 0$ für alle anderen $y \in X$.
Also gilt für die Elemente auf der Hauptdiagonalen von $(a_{yx})_{y,x\in X}$:
- $a_{xx} = 1$ für $x = sx$, d.h. falls x invariant unter der Wirkung von s ist
- $a_{xx} = 0$ für alle $x \in X$ mit $x \neq sx$, d.h. falls x nicht invariant unter der Wirkung von s ist $\square$

Beispiel: S_4 kann als die Gruppe der starren Bewegungen eines Würfels aufgefasst werden, d.h. die Gruppe S_4 wirkt auf der Menge der vier Hauptdiagonalen des Würfels.
Die Konjugationsklasse von (12) kann mit einer 180° Drehung um eine Linie zwischen zwei Mittelpunkten gegenüberliegender Kanten identifiziert werden.
Die Konjugationsklasse von (123) kann mit einer 120° Drehung um eine Linie zwischen zwei Eckpunkten identifiziert werden.
Die Konjugationsklasse von (1234) kann mit einer 90° Drehung um eine Linie zwischen zwei Mittelpunkten gegenüberliegender Flächen identifiziert werden.
Die Konjugationsklasse von (12)(34) kann mit einer 180° Drehung um eine Linie zwischen zwei Mittelpunkten gegenüberliegender Flächen identifiziert werden.



(12) (123) (1234) (12)(34)

Wir betrachten den Charakter χ_f der Permutationsdarstellung, die die Wirkung von S_4 auf die Flächen des Würfels betrachtet. Der Charakter gibt die Anzahl der Flächen an, die unter einer Bewegung des Würfels invariant bleiben, also erhalten wir:
$\chi_f((1)) = 6$, $\chi_f((12)) = 0$, $\chi_f((123)) = 0$, $\chi_f((1234)) = 2$, $\chi_f((12)(34)) = 2$

Übung: (a) Bestimme den Charakter χ_e der Permutationsdarstellung, die die Wirkung von S_4 auf die Eckpunkte des Würfels betrachtet.
(b) Bestimme den Charakter χ_k der Permutationsdarstellung, die die Wirkung von S_4 auf die Kanten des Würfels betrachtet.
(c) Zeige, dass χ_f auch der Charakter der Darstellung $\rho^1 \oplus \rho^4 \oplus \rho^5$ ist.

Bemerkung: (i) χ_e ist auch der Charakter der Darstellung $\rho^1 \oplus \rho^2 \oplus \rho^3 \oplus \rho^4$.
(ii) χ_k ist auch der Charakter der Darstellung $\rho^1 \oplus 2\rho^3 \oplus \rho^4 \oplus \rho^5$.