2.4 Zerlegung der regulären Darstellung

Notation: Die irreduziblen Charaktere von G seien mit $\chi_1, ..., \chi_h$ bezeichnet, ihre Grade $n_1, ..., n_h$ und $n_i = \chi_i(1)$ (Prop. 1).

Sei R die reguläre Darstellung von G. Dann gibt es eine Basis $(e_t)_{t \in G}$ sodass $\rho_s e_t = e_{st}$. Falls $s \neq 1$, so ist $st \neq t \; \forall t \in G$, somit sind die Diagonaleinträge von $\mathrm{mat}(\rho_s)$ null, also insbesodere $\mathrm{Tr}(\rho_s) = 0$. Gleichzeitig ist für s = 1

$$\mathrm{Tr}(\rho_s) = \mathrm{Tr}(1) = \dim(\mathrm{R}) = \mathrm{g}, \qquad \text{somit erhalten wir}$$

Proposition 5: Der Charakter r_G der regulären Darstellung ist gegeben durch

$$r_G(1) = \mathrm{g}, \quad \mathrm{g} = \mathrm{ord(G)}$$

$$r_G(\mathrm{s}) = 0, \quad \text{falls } s \neq 1.$$

Korollar 1: Jede irreduzible Darstellung W_i ist mit Vielfachheit n_i in der regulären Darstellung enthalten.

Beweis: Nach Satz 4 ist diese Vielfachheit gleich $\langle r_G, \chi_i \rangle$ und

$\langle r_G, \chi_i \rangle = 1/g \sum_{s \in G} r_G(s^{-1}) \chi_i(s) = (1/g) g \chi_i(1) = \chi_i(1) = n_i$

$\square$

Korollar 2:

a) Für die Grade n_i gilt $\sum_{i=1}^{h} n_i^2 = \mathrm{g}$,

b) für $s \in G, s \neq 1$ ist $\sum_{i=1}^{h} n_i \chi_i(\mathrm{s}) = 0$.

Beweis: Wir wenden Korollar 1 an: $r_G(s) = \sum_{i=1}^{h} n_i \chi_i(\mathrm{s}) \; \forall s \in G$.

Für s = 1 erhalten wir a), für $s \neq 1$ b).

$\square$

Bemerkung: Das obige Ergebnis kann benutzt werden, um die irreduziblen Darstellungen einer Gruppe G zu bestimmen. Angenommen, wir hätten paarweise nichtisomorphe Darstellungen mit Graden $n_1, ..., n_k$; damit sie bis auf Isomorphie die einzigen irreduziblen Darstellungen sind ist notwendig und hinreichend, dass $n_1^2 + ... + n_k^2 = \mathrm{g}$.

Beispiel: Betrachte für G die Gruppe der Permutationen von drei Buchstaben. Dann ist g = 6 und es gibt drei Klassen: Das Element 1, die drei Transpositionen und die zwei zyklischen Permutationen. Sei t eine Transposition, c eine zyklische Permutation. Dann ist $t^2 = 1$, $c^3 = 1$, $tc = c^2 t$, somit existieren nur zwei Charakter mit Grad 1: der Einheitscharakter χ_1 und der Charakter χ_2, der das Vorzeichen einer Permutation angibt. Nach Satz 7 existiert ein weiterer irreduzibler Charakter θ, für dessen Grad n muss gelten $1 + 1 + n^2 = 6$, somit n = 2. Die Werte von θ erhalten wir, da (nach

Prop. 5 (Kor1)) $\chi_1 + \chi_2 + 2\theta$ der Charakter der regulären Darstellung von G ist. Wir erhalten also die Charaktertabelle von G:

	1	t	c
χ_1	1	1	1
χ_2	1	-1	1
θ	2	0	-1

Wir erhalten eine irreduzible Darstellung mit Charakter θ, indem wir G die Koordinaten von Elementen aus $\mathbb{C}^3$ mit x+y+z = 0 permutieren lassen.

Übung: Zeigen Sie, dass jeder Charakter von G, der für alle $s \neq 1$ null ist, ein ganzzahliges Vielfaches von r_G ist.

2.5 Anzahl irreduzibler Darstellungen

Erinnerung: eine Funktion f auf G heißt Klassenfunktion, falls

$$f(tst^{-1}) = f(s) \; \forall t, s \in G.$$

Proposition 6:

Sei f eine Klassenfunktion auf G und $\rho : G \to GL(V)$ eine lineare Darstellung von G. $\rho_f : V \to V$ linear sei definiert durch

$$\rho_f = \sum_{t \in G} f(t)\rho_t.$$

Ist V irreduzibel, von Grad n und Charakter χ, so ist ρ_f eine Homothetie mit Faktor λ gegeben durch

$$\lambda = 1/n \sum_{t \in G} f(t)\chi(t) = g/n(f|\chi*).$$

Beweis: Wir berechnen $\rho_s^{-1}\rho_f\rho_s$. Es ist

$$\rho_s^{-1}\rho_f\rho_s = \sum_{t \in G} f(t)\rho_s^{-1}\rho_t\rho_s = \sum_{t \in G} f(t)\rho_{s^{-1}ts}.$$

Setze $u := s^{-1}ts$, dann haben wir

$$\rho_s^{-1}\rho_f\rho_s = \sum_{u \in G} f(sus^{-1})\rho_u = \sum_{u \in G} f(u)\rho_u = \rho_f.$$

Es ist also $\rho_f\rho_s = \rho_s\rho_f$. Mit dem Lemma von Schur (ii) folgt, dass ρ_f eine Homothetie λ ist. Die Spur von λ ist nλ, die von ρ_f ist

$$\sum_{t \in G} f(t)Tr(\rho_t) = \sum_{t \in G} f(t)\chi(t).$$

Somit

$$\lambda = 1/n \sum_{t\in G} f(t)\chi(t) = g/n(f|\chi*).$$

$\square$

Wir betrachten den Hilbertraum H der Klassenfunktionen auf G, die irreduziblen Charakter $\chi_1, ..., \chi_h$ gehören zu H.

Satz 6:

Die Charakter $\chi_1, ..., \chi_h$ bilden eine Orthonormalbasis von H.

Beweis: Satz 3 zeigt, dass die χ_i ein Orthonormalsystem bilden, es bleibt zu zeigen, dass sie H erzeugen. Dazu genügt es zu zeigen, dass jedes Element von H, das zu den $\chi_i{}^*$ orthogonal ist, Null ist. Sei nun f ein solches Element. Für jede Darstellung ρ von G setze $\rho_f = \sum_{t\in G} f(t)\rho_t$. Da f orthogonal zu den $\chi_i{}^*$ ist, folgt mit Prop. 6, dass ρ_f null ist, solange ρ irreduzibel ist; aus der direkten Summenzerlegung schließen wir, dass ρ_f immer null ist. Wenden wir dies auf die reguläre Darstellung R an und berechnen das Bild des Basisvektors e_1 unter ρ_f, so haben wir

$$\rho_f e_1 = \sum_{t\in G} f(t)\rho_t e_1 = \sum_{t\in G} f(t)e_t.$$

Da ρ_f null ist, haben wir $\rho_f e_1 = 0$ und die obige Gleichung zeigt, dass $f(t) = 0\ \forall t \in G$, somit $f = 0$ und die Behauptung ist gezeigt.

$\square$

Erinnerung: $t, t' \in G$ sind konjugiert zueinander, wenn $s \in G$ existiert, sodass $t' = sts^{-1}$, dies definiert eine Äquivalenzrelation, die G in Äquivalenzklassen, die sogenannten Konjugationsklassen zerfallen lässt.

Satz 7:

Die Anzahl irreduzibler Darstellungen von G (bis auf Isomorphie) ist gleich der Anzahl der Konjugationsklassen von G.

Beweis: Seien $C_1, ..., C_k$ die verschiedenen Klassen von G. Die Aussage, dass eine Funktion f auf G eine Klassenfunktion ist, ist gleichbedeutend damit, dass die auf jedem der $C_1, ..., C_k$ konstant ist. Daher ist sie durch ihre Werte λ_i auf den C_i festgelegt; diese können beliebig gewählt werden. Dementsprechend ist die Dimension des Raums H der Klassenfunktionen gleich k. Andererseits ist diese Dimension nach Satz 6 gleich der Anzahl der irreduziblen Darstellungen von G (bis auf Isomorphie). Das zeigt die Behauptung.

$\square$

Ein weiteres Resultat aus Satz 6:

Proposition 7:

Sei $s \in G$, $c(s)$ die Anzahl der Elemente in der Konjugationsklasse von s.

a) $\sum_{i=1}^{h} \chi_i(s)^*\chi_i(s) = g/c(s)$

b) Für alle $t \in G$ die nicht zu s konjugiert sind, ist $\sum_{i=1}^{h} \chi_i(s)^*\chi_i(t) = 0$.

Beweis: Sei f_s auf der Klasse von s gleich eins und sonst null. Da es eine Klassenfunktion ist, kann sie nach Satz 6

$$f_s = \sum_{i=1}^{h} \lambda_i \chi_i \text{ mit } \lambda_i = (f_s|\chi_i) = (c(s)/g)\chi_i(s)^*$$

geschrieben werden. Wir haben dann für jedes $t \in G$

$$f_s(t) = c(s)/g \sum_{i=1}^{h} \chi_i(s)^* \chi_i(t).$$

Dies liefert a) falls $t = s$, b) falls t nicht zu s konjugiert ist.

□

Beispiel: Charaktertafel von S_4 (Herleitung siehe Vortrag "Charakter: Grundlegende Definitionen"):

	(1)	(12)	(123)	(1234)	(12)(34)
ρ^1	1	1	1	1	1
ρ^2	1	-1	1	-1	1
ρ^3	3	1	0	-1	-1
ρ^4	3	-1	0	1	-1
ρ^5	2	0	-1	0	2
r_{S_4}	24	0	0	0	0

Dabei haben ρ^1, ρ^2 Grad 1, ρ^3, ρ^4 Grad 3 und ρ^5 Grad zwei, wir rechnen beispielhaft nach:

$1\rho^1(1) + 1\rho^2(1) + 3\rho^3(1) + 3\rho^4(1) + 2\rho^5(1) = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 3 \cdot 3 + 3 \cdot 3 + 2 \cdot 2 = 24 = r_{S_4}(1).$