6.3 Das Zentrum von $\mathbb{C}[G]$ - $Z(\mathbb{C}[G])$

Das ist die Menge von Elementen aus $\mathbb{C}[G]$.

$$Z(\mathbb{C}(G)) = \{z \in G: gz = zg \text{ für alle } g \in G\}$$

Die Elemente aus $Z(\mathbb{C}[G])$ kommutieren mit allen Elementen aus $\mathbb{C}[G]$.

$Z(\mathbb{C}[G])$ ist ein kommutativer Ring, d.h. $(Z.(\mathbb{C}(G)), +, *)$, mit Assoziativ-, Kommutativ- und Distributivgesetzen, neutralen Elementen.

Proposition 1. Sei c eine Konjugationsklasse von G. Wir setzen $e_c = \sum_{s \epsilon c} s$ und zeigen, dass e_c eine Basis für den Zentrum von $\mathbb{C}[G]$ bildet.

Beweis:

$" \Rightarrow " \ \forall\, g \in G \ gilt$

$ge_cg^{-1} = \sum_{s \in C} gsg^{-1} = \sum_{s' \in C} s'$, da sie Elemente aus den gleichen Klasse

$" \Leftarrow "$ Sei $x = \sum_{g \in G} a_g g \ \in \mathbb{C}[G]$

$$\text{Zu zeigen: } g \backsim g' (konjugiert) \Longrightarrow \ a_g = a_{g'}$$

$g = sg's^{-1}$

$sxs^{-1} = x$ (da es $sx = xs$ gilt)

$sxs^{-1} = \sum_{h \in G} a_h shs^{-1} = \sum_{h \in G} a_{s^{-1}hs} h = \sum_{h \in G} a_h h$

$a_g = a_{s^{-1}gs} = a_{g'}$ ■

Damit hat der Zentrum von G $Z(\mathbb{C}[G])$ die Dimension n, wo n ist die Anzahl von Klassen von G.

Sei

$$\rho_i \ : G \ \to GL(W_i)$$

eine Darstellung einer endlichen Gruppe G und χ_i der Charakter und n_i die Ordnung von ρ_i . Zusätzlich, sei $\rho_i' \ : \mathbb{C}[G] \to End(W_i)$ ein entsprechender Algebra Homomorphismus.

Proposition 2. Der Homomorphismus ρ_i' bildet $Z(\mathbb{C}[G])$ auf die Vielfacher von Identität ab und definiert einen Algebra Homomorhismus

$$\omega_i \ : Z(\mathbb{C}[G]) \ \to \mathbb{C}$$

Wenn $u = \sum u(s)s$ ist ein element von $Z(\mathbb{C}[G])$, haben wir

$$\omega_i\ (u) = \frac{1}{n_i} Tr_{W_i}(\rho'(u)) = \frac{1}{n_i}\sum_{s\in G} u(s)\chi_i(s)$$

Bemerkung: Die Konjugationsklassen sind die Äquivalenyklassen, nämlich zwei Elemente $x, y \in G$ sind also konjugiert, wenn es ein $a \in G$ gibt mit $x = aya^{-1}$. Die Summe der Anzahl der Elemente in den Konjugationsklassen ist daher gleich der Ordnung von G. Die einelementigen Konjugationsklassen entsprechen dabei den Elementen im Zentrum der Gruppe, d.h. jedes Element in $Z(\mathbb{C}[G])$ bildet eine 1-elementige Konjugationsklasse.

Proposition 3. Die Familie $(\omega_i)_{1\leq i\leq h}$ definiert den Isomorphismus

$$Z(\mathbb{C}[G]) \to \mathbb{C}^h = \mathbb{C} \times \ldots \times \mathbb{C}$$

Beweis: Wenn wir $\mathbb{C}[G]$ mit dem Produkt von $End(W_i)$ bezeichnen, d.h.

$$\mathbb{C}[G] = End(W_i) \times \ldots \times End(W_i)$$

Das Zentrun von $\mathbb{C}[G]$ ist jetzt ein Produkt von Zentren von $End(W_i)$. Aber das Zentrum von $End(W_i)$ isomorph zu $\mathbb{C}$. Somit bekommen wir ein Isomorphismus $Z(\mathbb{C}[G]) \to \mathbb{C} \times \ldots \times \mathbb{C}$.■

6.4 Haupteigenschaften von den ganzen Zahlen

Motivation: Wir wissen, dass Charaktere spielen eine wichtige Rolle, aber wir wissen nicht welchen Wert können sie annehmen. Zur Beschreibung des Wertes von Charakteren brauchen wir arithmetischen Mitteln. Der Dualismus zwischen den Konjugationsklasse einererseits, und den irreduziblen Charakteren andererseits, durchzieht durch die ganze Theorie von Darstellung endlchen Gruppen. Weil $s^g = 1$ für alle $s \in G$, ist jeder Charakterwert Summe von g-ten Einheitswurzeln, also ganz-algebraisch. Es stellt sich heraus, dass $\frac{g}{\chi_1}$ ganz-algebraisch, d.h. aber, dass der Grad einer irreduzieblen Darstellung Teiler der Gruppenordnung ist. Das werden wir am Ende des Vortrages beweisen.

Sei R ein kommuttativer Ring und sei $x \in R$. Wir sagen, dass x ist eine ganze Zahl über $\mathbb{Z}$, wenn es eine ganze Zahl $n \geq 1$ und Elemente $a_1, \ldots, a_n$ von $\mathbb{Z}$ gibt, so dass

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0.$$

Somit folgt die **Definition**: Eine komplexe Zahl $x \in \mathbb{C}$ heißt *ganz-algebraisch*, wenn x Nullstelle eines normiertes Polynoms aus ℤ[x] ist. Die Begriffe *ganz-algebraishe Zahl* und *eine ganze Zahl über* ℤ *ist* sind äquivalent.

Beispiele:

- Sei $n \geq 2$ eine ganze Zahl. Dann ist die n-te Einheitswurzel $\varsigma_n = e^{2\pi i/n}$ ganz-algebraisch, ebenso alle Elemente des Rings $\mathbb{Z}[\varsigma_n]$.
- $i \in \mathbb{C}$ ist ganz-algebraisch, denn $x^2 + 1 \in \mathbb{Z}[x]$ ist normiert und hat Nullstelle *i*.
- $\sqrt{2}$ ist ganz-algebraisch, denn $x^2 - 2 \in \mathbb{Z}[x]$ ist normiert und hat Nullstelle $\sqrt{2}$.

Proposition 4. Eine rationale Zahl ist genau dann ganz-algebraisch, wenn sie ganz ist.

" ⇐ " jede ganze Zahl ist ganz-algebraisch.

" ⇒ " zz: eine rationale Zahl ist ganz-algebraisch ⇒ sie ist eine ganze Zahl

Sei $\alpha \in \mathbb{Q} \backslash \mathbb{Z}$, dann gibt es $p \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{N}$ mit $\alpha = \frac{p}{q}$. Insbesondere können wir ohne Einschränkungen *p* und *q* so wählen, dass *p* und *q* Teilerfremd sind (sonst kürze den Bruch). Angenommen, es gebe ein normiertes Polynom

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$$

mit $f(\alpha) = 0$, dann erhielten wir durch Multiplizieren mit q^n

$$f(q) = 0 \quad \Leftrightarrow \left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \cdots + a_1\left(\frac{p}{q}\right) + a_0 = 0$$

$$\Leftrightarrow \; p^n + p^{n-1}q a_{n-1} + \cdots + p q^{n-1} a_1 + q^n a_0 = 0$$

Also wäre p^n durch q teilbar. Das ist ein Widerspruch zur Teilerfremdheit von *p* und q.■

Proposition 5. Sei R ein kommutativer Ring. $x \in R$ ist genau dann ganz, wenn der von *x* erzeugte Unterring $\mathbb{Z}[x]$ in R als ℤ-Modul endlich erzeugt ist.

Beweis:

" ⇒ " Aus $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$ folgt

$\mathbb{Z}[x] = \mathbb{Z}x^{n-1} + \mathbb{Z}x^{n-2} + \cdots + \mathbb{Z}$

" ⇐ " Jedes Element von $\mathbb{Z}[x]$ hat die Form P(x), wobei P(x) ein Polynom in $\mathbb{Z}[x]$ ist. Sei nun $\mathbb{Z}[x] = \sum_{i=1}^{m} \mathbb{Z} * P_i(x)$, mit $P_i(x) \in \mathbb{Z}[x]$ und sei $n \in \mathbb{N}$ größer als das

Maximum der Grade von $P_i(x), \dots, P_m(x)$. Zu $x^n \in \mathbb{Z}[x]$ gibt es $b_i, \dots, b_m \in \mathbb{Z}$, so dass $x^n = \sum_{i=1}^{m} b_i P_i(x)$ ist.■

Für die nächte Proposition benutzen wir ohne Beweis, der Fakt, dass Untermoduln von endlich erzeugten $\mathbb{Z}$-Moduln auch endlich erzeugt sind.

Proposition 6. Ist $S \subset R$ ein Unterring, der als $\mathbb{Z}$-Modul endlich erzeugt ist, dann ist jedes Element von *S* ganz.

Beweis: Sei $r \in S$. $\mathbb{Z}[r]$ ist ein Unternmodul von *S*. Wie oben gezeigt, ist $\mathbb{Z}[r]$ endlich erzeugt über $\mathbb{Z}$ und damit *r* ganz.■

Die Menge aller ganz-algebraischen Zahlen bildet einen Ring, d.h. Summe und Produkte ganz-algebraischer Zahlen sind wieder ganz-algebraisch.

Satz. Die ganze Elemente über $\mathbb{Z}$ eines kommutativen Rings *R* bilden einen Unterring von *R*.(d.h. die Menge der ganz-algebraischen Zahlen über $\mathbb{Z}$ ist ein Ring)

Beweis: Sei $x, y \in R$**.** Wenn x, y ganze Zahlen über $\mathbb{Z}$, somit ganz-algebraisch. Die Ringe $\mathbb{Z}[x]$ und $\mathbb{Z}[y]$ sind endlich erzeugt über $\mathbb{Z}$**,** und dann jedes Element dieses Rings auch ganz algebraisch. Das gleiche gilt für deren Tensor Produkt $\mathbb{Z}[x] \otimes \mathbb{Z}[y]$ und deren Bild $\mathbb{Z}[x, y]$ liegt in **R.** Somit sind alle Elemente aus $\mathbb{Z}[x, y]$ ganze Zahlen über $\mathbb{Z}$ (ganz-algebraische Zahlen). Insbesondere sind auch $-x, x + y$ und xy ganz-algebraisch.■

Proposition 7. Sei $\rho: G \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ eine Darstellung einer endlichen Gruppe G und χ der Charakter von ρ. Dann sind alle Werte $\chi(x), x \in G$, ganz-algebraische Zahlen.

Beweis: Da G endlich ist, hat jedes Element $x \in G$ endliche Ordnung, d.h. es gibt eine positive Zahl m mit $x^m = 1$. Daraus folgt $\rho(x)^m = E$ und für alle Eigenwerte λ von $\rho(x)$ gilt ebenfalls $\lambda^m = 1$, also ist λ ganz-algebraisch. Da $\chi(x) = Tr(\rho(x))$ die Summe der Eigenwerte von $\rho(x)$ (mit Vielfachheiten) ist, ist auch $\chi(x)$ ganz-algebraisch.■

6.5 Anwendungen

Proposition 8. Sei $u = \sum u(s)s$ ein Element von $Z(\mathbb{C}[G])$ so dass $u(s)$ eine algebraische ganze Zahl. Dann ist u ganz-algebraisch.

Sei $c_i \, (1 \leq i \leq h)$ eine Konjugationsklasse von G und sei $e_i = \sum_{s \in c_i} s$. Für $s_i \in c_i$ können wir schreiben u als $u = \sum_{i=1}^{i=h} u(s_i) e_i$. Wir zeigen, dass e_i ist eine ganze Zahl über $\mathbb{Z}$**.** Das ist offensichtlich, da jedes Produkt $e_i e_j$ ist eine lineare Kombination mit Koefizienten in $\mathbb{Z}$ von e_k. Die Untergruppe $R = \mathbb{Z}e_i \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}e_h$ von $Z(\mathbb{C}[G])$ ist somit ein Unterring. Da der Unterring endlich über $\mathbb{Z}$ erzeugt, ist jedes Element ganz-algebraisch. ■

Korollar 1. Sei ρ eine irreduzible Darstellung von G mit dem Grad n und $\chi: G \to \mathbb{C}$ der Charakter von ρ. Wen u ganz-algebraisch, dann ist die Zahl $\left(\frac{1}{n}\right) \sum_{s \in G} u(s)\chi(s)$ auch eine ganz-algebraische Zahl.

Beweis: Diese Zahl ist Bild von u unter dem Homomorphismus

$$\omega_i \ : Z(\mathbb{C}[G]) \ \to \mathbb{C}$$

und ist mit der Abbilding $\rho_i: \mathbb{C}[G] \to End(W_i)$ verknüpft.

Da u is eine ganze Zahl über $\mathbb{Z}$, gilt es auch für deren Bild unter ω. ■

Korollar 2. Der Grad jeder irreduziblen Darstellung $\rho: G \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ einer endlichen Gruppe ist ein Teiler der Gruppenordnung |G|.

Beweis: Sei g eine Ordnung von G. Sei χ Charakter von ρ. Nach dem Korollar 1 sind die Zahlen $\left(\frac{1}{n}\right) \sum_{s \in G} u(s)\chi(s)$ ganz-algebraisch. Da auch $\chi(s^{-1})$ ganz algebraisch ist (es ist erlaubt, da χ Klassenfunktion ist), folgt dass auch

$$\frac{1}{n} \sum_{s \in G} \chi(s^{-1})\chi(s) = \frac{g}{n} < \chi, \chi > = \frac{g}{n}$$

ganz-algebraisch ist. Da $\frac{g}{n}$ offensichtlich rational ist, muss $\frac{g}{n}$ sogar ganz sein, d.h. n ist ein Teiler von g. ■