# PROSEMINAR DARSTELLUNGEN ENDLICHEN GRUPPEN: LÖSUNG 1

LOUIS-HADRIEN ROBERT

**Übung 0.1.** Erklären Sie, wie man den Begriff von äußerer direkter Summe durch einer universellen Eigenschaft definieren kann.

Seien $V_1$ und $V_2$ zwei Vektorräume. Eine *Direkte Summe* ist ein Triple $(W, \varphi_1, \varphi_2)$ wobei $Z$ ein Vektorraum ist und $\varphi_1 : V_1 \to W$ und $\varphi_2 : V_2 \to W$, so dass für alle Vektorraum $Z$ und alle lineare Abbildungen $f_1 : V_1 \to Z$ und $f_2 : V_2 \to Z$ eine eindeutige linear Abbildung $\widehat{(f_1, f_2)} : W \to Z$ existiert, so dass die zwei folgende Diagramme kommutieren.

$$\begin{tikzcd} V_1 \arrow[r, "\varphi_1"] \arrow[d, "f_1"'] & W \arrow[dl, dashed, "\widehat{(f_1,f_2)}"] \\ Z & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} V_1 \arrow[r, "\varphi_2"] \arrow[d, "f_2"'] & W \arrow[dl, dashed, "\widehat{(f_1,f_2)}"] \\ Z & \end{tikzcd}$$

Das bedeutet dass, $f_1 = \widehat{(f_1, f_2)} \circ \phi_1$ und $f_2 = \widehat{(f_1, f_2)} \circ \phi_2$ gelten.

Wenn eine direkte Summme $(W, \varphi_1, \varphi_2)$ von $V$ und $W$ existiert, gilt $\widehat{(\varphi_1, \varphi_2)} = \mathrm{id}_W$.

**Behauptung.** *Seien $V_1$ und $V_2$ zwei Vektorräume und $(W, \varphi_1, \varphi_2)$ und $(W', \varphi'_1, \varphi'_2)$ zwei Direkte Summe von $V_1$ und $V_2$ (für $W'$, schreiben wir $\widetilde{(\bullet, \bullet)}$ statt $\widehat{(\bullet, \bullet)}$)). Es existiert ein eindeutiges Isomorphismus $\psi : W \to W'$, so dass die folgende Diagramme kommutieren.*

$$\begin{tikzcd} V_1 \arrow[r, "\varphi_1"] \arrow[d, "\varphi'_1"'] & W \arrow[dl, dashed, "\psi"] \\ W' & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} V_2 \arrow[r, "\varphi_2"] \arrow[d, "\varphi'_2"'] & W \arrow[dl, dashed, "\psi"] \\ W' & \end{tikzcd}$$

*Beweis.* Um $\psi$ zu definieren, spielen wir mit der universelle Eigenschaft: Wir wissen, dass $(W, \varphi_1, \varphi_2)$ eine direkte Summe ist, und dass $\varphi_1$ und $\varphi_2$ lineare Abbildungen sind. Deswegen existiert eine eindeutig linear Abbildung $\psi : W \to W'$, so dass die vorherige Diagramme kommutieren (wir haben $\psi = \widehat{(\varphi'_1, \varphi'_2)})$. Das ist noch nicht klar, dass $\psi$ ein Isomorphismus ist. Wir können anderes Rum spielen und eine linear

Abbildung $\psi' : W' \to W$ durch $\psi' := (\widetilde{\varphi_1, \varphi_2})$ definieren, so dass

$$\begin{tikzcd}
V_1 \arrow[r, "\varphi_1"] \arrow[d, "\varphi_1'"'] & W \\
W' \arrow[ur, dashed, "\psi'"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
V_2 \arrow[r, "\varphi_2"] \arrow[d, "\varphi_2'"'] & W \\
W' \arrow[ur, dashed, "\psi'"'] &
\end{tikzcd}$$

Wir betrachten die folgende Diagramme:

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[dr, "\psi"'] & V_1 \arrow[l, "\varphi_1"'] \arrow[r, "\varphi_1"] \arrow[d, "\varphi_1'"'] & W \\
& W' \arrow[ur, "\psi'"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
W \arrow[dr, "\psi"'] & V_2 \arrow[l, "\varphi_2"'] \arrow[r, "\varphi_2"] \arrow[d, "\varphi_2'"'] & W \\
& W' \arrow[ur, "\psi'"'] &
\end{tikzcd}$$

Es gilt: Das bedeutet dass, $\psi' \circ \psi \circ \varphi_1 = \psi' \circ \varphi_1' = \varphi_1$ und $\psi' \circ \psi \circ \varphi_2 = \psi' \circ \varphi_2' = \varphi_2$ gelten. Deswegen gilt $\psi' \circ \psi = \widehat{\varphi_1, \varphi_2} = \mathrm{id}_W$. Die Symmetrie zwischen $W$ und $W'$ gibt: $\psi \circ \psi' = \widetilde{\varphi_1', \varphi_2'} = \mathrm{id}_{W'}$. Deswegen ist $\psi$ ein Isomorphismus. □

**Behauptung.** *Seien $V_1$ und $V_2$ zwei Vektorräume. Es existiert eine Direkte Summe.*

*Beweis.* Seien $(e_i)_{i\in I}$ und $(d_j)_{j\in J}$ Basen von $V_1$ und $V_2$. Wir betrachten den Vektorraum $W$ mit Basis $(e_i^W)_{i\in I} \cup (d_j^W)_{j\in J}$ und die linear Abbildungen $\phi_1 : V_1 \to W$ und $\phi_2 : V_2 \to W$ definiert durch:

$$\phi_1(e_i) = e_i^W \quad \text{für jedes } i \text{ aus } I \text{ und} \quad \phi_1(d_j) = d_j^W \quad \text{für jedes } j \text{ aus } J.$$

Sei $Z$ ein Vektorraum. Seien $f_1 : V_1 \to Z$ und $f_2 : V_2 \to Z$ zwei lineare Abbildungen. Wir wollen $(\widehat{f_1, f_2})$ basteln. Für jedes $i$ in $I$ muss $(\widehat{f_1, f_2})(e_i^W) = f_1(e_i)$ gelten und jedes $j$ in $J$ muss $(\widehat{f_1, f_2})(d_j^W) = f_2(d_j)$ gelten. Diese Bedingung definieren eine eindeutige lineare Abbildung $(\widehat{f_1, f_2}) : W \to Z$, weil $(e_i^W)_{i\in I} \cup (d_j^W)_{j\in J}$ eine Basis von $W$ ist. Sei $x$ ein Element aus $V_1$. Wir können Koeffizienten[1] $(\lambda_i)_{i\in I}$, so dass $x = \sum_{i\in I} \lambda_i e_i$ gilt. Es gilt:

$$\begin{aligned}
(\widehat{f_1, f_2}) \circ \phi_1(x) = (\widehat{f_1, f_2}) \circ \phi_1 \left( \sum_{i\in I} \lambda_i e_i \right) &= \sum_{i\in I} \lambda_i (\widehat{f_1, f_2}) \circ \phi_1(e_i) \\
&= \sum_{i\in I} \lambda_i (\widehat{f_1, f_2}) \circ (e_i^W) = \sum_{i\in I} \lambda_i f_1(e_i) = f_1 \left( \sum_{i\in I} \lambda_i e_i \right) = f_1(x).
\end{aligned}$$

Die Symmetrie zwischen $V_1$ und $V_2$ gibt $(\widehat{f_1, f_2}) \circ \phi_2(y) = f_2(y)$ für jedes $y$ aus $V_2$. Deswegen erfüllt $(\widehat{f_1, f_2})$ die Eigenschaft, wir wollten. Und $(w, \phi_1, \phi_2)$ eine direkte Summe ist.

□

Universität Hamburg, Bundesstrasse 55, 20146 Hamburg, Deutschland
*E-mail address*: louis-hadrien.robert@uni-hamburg.de

[1] Nur endliche davon sind nicht null.