DARSTELLUNGEN ENDLICHEN GRUPPEN: LÖSUNG 3

Übung 1. Wir betrachten die Darstellung $\rho : \mathfrak{S}_4 \to GL(\mathbb{C}^4)$, die durch

$$\rho_\sigma\left(\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} z_{\sigma^{-1}(1)} \\ z_{\sigma^{-1}(2)} \\ z_{\sigma^{-1}(3)} \\ z_{\sigma^{-1}(4)} \end{pmatrix}$$

definiert ist. Der Untervektorraum

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^4 \,\middle|\, z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 0 \right\}$$

ist ein Unterdarstellung. Ist diese Unterdarstellung irreduzibel?

Ja, V ist irreduzibel. Die Dimension von V ist gleich 3, weil

- das Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ nicht in V ist. Deswegen gilt $\dim V < \dim \mathbb{C}^4 = 4$.
- die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ in V und linear unabhängig sind. Deswegen gilt $\dim V \geqslant 3$.

Wir machen ein Widerspruchsbeweis und wir nehmen an, dass V redduzibel ist. Denn können wir V zerelgen als direkte Summe von zwei nicht-trivialen Darstellungen V_1 und V_2. Die dimension von V_1 oder die Dimension von V_2 muss gleich 1 sein. Wir können annehmen, dass $\dim V_1 = 1$ gilt. Sei $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix}$ ein Erzeuger von V_1. Der Vektorraum V_1 ist ein Unterdarstellung von $(\mathbb{C}^4, \rho)$. Deswegen sind die Vektoren

$$\rho_{(1\,2)}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_2 \\ z_1 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix}, \ \rho_{(1\,3)}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_3 \\ z_2 \\ z_1 \\ z_4 \end{pmatrix} \text{ und } \rho_{(1\,4)}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_4 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_1 \end{pmatrix}$$

auch in V_1 und sind nicht null (weil ρ_σ in $GL(\mathbb{C}^4)$ ist für alle σ in $\mathfrak{S}^4$). Deswegen sind alle alle diese Vektoren (nicht trivial) Vielfacher ein von einander (weil $\dim V_1 = 1$ gilt). Daraus folgt, dass z_1, z_2, z_3 und z_4 nicht null sind. Daraus folgt, dass sind alle gleich sind. Insbesondere gilt $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 4z_1 \neq 0$. Aber V_1 ist ein Unterraum von V. Wiederspruch. Wir haben gezeigt, dass V irreduzibel ist.