Analyse combinatoire

Mathématiques Générales B
Université de Genève

Sylvain Sardy

6 mars 2008

Le but de l'analyse combinatoire (techniques de dénombrement) est d'apprendre à compter le nombre d'éléments d'un ensemble fini de grande cardinalité.

Notation : la cardinalité d'un ensemble Ω, notée $\mathrm{card}(\Omega) = |\Omega| = \#\Omega$, est le nombre d'éléments contenus dans l'ensemble Ω.

1. Principe de multiplication

Permet de compter le nombre de résultats d'expériences qui peuvent se décomposer en une succession de sous-expériences.

Principe : suppose qu'une expérience est la succession de m sous-expériences. Si la $i$ème expérience a n_i résultats possibles pour $i = 1, \ldots, n$, alors le nombre total de résultats possibles de l'expérience globale est

$$n = \Pi_{i=1}^{m} n_i = n_1 n_2 \ldots n_m.$$

Exemple : Vous achetez une valise à code 4 chiffres. Combien de possibilités avez-vous de choisir un code ?

Réponse : $m = 4$ avec $n_1 = 10$, $n_2 = 10$, $n_3 = 10$, $n_4 = 10$, donc le nombre total de code possible est $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^4$.

Exemple : les plaques minéralogiques aux U.S.A. sont formées de 3 lettres, suivies de 3 chiffres.

– Quel est le nombre de plaques minéralogiques possibles ?

– Quel est le nombre de plaques qui commencent par la lettre U ?

2. Permutations

Définition : une permutation de n éléments distincts $e_1, \ldots, e_n$ est un réarrangement ordonné, sans répétition de ces n éléments.

Exemple : "a", "b" et "c" sont trois éléments. Les arrangements possibles sont

$$abc, acb, bac, bca, cab, cba.$$

Le nombre d'arrangements est donc 6.

Notation : La fonction 'factorielle' est la fonction de domaine $\mathcal{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ qui a tout $n \in \mathcal{N}$ associe $n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.

Ainsi $0! = 1$, $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$, $\ldots$, $10! = 3'628'800$.

Le nombre de permutations de n éléments distincts est $n!$.

Démonstration : par application du principe de multiplication à une expérience à n étapes :

– 1ère étape : $n_1 = n$ choix possibles.
– 2ème étape : $n_2 = (n-1)$ choix possibles.
– $\ldots$
– $n$ième étape : $n_n = 1$ choix possible.

Exemple : 4 Américains, 5 Suisses et 7 japonais doivent s'asseoir sur un même banc, et doivent rester groupés par nationalité. Combien y a-t-il de dispositions possibles ?

Réponse : $3!4!5!7!$.

Définition : Un arrangement est une permutation de k éléments pris parmi n éléments distincts ($k \leqslant n$). Les éléments sont pris sans répétition et sont ordonnés.

Notation : le nombre de permutations de k parmi n est noté $A_{n,k}$.

Exemple : les arrangements de 2 éléments pris dans $\{1, 2, 3, 4\}$ sont

$$\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 1\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 1\}, \{3, 2\}, \{3, 4\}, \{4, 1\}, \{4, 2\}, \{4, 3\}.$$

Il y en a 12.
Peut-on trouver une formule pour compter le nombre d'arrangements ?

Il s'agit encore du principe de multiplication à une expérience à k étapes :
- 1ère étape : $n_1 = n$ choix possibles.
- 2ème étape : $n_2 = (n-1)$ choix possibles.
- $\ldots$
- $k$ième étape : $n_k = (n-k+1)$ choix possible.

Donc :

$$\begin{aligned} A_{n,k} &= n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1) \\ &= n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1) \frac{(n-k)(n-k-1) \cdots 2 \cdot 1}{(n-k)(n-k-1) \cdots 2 \cdot 1}. \end{aligned}$$

Le nombre d'arrangements est :

$$A_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Exemple : Combien de mots de 3 lettres distinctes peuvent être formés dans un alphabet de 26 lettres ?

Réponse : $A_{26,3} = (26)(25)(24) = 15'600$.

Exemple : Combien de mots de 3 lettres peuvent être formés dans un alphabet de 26 lettres ?

Réponse : $26^3 = 17'576$, naturellement plus de possibilité qu'avec les arrangements.

3. Combinaisons et coefficients binomiaux

Définition : Un combinaison de k éléments pris dans un ensemble à n éléments distincts est un sous-ensemble à k éléments de cet ensemble. Les éléments sont pris sans répétition et ne sont pas ordonnés.

Notation : le nombre de combinaisons de k parmi n est noté $C_{n,k}$ ou $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$, qui est appelé coefficient binomial.

Exemple : les combinaisons de 2 éléments pris dans $\{1, 2, 3, 4\}$ sont

$$\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}.$$

Il y en a 6.
Peut-on trouver une formule pour compter le nombre de combinaisons ?

Dans un sous-ensemble, les éléments ne sont pas ordonnés, au contraire d'un arrangement.

Par conséquence, à chaque sous-ensemble correspond $k!$ arrangements, donc :

$$\begin{aligned} C_{n,k} &= \frac{A_{n,k}}{k!} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!}. \end{aligned}$$

Exemple : on a 15 médicaments et on veut tester leur compatibilité en groupe de 4. Combien y a-t-il de groupes possibles ?

Réponse : $C_{15,4} = \frac{15!}{4!11!} = 1'365$ possibilités.

Propriétés :

- $C_{n,k} = C_{n,n-k}$
- Formule de récurrence $C_{n,k} = C_{n-1,k-1} + C_{n-1,k}$.
  Démonstration : Soit $\Omega = \{w_1, \dots, w_n\}$. Le nombre $C_{n,k}$ est le nombre de sous-ensembles de Ω de cardinalité k. Soit Ω_k cet ensemble de sous-ensembles ; il se décompose en l'union de deux ensembles disjoints :

$$\Omega_k = \Omega_{k,w_1=a} \bigcup \Omega_{k,w_1 \neq a}$$

  Or $|\Omega_k| = |\Omega_{k,w_1=a}| + |\Omega_{k,w_1 \neq a}| - |\Omega_{k,w_1=a} \bigcap \Omega_{k,w_1 \neq a}|$.
  Donc $|\Omega_k| = C_{n-1,k-1} + C_{n-1,k} - 0$. $\square$

- Le triangle de Pascal est une conséquence de la formule de récurrence :

$$\binom{0}{0}$$

$$\binom{1}{0} \qquad \binom{1}{1}$$

$$\binom{2}{0} \qquad \binom{2}{1} \qquad \binom{2}{2}$$

$$\binom{3}{0} \qquad \binom{3}{1} \qquad \binom{3}{2} \qquad \binom{3}{3}$$

etc...

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
\vdots & & & & \vdots & & & & \vdots
\end{array}$$

– Combien y a-t-il de sous-ensembles d'un ensemble de cardinalité n ?

$$\begin{array}{ccccc} \{ & e_1, & e_2, & \dots, & e_n & \} \\ & \left(\begin{array}{c}\text{oui}\\ \text{non}\end{array}\right) & \left(\begin{array}{c}\text{oui}\\ \text{non}\end{array}\right) & \dots & \left(\begin{array}{c}\text{oui}\\ \text{non}\end{array}\right) & \end{array}$$

soit un total de 2^n sous-ensembles.

– Le binôme de Newton : $(x_1 + x_2)^n = \sum_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right) x_1^k x_2^{n-k}$.

4. Coefficients multinomiaux

Le but est de découper un ensemble de n éléments en r sous-ensembles de tailles $n_1, n_2, \ldots, n_r$, tels que $n_1 + n_2 + \ldots + n_r = n$, et de déterminer le nombre de découpages possibles.

Exemple : L'ensemble $\{1, 2, 3, 4\}$ en 3 sous-ensembles de tailles 2, 1 et 1.

$$\{(1,2),3,4\},\{(1,2),4,3\},\{(1,3),2,4\},\{(1,3),4,2\},\{(1,4),2,3\},\{(1,4),3,2\},$$

$$\{(2,3),1,4\},\{(2,3),4,1\},\{(2,4),1,3\},\{(2,4),3,1\},\{(3,4),1,2\},\{(3,4),2,1\}.$$

Il y en a 12.
Peut-on trouver une formule pour compter le nombre de découpage ?

On applique le principe de multiplication :

- il y a C_{n,n_1} choix pour le premier sous-ensemble

- il y a C_{n-n_1,n_2} choix pour le deuxième sous-ensemble

- il y a $C_{n-n_1-\ldots-n_{r-1},n_r}$ choix pour le $r$ième sous-ensemble

Soit au total :

$$\begin{aligned}
& C_{n,n_1} \cdot C_{n-n_1,n_2} \cdots C_{n-n_1-\ldots-n_{r-1},n_r} \\
= \quad & \frac{n!}{n_1!(n-n_1)!} \cdot \frac{(n-n_1)!}{n_2!(n-n_1-n_2)!} \cdots \frac{(n-(n_1-\cdots-n_{r-1}))!}{n_r!(n-(n_1-\cdots-n_r))!} \\
= \quad & \frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_r!} =: \left(\begin{array}{c} n \\ n_1, n_2, \cdots, n_r \end{array} \right).
\end{aligned}$$

Propriétés :

– Quand $r = 2$, on retrouve le coefficient binomial puisque

$$\binom{n}{k, n-k} = \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

– Théorème multinomial

$$(x_1 + \cdots + x_r)^n = \sum_{n_1,\ldots,n_r : \sum_{i=1}^{r} n_i = n} \binom{n}{n_1, n_2, \cdots, n_r} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_r^{n_r}.$$

Exemple : Quatre joueurs Georges, Jacques, Tony et Angela reçoivent 13 cartes d'un jeu de 52. Combien y a-t-il de répartitions possibles des cartes entre ces 4 joueurs ?

Réponse : $\left(\begin{array}{c} 52 \\ 13, 13, 13, 13 \end{array} \right) = \frac{52!}{(13!)^4} \approx 5.36 \cdot 10^{28}$.

Exemple : Une usine délocalise et envoie les employés d'un bureau d'étude de 23 personnes dans un bureau de 13 personnes en Chine, et deux bureaux de 5 pesonnes en Pologne et Irlande. Combien de groupes peuvent être formés ?

Réponse : $\left(\begin{array}{c} 23 \\ 13, 5, 5 \end{array} \right)$.

4. Applications

P1 : Quatre couples doivent être assis dans une rangée de 8 chaises. Combien y a-t-il de façon de le faire si :

- Il n'y a pas de contraintes.
  R : $8! = 40'320$

- Les hommes doivent rester ensemble et les femmes aussi.
  R : $2(4!)^2 = 1'152$

- Les hommes doivent rester ensemble.
  R : $5 \cdot (4!)^2 = 2'880$

- Chaque couple marié doit rester ensemble.
  R : $2^4 \cdot (4!) = 384$

P2 : Combien de mots différents (qui ont un sens ou non) peut-on former avec les lettres des mots suivants ?

- vélos
- papier
- banane
- minimum

P3 : on verra que, pour des évènements élémentaires équiprobables, la probabilité d'un évènement G est donnée par :

$$\mathrm{P}(G) = \frac{\text{Nombre de cas favorables pour G}}{\text{nombre de cas possibles}}.$$

Exemple : on lance une pièce de monnaie équitable deux fois de suite. Quelle est la probabilité que deux résultats soient identiques ?

R : L'univers (ensemble des cas possibles) de l'expérience est

$$\Omega = \{(P, P), (P, F), (F, P), (F, F)\}.$$

Donc $|\Omega| = 4$.
L'ensemble "les deux résultats sont identiques" est

$$G = \{(P, P), (F, F)\},$$

de cardinalité $|G| = 2$.
Donc la probabilité que deux résultats soient identiques est

$$\mathrm{P}(G) = \frac{|G|}{|\Omega|} = \frac{2}{4} = 0.5$$

Exemple : Il y a n personnes dans une classe. Quelle est la probabilité de l'évènement $G =$ "au moins deux personnes ont le même anniversaire" ?

R : L'univers est

$$\Omega = \{1, 2, \ldots, 365\}^n$$

de cardinalité $|\Omega| = 365^n$.
Plutôt que de travailler avec l'ensemble G, travaillons avec son complémentaire $G^c =$ "les n anniversaires sont distincts".
Cet ensemble a pour cardinalité $|G^c| = A_{365,n}$, donc

$$\mathrm{P}(G^c) = \frac{A_{365,n}}{365^n},$$

et par conséquent $\mathrm{P}(G) = 1 - \mathrm{P}(G^c) = 1 - \frac{A_{365,n}}{365^n}$.

Q : Cette formule marche-t-elle pour $n > 365$?
Q : A partir de quelle valeur de n cette probabilité est supérieure à 0.5 ?

Exemple : On répète n fois le lancer de deux dés. Calculer la probabilité que le 6 apparaisse au moins une fois. Quelle valeur donner à n pour que cette probabilité atteigne 1/2 ?

La probabilité que le 6 n'apparaisse pas est $5^2/6^2$ pour un jet.

Par le principe de multiplication, la probabilité que le 6 n'apparaisse pas dans n jets est $(5^2/6^2)^n$.

Donc la probabilité que le 6 apparaisse au moins une fois dans n jets est

$$1 - (5/6)^{2n}.$$

Pour que cette probabilité soit supérieure à 1/2, il faut que $n \geqslant ?$.